بسم الله الرحمن الرحیم

کتاب کار دانش‌آموز

ریاضی۳ (پودمانی)

کلیهٔ رشته‌های زمینهٔ صنعت

و

رشتهٔ کامپیوتر زمینهٔ خدمات

شاخهٔ آموزش فنی وحرفه‌ای

شمارهٔ درس ۱۵۱۵

عنوان و نام پدیدآور	:	کتاب کار دانش‌آموز ریاضی ۳ (پودمانی) کلیهٔ رشته‌های زمینهٔ صنعت و رشتهٔ کامپیوتر، زمینهٔ خدمات، شاخهٔ فنی‌وحرفه‌ای [کتاب‌های درسی] :شمارهٔ درس ۱۵۱۵/ برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش؛[برای] وزارت آموزش و پرورش، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی؛مؤلفان :سیّداحمد سادات‌حسینی، سیّدمرتضی رضوی.
مشخصات نشر	:	تهران : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۹۳.
مشخصات ظاهری	:	۲۷۱ص.
شابک	:	۶ ـ ۱۳۷۷ ـ ۰۵ ـ ۹۶۴
وضعیت فهرست‌نویسی	:	فیپا
موضوع	:	ریاضیات
شناسه افزوده	:	۱ـ سادات‌حسینی، سیّداحمد، ۱۳۴۷. ، ۲ـ رضوی، سیّدمرتضی
شناسه افزوده	:	الف ـ سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. ب ـ دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش. ج ـ اداره کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی. د ـ شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
رده‌بندی کنگره	:	QA ۱۳۹/ ک۲۲۴۴ ۱۳۹۲
رده‌بندی دیویی	:	۳۷۳ ک ۱۵۱۵ ۱۳۹۳
شماره کتاب‌شناسی ملی	:	۳۱۱۹۹۲۹

۱۳۹۳

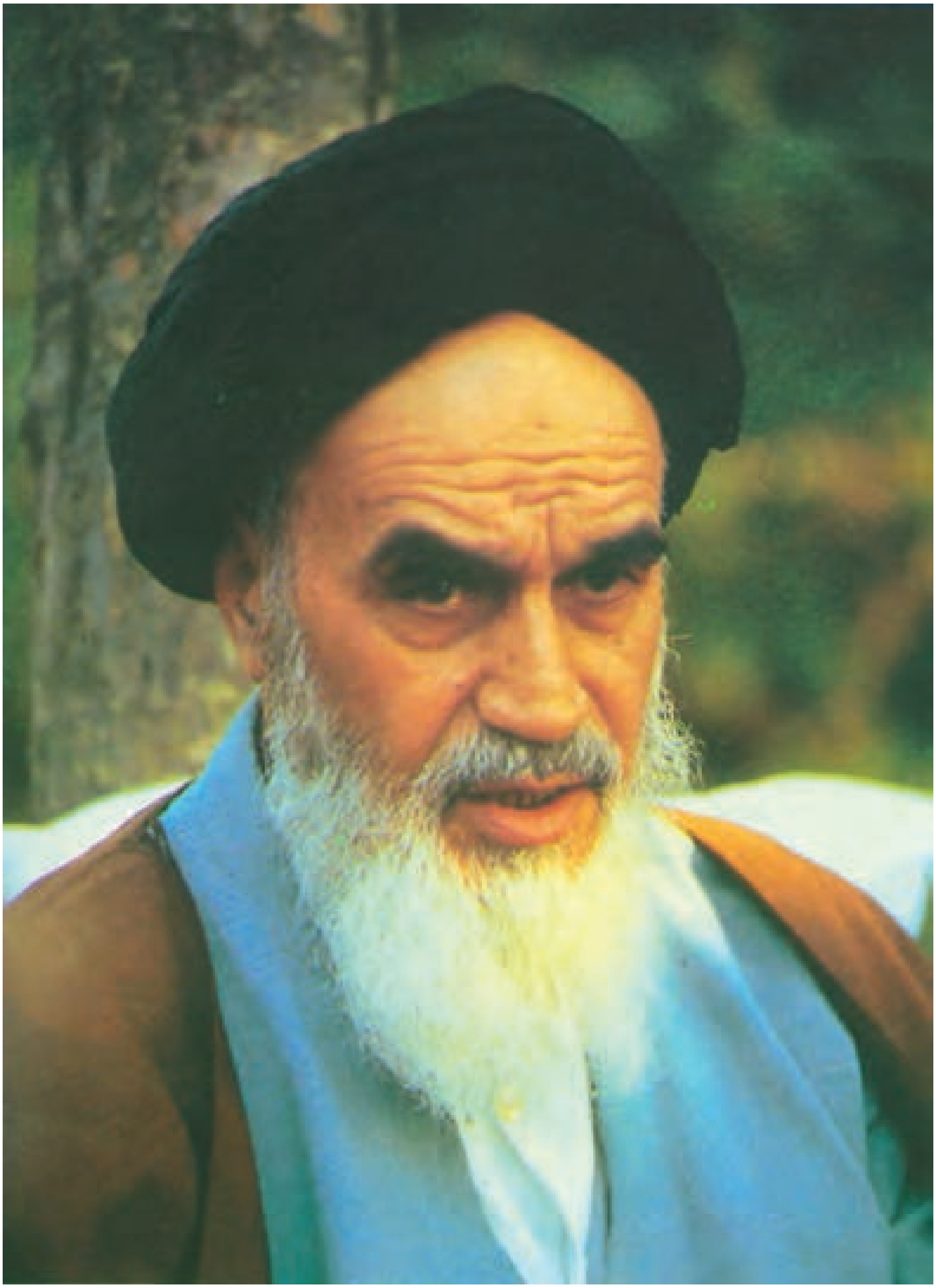
همکاران محترم و دانش‌آموزان عزیز :
پیشنهادات و نظرات خود را دربارهٔ محتوای این کتاب به نشانی تهران ـ صندوق پستی شمارهٔ ۴۸۷۴/۱۵ دفتر تألیف‌کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش، ارسال فرمایند.
پیام‌نگار (ایمیل) **troccd@roshd.ir**
وب‌گاه (وب سایت) **www.troccd.medu.ir**

محتوای این کتاب براساس نظرهای دریافت شده در همایش دبیران محترم و سرگروه‌های آموزش استان‌های کشور، در محل آموزشکدهٔ انقلاب اسلامی (مردادماه ۱۳۸۵)، توسط کارشناس رشتهٔ ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش اصلاح و بازسازی شده است.

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش**
نام کتاب : **کتاب کار دانش‌آموز ریاضی ۳ (پودمانی) ـ ۴۵۰/۷**
مؤلفان : **سیّداحمد سادات حسینی، سیّدمرتضی رضوی**
آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی**
تهران : خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن : ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،
وب‌سایت : **www.chap.sch.ir**
رسام : **مریم دهقان‌زاده**
صفحه‌آرا : **طرفه سهائی**
طراح جلد : **علیرضا رضائی‌کُر**
ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**
تلفن : ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار : ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی : ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»**
سال انتشار و نوبت چاپ : **چاپ نهم ۱۳۹۳**

شابک ۶-۱۳۷۷-۰۵-۹۶۴ ISBN 964-05-1377-6



شما عزیزان کوشش کنید که از این وابستگی بیرون آیید و احتیاجات کشور خودتان را برآورده سازید، از نیروی انسانی ایمانی خودتان غافل نباشید و از اتّکای به اجانب بپرهیزید.

امام خمینی «قدّس سرّه الشّریف»

فهرست مطالب

پیشگفتار

یکی از گران‌بهاترین دست‌آوردهای بشری که عمری به درازای عمر بشر دارد ریاضیات است.

این علم در ابتدا جنبه‌ی کاملاً عملی داشت. مطالعه در سرگذشت تمدن‌های قدیمی نظیر مصر و سومر مؤید این سخن است. اما بعدها بشر به جنبه نظری آن نیز توجه کرد. به‌طور مثال یونانی‌ها جنبه‌ی نظری ریاضی را بر جنبه‌های عملی ترجیح می‌دادند. امروزه ریاضیات در تمام علوم نظری و عملی مورد استفاده قرار می‌گیرد.

برای درک بیش‌تر مفاهیم ریاضی، روش حل مسئله می‌تواند بسیار راهگشا باشد. از این‌رو کتاب حاضر در راستای کتاب ریاضی ۳ پودمانی تهیه شده است، با توجه به تجربه‌ای که مؤلفان طی سال‌ها تدریس در هنرستان‌های فنی و حرفه‌ای اندوخته‌اند، برای یادآوری مهارت‌های لازم جهت درک بهتر مسایل که همواره فراروی دانش‌آموزان است. بخش اوّل با عنوان «یادآوری و تکمیل» نگارش شده است.

به دانش‌آموزان گرامی توصیه می‌شود قبل از مطالعه‌ی کتاب ریاضی ۳ پودمانی این بخش را مطالعه نمایند. سپس بعد از خواندن هر مبحث و موضوع از کتاب ریاضی ۳ پودمانی موضوع نظیر آن را در این کتاب مطالعه نمایند.

از دبیران و هنرآموزان عزیز و سایر صاحب‌نظران درس ریاضی تقاضا داریم نظرات اصلاحی خود را جهت رفع اشکالات و هرچه بهترشدن محتوای داخلی این کتاب در چاپ‌های بعدی به نشانی سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای و کاردانش (صندوق پستی ۴۸۷۴,۱۵) ارسال نمایند.

در خاتمه بر خود لازم می‌دانیم که از همکاری آقایان ابوالقاسم جاریانی، عبدالمجید خاکی صدیق، جمشید علی‌محمدی و احمدرضا دوراندیش به خاطر راهنمایی‌های سازنده‌شان نهایت تشکر را داشته باشیم.

مؤلفان

هدف کلی کتاب

تشریح مفاهیم تابع، حد، پیوستگی، مشتق و کاربردهای آن به‌منظور

۱ــ توانایی‌بخشیدن به هنرجویان در مدل‌سازی پدیده‌های ساده به زبان ریاضی ؛

۲ــ بررسی روش‌های پاسخ‌گویی به سؤال‌ها و مسائل مربوط.

جدول عناوین بخش‌ها

شماره‌ی بخش	عنوان بخش
بخش اول	یادآوری و تکمیل
بخش دوم	تابع و مفاهیم آن
بخش سوم	حدّ و پیوستگی
بخش چهارم	مشتق و کاربردهای آن

بخش اول

یادآوری و تکمیل

هدف کلی بخش

آشنایی با معادله، روش حل معادله، تعیین علامت معادله‌ها، حل نامعادله

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	حل معادله
دوم	تعیین علامت و حل نامعادله و قدرمطلق

بخش اول

فصل اول

حل معادله

هدف کلی

بیان مفاهیم مربوط به معادله و روش‌های حل آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ معادله و متغیر آن را تعریف کند ؛

۲ــ درجه‌ی معادله را تشخیص دهد ؛

۳ــ معادله‌های هم‌ارز را تعریف کند ؛

۴ــ معادلات درجه اول و دوم را حل کند.

پیش آزمون (۱)

۱ــ اگر $A - \{\square۱,۲,۵\}$ دامنه‌ی متغیر x باشد مجموعه‌ی جواب‌های معادله‌ی $x^{۲} - ۵x = ۰$ را بیابید.

۲ــ در خط D به معادله‌ی $y = ۳x + ۵$ ،

الف) کدام یک از دو نقطه‌ی $(۰,۵)$ و $(-۱,۲)$ روی خط D قرار دارد؟

ب) خط D را رسم کنید.

۳ــ درجه‌ی معادله‌های زیر را تعیین کنید :

الف) $۷x + x^{۳} - ۲x^{۲} = ۲x^{۲} + ۵$

ب) $x^{۵} + ۴x = ۰$

۴ــ معادله‌های زیر را حل کنید :

الف) $-۵x + ۴ = ۰$

ب) $x^{۲} - ۵x + ۴ = ۰$

۵ــ نمودار تابع روبه‌رو را رسم کنید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱)

$f(x) = ۳x^{۲} - ۴x + ۱$

۱ــ۱ــ حل معادله

بسیاری از مسایل روزمره را می‌توان به کمک زبان ریاضی به‌صورت ساده بیان کرد. یکی از ابزارهای این زبان معادله است. در این بخش به بیان بعضی مفاهیم اوّلیه پیرامون معادله و روش‌های حل برخی مسایل به کمک معادله می‌پردازیم.

۱ــ۱ــ۱ــ متغیر: هر نماد یا حرف که جانشین اعضای مجموعه‌ی مشخصی می‌گردد متغیر نامیده می‌شود.

دامنه‌ی متغیر: اعضای مجموعه‌ی مشخص فوق را دامنه‌ی متغیر می‌نامند.

هرگاه در یک عبارت چند جمله‌ای دامنه‌ی متغیر بیان نشده باشد، مجموعه‌ی اعداد حقیقی دامنه‌ی آن خواهد بود (جدول ۱ــ۱).

جدول ۱ــ۱

عبارت	متغیر	دامنه‌ی متغیر
$۵x$	x	$\mathbb{R}$
$۲n-۱$	n	$\mathbb{R}$
$۳x^{۲}+۶y$	x و y	$\mathbb{R}$
$۲k$	k	$\mathbb{R}$

۲ــ۱ــ۱ــ معادله: اگر هر تساوی، شامل یک یا چند متغیر، به‌ازای بعضی از مقادیر که جانشین متغیر شوند، درست و به‌ازای بقیه‌ی مقادیر نادرست باشد آن تساوی را معادله می‌گویند. مجموعه‌ی مقادیری از دامنه‌ی متغیر که معادله را به یک تساوی تبدیل می‌کند مجموعه‌ی جواب‌های معادله است.

مثال ۱: الف) $۳x+۳=۰$ ب) $۵z+۲ - \square ۳z+۷$

ج) $y+\frac{x}{۳}=۷x$ د) $z^{۲}+۵z+۶=۰$

هـ) $\frac{x+۱}{۶}-\frac{۳x+۷}{۵}=۱+\frac{x}{۲}$

و) $t^{۳}-۹t=۰$ ز) $\frac{۵k+۱}{۴}=\frac{-۷k+۳}{۵}$

ح) $۲x^{۲}+۵x+۸=۰$

ط) $۲\sin x-۱=۰$

مثال ۲: اگر $A - \{\square ۱,۰,۱\}$ ، دامنه‌ی متغیر x از معادله‌ی $x^{۲}-۲x=۰$ باشد، مجموعه‌ی جواب های آن را بیابید.

مراحل حل:

اگر $x - \square ۱$ باشد، داریم :

$(-۱)^{۲}-۲(-۱)=۱+۲=۳$

$\Rightarrow ۳\neq ۰$

پس $x - \square ۱$ جواب معادله نیست.

اگر $x=۰$ باشد، داریم :

$(۰)^{۲}-۲(۰)=۰$

$\Rightarrow ۰=۰$

پس $x=۰$ جواب معادله است.

اگر $x=۱$ باشد، داریم :

$۱^{۲}-۲(۱)=۱-۲$

$-\square ۱\neq ۰$

پس $x=۱$ جواب معادله نیست.

بنابراین $x=۰$ جواب معادله است، پس مجموعه جواب $\{\}$ است.

تمرین

۱ــ اگـــر $A=\{۱,۲,۴\}$ ، دامنـه‌ی متغیرهــای x، z از معادله‌های زیرباشند، مجموعه‌ی جواب آن‌ها را بیابید.

۱ــ $x^{۲}+۵x-۶=۰$

۲ــ $z^{۲}=۵z-۴$

۳ــ۱ــ۱ــ درجه‌ی معادله: پس از ساده‌کردن معادله بزرگ‌ترین توان مجهول معادله درجه‌ی آن معادله، نامیده می‌شود.

مثال ۱:

الف) $۳x+۱=۰$

ب) $x+x^{۷}-۹=۰$

ج) $(x+۳)^{۲}-(x-۳)^{۲}=۰$

مثال الف یک معادله‌ی درجه اول است.

مثال ب یک معادله‌ی درجه هفت است.

مثال ج یک معادله‌ی درجه اول است. زیرا پس از ساده‌کردن بزرگ‌ترین توان مجهول معادله، یک است.

$\cancel{x^{۲}}+۶x+\cancel{۹}-\cancel{x^{۲}}+۶x-\cancel{۹}\Rightarrow ۱۲x=۰$

۴ــ۱ــ۱ــ دو معادله‌ی هم ارز: دو معادله‌ی چند جمله‌ای هم‌درجه را هم‌ارز گوییم در صورتی که دامنه‌ی متغیر و مجموعه جواب آن‌ها یکی باشد.

مثال ۲: دو معادله‌ی الف و ب هم‌ارزند، زیرا دامنه‌ی متغیر هردوی آن‌ها اعداد حقیقی و مجموعه‌ی جواب آن‌ها $\{-۱\}$ است.

الف) $۲x-\square۲$ ب) $۵x+۷=۳x+۵$

۵ــ۱ــ۱ــ حل معادله‌ی درجه اول: منظور از حل معادله پیداکردن مجموعه‌ی جواب‌های معادله است.

$ax+b=۰$ ، $a\neq ۰$

مجموعه جواب $-\left\{\square\frac{b}{a}\right\}$

برای این کار معادله‌ای هم‌ارز با معادله‌ی اول پیدا می‌کنیم که مجموعه‌ی جواب‌های آن خیلی ساده تعیین شود. برای این کار از راه‌های زیر می‌توانیم استفاده کنیم.

الف) به دو طرف معادله یک عبارت جبری اضافه یا کم کنیم.

$ax+b=۰$ ، $a\neq ۰$

$ax+b+(-b)=۰+(-b)$

$\Rightarrow ax-\square b$

$\Rightarrow \frac{ax}{a}=\frac{-b}{a}$

$\Rightarrow x=\frac{-b}{a}$

ب) دو طرف معادله را در عددی غیرصفر ضرب یا بر آن تقسیم کنیم.

نکته: با توجه به الف می‌توان نتیجه گرفت که :

$ax+b=۰$

$\Rightarrow ax-\square b$

۱ــ با انتقال هر جمله از یک طرف معادله به طرف دیگر علامت آن تغییر می‌کند.

۲ــ از دو طرف یک معادله جملات مساوی را می‌توان حذف کرد.

مانند $x+\cancel{۵}=\cancel{۵}\Rightarrow x=۰$

مثال ۳: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$۵x+۷=۳x+۵$

مراحل حل: جملات مجهول را به یک طرف و جملات معلوم را به‌طرف دیگر معادله می‌بریم.

$$۵x - ۳x = ۵ - ۷ \Rightarrow (۵ - ۳)x - \square ۲$$

با تقسیم دو طرف معادله بر ۲ داریم :

$$\Rightarrow ۲x - \square ۲$$
$$\Rightarrow ۲x - \square ۲ \Rightarrow x - \square ۱$$

مثال ۴: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\frac{۲x+۱}{۳} + \frac{x}{۲} = \frac{x-۱}{۵}$$

مراحل حل: مجهول‌ها را به یک طرف و معلوم‌ها را به طرف دیگر انتقال می‌دهیم.

$$\frac{۲x}{۳} + \frac{x}{۲} - \frac{x}{۵} = \frac{-۱}{۵} - \frac{۱}{۳}$$
$$(\frac{۲}{۳} + \frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۵})x = \frac{-۱}{۵} - \frac{۱}{۳}$$

از دو طرف مخرج مشترک می‌گیریم

$$(\frac{۲۰}{۳۰} + \frac{۱۵}{۳۰} - \frac{۶}{۳۰})x = \frac{-۳}{۱۵} - \frac{۵}{۱۵}$$

$$\Rightarrow \frac{۲۹}{۳۰}x = \frac{-۸}{۱۵} \Rightarrow x = \frac{-\frac{۸}{۱۵}}{\frac{۲۹}{۳۰}} = \frac{-۸ \times ۳۰}{۱۵ \times ۲۹}$$

با تقسیم دو طرف تساوی بر $\frac{۲۹}{۳۰}$ داریم :

$$\Rightarrow x = \frac{-۱۶}{۲۹}$$

مثال ۵: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$(x+۳)^۲ - (x-۵)^۲ = ۰$$

مراحل حل: به کمک اتحاد مربع، معادله را ساده می‌کنیم.

$$x^۲ + ۲(x)(۳) + ۳^۲ - (x^۲ - ۲(x)(۵) + ۵^۲) = ۰$$
$$\Rightarrow x^۲ + ۶x + ۹ - x^۲ + ۱۰x - ۲۵ = ۰$$
$$\Rightarrow ۱۶x - ۱۶ = ۰ \Rightarrow ۱۶x = ۱۶ \Rightarrow x = ۱$$

یادآوری

اتحاد مربع

$$(a \pm b)^۲ = a^۲ \pm ۲ab + b^۲$$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$x^۳ + ۷x + ۴ = x^۳ + ۴x$$

مراحل حل: از دو طرف معادله جمله‌های مساوی را حذف می‌کنیم :

$$\Rightarrow ۷x + ۴ = ۴x$$

معلوم‌ها را به یک طرف و مجهول‌ها را به طرف دیگر انتقال می‌دهیم :

$$۷x - ۴x - \square ۴ \Rightarrow ۳x - \square ۴ \Rightarrow x = \frac{-۴}{۳}$$

فعالیت ۱ــ۱

الف) معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$1)\ \left(\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{5}{7}-\frac{1}{3}}+\frac{\frac{4}{9}-2}{\frac{7}{6}}\right)x=\left(\frac{-\frac{7}{5}+\frac{1}{6}}{\frac{11}{5}}-\frac{\frac{4}{3}+1}{\frac{1}{6}-\frac{5}{2}}\right)$$

ب) مربع‌های خالی روبه‌رو را تکمیل کنید.

$$\left(\frac{-\frac{8}{3}}{\frac{\square}{21}}+\frac{\frac{\square}{9}}{\frac{7}{6}}\right)x=\left(\frac{\frac{\square}{30}}{\frac{11}{5}}-\frac{\frac{\square}{3}}{\frac{\square}{6}}\right)$$

ج) با جایگذاری عدد مناسب، معادله روبه‌رو را کامل کنید.

$$\Rightarrow\left(\frac{\bigcirc}{\bigcirc}+\frac{\bigcirc}{\bigcirc}\right)x=\left(\frac{\bigcirc}{\bigcirc}-\frac{\bigcirc}{\bigcirc}\right)$$

د) با جایگذاری عدد مناسب به جای مثلث و مستطیل‌ها جواب نهایی را بیابید.

$$\Rightarrow \triangle x=\square \quad \Rightarrow x=\square$$

$$2)\ \frac{\frac{8}{3}-2+\frac{1}{3}}{-4+\frac{3}{4}+\frac{5}{2}}x=\frac{\frac{3}{7}-\frac{2}{5}+1}{\frac{3}{2}-\frac{4}{7}-1}$$

مستطیل‌ها، دایره و مثلث خالی را تکمیل کنید.

$$\frac{\frac{\square}{6}}{\frac{\square}{4}}x=\frac{\frac{\square}{35}}{\frac{\square}{14}}\Rightarrow \bigcirc\, x=\triangle$$

به جای مستطیل عدد مناسب بگذارید.

$$\Rightarrow x=\square$$

نکته: برای حل معادلات کسری نخست بهتر است با ضرب‌کردن تمامی جملات در کوچک‌ترین مضرب مشترک‌تمامی مخرج‌ها، مخرج کسرها را از بین ببریم و سپس معادله را حل کنیم.

مثال ۶: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$\frac{2x-1}{5}-\frac{x-2}{3}=\frac{x+1}{2}$$

حل: ابتدا دو طرف معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک اعداد ۲، ۳ و ۵، یعنی عدد ۳۰ ضرب می‌کنیم.

حل

$$30\left(\frac{2x-1}{5}-\frac{x-2}{3}=\frac{x+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 6(2x-1)-10(x-2)=15(x+1)$$

$$\Rightarrow (12x-6)-10x+20=15x+15$$

$$\Rightarrow 2x+14=15x+15\Rightarrow 2x-15x=15-14$$

دو طرف تساوی را بر عدد ۱۳- تقسیم می‌کنیم، پس :

$$-\square\ ۱۳x = ۱ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۱۳}$$

مثال ۷: معادله‌ی روبه رو را حل کنید.

$$\frac{x}{۲} - \frac{x-۱}{۳} = \frac{x+۳}{۶}$$

با ضرب‌کردن دو طرف تساوی در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک،م،م) اعداد ۲، ۳ و ۶ یعنی ۶ داریم :

$$۶(\frac{x}{۲} - \frac{x-۱}{۳}) = ۶(\frac{x+۳}{۶}) \Rightarrow$$

$$۳x - ۲(x-۱) = x + ۳ \Rightarrow ۳x - ۲x + ۲ = x + ۳$$

چون تساوی روبه‌رو غیرممکن است، پس معادله‌ی اولیه نیز غیرممکن یا ممتنع می‌باشد.

$$\Rightarrow x + ۲ = x + ۳ \Rightarrow ۲ = ۳$$

تمرین

۱ــ با تکمیل جاهای خالی معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

(راهنمایی : همواره داریم $a^{۰} = ۱، a \neq ۰ \in R$)

$$\left(۴^{۲} - ۴(-۲)(-۳)\right)x = \frac{۲^{۰} + ۱^{۲} + ۰^{۲}}{۱ - ۲(-۳)}$$

$$\Rightarrow \square\ x = \frac{\square}{\square} \Rightarrow \bigcirc\ x = \triangle$$

$$\Rightarrow x = \square$$

۲ــ معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{۲-x}{۱۱} + \frac{x+۳}{۱۱} = ۷x + ۱$

۲) $\frac{x+۷}{۵} = ۲ - \frac{۱-x}{۳}$

۳) $\frac{۵z-۲}{۴} = \frac{-۷z+۳}{۳}$

۴) $(۲t-۳)^{۲} - ۴t^{۲} + ۸ = ۱۲$

تعبیر هندسی حل معادله‌ی درجه اول

فعالیت ۲ــ۱

با تکمیل جدول ۲ــ۱ نمودار خط y = ۲x + ۱ را رسم کنید.

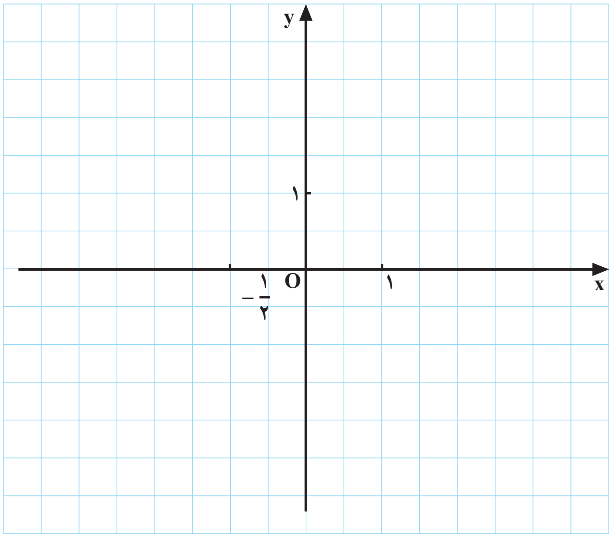
الف) برای رسم خط، حداقل چند نقطه نیاز داریم؟

ب) طول نقطه‌ی برخورد خط با محور xها چند می‌باشد؟

ج) آیا نقطه‌ی برخورد خط با محور xها، جواب معادله‌ی ۰ = ۲x + ۱ می‌باشد؟

جدول ۲ــ۱

x	۰	□
y	□	۰



نمودار ۱ــ۱

فعالیت ۳ــ۱

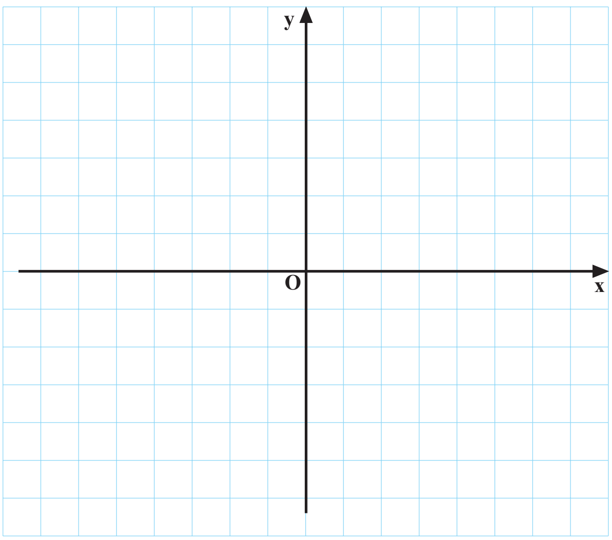
با تکمیل جدول ۳ــ۱ نمودار خط y − □۳x + ۲ را رسم کنید.

الف) با توجه به شکل، جواب معادله‌ی ۱□ − ۲ + ۳x− را بیابید.

ب) آیا نقطه‌ی (۱,۵−) بر روی خط y − □۳x + ۲ قرار دارد؟ چرا؟

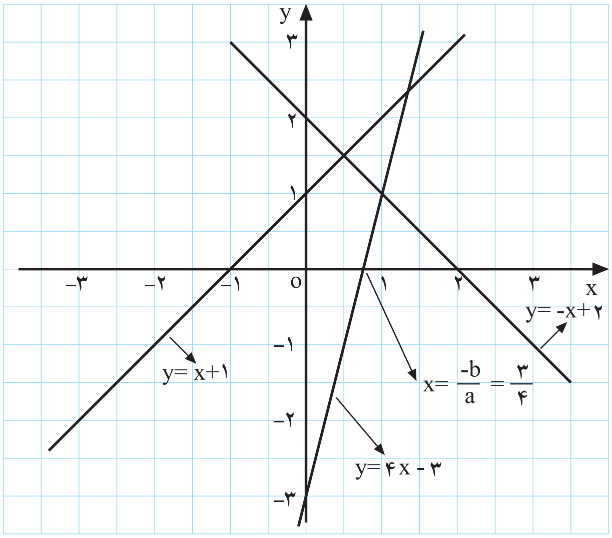
جدول ۳ــ۱

x	۰	□
y	□	۰



نمودار ۲ــ۱

نتیجه: هر معادله که پس از ساده‌کردن به‌صورت $a \neq ۰$ ، $ax + b = ۰$ تبدیل شود، معادله‌ی درجه اول نامیده می‌شود. ریشه‌ی این معادله طول محل تلاقی خط $y = ax + b$ با محور xها می باشد $\left(x - \frac{b}{a}\right)$ (شکل ۳ــ۱).



نمودار ۳ــ۱

کاربرد معادله‌ی درجه اول در حل مسائل: معمولاً برای حل مسائل ابتدا یک حرف به عنوان متغیر برای مجهول مسئله در نظر می‌گیریم و سپس صورت مسئله را به شکل معادله می‌نویسیم، به نحوی که ریشه‌ی آن معادله جواب مسئله است.

مثال ۱: عددی به‌دست آورید که مربع آن از مربع عدد بعدی ۲۱ واحد کم‌تر باشد.

شکل ۴ــ۱

مراحل حل: اگر عدد مورد نظر را x بگیریم عدد بعدی $x+۱$ خواهد بود ؛ پس مربع آن‌ها برابر است با :

$x^۲$ و $(x+۱)^۲$

بنابراین :

$$x^۲ = (x+۱)^۲ - ۲۱ \Rightarrow \cancel{x^۲} = \cancel{x^۲} + ۲x + ۱ - ۲۱$$

$$\Rightarrow ۲x - ۲۰ = ۰ \Rightarrow x = ۱۰$$

مثال ۲: ۴۷۰۰۰ ریال را بین سه نفر چنان تقسیم کنید که اولی ۱۰۰۰۰ ریال بیش‌تر از دومی و دومی ۸۰۰۰ ریال بیش‌تر از سومی داشته باشد.

مراحل حل: اگر پول سومی را x ریال بگیریم پول دومی $x+۸۰۰۰$ ریال و پول اولی برابر با :

$$x + ۸۰۰۰ + ۱۰۰۰۰ = x + ۱۸۰۰۰$$

نخست مسئله را به‌صورت معادله می‌نویسیم :

$$x + ۱۸۰۰۰ + (x + ۸۰۰۰) + x = ۴۷۰۰۰$$

با حل این معادله‌ی درجه‌ی اول داریم :

$$۳x + ۲۶۰۰۰ = ۴۷۰۰۰ \Rightarrow$$

ــ سهم نفر سوم ؛

$$۳x = ۴۷۰۰۰ - ۲۶۰۰۰ = ۲۱۰۰۰ \Rightarrow x = ۷۰۰۰$$

ـ سهم نفر دوم ؛

$$7000+8000=15000$$

ـ سهم نفر اول ؛

$$15000+10000=25000$$

مثال ۳: سن پدری ۲۴ سال است. سن او شش برابر سن فرزندش می‌باشد. چند سال دیگر سن پدر سه برابر سن فرزندش می‌شود؟

مراحل حل: سال مورد نظر را x می‌گیریم. سن پدر بعد از x سال :

$$24+x$$

سن پدر ۲۴ سال

سن فرزند $\frac{24}{6}=4$ سال

ـ سن فرزند بعد از x سال

$$4+x$$

بنابر صورت مسئله داریم :

$$24+x=3(4+x)\Rightarrow 24+x=12+3x$$

$$\Rightarrow x-3x=12-24 \Rightarrow -2x=-12$$

$$\Rightarrow x=6$$

پس از ۶ سال سن پدر ۳ برابر سن فرزندش می‌شود (سن پدر ۳۰ سال و سن فرزند ۱۰ سال است).

مثال ۴: پدری با فرزندش قرار گذاشت که اگر در هر نوبت بیش از ۱۰۰ بار بدون توقف طناب بزند ۸۰۰۰ امتیاز پاداش بگیرد، و در غیر این صورت ۵۰۰۰ امتیاز از وی کسر شود. پس از گذراندن ۸ مرحله فرزند ۳۸۰۰۰ امتیاز دریافت کرد، مشخص کنید که در چند نوبت موفق بوده است.

ـ بیان مسئله به‌صورت معادله :

حل:

تعداد موفقیت :	x
کل امتیاز به‌دست آمده :	$8000x$
امتیاز از دست‌داده :	$5000(8-x)$

با توجه به صورت مسئله داریم :

مجموع امتیاز به‌دست‌آمده = مجموع امتیاز از دست‌داده + ۳۸۰۰۰

$$8000x=5000(8-x)+38000$$

$$\Rightarrow 8000x=40000-5000x+38000$$

$$8000x+5000x=78000$$

$$\Rightarrow 13000x=78000\Rightarrow x=6$$

با حل معادله،معلوم می‌شود که او ۶ بار موفق بوده و ۲ بار ناموفق.

مثال ۵: مجموع سه عدد طبیعی متوالی برابر ۲۴۳ می‌باشد آن اعداد را بیابید.

حل: اولین عدد را x، دومین عدد را $x+۱$ و سومین عدد را $x+۲$ فرض می‌کنیم. بنابراین مجموع آن‌ها برابر با :

$$x+(x+۱)+(x+۲)=۲۴۳ \Rightarrow ۳x+۳=۲۴۳$$

ـ با حل معادله اولین عدد برابر با :

$$\Rightarrow ۳x=۲۴۳-۳=۲۴۰ \Rightarrow x=۸۰$$

ـ درنتیجه سه عدد برابر با :

۸۰، ۸۱، ۸۲

تمرین

۱ـ فردی برای پرداخت ۴۹ ریال، روی هم ۱۴ قطعه سکه ۵ ریالی و ۲ ریالی داده است. از هرکدام چند سکه داده است؟

۲ـ مجموع سه عدد زوج متوالی برابر ۶۰۶ است. آن اعداد را بیابید.

۳ـ طول مستطیلی سه برابر عرض آن است. اگر محیط مستطیل ۴۴ متر باشد مساحت آن را حساب کنید.

راهنمایی: (طول + عرض)۲ = محیط

عرض × طول = مساحت

معادله‌ی درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0 \ ، \ a \neq 0, b, c \in \mathbb{R}$$

شکل ۵ــ۱

شکل۶ــ۱

۶ــ۱ــ۱ــ معادله‌ی درجه دوم: هرگاه پس از ساده‌کردن یک معادله، بزرگ‌ترین توان متغیر آن، عدد ۲ باشد، آن یک معادله درجه دوم است. فرم کلی معادله‌ی درجه دوم به‌صورت روبه‌رو است.

$$ax^2 + bx + c = 0 \ ، (a, b, c \in \mathbb{R} \ , \ a \neq 0)$$

مثال ۱: کدام‌یک از عبارات زیر، معادله‌ی درجه دوم است؟

الف) $3x^2 + 7x = 0$

ب) $t^3 + 5t + 1 = 0$

ج) $(x+2)^3 - (x-2)^3 = 0$

حل:

الف) درجه دوم است، زیرا بزرگ‌ترین توان x، برابر دو است.

ب) درجه دوم نیست زیرا بزرگ‌ترین توان متغیر t، سه است.

ــ حاصل عبــارات $(x+۲)^۳$ و $(x-۲)^۳$ را بـه‌دست می‌آوریم :

ــ عبارت را ساده می‌کنیم.

پس معادله‌ی ج درجه دوم است.

ج) $x^۳+۳(x^۲)(۲)+۳(x)(۲)^۲+۲^۳$

$-(x^۳-۳(x)^۲(۲)+۳(x)(۲)^۲-۲^۳)=$

$\cancel{x^۳}+۶x^۲+\cancel{۱۲x}+۸\cancel{-x^۳}+۶x^۲\cancel{-۱۲x}+۸=۰$

$\Rightarrow ۱۲x^۲+۱۶=۰$

د) $(۴x+۳)^۲-۴(۲x-۱)^۲=۰$

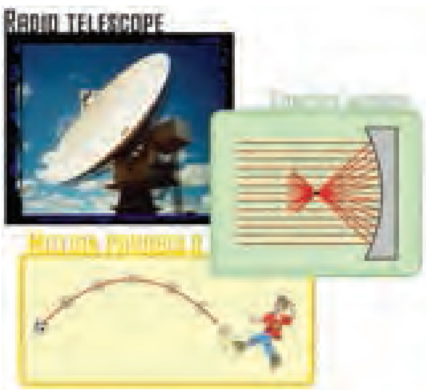
ــ عبارت را ساده می‌کنیم. پس معادله درجه‌ی اول است زیرا :

$\cancel{۱۶x^۲}+۲۴x+۹-\cancel{۱۶x^۲}+۱۶x-۴=۰$

$۴۰x+۵=۰$

$۴۰x-\square۵ \Rightarrow x-\square\frac{۵}{۴۰}-\square\frac{۱}{۸}$

حل معادله‌ی درجه دوم: منظور از حل معادله‌ی درجه دوم پیدا کردن مجموعه جواب‌های معادله است. برای این منظور در سال‌های گذشته با روش‌هایی آشنا شده‌اید که در این جا به بعضی از آن‌ها اشاره می‌کنیم.



شکل ۷ــ۱

حل معادله‌ی درجه دوم به روش تجزیه: از این روش زمانی استفاده می‌کنیم که بتوانیم معادله‌ی درجه دوم را به عامل‌های اول تجزیه کنیم و آن را به‌صورت حاصل‌ضرب دو چندجمله‌ای درجه اول بنویسیم،

$x^۲+(a+b)x+ab=۰$

$(x+a)(x+b)=۰$

سپس با استفاده از ویژگی اعداد که :

> «اگر حاصل‌ضرب دو عدد برابر صفر شود، حداقل یکی از آن‌ها مساوی صفر است»
>
> $x\times y=۰ \Rightarrow x=۰$ یا $y=۰$

هریک از دوجمله‌ای‌ها را مساوی صفر قرارداده و مانند معادله‌ی درجه اول آن را حل و ریشه‌های معادله درجه دوم را می‌یابیم.

$x+a=۰$ یا $x+b=۰$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

$x-\square a$ یا $x-\square b$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$x^{۲}+۳x=۰$$

حل: در هر دو جمله x مشترک است، بنابراین از x فاکتور می‌گیریم :

$$x^{۲}+۳x=x(x+۳)=۰\Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ \text{یا} \\ x+۳=۰\Rightarrow x=-۳ \end{cases}$$

$$\text{مجموعه‌ی جواب}=\{۰,-۳\}$$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$۴x^{۲}-(x+۲)^{۲}=۰$$

حل: با استفاده از اتحاد مزدوج $a^{۲}-b^{۲}=(a-b)(a+b)$ داریم :

$$۴x^{۲}-(x+۲)^{۲}=\underbrace{(۲x)^{۲}}_{a}-\underbrace{(x+۲)^{۲}}_{b}$$

$$\Rightarrow (۲x-(x+۲))(۲x+x+۲)=۰$$

$$\Rightarrow (۲x-x-۲)(۳x+۲)=(x-۲)(۳x+۲)=۰$$

با استفاده از $x\times y=۰$ داریم $x=۰$ یا $y=۰$ بنابراین خواهیم داشت :

$$\Rightarrow \begin{cases} x-۲=۰\Rightarrow x=۲ \\ \text{یا} \\ ۳x+۲=۰\Rightarrow ۳x=-۲\Rightarrow x=-\frac{۲}{۳} \end{cases}$$

مجموعه‌ی جواب برابر با :

$$\left\{۲,-\frac{۲}{۳}\right\}$$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$x^{۲}+۵x+۶=۰$$

حل: اتحاد جمله‌ی مشترک به‌صورت روبه‌رو است :

$$x^{۲}+(a+b)x+ab=(x+a)(x+b)$$

پس با توجه به اتحاد جمله‌ی مشترک داریم :

$$(x+۲)(x+۳)=۰\Rightarrow \begin{cases} x+۲=۰\Rightarrow x=-۲ \\ \text{یا} \\ x+۳=۰\Rightarrow x=-۳ \end{cases}$$

ــ مجموعه‌ی جواب معادله برابر است با :

$$\{-۲,-۳\}$$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$y^2 - y - 30 = 0$$

حل: دو عدد ۵ و ۶− که حاصل ضربشان ۳۰− و حاصل‌جمع آن‌ها ۱− است، پس :

$$y^2 - y - 30 = (y+5)(y-6) = 0$$

ــ هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم، داریم :

$$\Rightarrow \begin{cases} y+5=0 \Rightarrow y = -5 \\ \text{یا} \\ y-6=0 \Rightarrow y=6 \end{cases}$$

مجموعه‌ی جواب‌های معادله برابر است با :

$$\{-5, 6\}$$

مثال: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$3x^2 + 5x + 2 = 0$$

حل: در این قسمت جمله مشترک مربع کامل نیست، بنابراین لازم است که به‌صورت مربع کامل نوشته شود.

$$3x^2 + 5x + 2 = \frac{1}{3}(3^2x^2 + 5(3x) + 6)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}((3x)^2 + 5(3x) + 6) = 0$$

حاصل‌ضرب دو عدد ۲ و ۳ برابر ۶ و حاصل جمع آن‌ها ۵ است ؛ پس داریم :

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(3x+2)(3x+3) = 0$$

اکنون هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+2=0 \Rightarrow 3x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3} \\ \text{یا} \\ 3x+3=0 \Rightarrow 3x = -3 \Rightarrow x = -1 \end{cases}$$

ــ مجموعه‌ی جواب‌های معادله برابر است با :

$$\left\{-\frac{2}{3}, -1\right\}$$

مثال: معادله روبه‌رو را حل کنید.

$$5x^2 + 3x - 2 = 0$$

حل: جمله‌ی مشترک مربع کامل نیست، لازم است که به‌صورت مربع کامل نوشته شود.

$$5x^2 + 3x - 2 = \frac{1}{5}(5^2x^2 + 3(5x) - 10)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}\left((5x)^2 + 3(5x) - 10\right) = 0$$

حاصل‌ضرب دو عدد ۲− و ۵ برابر ۱۰− و حاصل‌جمع آن‌ها برابر ۳ است، پس :

$$\Rightarrow \frac{۱}{۵}(۵x+۵)(۵x-۲)=۰$$

حال هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵x+۵=۰ \Rightarrow ۵x - \square ۵ \Rightarrow x - \square ۱ \\ ۵x-۲=۰ \Rightarrow ۵x=۲ \Rightarrow x=\frac{۲}{۵} \end{cases}$$

ــ مجموعه‌ی جواب برابر است با :

$$\Rightarrow \text{مجموعه جواب} - \left\{\square ۱, \frac{۲}{۵}\right\}$$

تمرین

۱ــ ریشه‌های معادله‌های زیر را بیابید.

۱) $۵x^۲+۷x=۰$

۲) $t^۳-۲۵t=۰$

۳) $۴z^۲-۹=۰$

۴) $y^۳-۱۵y^۲+۵۶y=۰$

۲ــ با تکمیل جاهای خالی ریشه‌های معادله‌های زیر را بیابید.

۱) $x^۲-۷x+۱۲=۰$

$(x-\square)(x-\bigcirc)=۰$

$\Rightarrow x=\square$ یا $x=\bigcirc$

۲) $y^۲-۱۴y+۱۳=۰$

$(y-\square)\ (y-\bigcirc)$

$\Rightarrow y=\square$ یا $y=\bigcirc$

۳) $(۲x+۱)^۲-(۵-x)^۲=۰$

$(\square-\square)(\square+\square)=۰$

$\Rightarrow (۳x-\square)(x+\square)=۰$

$\Rightarrow x=\square$ یا $x=\triangle$

۴) $۷x^۲-۸x+۱=۰$

$\frac{۱}{۷}(۷^۲x^۲-۸(۷x)+۷)=۰$

$\frac{۱}{۷}(\square-\square)(\square-\square)=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} \square=۰ \Rightarrow x=\square \\ \text{یا} \\ \square=۰ \Rightarrow x=\triangle \end{cases}$$

۵) $۵-x^۲=۰$

$(\sqrt{۵}-\square)(\bigcirc+x)=۰$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\square \\ x=\bigcirc \end{cases}$$

ـ با توجه به معادله‌ی درجه دوم روبه رو نکات زیر را می‌توان برای حل معادله‌های درجه دوم به‌کار گرفت :

$$ax^2 + bx + c = 0 \;,\; a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

نکته‌ی ۱ : هرگاه مجموع ضرایب معادله‌ی درجه دوم برابر صفر باشد، یعنی : $a + b + c = 0$

آن‌گاه ریشه‌های معادله عبارتند از : $x_1 = 1$ و $x_2 = \dfrac{c}{a}$

مثال ۱: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$5x^2 + 7x - 12 = 0$$

حل: مجموع ضرایب برابر صفر است، زیرا : $a = 5$ و $b = 7$ و $c = -12$ و $a + b + c = 0$

ـ پس ریشه‌های معادله برابر با : $x_1 = 1$ و $x_2 = \dfrac{c}{a} = \dfrac{-12}{5}$

نکته‌ی ۲: هرگاه در معادله‌ی درجه دوم داشته باشیم : $a + c = b$

آن‌گاه ریشه‌های معادله برابر خواهد بود با : $x_1 = -1$ و $x_2 = \dfrac{-c}{a}$

مثال ۲: ریشه‌های معادله‌ی روبه‌رو را به‌دست آورید. $5x^2 + 7x + 2 = 0$

حل: با توجه به رابطه‌ی $a + c = b$ ، ریشه‌ها برابر است با : $a = 5$ و $b = 7$ و $c = 2$ و $x_1 = -1$ و $x_2 = \dfrac{-2}{5}$

نکته‌ی ۳: هرگاه معادله‌ی درجه دوم به‌صورت $ax^2 + bx = 0$ باشد، داریم : $x_1 = 0$ و $x_2 = \dfrac{-b}{a}$

مثال ۳: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$7x^2 + 5x = 0$$

حل: در این معادله ضریب c برابر صفر است، پس : $x_1 = 0$ و $x_2 = \dfrac{-b}{a} = \dfrac{-5}{7}$

نکته‌ی ۴: هرگاه معادله‌ی درجه‌ی دوم به‌صورت روبه‌رو باشد : $ax^۲ + c = ۰$

در صورتی معادله دارای جواب حقیقی خواهد بود که a و c دارای علامت‌های مختلف باشند (یعنی $ac \quad ۰$)

که در آن صورت جواب‌های معادله عبارتند از :

$$x_۱ , x_۲ \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$$

مثال ۴: معادله‌های الف و ب را حل کنید.

الف) $۷x^۲ - ۲ = ۰$

حل: (الف) چون $ac \quad ۰$ ، پس ریشه‌های معادله برابر است

با :

$$x_۱ \text{ و } x_۲ \pm \sqrt{\frac{۲}{۷}}$$

ب) $۵x^۲ + ۴ = ۰$

(ب) چون $ac \,!\, ۰$ پس معادله جواب حقیقی ندارد.

$a = ۵$ و $c = ۴$ و $۵ \times ۴ \,!\, ۰$

تمرین

۱ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $۵x^۲ - ۸x + ۳ = ۰$

۲) $۴x^۲ + ۵x + ۱ = ۰$

۳) $-۷x^۲ + ۴x + ۳ = ۰$

۴) $x^۲ - ۹ = ۰$

۵) $۴x^۲ - ۳۶ = ۰$

۶) $x^۲ - ۵x + ۴ = ۰$

۷) $۱۱x^{۲} + ۹x - ۲ = ۰$

۸) $۷x^{۲} + ۱۰x + ۳ = ۰$

۹) $x^{۳} - ۱۶x = ۰$

۱۰) $(x-۱)^{۲} - ۵(x-۱) = ۰$

۱۱) $(۳t+۵)^{۲} - □۶(۳t+۵)$

حل معادله‌ی درجه دوم به روش مربع کامل: گاهی اوقات جواب‌های معادله‌ی درجه دوم اعداد صحیح نیستند بنابراین از روش تجزیه نمی‌توانیم به‌راحتی آن‌ها را حدس بزنیم. برای حل این نوع معادله‌ها هرگاه ضریب درجه دوم، یک نباشد آن را با تقسیم معادله بر عدد a به یک تبدیل می‌کنیم. سپس با افزودن مربع نصف ضریب جمله‌ی درجه اول به دو طرف، سمت چپ را به مربع کامل تبدیل می‌کنیم، و با جذرگیری ریشه‌های معادله را می‌یابیم.

$$ax^{۲} + bx + c = ۰ \ , \ a \neq ۰$$

$$x^{۲} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰ \Rightarrow x^{۲} + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = ۰$$

$$x^{۲} + \frac{b}{a}x = \frac{-c}{a}$$

$$x^{۲} + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{۲a}\right)^{۲} = \left(\frac{b}{۲a}\right)^{۲} - \frac{c}{a}$$

$$(x + \frac{b}{۲a})^{۲} = \frac{b^{۲} - ۴ac}{۴a^{۲}} = \frac{\Delta}{۴a^{۲}},$$

$$\Delta \geq ۰ \Rightarrow x + \frac{b}{۲a} = \pm \frac{\sqrt{b^{۲} - ۴ac}}{۲a} \Rightarrow x_{۱}, x_{۲} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a}$$

شکل ۸ــ۱

مثال ۱: معادله‌ی روبه‌رو را به روش مربع کامل حل کنید.

$$x^2 - 6x + 2 = 0$$

حل: جملات شامل مجهول (x) را در یک طرف معادله قرار می‌دهیم.

$$x^2 - 6x = -2$$

ــ مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{-6}{2})^2 = 9$ را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم، یعنی :

$$x^2 - 6x + 9 = -2 + 9 \Rightarrow (x-3)^2 = 7$$

چون سمت راست معادله مثبت است می‌توان از دو طرف جذر گرفت و نوشت :

$$\Rightarrow x - 3 = \sqrt{7} \ \text{،} \ x - 3 = -\sqrt{7}$$

یا

$$x_1 = \sqrt{7} + 3 \ \text{،} \ x_2 = -\sqrt{7} + 3$$

مثال ۲: معادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$x^2 + 10x = 11$$

حل: به دو طرف معادله مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{10}{2})^2 = 25$ را اضافه می‌کنیم :

$$x^2 + 10x + 5^2 = 11 + 5^2 \Rightarrow (x+5)^2 = 36$$

چون سمت راست معادله مثبت است می‌توان از دو طرف معادله جذر گرفت و نوشت :

$$x + 5 = 6 \ \text{،} \ x + 5 = -6$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -11$$

تمرین

۱ــ ریشه‌های معادله‌ی زیر را با تکمیل جاهای خالی حل کنید.

$$x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x^2 + x = \square$$

$$x^2 + x + \bigcirc = 1 + \bigcirc \Rightarrow (x + \square)^2 = \triangle$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + \square = \sqrt{\triangle} & (1) \\ x + \square = -\sqrt{\triangle} & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x = \sqrt{\triangle} - \square$$

$$(2) \Rightarrow x = -\sqrt{\triangle} - \square$$

بنابراین ریشه‌های معادله عبارتند از : $x_1 = \cdots\cdots$ و $x_2 = \cdots\cdots$

۲ــ ریشه‌های معادله‌های روبه‌رو را بیابید (به روش مربع کامل).

الف) $x^2 - 16x + 3 = 0$ ب) $t^2 = -8t + 1$

دستور کلی حل معادله‌ی درجه دوم (روش .)

در این قسمت به چگونگی حل معادله‌ی درجه دوم به‌روش مربع کامل می‌پردازیم.

$$ax^2+bx+c=0, a\neq 0, a,b,c\in \mathbb{R}$$

ــ ابتدا عدد ثابت (c) را به‌طرف دیگر می‌بریم :

$$ax^2+bx=-c$$

ــ چون $a\neq 0$ دو طرف تساوی را بر a تقسیم می‌کنیم :

$$\frac{ax^2}{a}+\frac{b}{a}x=\frac{-c}{a}$$

ــ سپس مربع نصف ضریب x یعنی $(\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2}{4a^2}$ را به‌دو طرف تساوی اضافه می‌کنیم ؛ داریم :

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}=\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}$$

ــ طرف اول را به‌صورت مربع کامل می‌نویسیم و در طرف دوم مخرج مشترک می‌گیریم، پس :

$$\Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

ــ با فرض این‌که $b^2-4ac>0$ از طرفین جذر می‌گیریم، خواهیم داشت :

$$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$$

ــ مقادیر x_1 و x_2 برابر خواهند بود با :

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \end{cases}$$

ــ عبارت b^2-4ac را مُبیّن معادله‌ی درجه دوم می‌گویند و با علامت یونانی دلتا (.) نشان می‌دهند، بنابراین درحالت کلی داریم :

$$\Delta=b^2-4ac$$

$$x_1,x_2=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$$

نکته: اگر $\Delta=0$ باشد معادله ریشه‌ی مضاعف دارد که برابر است با : $x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$

و اگر $\Delta<0$ باشد معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال: ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم روبه‌رو را با استفاده از فرمول به‌دست آورید.

$$6x^2+5x-1=0$$

حل: مقدار a و b و c را تعیین می‌کنیم :

$$a=6 \text{ ، } b=5 \text{ ، } c=-1$$

ــ . را محاسبه می‌کنیم :

$$\Delta=b^2-4ac=5^2-4(6)(-1)=25+24=49$$

ـ مقدار x_1 و x_2 را با استفاده از رابطه‌ی روبه‌رو پیدا می‌کنیم :

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\square}}{2a}$$

ـ ریشه‌های معادله‌ی، x_1 و x_2 ، به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow x_1 = \frac{-5 + \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{-5 + 7}{12} \Rightarrow x_1 = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x_2 = \frac{-5 - \sqrt{49}}{2 \times 6} = \frac{-5 - 7}{12} \Rightarrow x_1 = -1$$

مثال: ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 + \sqrt{8}x + 1 = 0$ را با استفاده از . به‌دست آورید.

حل: مقادیر a ، b و c را تعیین می‌کنیم.

$$a = 2 \ , \ b = \sqrt{8} \ , \ c = +1$$

ـ مبین معادله را به‌دست می‌آوریم :

$$\square = b^2 - 4ac = (\sqrt{8})^2 - 4(2)(+1) = 8 - 8 = 0$$

چون $\square = 0$ است معادله، ریشه‌ی مضاعف دارد :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{-\sqrt{8}}{2 \times 2} = \frac{-\sqrt{4 \times 2}}{4} = \frac{-2\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$ ریشه مضاعف

مثال : ریشه‌های معادله‌ی روبه‌رو را با استفاده از . به‌دست آورید.

$$-5x^2 + 3x - 4 = 0$$

حل: مقادیر a ، b و c را تعیین می‌کنیم :

$$a = -5 \ , \ b = 3 \ , \ c = -4$$

ـ مقدار . را حساب می‌کنیم.

$$\square = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(-5)(-4) = 9 - 80 = -71$$

چون $\square < 0$ است پس معادله دارای ریشه‌ی حقیقی نیست.

نتیجه: در معادله‌ی درجه دوم همواره برای . سه حالت زیر را داریم :

$$ax^2 + bx + c = 0 \ , \ a, b, c \in \mathbb{R} \ , \ a \neq 0$$

حالت ۱: $\square > 0$ ، در این حالت معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد که آن‌ها را از رابطه‌ی مقابل پیدا می‌کنیم :

$$x_1, x_2 = \frac{-b \pm \sqrt{\square}}{2a}$$

حالت ۲: $\square = 0$ ، معادله ریشه‌ی مضاعف دارد که آن را از فرمول مقابل به‌دست می‌آوریم :

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

حالت ۳: $\Delta < 0$ ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال: مقدار m را در معادله‌ی روبه‌رو چنان بیابید که معادله ریشه‌ی مضاعف داشته باشد.

$$mx^2 + 5x + 4 = 0$$

حل: مبین معادله را برابر صفر قرار می‌دهیم :

با حل معادله‌ی درجه اول m را به‌دست می‌آوریم.

$$\text{شرط ریشه‌ی مضاعف} \Rightarrow \Delta = 0 \text{ و } \Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = 5^2 - 4(m)(4) = 0 \Rightarrow 25 - 16m = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{25}{16}$$

تمرین

۱ــ معادله‌های زیر را به روش (.) حل کنید.

۱) $x^2 - 3x = -1$

۲) $-x^2 + 3x + 2 = 0$

۳) $8x^2 + 4\sqrt{2}x + 1 = 0$

۴) $-6x^2 + 5x - 4 = 0$

۲ــ حدود m را در معادله‌ی زیر چنان بیابید که :

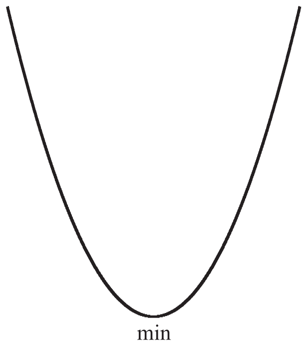
$$7x^2 + 5x + m = 0$$

الف : دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

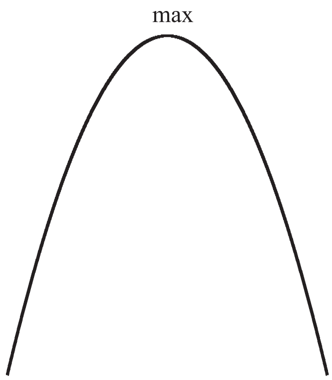
ب : ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد.

تعبیر هندسی حل معادله‌ی درجه دوم

از سال اول به یاد داریم که منحنی هر معادله که پس از ساده کردن به‌صورت $y=ax^{۲}+bx+c\ (a\neq ۰)$ تبدیل شود، سهمی یا منحنی درجه دوم نامیده می‌شود. حال باید دانست که : هرگاه $a>۰$ باشد، نمودار سهمی به‌صورت شکل ۹ــ۱ و هرگاه $a<۰$ باشد نمودار سهمی به‌صورت شکل ۱۰ــ۱ می‌باشد. خط $x=\frac{-b}{۲a}$ را محور تقارن سهمی و نقطه‌ی x را طول نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم می‌نامند.



شکل ۹ــ۱



شکل ۱۰ــ۱

فعالیت ۴ــ۱

سهمی به معادله‌ی روبه‌رو مفروض است.

$y=-x^{۲}+۳x+۴$

الف : آیا سهمی ماکسیمم دارد یا مینیمم؟ چرا؟

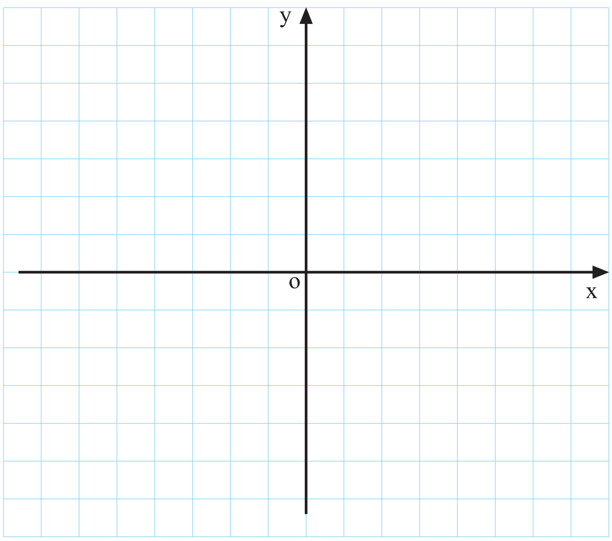
ب : طول نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم را به‌دست آورید.

ج : سهمی را با تکمیل جدول ۴ــ۱ رسم کنید.

د : با توجه به نمودار سهمی، ریشه‌های معادله‌ی $-x^{۲}+۳x+۴=۰$ را به‌دست آورید.

جدول ۴ــ۱

x	۰	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	□	۴
y	□	۶	□	□	۴	□



نمودار ۱۱ــ۱

فعالیت ۵ـ۱

یک سهمی به معادله‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$y = x^{۲} - ۶x + ۵$$

الف : آیا سهمی ماکسیمم دارد یا مینیمم؟ چرا؟

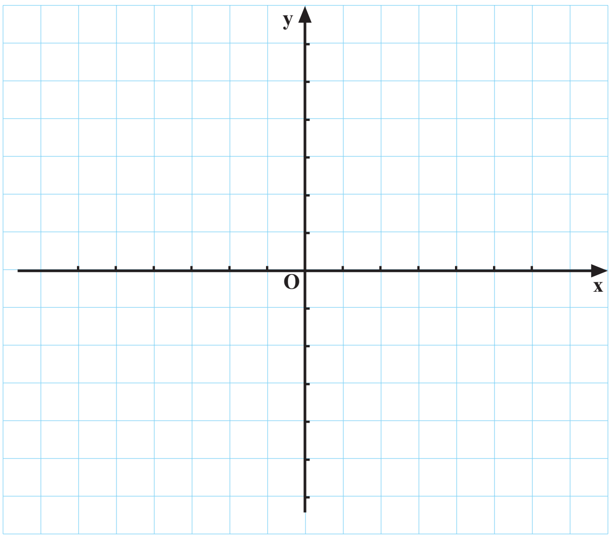
ب : طول نقطه‌ی ماکسیمم یا مینیمم سهمی را پیدا کنید.

ج : با تکمیل جدول ۵ـ۱ سهمی را رسم کنید.

د : محل برخورد سهمی با محور xها را بیابید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

جدول ۵ـ۱

x	۰	۲	۳	۴	۵
y					



شکل ۱۲ـ۱

کاربرد معادله‌ی درجه دوم در حل مسائل

مثال ۱: عدد صحیحی بیابید که مربع آن پنج برابر خودش باشد.

حل ۱:

ـ عدد را x فرض می‌کنیم، داریم :

$$x^{۲} = ۵x \Rightarrow x^{۲} - ۵x = ۰$$

ـ از x فاکتور می‌گیریم :

$$\Rightarrow x^{۲} - ۵x = x(x - ۵) = ۰$$

ـ هر یک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۵ = ۰ \Rightarrow x = ۵ \end{cases}$$

مثال ۲: عددی طبیعی بیابید که حاصل‌جمع آن با مربعش برابر ۶ باشد.

حل: عدد را x فرض می‌کنیم، خواهیم داشت :

$$x + x^{۲} = ۶$$

ـ با توجه به اتحاد جمله مشترک خواهیم داشت :

$$x^{۲} + x - ۶ = ۰ \Rightarrow (x + ۳)(x - ۲) = ۰$$

ــ هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ \text{یا} \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

ــ با توجه به این‌که $-3 \notin N$ ، این جواب قابل‌قبول نیست و تنها جواب ۲ قابل‌قبول است.

مثال ۳: عددی بیابید که مجموع مجذور و مکعب آن مساوی ۴ برابر عدد بعد از خودش باشد.

حل: عدد را x، مربع آن را x^2 و مکعبش را x^3 می‌نامیم.

ــ بنابر صورت مسئله چنین خواهد بود :

$$x^2+x^3=4(x+1) \Rightarrow x^2(x+1)-4(x+1)=0$$

ــ از $x+1$ فاکتور می‌گیریم :

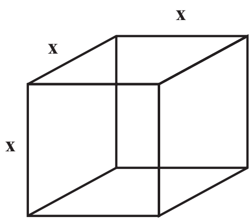
$$\Rightarrow (x+1)(x^2-4)=0 \Rightarrow (x+1)(x-2)(x+2)=0$$

ــ هر عامل را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های معادله را مشخص می‌کنیم.

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \Rightarrow x=-1 \\ x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ x+2=0 \Rightarrow x=-2 \end{cases}$$

مثال ۴: طول ضلع مکعبی را بیابید که عدد مربوط به حجم آن ۹ برابر عدد مربوط به محیط یک وجه آن باشد.

مراحل حل: طول یک ضلع را x می‌نامیم. محیط یک وجه آن برابر $4x$ و حجم مکعب x^3 می‌باشد.



شکل ۱۳ــ۱

طبق صورت مسئله داریم :

$$x^3=9(4x) \Rightarrow x^3=36x$$

ــ کلیه‌ی جملات را به یک طرف انتقال می‌دهیم :

$$x^3-36x=0$$

ــ از x فاکتور گرفته و همه‌ی عوامل را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$x(x^2-36)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-36=0 \Rightarrow x^2=36 \Rightarrow x=\pm 6 \end{cases}$$

با فرض مثبت بودن طول ضلع ابعاد مکعب، جواب منفی قابل‌قبول نیست ؛ بنابراین داریم :

$$x=6 \ , \ x=\cancel{0,-6}$$

تنها جواب ۶ قابل‌قبول است.

تمرین

۱ــ مجموع ۵ عدد صحیح متوالی برابر ۸۵ است، این اعداد را مشخص کنید.

۲ــ مجموع مربع یک عدد با خودش برابر ۱۲ است، این عدد را بیابید.

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۱)

۱ــ نمودارهای زیر را رسم کنید :

۱) $۳x+۵y=-۱۵$

۲) $y=۲x^۲-۵x+۴$

۲ــ معادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $\frac{۳x+۱}{۲}-\frac{۵x-۳}{۴}=۱$

۲) $۲x^۲+۷x+۴=۰$

۳) $(-۳x+۱)^۲-۴(-۳x+۱)=۰$

۳ــ مجموع پنج عدد صحیح متوالی برابر ۴۵ است آن اعداد را بیابید.

۴ــ حدود k را در معادله‌ی روبه‌رو چنان بیابید که همواره دو ریشه‌ی حقیقی داشته باشد.

$kx^۲+۵x-۴=۰$

بخش اول

فصل دوم

تعیین علامت، حل نامعادله و قدرمطلق

هدف کلی

یادآوری مطالب مربوط به تعیین علامت، حل نامعادله و قدرمطلق و خواص آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ عبارت‌های درجه اول و درجه دوم را تعیین علامت کند ؛

۲ــ نامعادله‌های مختلف را حل کند و حدود جواب هریک را مشخص سازد ؛

۳ــ قدرمطلق را تعریف کند و از خواص قدرمطلق برای حل نامعادلات قدرمطلقی استفاده کند.

پیش آزمون (۲)

۱ــ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید :

۱) $P = -2x + 3$

۲) $P = \frac{2x - 1}{5 - 3x}$

۳) $P = -2x^2 + 5x$

۲ــ نامعادله‌های زیر را حل کنید :

۱) $x^2 > x$

۲) $\frac{1}{x} + 3 > 0$

۳) $|5x + 3| < 7$

۴) $|-2x + 3| > 4$

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۲)

۲ـ۱ـ تعیین علامت

منظور از تعیین علامت یک عبارت جبری آن است که تعیین کنیم آن عبارت به‌ازای چه اعدادی منفی، مثبت و یا صفر می‌باشد.

۱ـ۲ـ۱ـ تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول

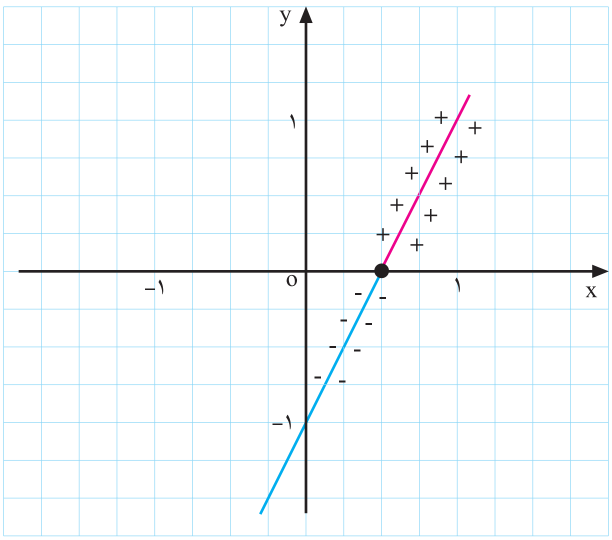
$P = ax + b \ ، a \neq ۰$

مثال ۱: معادله‌ی خط روبه‌رو مفروض است :

$y = ۲x + ۱$

جدول ۶ـ۱

x	۰	$\frac{۱}{۲}$
y	-۱	۰



نمودار ۱۴ـ۱

با توجه به جدول ۶ـ۱ نمودار ۱۴ـ۱ رسم شده است. خط محور xها را در نقطه‌ای با $x = \frac{۱}{۲}$ قطع نموده است. بنابراین به‌ازای $x = \frac{۱}{۲}$ عبارت $۲x - ۱$ صفر می‌باشد، یعنی $x = \frac{۱}{۲}$ جواب معادله‌ی $۲x - ۱ = ۰$ است. با توجه به نمودار ۱۴ـ۱ می‌بینیم که به‌ازای اعداد بزرگ‌تر از $\frac{۱}{۲}$ $(x > \frac{۱}{۲})$ نمودار خط بالای محور xها است بنابراین علامت دوجمله‌ای مثبت می‌باشد ؛ و به‌ازای اعداد کمتر از $\frac{۱}{۲}$ $(x < \frac{۱}{۲})$ نمودار خط، زیر محور xها واقع است، بنابراین دوجمله‌ای منفی می‌شود. نتایج به‌دست آمده را می‌توان در جدول ۷ـ۱ خلاصه کرد.

جدول ۷ـ۱

x	$x < \frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	$x > \frac{۱}{۲}$
$۲x - ۱$	مخالف علامت ضریب x	۰	موافق با علامت ضریب x

فعالیت ۶ـ۱

نمودار خطی به معادله‌ی روبه‌رو را با تکمیل جدول ۸ـ۱ رسم کنید، سپس به سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

$y = -\frac{۱}{۲}x + ۳$

جدول ۸ـ۱

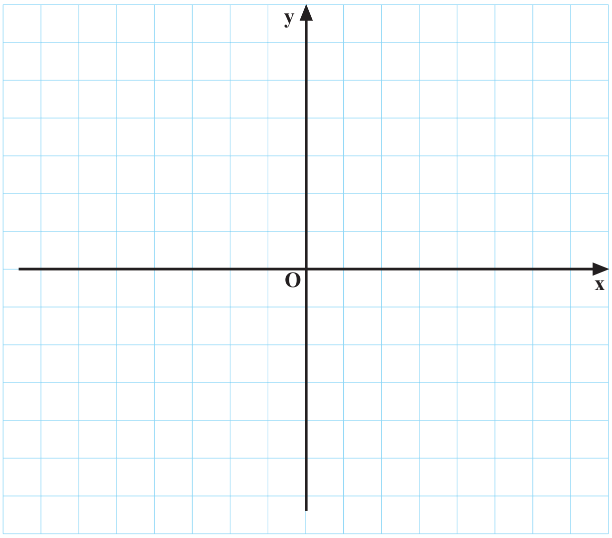
x	۰	$\square$
y	$\square$	۰

الف : در چه نقطه‌ای دو جمله‌ای صفر است؟ ج : $\square$

ب : به‌ازای اعداد بیش‌تر از ۶ نمودار خط زیر محور xها

واقع شده است علامت دوجمله‌ای در این بازه چگونه می‌باشد؟ج : $\square$

ج : به‌ازای اعداد کمتر از ۶ نمودار خط بالای محور xها قرار گرفته است، در این بازه علامت دو جمله‌ای را تعیین کنید.ج : $\square$



نمودار ۱۵ــ۱

د : با توجه به قسمت‌های بالا جدول ۹ــ۱ را تکمیل کنید.

جدول ۹ــ۱

x	$x<۶$	۶	$x>۶$
y	$\square$	$\circ$	$\square$

نتیجه: هر عبارت که پس از ساده کردن به‌صورت $a\neq ۰$ ، $P=ax+b$ باشد یک دوجمله‌ای درجه اول نامیده می‌شود.
برای تعیین علامت دوجمله‌ای درجه اول، ریشه‌ی آن $(x=\frac{-b}{a})$ را به‌دست می‌آوریم. سپس با استفاده از جدول ۱۰ــ۱ تعیین علامت می‌کنیم.

$$\begin{cases} ax+b=۰ \\ x=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

جدول ۱۰ــ۱

x	$x<-\frac{b}{a}$	$-\frac{b}{a}$	$x>-\frac{b}{a}$
$P=ax+b$	مخالف علامت a	$\circ$	موافق علامت a

مثال ۱: عبارت مقابل را تعیین علامت کنید.

$$P=۷-۳x$$

حل: عبارت را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$P=۰\Rightarrow ۷-۳x=۰\Rightarrow -۳x=-۷$$

ــ ریشه‌ی معادله برابر است با :

$$\Rightarrow x=\frac{۷}{۳}$$

با توجه به جدول ۱۱ــ۱ به‌ازای $x>\frac{۷}{۳}$ علامت دوجمله‌ای منفی و به‌ازای $x<\frac{۷}{۳}$ علامت آن مثبت و به‌ازای $x=\frac{۷}{۳}$ مقدار دوجمله‌ای صفر می‌باشد.

جدول ۱۱ــ۱

x	$x<\frac{۷}{۳}$	$\frac{۷}{۳}$	$x>\frac{۷}{۳}$
$P=۷-۳x$	+	$\circ$	−

نکته: هرگاه عبارت جبری به‌صورت حاصل‌ضرب یا تقسیم چند دوجمله‌ای درجه اول باشد (مثال : عبارت (P) برای تعیین علامت مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

$$P=\frac{(x-a)(x-b)}{x-c}$$

۱ــ هریک از عامل‌ها را برابر صفر قرار داده و ریشه‌ی آن را پیدا می‌کنیم :

$x-a=۰ \Rightarrow x=a$

$x-b=۰ \Rightarrow x=b$

و

$x-c=۰ \Rightarrow x=c$

(با فرض $a<b<c$)

۲ــ جدولی رسم می‌کنیم و در سطر اول آن ریشه‌های به‌دست آمده را به‌ترتیب صعودی از چپ به راست می‌نویسیم و در سطرهای دیگر به‌ترتیب عبارت مربوط به هر ریشه را که به‌ازای ریشه صفر می‌شود می‌نویسیم و تعیین علامت می‌کنیم.

۳ــ علامت‌های واقع در هر ستون عمودی را درهم ضرب می‌کنیم و نتیجه را در سطر آخر به‌دست می‌آوریم. علامت‌های به‌دست آمده در سطر آخر علامت عبارت (P) را مشخص می‌کند.

جدول ۱۲ــ۱

x		a		b		c	
$x-a$	$-$	۰	$+$		$+$		$+$
$x-b$	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$x-c$	$-$		$-$		$-$	۰	$+$
P	$-$	۰	$+$	۰	$-$	تعریف نشده	$+$

نکته: باید توجه داشت که عبارات جبری به‌ازای هریک از جواب‌های صورت، صفر و به‌ازای هریک از ریشه‌های مخرج تعریف نشده (نامعین) است.

مثال ۲: عبارت روبه‌رو را تعیین علامت کنید.

$$P=\frac{x(۲x-۱)}{۳-۲x}$$

مراحل حل: ریشه‌های صورت و مخرج را به‌دست می‌آوریم :

$$P=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ ۲x-۱=۰ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$۳-۲x=۰ \Rightarrow -۲x=-۳ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

$x=\frac{۳}{۲}$ ریشه‌ی مخرج است، لذا به‌ازای آن عبارت (P) تعریف نشده است.

ــ ریشه‌ها را به‌ترتیب صعودی در سطر اول جدول ۱۳ــ۱ می‌نویسیم.

ــ هریک از عبارات را به‌ترتیب ریشه‌های مربوط در سطر بعدی می‌نویسیم.

ــ عبارات را تعیین علامت می‌کنیم.

ــ از ضرب علامت‌های ستون عمودی علامت عبارت P را در فواصل ریشه‌ها به‌دست می‌آوریم.

جدول ۱۳ــ۱

x		۰		$\frac{۱}{۲}$		$\frac{۳}{۲}$	
x	$-$	۰	$+$		$+$		$+$
$۲x-۱$	$-$		$-$	۰	$+$		$+$
$۳-۲x$	$+$		$+$		$+$	۰	$-$
P	$+$	۰	$-$	۰	$+$	تعریف نشده	$-$

۲ــ۲ــ۱ــ تعیین علامت سه‌جمله‌ای درجه دوم

$P = ax^۲ + bx + c$ و $a,b,c \in \mathbb{R}$ ، $a \neq ۰$

مثال ۱: یک سهمی با ضابطه مقابل رسم کنید.

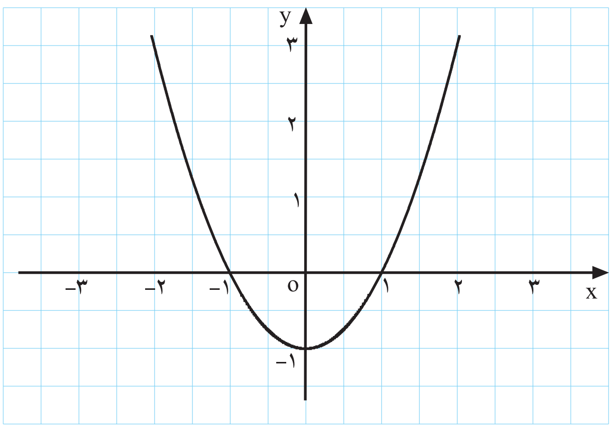
$y = x^۲ - ۱$

جدول ۱۴ــ۱

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	۳	۰	-۱	۰	۳

مراحل حل: طول نقطه‌ی رأس سهمی $x = -\frac{b}{۲a}$ است.

با توجه به نمودار ۱۶ــ۱ مشاهده می‌کنیم که اگر $x > ۱$ یا $x < -۱$ باشد نمودار سهمی بالای محور xها واقع می‌باشد. بنابراین سه‌جمله‌ای درجه دوم مثبت (موافق با علامت ضریب $x^۲$) و اگر $-۱ < x < ۱$ باشد نمودار زیر محور xها قرار دارد؛ بنابراین سه‌جمله‌ای درجه دوم منفی است.



نمودار ۱۶ــ۱

تمرین

با توجه به مثال ۱ و نمودار $y = x^۲ - ۱$ جدول ۱۵ــ۱ را کامل کنید.

جدول ۱۵ــ۱

x	$x < -۱$	-۱	$-۱ < x < ۱$	۱	$x > ۱$
$x^۲ - ۱$	□	۰	○	۰	□

فعالیت ۷ــ۱

نمودار سهمی روبه‌رو را با تکمیل جدول ۱۶ــ۱ رسم کنید.

$y = -(x+۱)^۲ + ۱$

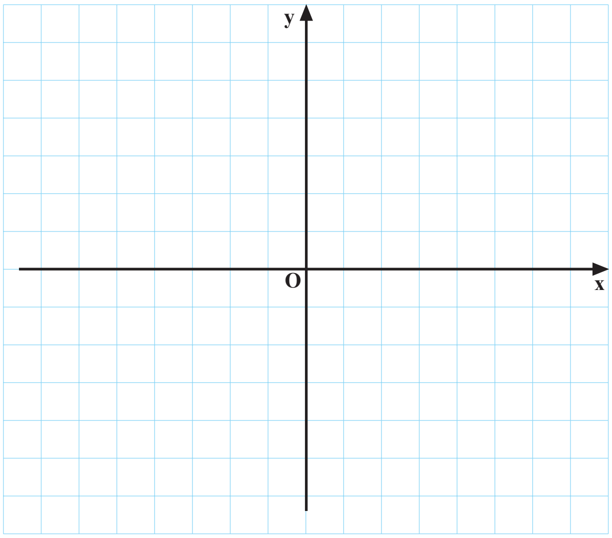
جدول ۱۶ــ۱

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱
y	-۳	□	۱	۰	□

۱ــ به‌ازای $x > ۰$ یا $x < -۲$ سهمی زیر محور xها قرار گرفته است، علامت سه‌جمله‌ای چیست؟ج: □

۲ــ در بازه‌ی $-۲ < x < ۰$ علامت سه‌جمله‌ای چگونه است؟ ج : □

۳ــ با توجه به نمودار ۱۷ــ۱، جدول ۱۷ــ۱ را کامل کنید.



نمودار ۱۷ــ۱

جدول ۱۷ــ۱

x	$x < -۲$	-۲	$-۲ < x < ۰$	۰	$x > ۰$
y	□		○		□

نکته: با نتیجه‌گیری از مثال و فعالیت ۷ــ۱ می‌توان گفت هرگاه سه‌جمله‌ای درجه دوم دارای دو ریشه‌ی $x_۱$ و $x_۲$ $(x_۱ < x_۲)$ باشد، مطابق جدول ۱۸ــ۱ تعیین علامت می‌شود.

جدول ۱۸ــ۱

x	$x < x_۱$	$x_۱$	$x_۱ < x < x_۲$	$x_۲$	$x > x_۲$
$ax^۲ + bx + c$	موافق علامت a		مخالف علامت a		موافق با علامت a

مثال ۲: سه‌جمله‌ای مقابل را تعیین علامت کنید.

$$P = ۷x^۲ - ۵x - ۲$$

حل:

ــ عبارت P را برابر صفر قرار می‌دهیم و ریشه‌های معادله را به‌دست می‌آوریم :

$$P = ۰ \Rightarrow ۷x^۲ - ۵x - ۲ = ۰$$

ــ جمع ضرایب صفر است $(a + b + c = ۰)$، پس :

$$x_۱ = ۱ \ , \ x_۲ = \frac{c}{a} = \frac{-۲}{۷}$$

چون ضریب $x^۲$ $(a = ۷)$ مثبت است دو طرف ریشه‌ها مثبت و مابین دو ریشه منفی است.

جدول ۱۹ــ۱

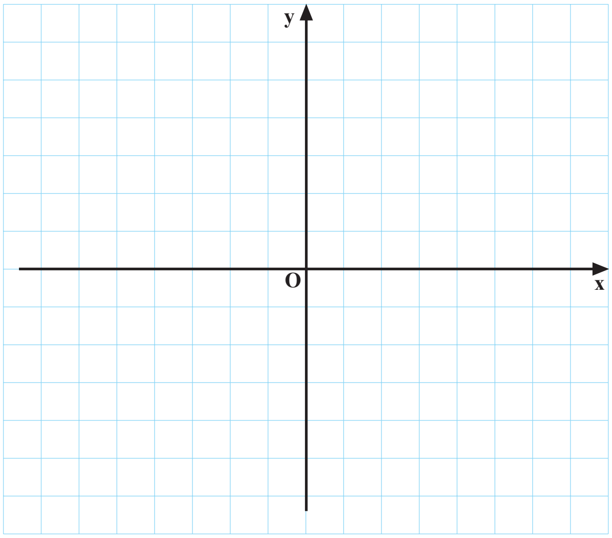
x	$x < -\frac{۲}{۷}$	$-\frac{۲}{۷}$	$-\frac{۲}{۷} < x < ۱$	۱	$x > ۱$
P	+		−		+

فعالیت ۸ـ۱

الف) با تکمیل جدول ۲۰ـ۱ نمودار سهمی $y = x^۲ - ۲x + ۱$ را رسم کنید.

جدول ۲۰ـ۱

x	−۱	۰	۱	۲	۳
y	□	۱	۰	□	۴



نمودار ۱۸ـ۱

ب) x نقطه‌ی رأس، $\frac{-b}{۲a}$ ، برابر چه عددی است؟

ج) علامت نمودار در تمام دامنه به‌جز $x = ۱$ چیست؟ چرا؟

د) با توجه به شکل ۱۸ـ۱ علامت جدول ۲۱ـ۱ را مشخص کنید.

جدول ۲۱ـ۱

x	$x < ۱$	۱	$x > ۱$
P	□	۰	□

نتیجه: هرگاه سه‌جمله‌ای درجه دوم دارای ریشه‌ی مضاعف (دو ریشه‌ی یکسان) باشد. همواره علامت سه‌جمله‌ای موافق ضریب $x^۲$ یعنی علامت a می‌باشد.

جدول ۲۲ـ۱

x	$-\infty$ $\quad x < x_۱$	$x_۱ = x_۲ = \frac{-b}{۲a}$	$x > x_۲$
$ax^۲ + bx + c$	موافق علامت a	۰	موافق علامت a

مثال ۳: عبارت مقابل را تعیین علامت کنید.

$$P = -۴ + ۴x - x^۲$$

حل: عبارت P را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$P = ۰ \Rightarrow -۴ + ۴x - x^۲ = ۰$$

ـ . را پیدا می‌کنیم :

$$= \square\ b^۲ - ۴ac = ۴^۲ - ۴(-۱)(-۴) = ۱۶ - ۱۶ = ۰$$

ـ معادله ریشه‌ی مضاعف دارد (زیرا ۰ □ =)

$$\Rightarrow \square = ۰$$

ـ ریشه‌ی معادله برابر است با :

$$x_۱ = x_۲ = \frac{-b}{۲a} = \frac{-۴}{۲(-۱)} = ۲$$

چون ضریب $x^۲$ منفی است علامت سه‌جمله‌ای همواره منفی می‌شود، مگر در $x = ۲$ که برابر صفر است.

جدول ۲۳ـ۱

x	$x < ۲$	۲	$x > ۲$
$-۴ + ۴x - x^۲$	−	۰	−

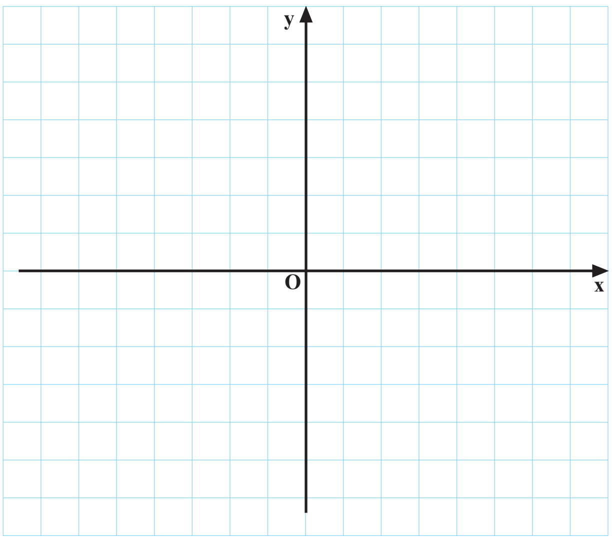
فعالیت ۹ـ۱

الف : نمودار سهمی $y = x^۲ + ۲$ را با تکمیل جدول ۲۴ـ۱ رسم کنید.

ب : از این‌که نمودار سهمی بالای محور x ها قرار می‌گیرد چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

جدول ۲۴ـ۱

x	−۲	−۱	۰	۱	۲
y	۶	□	۲	۳	□



نمودار ۱۹ـ۱

ج : با توجه به نمودار ۱۹ـ۱ علامت جدول ۲۵ـ۱ را تعیین کنید.

جدول ۲۵ـ۱

x	به‌ازای هرمقدار x
$x^۲ + ۲$	

نتیجه: هرگاه در سه‌جمله‌ای درجه دوم ۰ > □ ، معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد و علامت معادله همواره موافق علامت a خواهد بود.

جدول ۲۶ـ۱

x	به‌ازای هرمقدار x
$ax^۲ + bx + c$	موافق علامت ضریب $x^۲$

مثال ۴: معادله‌ی مقابل را تعیین علامت کنید.

$$P = -۷x^۲ + x - ۱$$

حل: عبارت را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$P = ۰ \Rightarrow -۷x^۲ + x - ۱ = ۰$$

ـ مقادیر a ، b و c را مشخص می‌کنیم : $a = -7$ ، $b = 1$ و $c = -1$

ـ . یا مبیّن معادله را به‌دست می‌آوریم : $\square = b^2 - 4ac = 1^2 - 4(-7)(-1) = 1 - 28 = -27$

چون $\square < 0$ است پس علامت چندجمله‌ای موافق a است.

جدول ۲۷ــ۱

x	به‌ازای هرمقدار x		
$-7x^2 + x - 1$	−	−	−

خلاصه‌ی بحث

در تعیین علامت عبارت درجه‌ی دوم $ax^2 + bx + c$ ، $a \neq 0$

الف : اگر معادله دارای دو ریشه باشد طبق جدول ۲۸ــ۱ تعیین علامت می‌شود.

جدول ۲۸ــ۱

$\square > 0$

x		x_1		x_2	
P	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

ب : اگر معادله دو جواب یکسان (ریشه مضاعف) داشته باشد مطابق جدول ۲۹ــ۱ تعیین علامت می‌شود.

جدول ۲۹ــ۱

$\square = 0$

x		$x_1 = x_2$	
P	موافق علامت a	0	موافق علامت a

پ : اگر معادله ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد طبق جدول ۳۰ــ۱ تعیین علامت می‌شود.

جدول ۳۰ــ۱

$\square < 0$

x	به‌ازای هر مقدار x
P	موافق علامت a

تمرین

عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

۱) $P=-۶x^{۲}-x+۱$

۲) $P=\frac{۴-x^{۲}}{x-۱}$

۳) $P=-(x+۲)^{۲}+۱$

۴) $P=\frac{x^{۲}-۵x+۶}{x-x^{۲}}$

۵) $P=(-۳x+۴)^{۲}(-۴x^{۲}+۷x)$

۳ـ۲ـ۱ـ نامعادله: هر نامساوی را که شامل یک یا چند متغیر باشد نامعادله می‌نامند. برای حل نامعادلات، یعنی برای پیدا کردن اعدادی که با جایگزین کردن آن‌ها به جای متغیرها نامعادله تبدیل به نامساوی درست گردد.

شکل ۲۰ـ۱

مثال ۱: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کنید :

$$\frac{x^۲-۱}{x+۳}<۰$$

حل: ابتدا هریک از عبارات جبری $x^۲-۱$ و $x+۳$ را تعیین علامت می‌کنیم، سپس برای هریک از بازه‌های $x<-۳$ و $-۳<x<-۱$ و $-۱<x<۱$ و $x>۱$ علامت‌های $x^۲-۱$ و $x+۳$ را درهم ضرب می‌کنیم.

$$x^۲-۱=۰\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow x=\pm\sqrt{۱}\Rightarrow x=\pm۱$$
$$x+۳=۰\Rightarrow x=-۳$$

جدول ۳۱ـ۱

x		-۳		-۱		۱	
$x^۲-۱$	+		+	۰	−	۰	+
$x+۳$	−	۰	+		+		+
$\frac{x^۲-۱}{x+۳}$	−	تعریف نشده	+	۰	−	۰	+

بنابراین مجموعه جواب برابر است با :

$$\{x|x\in\mathbb{R} \text{ و } x<-۳ \text{ یا } -۱<x<۱\}$$

مثال ۲: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$\frac{x^۲-۲x+۲}{x}<۱$$

حل: همه‌ی جملات را به طرف چپ می‌آوریم :

$$\frac{x^۲-۲x+۲}{x}-۱<۰$$

ـ مخرج مشترک می‌گیریم :

$$\frac{x^۲-۲x+۲-x}{x}<۰\Rightarrow\frac{x^۲-۳x+۲}{x}<۰$$

ــ با مساوی صفر قرار دادن صورت و مخرج کسر ریشه‌های آن‌ها را می‌یابیم :

$$\text{x}^{۲}-۳\text{x}+۲=(\text{x}-۱)(\text{x}-۲)=۰\Rightarrow$$

$$\begin{cases}\text{x}-۱=۰\Rightarrow \text{x}=۱\\ \text{x}-۲=۰\Rightarrow \text{x}=۲\end{cases} \text{ و } \text{x}=۰$$

پس از رسم جدول، صورت و مخرج کسررا تعیین علامت کرده و با ضرب کردن علامت $\text{x}^{۲}-۳\text{x}+۲$ و x در هریک از بازه‌های $\text{x}<۰$ و $۰<\text{x}<۱$، $۱<\text{x}<۲$ و $\text{x}>۲$ علامت کل نامعادله را تعیین می‌کنیم و در آخر با توجه به علامت نامعادله، مقادیر منفی را به عنوان جواب می‌پذیریم.

جدول ۳۲ــ۱

x		۰		۱		۲	
$\text{x}^{۲}-۳\text{x}+۲$	+		+	۰	−	۰	+
x	−	۰	+		+		+
$\dfrac{\text{x}^{۲}-۳\text{x}+۲}{\text{x}}$	−	تعریف نشده	+	۰	−	۰	+

جواب : $\{\text{x}|\text{x}\in\mathbb{R}\ ,\ \text{x}<۰ \text{ یا } ۱<\text{x}<۲\}$

مثال ۳: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کنید.

$$\frac{\text{x}+۵}{\text{x}-۳}>\frac{\text{x}-۳}{\text{x}+۵}$$

حل: همه‌ی جملات را به طرف چپ معادله می‌آوریم ؛

$$\frac{\text{x}+۵}{\text{x}-۳}-\frac{\text{x}-۳}{\text{x}+۵}>۰$$

ــ مخرج مشترک می‌گیریم ؛

$$\Rightarrow\frac{(\text{x}+۵)^{۲}-(\text{x}-۳)^{۲}}{(\text{x}-۳)(\text{x}+۵)}>۰$$

ــ صورت کسر را به کمک اتحاد مزدوج و یا مربع دو جمله‌ای ساده می‌کنیم ؛

$$\frac{(\text{x}+۵+\text{x}-۳)(\text{x}+۵-(\text{x}-۳))}{(\text{x}-۳)(\text{x}+۵)}>۰$$

$$\Rightarrow\frac{(۲\text{x}+۲)(۸)}{(\text{x}-۳)(\text{x}+۵)}>۰$$

ــ با مساوی صفر قراردادن صورت و مخرج، ریشه‌های عبارت را می‌یابیم ؛

$$۲\text{x}+۲=۰\Rightarrow \text{x}=-۱$$

$$(\text{x}-۳)(\text{x}+۵)=۰\Rightarrow\begin{cases}\text{x}-۳=۰\Rightarrow \text{x}=۳\\ \text{یا}\\ \text{x}+۵=۰\Rightarrow \text{x}=-۵\end{cases}$$

پس از رسم جدول صورت و مخرج کسر را تعیین علامت کرده و با ضرب‌کردن علامت صورت و مخرج در هر یک از بـازه‌هـای $\text{x}<-۵$ ، $-۵<\text{x}<-۱$ ، $-۱<\text{x}<۳$ و $\text{x}>۳$

جدول ۳۳ــ۱

x		−۵		−۱		۳	
$۸(۲\text{x}+۲)$	−		−	۰	+		+
$\text{x}-۳$	−		−		−	۰	+
$\text{x}+۵$	−	۰	+		+		+
$\dfrac{۸(۲\text{x}+۲)}{(\text{x}-۳)(\text{x}+۵)}$	−	نامعین	+	۰	−	نامعین	+

علامت عبارت را در هر یک از این بازه‌ها مشخص می‌نمایم و در ستون آخر با توجه به علامت نامعادله ریشه‌هایی که در فواصل علائم مثبت قرار دارد به عنوان جواب می‌پذیریم.

جواب : $\{x | x \in \mathbb{R}$ و $-۵ < x < -۱$ یا $x > ۳\}$

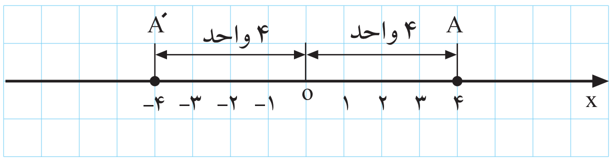
تمرین

نامعادله‌ی زیر را حل کنید.

$$۵x^{۲} + x < +۶$$

۴ــ۲ــ۱ــ قدرمطلق: بر روی شکل ۲۱ــ۱ دو نقطه‌ی A و A' را به مختصات ۴ و ۴− مشاهده می‌کنید.

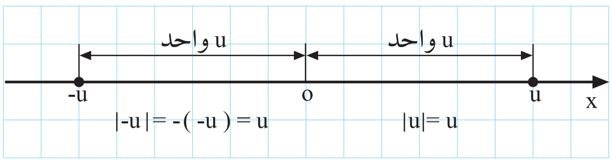
ــ فاصله‌ی این دو نقطه از مبدأ (نقطه‌ی O) قدرمطلق این اعداد نامیده می‌شود که برابر با عدد ۴ است.



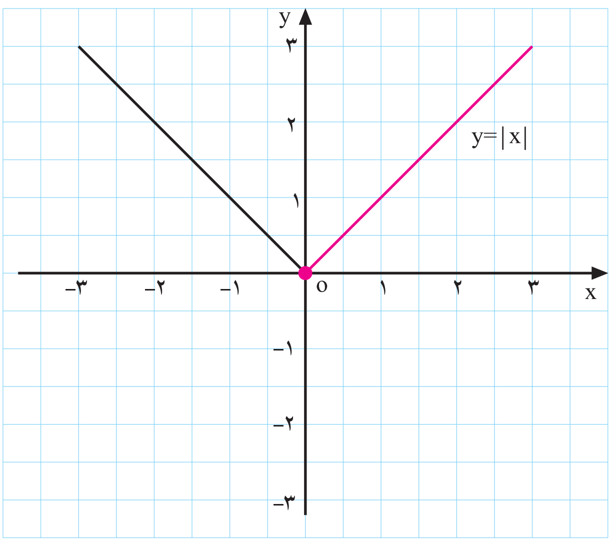
شکل ۲۱ــ۱

$|-۴| = -(-۴) = ۴$ و $|-۴| = ۴$

ــ این مطلب را به زبان ریاضی می‌توان به صورت شکل ۲۲ــ۱ نوشت.



شکل ۲۲ــ۱



شکل ۲۳ــ۱

به طور کلی برای نمایش فاصله‌ی یک نقطه از صفر که در آن جهت مهم نمی‌باشد از قدرمطلق استفاده می‌کنیم. قدرمطلق عدد x را که با علامت $|x|$ نمایش می‌دهند به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq ۰ \\ -x & x < ۰ \end{cases}$$

مثال ۱: قدرمطلق عبارت روبه‌رو را بیابید.

$$\left|\sqrt{۲}-۱\right|$$

حل: $\sqrt{۲}$ بزرگ‌تر از یک است، پس می‌نویسیم :

$$\sqrt{۲}>۱$$

ــ $\sqrt{۲}-۱$ عددی مثبت است، یعنی :

$$\sqrt{۲}-۱>۰$$

ــ بنابراین قدرمطلق آن $(\sqrt{۲}-۱)$ خودش می‌باشد.

$$\underbrace{\left|\sqrt{۲}-۱\right|}_{x>۰}=\underbrace{\sqrt{۲}-۱}_{x}$$

مثال ۲: قدرمطلق عبارت روبه‌رو را بیابید.

$$\left|\sqrt{۵}-۳\right|$$

حل: عدد $\sqrt{۵}$ از عدد ۳ کوچک‌تر است، یعنی :

$$\sqrt{۵}<۳$$

ــ حاصل عبارت $\sqrt{۵}-۳$ منفی است، پس داریم :

$$\sqrt{۵}-۳<۰$$

$\sqrt{۵}-۳$ عدد منفی است بنابراین برای یافتن قدرمطلق آن باید در عدد منفی یک ضرب شود.

$$\underbrace{\left|\sqrt{۵}-۳\right|}_{x<۰}=-(\underbrace{\sqrt{۵}-۳}_{x})=۳-\sqrt{۵}$$

مثال ۳: اگر $x>۳$ باشد قدرمطلق عبارت روبه‌رو را به دست آورید.

$$|x-۳|$$

حل: چون $x>۳$ می‌باشد، پس :

$$x-۳>۰$$

بنابراین قدرمطلق آن برابر خودش می‌باشد :

$$|x-۳|=x-۳$$

مثال ۴: اگر $x<-۱$ باشد قدرمطلق عبارت مقابل را به دست آورید.

$$|x+۱|\ ,\ \ x<-۱$$

حل: چون $x<-۱$ است، داریم :

$$x+۱<۰$$

ــ برای محاسبه‌ی قدرمطلق عبارت داخل آن قرینه می‌گردد :

$$|x+1| = -(x+1) = -x-1$$
$$\Rightarrow |x+1| = -x-1 \ , \ x < -1$$

مثال ۵: اگر $x < 2$ باشد حاصل عبارت مقابل را بیابید :

$$|2-x| - |x-3|$$

حل: چون $x < 2$ بنابراین $2 - x > 0$، که پس از بیرون آمدن از قدرمطلق تغییر نمی‌کند.

$$|2-x| = 2-x$$

ــ عبارت $x - 3$ منفی است، پس از بیرون آمدن از قدرمطلق در منفی ضرب می‌شود.

$$|x-3| = -(x-3) = -x+3$$

ــ حاصل عبارت برابر است با :

$$|2-x| - |x-3| = 2-x+x-3 = -1$$

بعضی خواص قدرمطلق اعداد حقیقی

خاصیت اول قدر مطلق:

$$\sqrt{\mathbf{x}^2} = |\mathbf{x}|$$

$$\sqrt{(-5)^2} = |-5| = 5 \ , \ \sqrt{3^2} = |3| = 3$$

مثال ۶: حاصل عبارت‌های روبه‌رو را بیابید.

$$\sqrt{x^2+2x+1} + |x-1| \ , \ -1 < x < 1$$

حل: چون $-1 < x < 1$، $x+1$ مثبت و $x-1$ منفی است.

$$\sqrt{(x+1)^2} + |x-1| = |x+1| + |x-1|$$

آنگاه داریم :

$$= x+1-(x-1) = x+1-x+1 = 2$$

نکته‌ی ۱: همواره برای هر عدد حقیقی x داریم :

$$|x|^2 = x^2$$

مثال ۷: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$|x-2| < 3$$

حل: با استفاده از نکته‌ی ۱ می‌توان نوشت :

$$(|x-2|)^2 = (x-2)^2$$

ــ دو طرف نامعادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(|x-۲|)^۲ < ۳^۲ \Rightarrow (x-۲)^۲ < ۳^۲$$

ــ همه‌ی جملات نامعادله را به یک طرف انتقال می‌دهیم :

$$\Rightarrow (x-۲)^۲ - ۳^۲ < ۰$$

با استفاده از اتحاد مزدوج داریم :

$$\Rightarrow (x-۲-۳)(x-۲+۳) < ۰$$

ــ نامعادله به دو عامل ضرب تبدیل می‌شود.

$$\Rightarrow (x-۵)(x+۱) < ۰$$

ــ هر یک از عامل‌های نامعادله را برابر صفر قرار می‌دهیم :

ــ ریشه را به دست می‌آوریم :

$$x-۵=۰ \Rightarrow x=۵$$

$$x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$$

ــ ریشه‌ها را به ترتیب نزولی به صعودی در جدول ۳۴ــ۱ می‌نویسیم.

ــ عوامل مربوط به دو ریشه را تعیین علامت می‌کنیم.

ــ علامت کلی نامعادله را از ضرب علامت‌های هر یک از ستون عمودی به‌دست می‌آوریم.

جدول ۳۴ــ۱

x	$x<-۱$	-۱	$-۱<x<۵$	۵	$x>۵$
$x+۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$x-۵$	$-$		$-$	۰	$+$
$(x-۵)(x+۱)$	$+$	۰	$-$ جواب	۰	$+$

ــ با توجه به شرط نامعادله، مجموعه جواب برابر با :

$$\{x | x \in \mathbb{R} \text{ و } -۱ < x < ۵\} = (-۱,۵)$$

مثال ۸: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید :

$$|۲x-۱| > |x+۲|$$

حل: دو طرف نامعادله را به توان دو می‌رسانیم :

$$(۲x-۱)^۲ > (x+۲)^۲$$

ــ همه‌ی عبارات را به یک طرف انتقال می‌دهیم :

$$\Rightarrow (۲x-۱)^۲ - (x+۲)^۲ > ۰$$

ــ با استفاده از اتحاد مزدوج داریم :

$$\Rightarrow (۲x-۱-(x+۲))(۲x-۱+x+۲) > ۰$$

ــ نامعادله را به حاصل ضرب دو عامل تبدیل می‌کنیم :

$$\Rightarrow (x-۳)(۳x+۱) > ۰$$

ــ ریشه‌های هر یک از عامل‌های نامعادله را به دست می‌آوریم.

$$x-۳=۰ \Rightarrow x=۳$$

$$۳x+۱=۰ \Rightarrow ۳x=-۱ \Rightarrow x=\frac{-۱}{۳}$$

ــ ریشه را به ترتیب صعودی در جدول ۳۵ــ۱ می‌نویسیم :

ــ تک تک عوامل را تعیین علامت می‌کنیم.

ــ علامت کلی نامعادله را از ضرب علامت‌های هر یک از ستون‌های عمودی به دست می‌آوریم :

جدول ۳۵ــ۱

x		$-\frac{۱}{۳}$		۳	
$x-۳$	$-$		$-$	۰	$+$
$۳x+۱$	$-$	۰	$+$		$+$
$(x-۳)(۳x+۱)$	$+$ جواب	۰	$-$	۰	$+$ جواب

ــ با توجه به جهت علامت نامعادله مجموعه جواب برابر است با :

$$م.ج = \left\{x \middle| x \in \mathbb{R}, x < \frac{-۱}{۳} \text{ یا } x > ۳\right\}$$

خاصیّت دوم قدرمطلق

۲) $|x| = |-x|$ یا $|a-b| = |b-a|$

مثال ۹: معادله‌ی مقابل را حل کنید :

$$|x+۳| = ۴$$

حل: فاصله‌ی $x+۳$ از صفر برابر ۴ واحد می‌باشد، بنابراین $x+۳$ می‌تواند ۴ یا ۴− باشد.

$$|x+۳| = ۴ \Rightarrow x+۳ = \pm ۴ \Rightarrow$$

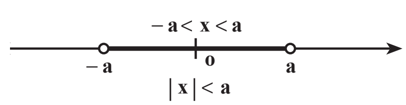
$$\begin{cases} x+۳=۴ \Rightarrow x=۴-۳ \Rightarrow x=۱ \\ \text{یا} \\ x+۳=-۴ \Rightarrow x=-۴-۳ \Rightarrow x=-۷ \end{cases}$$

ــ مجموعه‌ی جواب‌ها برابر است با :

$$\{-۷, ۱\}$$

خاصیت سوم قدرمطلق:

$|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$ (a عدد حقیقی و مثبت)



شکل ۲۴ــ۱

مثال ۱۰: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید. $|x-۲|<۱$

حل: فاصله $x-۲$ از صفر، کوچک‌تر از ۱ می‌باشد. $|x-۲|<۱$

ــ $x-۲$ کوچک‌تر از ۱ و بزرگ‌تر از ۱- می‌باشد (طبق خاصیت سوم قدرمطلق) $-۱<x-۲<۱$

ــ به همه طرف‌های نامعادله عدد ۲ را اضافه می‌کنیم : $\Rightarrow -۱+۲<x-۲+۲<۱+۲$

ــ پس جواب نامعادله برابر است، با : $\Rightarrow ۱<x<۳$

> **نکته‌ی ۲:** $|a-b|$ فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی b و a را روی محور نشان می‌دهد، بدون آن‌که مشخص کند کدام بزرگ‌تر می‌باشد. مثلاً فاصله‌ی دو نقطه‌ی ۱ و ۷ برابر ۶ است.
>
> $|۱-۷|=۶$
>
> ــ فاصله‌ی دو نقطه‌ی ۲ و ۵ برابر با ۳ است.
>
> $|۵-۲|=۳$

مثال ۱۱: نامعادله‌های روبه‌رو را در قالب یک جمله‌ی کوتاه بنویسید.

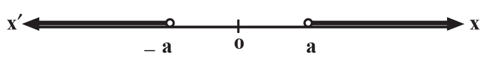
الف) $|x-۲|<۱$

ب) $|x-۱۰|>۵$

جواب الف: مجموعه‌ی همه‌ی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها از ۲ کمتر از ۱ می‌باشد.

جواب ب: همه‌ی نقاطی که فاصله‌ی آن‌ها از ۱۰ از ۵ بیش‌تر است.

خاصیت چهارم قدرمطلق: **$|x|>a$ 4 $x>a$ یا $x<-a$ (a عدد حقیقی و مثبت)**



شکل ۲۵ـ۱

مثال ۱۲: نامعادله‌ی مقابل را حل کنید. $|x-۳|>۲$

حل: در این مثال می‌خواهیم همه‌ی اعدادی را که فاصله‌ی آن‌ها از ۳ بیش‌تر از ۲ است مشخص کنیم ؛ بنابر خاصیت چهارم قدرمطلق :

$\Rightarrow x-۳>۲$ یا $x-۳<-۲$
2

$x>۵$ یا $x<۱$

ــ بنابر این مجموعه جواب معادله برابر است با : $\{x|x\in\mathbb{R}$ و $x>۵$ یا $x<۱\}=$ م.ج

تمرین

۱ــ حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$\sqrt{(۴-\sqrt{۵})^{۲}}+|۲-\sqrt{۵}|-|-۳|=?$$

۲ــ نامعادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $|۵x-۷|>۴$

۲) $|۳x-۱|<|x+۲|$

۳) $|۱-۷x|<۳$

۳ــ عبارات زیر را با قدرمطلق نشان دهید.

الف : مجموعه‌ی اعدادی که فاصله‌ی آن‌ها از ۲− بیش‌تر از ۳ باشد.

جواب: $|x+۲|>۳$

ب : مجموعه‌ی اعدادی که فاصله‌ی آن‌ها از ۱ کمتر از ۷ باشد.

ج : مجموعه‌ی اعدادی که فاصله‌ی آن‌ها از ۱− برابر با ۲ باشد.

۴ــ اگر $۰ \le x < ۱$ باشد حاصل عبارت زیر را بیابید.

$$|x|+|x-۱|=?$$

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۲)

۱ــ عبارت‌های زیر را تعیین علامت کنید.

الف)

$$p = \frac{۲x + ۱}{۳x - ۲} + ۴$$

ب)

$$p = ۴x^{۲} - ۷x + ۳$$

۲ــ نامعادله‌های زیر را حل کنید.

۱) $\frac{۳}{۲x - ۵} > ۴$

۲) $x^{۲} < +۱۰x - ۹$

۳) $۲ \leq \frac{۵}{۴}x - ۱ < ۷$

۴) $|۳x - ۱| \geq ۴$

۵) $|-۵x + ۱| < ۲$

بخش دوم

تابع و مفاهیم آن

هدف کلی بخش

آشنایی با ویژگی‌ها و شیوه‌های مختلف نمایش یک تابع، عملیات روی تابع‌ها و کاربردهای آن در زمینه‌های مختلف

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	محور اعداد
دوم	بازه
سوم	تابع
چهارم	دامنه‌ی توابع
پنجم	چند تابع ویژه
ششم	عملیات روی تابع‌ها
هفتم	ترکیب دو تابع

بخش دوم

فصل اول

محور اعداد

هدف کلی

مطالبی مربوط به محور اعداد و محور مختصات

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ محور اعداد را تعریف کند ؛

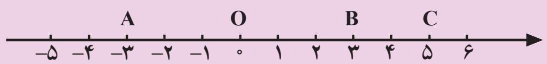
۲ــ دستگاه مختصات را رسم کند ؛

۳ــ طول پاره‌خط را با استفاده از مختصات محاسبه کند ؛

۴ــ قرینه‌ی یک نقطه را نسبت به محور xها، yها و مبدأ مختصات پیدا کند.

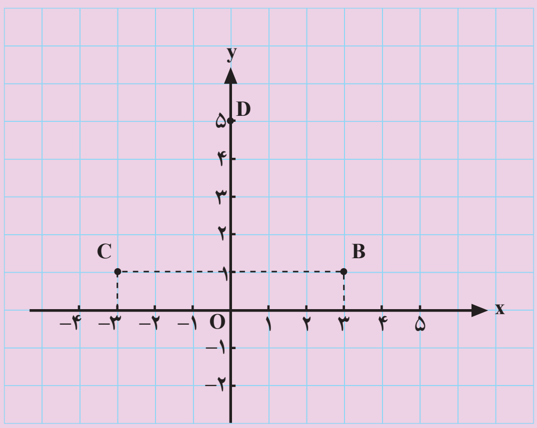
پیش آزمون (۱)

محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون (۱)



شکل ۱ــ۲

$x_A =$ $\qquad$ $x_B =$ $\qquad$ $x_C =$



شکل ۲ــ۲

۱ــ x نقطه‌های روی محور را تعیین کنید. (شکل ۱ــ۲).

۲ــ اگر $x_A = 5$ و $x_B = -3$ باشد، $\overline{AB}$ و $\overline{BA}$ را حساب کنید و بگویید چه رابطه‌ای بین آن‌ها وجود دارد؟

۳ــ الف) مختصات B، C و D را مشخص کنید (شکل ۲ــ۲).

ب) طول پاره‌خط‌های DB ، CD و CB را به‌دست آورید.

ج) مساحت مثلث DBC را محاسبه کنید.

۴ــ هرگاه $A\left|\begin{matrix}0\\3\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}-4\\0\end{matrix}\right.$ ، $C\left|\begin{matrix}-3\\-3\end{matrix}\right.$ و $D\left|\begin{matrix}-4\\4\end{matrix}\right.$ ،

الف) کدام‌یک از نقاط داده شده روی محور xها و کدام یک روی محور yها قرار دارد؟

ب) کدام‌یک از نقاط روی نیمساز ربع دوم و چهارم و کدام یک روی نیمساز ربع اول و سوم قرار دارد؟

ج) طول پاره‌خط CD را حساب کنید.

۵ــ الف) نقطه‌های $A\left|\begin{matrix}۲\\۸\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}۸\\۴\end{matrix}\right.$ را روی دستگاه محورهای مختصات (شکل ۳ــ۲) مشخص کنید.

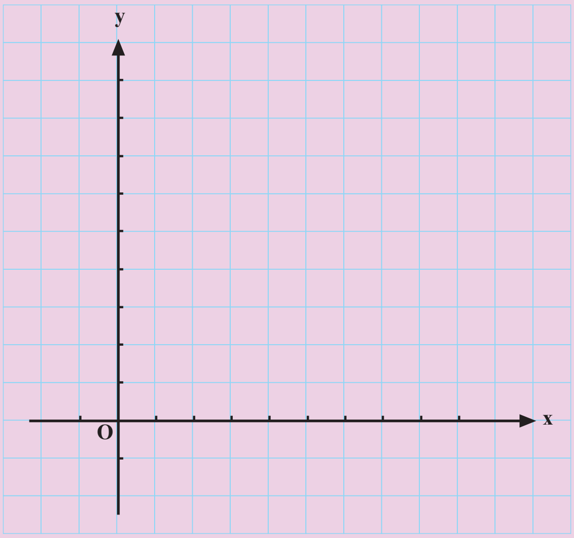
ب) مختصات نقطه‌ی M، وسط پاره‌خط AB را بنویسید.

ج) طول پاره‌خط OM را محاسبه کنید.

۶ ــ مختصات دو نقطه‌ی A و B در مقابل مفروض است.

هرگاه $A = B$ مطلوب است مقدار $۲a + ۳b$.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱)



شکل ۳ــ۲

$A(a - b,۷)$ و $B(۳,a + b)$

۱ــ۲ــ محور اعداد

از سال‌های گذشته به یاد دارید که محور عبارت است از «یک خط راست جهت‌دار که روی آن نقطه‌ای به عنوان مبدأ و طولی به عنوان واحد اندازه‌گیری تعیین شده باشد». جهت محور را نسبت به مبدأ از طرف چپ به راست مثبت و از طرف راست به چپ منفی فرض می‌کنند.

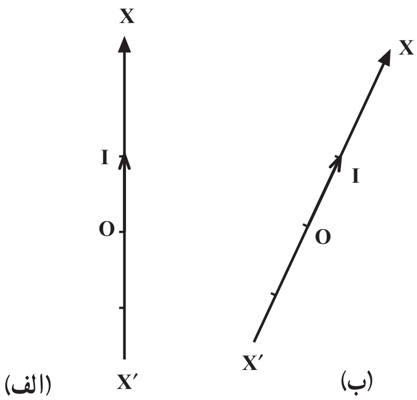
هر عدد حقیقی را با یک نقطه از محور و هر نقطه از محور را با یک عدد حقیقی متناظر می‌کنیم. مثلاً مبدأ O متناظر با عدد صفر و نقطه‌ی واحد (I) متناظر با عدد یک است (شکل ۵ــ۲).

شکل ۴ــ۲ــ دکارت

محور ۵ــ۲

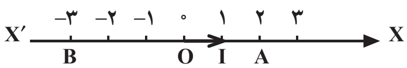
نکته: محور اعداد به صورت افقی، عمودی و مایل نیز می‌تواند باشد (شکل ۶ــ۲).

هرگاه محوری افقی باشد، در سمت راست مبدأ آن اعداد مثبت و در سمت چپ اعداد منفی است.



محور۶ــ۲

مثال ۱: در شکل ۷ــ۲ X نقطه‌ی A برابر ۲ و X نقطه‌ی B برابر ۳- را مشاهده می‌کنید.



محور ۷ــ۲

۱ــ۱ــ۲ــ طول پاره‌خط از یک محور: اگر X_A و X_B مختص نقاط A و B بر روی محور X′OX باشد. اندازه‌ی جبری پاره‌خط $\overline{AB}$ برابر است با :

$$\overline{AB} = X_B - X_A \quad (*)$$

اثبات فرمول(*) :

محور ۸ــ۲

با توجه به شکل ۸ــ۲ داریم :

$$\overline{OB} = \overline{OA} + \overline{AB} \Rightarrow \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$$

ــ از طرفی مقدار OA و OB برابر است با :

$\overline{OB} = X_B$ و $\overline{OA} = X_A$

ـ طول پاره‌خط $\overline{AB}$ از فرمول مقابل به‌دست می‌آید :

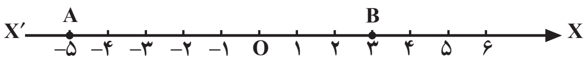
$$\overline{AB} = X_B - X_A$$

مثال ۱: اگر $X_A = -۵$ و $X_B = ۳$:

الف) نقاط A و B را روی محور ۹ـ۲ نشان دهید.

ب) اندازه‌ی جبری $\overline{AB}$ را حساب کنید :

جواب الف)



محور ۹ـ۲

جواب ب)

$$\overline{AB} = X_B - X_A = ۳-(-۵) = ۳+۵$$
$$\Rightarrow \overline{AB} = ۸$$

مثال ۲: نقاط نظیر $\sqrt{۵}$ و ۲- را روی محور اعداد ۱۰ـ۲ نشان دهید.

حل ۲:

محور ۱۰ـ۲

حل: مقدار $\sqrt{۵}$ را از سمت راست صفر و مقدار ۲- را از سمت چپ صفر روی محور جدا می‌کنیم.

مثال ۳: هرگاه $\overline{AB} = ۱۱$ و $X_A = ۵$ باشد مقدار X_B را بیابید.

حل ۳:

$$\overline{AB} = X_B - X_A \Rightarrow ۱۱ = X_B - ۵$$
$$\Rightarrow X_B = ۱۱+۵ \Rightarrow X_B = ۱۶$$

مثال ۴: هرگاه $X_A = ۴$ و $X_B = -۷$ باشد $\overline{BA}$ چه‌قدر است؟

حل ۴:

$$\overline{BA} = X_A - X_B = ۴-(-۷) \Rightarrow \overline{BA} = ۱۱$$

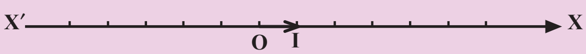
تمرین

۱ـ نقاط نظیر ۵- ، ۷- ، ۳ ، $\frac{۱۱}{۳}$ و $\sqrt{۷}$ را روی محور اعداد حقیقی (۱۱ـ۲) نمایش دهید.

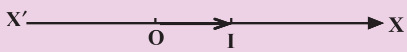
۲ـ هرگاه $\overline{AB} = ۷$ و $X_B = ۳$ باشد X_A را به‌دست آورید و نقطه‌های A و B را روی محور X′OX (۱۲ـ۲) نشان دهید.

۳ـ آیا محور اعداد حقیقی همواره به صورت افقی است؟ مثال بزنید.

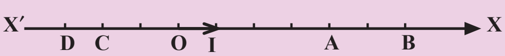
۴ـ نقاط A ، B ، C و D روی محور X′OX (۱۳ـ۲) مشخص شده است. به سؤال‌های ذیل پاسخ دهید.



محور ۱۱ـ۲



محور ۱۲ـ۲



محور ۱۳ـ۲

الف) X_D را به‌دست آورید.

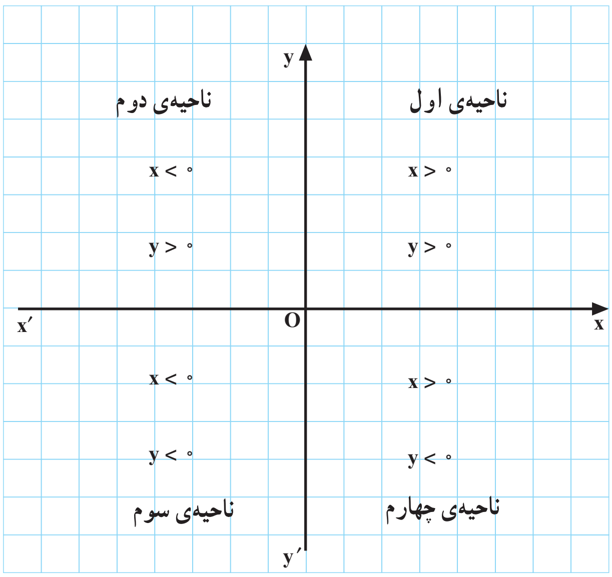
ب) اندازه‌ی جبری پاره‌خط $\overline{DA}$ را حساب کنید.

ج) طول پاره‌خط $\overline{AB}$ و $\overline{BA}$ را به‌دست آورید.

د) آیا همواره می‌توان گفت : $\overline{BA}+\overline{AB}=0$ ؟

۲ــ۱ــ۲ــ محورهای مختصات قائم: هرگاه از نقطه‌ی O بر محور $x'Ox$ ، محور $y'Oy$ را عمود رسم کنیم این دو محور و نقطه‌ی O را دستگاه مختصات قائم می‌گویند (شکل ۱۴ــ۲). دستگاه مختصات صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کند (شکل ۱۴ــ۲).

محور $x'Ox$ را محور xها و محور $y'Oy$ را محور yها می‌نامیم.



شکل ۱۴ــ۲

شکل ۱۵ــ۲

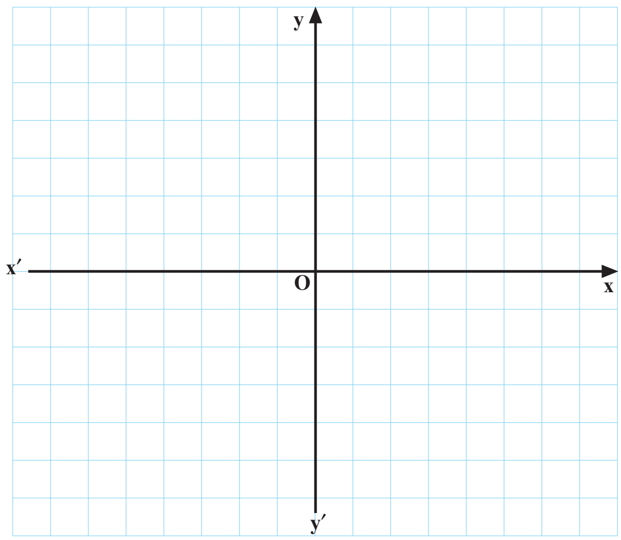
فعالیت ۱ـ۲

اگر A(۳,۳) و B(−۳,۳) و C(−۳,−۳) و D(۳,−۳) رأس‌های یک مستطیل باشند،

الف) مستطیل ABCD را در دستگاه محورهای مختصات (۱۶ـ۲) مشخص کنید.

ب) ناحیه‌ای را که در ربع سوم قرار دارد با رنگ قرمز سایه بزنید.

ج) قرینه‌ی A نسبت به محور yها کدام‌یک از رأس‌های مستطیل است؟



شکل ۱۶ـ۲

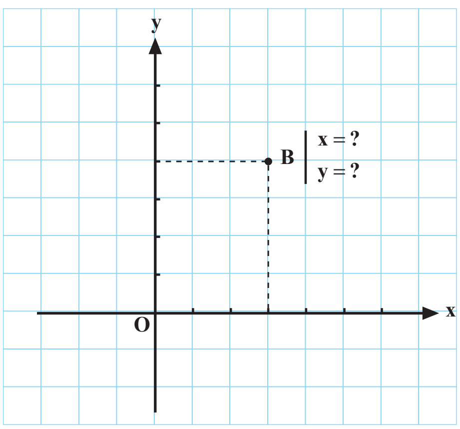
فعالیت ۲ـ۲

الف) مختصات نقطه‌ی B را در دستگاه مختصات ۱۷ـ۲ پیدا کنید.

ب) نقطه‌ی B را به O (مبدأ) وصل کرده به اندازه‌ی خود امتداد دهید. انتهای آن را نقطه‌ی B′ بنامید و مختصات آن را به‌دست آورید.

جواب : B′|

B و B′ نسبت به مبدأ مختصات چه رابطه‌ای دارند؟



شکل ۱۷ـ۲

فعالیت ۳ــ۲

الف) نقطه‌ی $A(-2,3)$ را روی محور مختصات ۱۹ــ۲ نشان دهید.

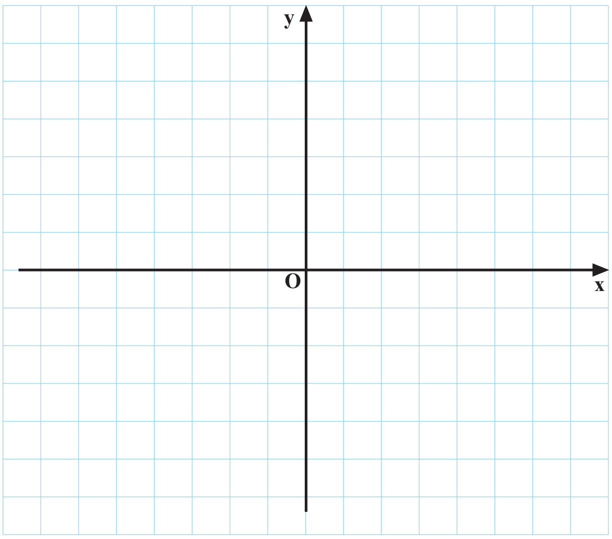
ب) قرینه‌ی A را نسبت به محور xها روی محور مختصات ۱۹ــ۲ نشان دهید و آن را A' بنامید.

ج) آیا مختصات نقطه‌ی A' ، $(-2,-3)$ خواهد شد؟

بلی ☐ خیر ☐

آیا نقطه‌ی A' را قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به محور xها می‌نامیم. بلی ☐ خیر ☐

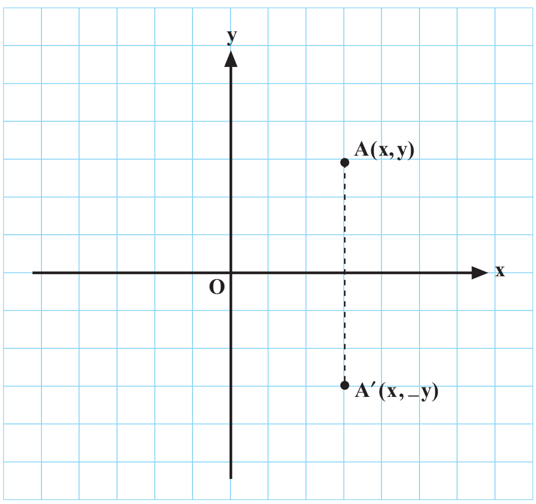
شکل ۱۸ــ۲



شکل ۱۹ــ۲

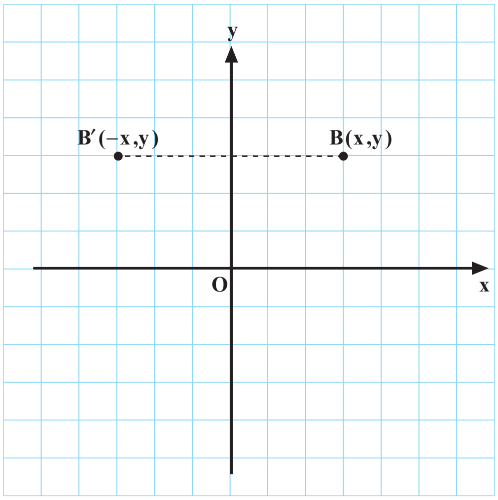
نتیجه: با توجه به سه فعالیت ۱ــ۲، ۲ــ۲ و ۳ــ۲ سه نتیجه‌ی زیر را می‌گیریم.

۱ــ قرینه‌ی نقطه‌ی $A(x,y)$ نسبت به محور xها نقطه‌ی $A'(x,-y)$ است (شکل ۲۰ــ۲).



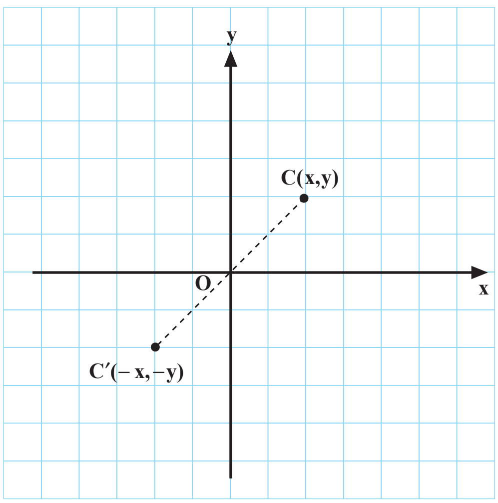
شکل ۲۰ــ۲

۲ــ قرینه‌ی نقطه‌ی $B(x,y)$ نسبت به محور yها، نقطه‌ی $B'(-x,y)$ است (شکل ۲۱ــ۲).



شکل ۲۱ــ۲

۳ــ قرینه‌ی نقطه‌ی $C(x,y)$ نسبت به مبدأ مختصات، نقطه‌ی $C(-x,-y)$ است (شکل ۲۲ــ۲).



شکل ۲۲ــ۲

مثال۱: قرینه‌ی نقطه‌ی $B(۷,-۳)$ را نسبت به مبدأ مختصات پیدا کنید.

حل ۱:

$$B(۷,-۳) \xrightarrow{\text{نسبت به مبدأ}} B'(-۷,۳)$$

مثال۲: الف) قرینه‌ی نقطه‌ی $A(-۸,-۴)$ را نسبت به محور xها پیدا کنید.

حل ۲:

$$A(-۸,-۴) \xrightarrow{\text{نسبت به xها}} A'(-۸,۴)$$

ب) قرینه‌ی نقطه‌ی $C(-۸,-۴)$ را نسبت به محور yها پیدا کنید.

$$C(-۸,-۴) \xrightarrow{\text{نسبت به yها}} C'(۸,-۴)$$

مثال ۳: عدد m را چنان به‌دست آورید که نقطه‌ی $B(۲m-۳,۵)$ روی محور $y'Oy$ باشد.

حل ۳: $B(x,y) \Rightarrow x=۰$ بر محورyها قرار دارد

$$\Rightarrow ۲m-۳=۰ \Rightarrow m=\frac{۳}{۲}$$

مثال ۴: عدد C را چنان به‌دست آورید که نقطه‌ی $D(۵,۲C-۱)$ روی محور $x'Ox$ باشد.

حل ۴: $C(x,y) \Rightarrow y=۰$ بر محور xها قرار دارد

$$\Rightarrow ۲C-۱=۰ \Rightarrow C=\frac{۱}{۲}$$

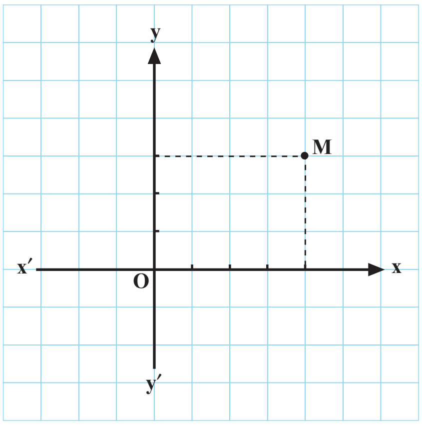
تمرین

۱ــ با توجه به محور مختصات شکل ۲۳ــ۲ کارهای زیر را انجام دهید.

الف) قرینه‌ی نقطه‌ی M نسبت به محور xها را روی شکل نشان دهید.

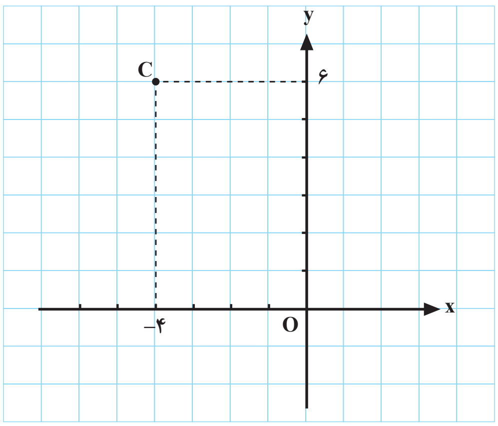
ب) قرینه‌ی نقطه‌ی M را نسبت به محورyها روی شکل نشان دهید.

ج) قرینه‌ی نقطه‌ی M را نسبت به مبدأ مختصات روی شکل ۲۳ــ۲ نشان دهید.



شکل ۲۳ــ۲

۲ــ با توجه به شکل ۲۴ــ۲، مقدار s و t را در $C(۲t-۳,۵S+۲)$ به‌دست آورید.

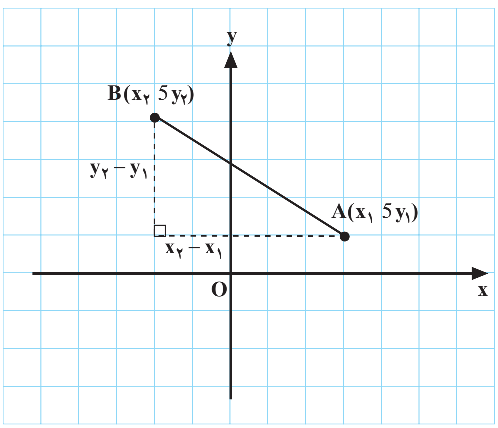


شکل ۲۴ــ۲

۳ــ۱ــ۲ــ طول پاره‌خط در صفحه:

اگر $A(x_۱ , y_۱)$ و $B(x_۲ , y_۲)$ دو نقطه‌ی دلخواه باشند، طول پاره‌خط AB (شکل ۲۵ــ۲) از رابطه‌ی زیر حساب می‌شود.

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$



شکل ۲۵ــ۲

مثال ۱: نقاط A و B در مقابل مفروض است. طول پاره‌خط AB و OB را بیابید.

$A(۳,-۴)$ و $B(۲,۵)$

حل: از رابطه‌ی طول پاره‌خط داریم :

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}$$

ــ x و y، نقاط A و B را در رابطه قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow AB=\sqrt{(۳-۲)^۲+(-۴-۵)^۲}=\sqrt{۱^۲+(-۹)^۲}$$

طول پاره‌خط AB برابر است با :

$$\Rightarrow AB=\sqrt{۱+۸۱}\Rightarrow AB=\sqrt{۸۲}$$

ــ طول پاره‌خط OB از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید.

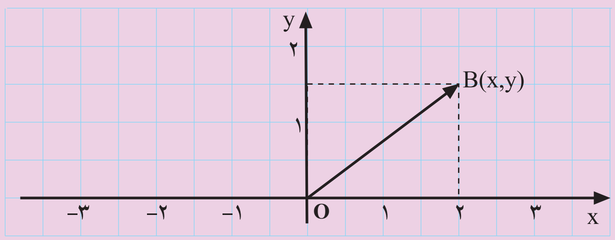
$$OB=\sqrt{{x_B}^۲+{y_B}^۲}=\sqrt{۲^۲+۵^۲}=\sqrt{۴+۲۵}$$

ــ طول OB برابر است با :

$$\Rightarrow OB=\sqrt{۲۹}$$

نتیجه: فاصله‌ی یک نقطه‌ی دلخواه مانند B(x,y) در شکل ۲۶ــ۲ تا مبدأ مختصات برابر است با :

$$OB=\sqrt{{x_B}^۲+{y_B}^۲}$$



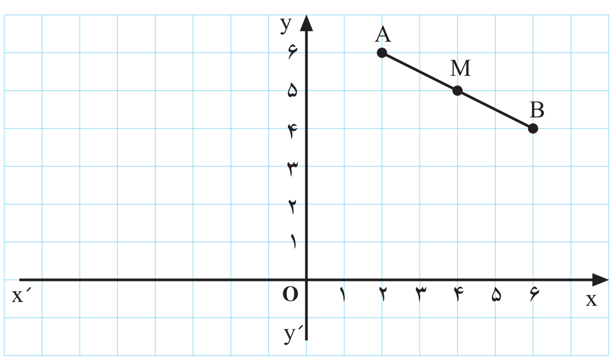
شکل ۲۶ــ۲

۴ــ۱ــ۲ــ مختصات وسط یک پاره‌خط در صفحه

فعالیت ۴ــ۲

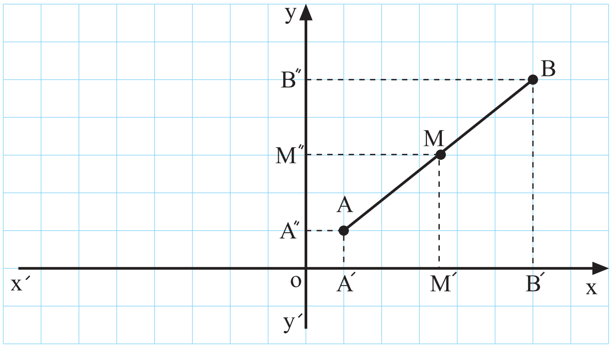
الف) مختصات نقاط A و B را پیدا کنید.

ب) هرگاه نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB باشد مقدار x_M و y_M را پیدا کنید (شکل ۲۷ــ۲).



شکل ۲۷ــ۲

ج) چه ارتباطی بین مختصات A و B با نقطه‌ی M وجود دارد؟



شکل ۲۸ــ۲

نتیجه: هرگاه $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ دو نقطه در صفحه باشند مختصات نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB از دو رابطه‌ی روبه‌رو به‌دست می‌آید (شکل ۲۸ــ۲).

$$x_M=\frac{x_۱+x_۲}{۲}$$

$$y_M=\frac{y_۱+y_۲}{۲}$$

از تساوی $\overline{A'M'}=\overline{M'B'}$ و $\overline{A''M''}=\overline{M''B''}$ چه نتیجه می‌گیرید؟ چرا؟

مثال ۱:

الف) اگر داشته باشیم : $A(۵,۶)$ و $B(۷,-۲)$ ، مختصات نقطه‌ی M، وسط پاره‌خط AB را محاسبه کنید.

حل الف)

$$\left.\begin{aligned}x_M&=\frac{x_۱+x_۲}{۲}=\frac{۵+۷}{۲}=۶\\ y_M&=\frac{y_۱+y_۲}{۲}=\frac{۶+(-۲)}{۲}=۲\end{aligned}\right\}\Rightarrow M(۶,۲)$$

ب) فاصله‌ی وسط AB تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

حل ب)

$$OM=\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{۶^۲+۲^۲}$$

$$=\sqrt{۳۶+۴}\Rightarrow OM=\sqrt{۴۰}$$

مثال ۲: هرگاه داشته باشیم $A(۲m,۵)$ و $B(۸,۳n-۱)$ و نقطه‌ی $M(۲,-۳)$ وسط پاره‌خط AB باشد مقادیر m و n را به‌دست آورید.

حل ۲)

مقدار m برابر است با :

$$x_M=\frac{x_۱+x_۲}{۲}\Rightarrow ۲=\frac{۲m+۸}{۲}\Rightarrow ۴=۲m+۸$$

$$\Rightarrow ۲m=-۸+۴\Rightarrow ۲m=-۴\Rightarrow m=-۲$$

مقدار n برابر است با :

$$y_M=\frac{y_۱+y_۲}{۲}\Rightarrow -۳=\frac{۵+۳n-۱}{۲}\Rightarrow -۶=۳n+۴$$

$$\Rightarrow ۳n=-۶-۴=-۱۰\Rightarrow n=\frac{-۱۰}{۳}$$

تمرین

۱ــ هرگاه $A(-۳,۶)$ و $B(۳,۵)$ باشد :

الف) طول پاره‌خط AB را محاسبه کنید.

ب) فاصله‌ی وسط AB تا مبدأ مختصات را بیابید.

۲ــ دو نقطه‌ی A و B به مختصات مقابل مفروض‌اند. اگر طول پاره‌خط AB برابر ۲۰۰ واحد باشد مقدار m را محاسبه کنید.

$A(۴m,m)$ و $B(-m,m)$

$$AB=\sqrt{(x_۱-x_۲)^۲+(y_۱-y_۲)^۲}$$

$$\Rightarrow ۲۰۰=\sqrt{(۴m-(-m))^۲+(m-m)^۲}$$

$$\Rightarrow ۲۰۰=\sqrt{(۴m+m)^۲+(۰)^۲}=\sqrt{(۵m)^۲}=|۵m|$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ۵m=۲۰۰\Rightarrow m=۴۰ \\ -۵m=۲۰۰\Rightarrow m=-۴۰ \end{cases}$$

۳ــ دو نقطه‌ی C و D در مقابل مفروض است.

$C(m,۲m)$ و $D(۲m,۴m)$

اگر طول پاره‌خط CD برابر $۱۰\sqrt{۵}$ واحد باشد مقدار m را محاسبه کنید.

۵ــ۱ــ۲ــ تساوی دو زوج مرتب

دو زوج مرتب (x,y) و (z,t) با هم برابرند هرگاه مختص اول آن‌ها با هم برابر باشند و نیز مختص دوم آن‌ها نیز مساوی باشند و برعکس.

$$(x,y)=(z,t)\ 4\quad x=z,y=t$$

مثال ۱: دو زوج مرتب A و B به مختصات $(۲a-b,۳a+۴)$ و $(۷,۲a+۱۰)$ با شرط روبرو مفروض‌اند، a و b را پیدا کنید.

$$(۲a-b,۳a+۴)=(۷,۲a+۱۰)$$

حل: از برابر بودن مختصات A و B خواهیم داشت :

$$\begin{cases} x_A=x_B\Rightarrow ۲a-b=۷ \\ y_A=y_B\Rightarrow ۳a+۴=۲a+۱۰\Rightarrow \end{cases}$$

ــ با حل معادله مقدار a به‌دست می‌آید.

$$۳a-۲a=۱۰-۴\Rightarrow \boxed{a=۶}$$

ــ با قرار دادن a در معادله b را حساب می‌کنیم :

$$۲a-b=۷\overset{a=۶}{\Rightarrow}۲\times۶-b=۷\Rightarrow b=۱۲-۷=۵$$

مثال ۲: مقدار a را چنان پیدا کنید که نقطه‌ی $B(۲a+۱ , ۳a-۴)$ روی نیمساز ربع اول و سوم باشد.

حل: بنابه خاصیت نیمساز ربع اول و سوم خواهیم داشت :

$$x_B = y_B \Rightarrow ۲a+۱ = ۳a-۴$$

ــ با حل معادله مقدار a برابر با :

$$۳a-۲a = ۱+۴ \Rightarrow \boxed{a=۵}$$

تمرین

۱ــ هرگاه مختصات A و B در مقابل مفروض باشد مقدار a و b را چنان بیابید که دو زوج مرتب A و B برابر باشند ؛ سپس قرینه‌ی A را نسبت به مبدأ مختصات پیدا کنید.

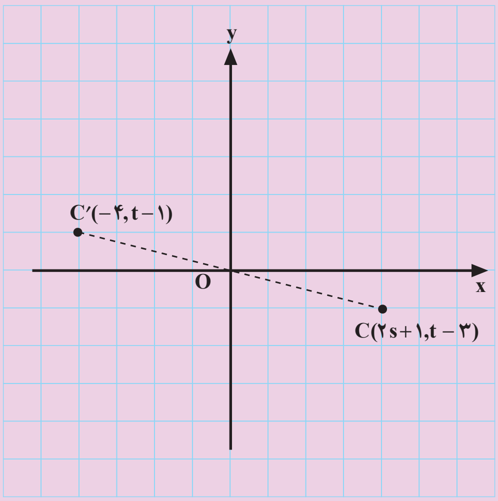
$A(۳a+b,۷)$ و $B(۱۰,۴a-۵)$

۲ــ مقدار b را چنان بیابید که نقطه‌ی C به مختصات روبه‌رو روی نیمساز ربع دوم و چهارم باشد.

$C(۳b-۵,۷b+۱)$

(راهنمایی : نیمساز ربع دوم و چهارم خط $y=-x$ می‌باشد)

۳ــ اگر C و ′C نسبت به مبدأ مختصات قرینه باشند مقدار s و t را بیابید (با توجه به شکل ۲۹ــ۲).



شکل ۲۹ــ۲

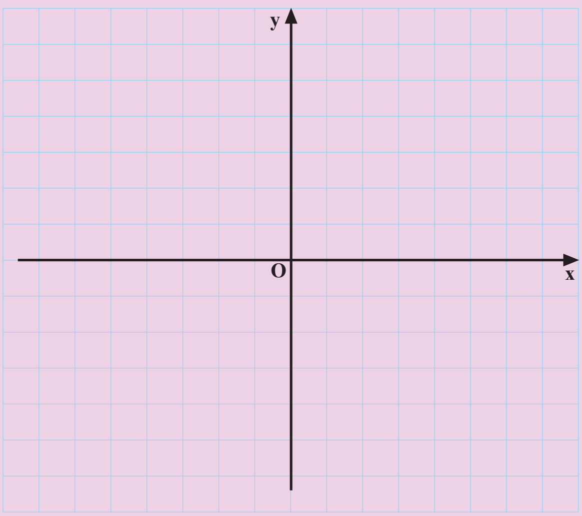
۴ــ هرگاه ABC یک مثلث باشد که $A(۳,۵)$ و B قرینه‌ی نقطه A نسبت به محور xها و C قرینه‌ی A نسبت به محور yها باشد، مثلث ABC را روی محورهای مختصات رسم کنید و سپس طول ضلع BC را محاسبه کنید.

۵ــ اگر $A(۳,۵)$ و $B(-۸,۵)$ باشند :

الف) نقاط A و B را روی دستگاه مختصات ۳۰ــ۲ مشخص کنید.

ب) مختصات وسط پاره‌خط AB را پیدا کنید.

پ) نقاط A و B را به مبدأ مختصات وصل کنید، سپس محیط مثلث OAB را محاسبه کنید.



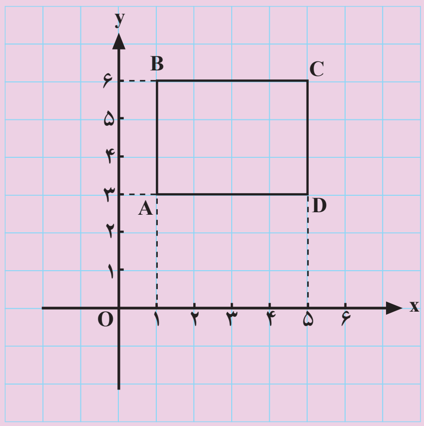
شکل ۳۰ــ۲

۶ــ الف) مختصات رأس‌های C ،D،B و A را در شکل ۳۱ــ۲ بیابید.

ب) قرینه‌ی چهارضلعی ABCD را نسبت به محور xها به‌دست آورید.

پ) قرینه‌ی چهارضلعی ABCD را نسبت به محور yها بیابید.

ت) قرینه‌ی چهارضلعی ABCD را نسبت به مبدأ مختصات به‌دست آورید.



شکل ۳۱ــ۲

آزمون پایانی (۱)

۱ـ اگر $x_A = ۵$ و $x_B = -۶$ و $\overline{AB} = ۲\overline{AC}$ باشد مقدار $\overline{AC}$ را بیابید.

۲ـ نقاط $A\left|\begin{matrix}۶\\۲\end{matrix}\right.$ ، $B\left|\begin{matrix}-۶\\۲\end{matrix}\right.$ و $C\left|\begin{matrix}۰\\۸\end{matrix}\right.$ رأس‌های مثلث ABC می‌باشد.

الف) نقاط A، B و C را روی محور مختصات ۲ـ۳۲ مشخص کنید.

ب) مساحت مثلث ABC را به‌دست آورید.

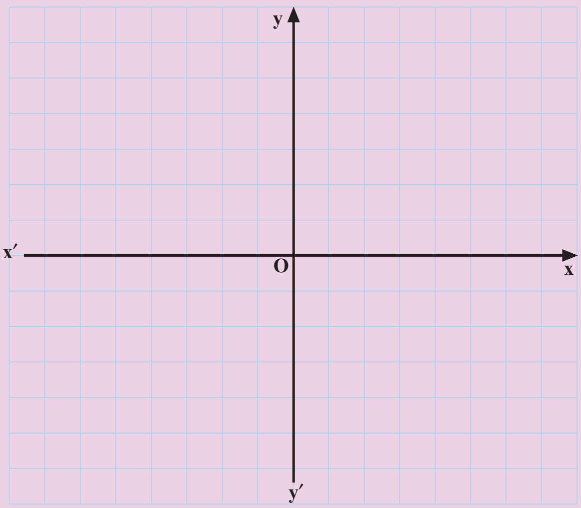
۳ـ هرگاه نقطه‌ی A به مختصات روبه‌رو، روی خط $y = x$ واقع باشد مختصات A را بیابید.

۴ـ نقاط A و B به مختصات روبه‌رو مفروض است.

الف) طول پاره‌خط AB را محاسبه کنید.

ب) مختصات وسط پاره‌خط AB را بیابید.

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۱)



محور ۲ـ۳۲

$A(-۲a$ و $۲a+۱)$

$A\left|\begin{matrix}۲\\۵\end{matrix}\right.$ و $B\left|\begin{matrix}-۲\\۱\end{matrix}\right.$

بخش دوم

فصل دوم

بازه

هدف کلی
یادآوری و تکمیل مفهوم بازه و مفهوم‌های وابسته به آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ بازه را تعریف کند ؛

۲ــ انواع بازه را به صورت مجموعه بنویسد ؛

۳ــ انواع بازه را روی محور اعداد نمایش دهد ؛

۴ــ اعمال برروی بازه‌ها را انجام دهد.

پیش‌آزمون (۲)

۱ــ بازه‌های $A=[-۲,۳)$ و $B=(۲,+\infty)$ را روی محور ۳۳ــ۲ نشان دهید.

۲ــ بازه‌های A و B در مقابل مفروض‌اند. بازه‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $A\cap B$

ب) $A\cup B$

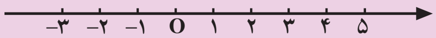
ج) $A-B$

د) متمم A را روی محور ۳۴ــ۲ نشان دهید.

۳ــ جواب نامعادله‌ی مقابل را به‌دست آورید و سپس آن را به صورت بازه بنویسید.

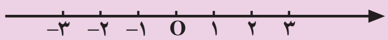
۴ــ جواب نامعادله‌ی مقابل را به صورت بازه نمایش دهید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۲)



شکل ۳۳ــ۲

$A=\{x|x\in\mathbb{R}$ و $x>-۱\}$ و $B=[-۴,۵)$



شکل ۳۴ــ۲

الف) $-۳\le \frac{۳x}{۴}+۵<۷$

ب) $(x-۵)(۳x+۴)\ge ۰$

۲ــ۲ــ بازه

دمای آب در شرایط متعارف بیش‌تر از صفر و کم‌تر از ۱۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد می‌باشد. بازه‌ی تغییرات دمای آب را می‌توان با (۰،۱۰۰) نمایش داد. این بازه‌ها را بازه‌ی باز ۰ و ۱۰۰ (صفروصد) می‌نامند.

شکل ۳۵ــ۲ــ نمایش تغییرات دمای آب به صورت نمودار

$\{x | x \in \mathbb{R} \ , \ ۰ < x < ۱۰۰\}$

نمایش تغییرات دمای آب به صورت مجموعه (علائم ریاضی)

بازه‌ها جزء مهم‌ترین زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی می‌باشند و به شکل‌های زیر نمایش داده می‌شوند.

۱ــ۲ــ۲ــ بازه‌ی باز a و b: بازه‌ی باز a و b به‌طوری که $a < b$ را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی بین a و b تعریف می‌نمایند که نمایش نموداری آن به صورت شکل ۳۶ــ۲ می‌باشد. نمایش مجموعه‌ای با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است.

$]a,b[$ یا (a,b)

شکل ۳۶ــ۲ــ نمایش نموداری بازه‌ی (a,b)

$\{x | x \in \mathbb{R} \ , \ a < x < b\}$

مثال ۱: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کرده و جواب آن را به‌صورت بازه و مجموعه بنویسید و روی محور مشخص کنید.

$-x^{۲} + ۴x > ۰$

حل: نامعادله را مساوی صفر قرار می‌دهیم.

ــ ریشه‌های معادله را پیدا می‌کنیم.

$-x^{۲} + ۴x = ۰ \Rightarrow x(-x + ۴) = ۰ \Rightarrow$

$\Rightarrow x = ۰$ یا $x = ۴$

ــ معادله‌ی $-x^{۲} + ۴x$ را تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۱ــ۲

x		۰		۴	
$-x^{۲} + ۴x > ۰$	−	۰	+ جواب	۰	−

با توجه به جدول ۱ــ۲ جواب نامعادله برابر است با :

$(۰,۴) = \{x | x \in \mathbb{R} \ , \ ۰ < x < ۴\}$

ــ نمایش نموداری بازه (شکل ۳۷ــ۲).

شکل ۳۷ــ۲

۲ــ۲ــ۲ــ بازه‌ی بسته‌ی a و b : اگر $a \le b$ بازه‌ای که علاوه بر نقاط بازه‌ی باز(a, b) شامل نقاط a و b باشد بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ نامیده می‌شود و نمایش نموداری آن شکل ۳۸ــ۲ است.

$[a,b]$

شکل۳۸ــ۲

ــ نمایش به صورت مجموعه با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است.

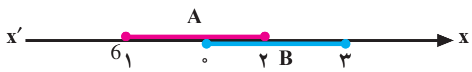
$\{x | x \in \mathbb{R} \ , \ a \le x \le b\}$

مثال ۲: بازه‌های A و B در مقابل مفروض است.

$B = [0,3]$ و $A = [-1,2]$

الف) نمودار دو بازه‌ی A و B را بر روی محور ۳۹ــ۲ رسم کنید.

حل الف



شکل ۳۹ــ۲

ب) بازه $A \cap B$ را به‌دست آورید.

قسمتی که در هر دو بازه مشترک می‌باشد برابر است با :

حل ب) $A \cap B = [0,2]$

ج) $A \cup B$ را به‌دست آورید.

حل ج) $A \cup B = [-1,3]$

اجتماع دو بازه از نقطه‌ی شروع بازه‌ها یعنی عدد ۱- تا انتهای آن‌ها یعنی عدد ۳ می‌باشد.

۳ــ۲ــ۲ــ بازه‌ی بسته‌ی a و باز b : بازه‌ی بسته‌ی a و باز b به شرط $(a < b)$ را مجموعه‌ی اعداد حقیقی بین a و b، به انضمام عدد a تعریف می‌کنند و نمایش نموداری آن به شکل ۴۰ــ۲ است.

$[a,b)$ یا $[a,b[$

شکل ۴۰ــ۲

ــ نمایش مجموعه‌ای بازه‌ی $[a,b)$ با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است.

$\{x | x \in \mathbb{R} \ , \ a \le x < b\}$

مثال ۳: نامعادله‌ی روبه‌رو را حل کرده و مجموعه‌ی جواب آن را به صورت بازه و مجموعه بنویسید.

$-\frac{3}{x} \ge 2$

حل: همه‌ی جمله‌ها را به یک طرف آورده و مخرج مشترک می‌گیریم.

$$-\frac{۳}{x}-۲\geq ۰ \Rightarrow \frac{-۳-۲x}{x}\geq ۰ \Rightarrow$$

ــ ریشه‌های صورت و مخرج نامعادله را پیدا می‌کنیم :

$$x=۰ \;,\; -۳-۲x=۰ \Rightarrow -۳=۲x \Rightarrow x=-\frac{۳}{۲}$$

ــ نامعادله را تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۲ــ۲

x		$-\frac{۳}{۲}$		۰	
$-۳-۲x$	+	۰	−		−
x	−		−	۰	+
$\frac{-۳-۲x}{x}$	−	۰	+ جواب	تعریف نشده	−

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله به صورت بازه یا مجموعه به‌صورت روبه‌رو است :

$$\left[-\frac{۳}{۲},۰\right)=\left\{x|x\in\mathbb{R} \;,\; -\frac{۳}{۲}\leq x<۰\right\}$$

۴ــ۲ــ۲ــ بازه‌ی باز a و بسته‌ی b : بازه‌ی باز a و بسته‌ی b به شرط $(a<b)$ را مجموعه‌ی همه اعداد حقیقی بین a و b، به انضمام نقطه‌ی b تعریف می‌کنند و نمایش نموداری آن به شکل ۴۱ــ۲ است. نمایش مجموعه‌ای آن با علائم ریاضی به‌صورت روبه‌رو است.

$(a,b]$ یا $]a,b]$

نمودار ۴۱ــ۲

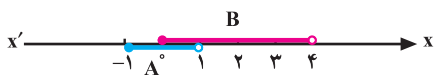
$$\{x|x\in\mathbb{R} \;,\; a<x\leq b\}$$

مثال ۴: بازه‌های A و B در مقابل مفروض است. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

$A=\{x|x\in\mathbb{R} \;,\; -۱\leq x<۱\}$ و

$B=\{x|x\in\mathbb{R} \;,\; ۰\leq x<۴\}$

ــ بازه‌های A و B را روی نمودار ۴ــ۲ مشاهده می‌کنید.



نمودار ۴۲ــ۲

$A=[-۱,۱)$ و $B=[۰,۴)$

الف) $A\cap B$ را به‌دست آورید.

ــ ناحیه‌ای که در هر دو بازه مشترک است.

$$A\cap B=[۰,۱)$$

ب) $A\cup B$ را به‌دست آورید.

ــ از ابتدای A یعنی ۱− تا انتهای B را شامل می‌شود.

$$A \cup B = [-1, 4)$$

ج) $A - B$ را به‌دست آورید.

از بازه‌ی A بازه‌ی مشترک با B یعنی $[0,1)$ را حذف می‌کنیم، پس :

$$A - B = [-1, 0)$$

د) $B - A$ را محاسبه کنید.

از بازه‌ی B بازه‌ی مشترک با A یعنی $[0,1)$ را بیرون می‌آوریم ؛ یعنی :

$$B - A = [1, 4)$$

معرفی بینهایت:

ــ تعداد ستارگان در آسمان چند عدد است؟

ــ در بازه‌ی $(2,3)$ چند عدد حقیقی وجود دارد؟

ــ چند عدد طبیعی وجود دارد؟

شکل ۴۳ــ۲

ریاضی‌دان‌ها برای نمایش چیزی که از هر عدد حقیقی بزرگ‌تر است از نماد $+\infty$ استفاده می‌کنند.

$\ldots$ و 10^{100} و 10^{10} و $-(10)^{0}$ و $-(10)^{10}$ و $-(10)^{100}$ و $-(10)^{1000}$

به طور مشابه برای نمایش چیزی که از هر عدد منفی کوچک‌تراست از نماد $-\infty$ استفاده می‌کنیم. پس اگر x عددی دلخواه و حقیقی باشد، داریم :

$$-\infty < x < +\infty$$

نکته : $-\infty, +\infty$ عدد نیستند.

۵ ــ ۲ــ ۲ــ بازه‌ی باز a و $+\infty$: بازه‌ی باز a و $+\infty$ را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی بیش‌تر از a تعریف می‌کنند و نمایش نموداری آن به شکل ۴۴ــ۲ می‌باشد.

$$(a, +\infty)$$

شکل ۴۴ــ۲

نمایش مجموعه‌ای آن با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است :

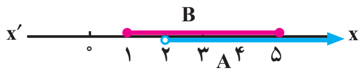
$$\{x \mid x \in \mathbb{R} \ , \ x > a\}$$

مثال ۵: بازه‌های A و B در مقابل مفروض‌اند. بازه‌های زیر را تعیین کنید.

$$A = (2, +\infty) \text{ و } B = [1, 5]$$

۱) $A \cap B$

حل: بازه‌های A و B را در نمودار ۴۵ـ۲ مشاهده می‌کنید.



شکل ۴۵ـ۲

ـ با توجه به نمودار ۴۵ـ۲ اشتراک A و B برابر است با :

$A\cap B=(۲,۵]$

۲) $A\cup B$

حل ۲: $A\cup B=[۱,+\infty)$

۳) B' متمم B را به‌دست آورید.

حل: از مجموعه‌ی $\mathbb{R}$ (اعداد حقیقی) B را حذف می‌کنیم، پس :

$B'=\mathbb{R}-B=(-\infty,۱)\cup(۵,+\infty)$

۴) $A-B$

ـ هرگاه از اعضای A، عضوهای مشترک B را بیرون آوریم داریم :

$A-B=(۵,+\infty)$

۶ـ۲ـ۲ــ بازه‌ی بسته‌ی a و باز مثبت بی‌نهایت:

بازه‌ای که علاوه بر نقاط بازه‌ی باز $(a,+\infty)$ شامل نقطه‌ی a باشد بازه‌ی بسته‌ی $[a,+\infty)$ نامیده می‌شود که نمودار آن به شکل ۴۶ـ۲ می‌باشد.

$[a+\infty)$

شکل ۴۶ـ۲

نمایش مجموعه‌ای آن با علائم ریاضی به صورت روبه‌رو است :

$\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x\geq a\}$

مثال ۶: می‌دانیم اگر آب در شرایط متعارف تحت دمای ۱۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد یا بیش‌تر قرار گیرد به بخار تبدیل می‌شود. بـازه‌ی تغییرات دمـای بخار آب به صورت بـازه، مجموعه و نمودار آن به صورت روبه‌رو است.

بازه $[۱۰۰\ ,\ +\infty)$

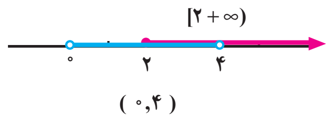
مجموعه $\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x\geq۱۰۰\}$

شکل ۴۷ـ۲

مثال ۷: حاصل عبارت مقابل را تعیین کنید.

$[۲,+\infty)-(۰,۴)$

حل: نمایش نموداری $[۲,+\infty)$ و $(۰,۴)$ را در شکل ۴۸ـ۲ می‌بینیم.



شکل ۴۸ـ۲

اگر قسمت مشترک را از $[۲,+\infty)$ حذف کنیم، داریم :

$$[۲,+\infty)-(۰,۴)=[۴,+\infty)$$

۷ـ۲ـ۲ـ بازه‌ی باز $-\infty$ و a : بازه‌ی باز $-\infty$ و a را مجموعه‌ی اعداد حقیقی کم‌تر از a تعریف می‌کنیم و نمودار آن به شکل ۴۹ـ۲ است.

$]-\infty,a[$ یا $(-\infty,a)$

شکل ۴۹ـ۲

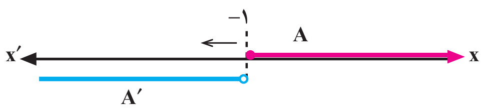
مجموعه با علائم ریاضی

$$\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x<a\}$$

مثال ۸: مجموعه‌ی A مفروض است. متمم آن را به صورت بازه نمایش دهید.

$$A=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x\geq -۱\}$$

حل: با توجه به نمودار ۵۰ـ۲ اگر از محور اعداد حقیقی مجموعه‌ی A را برش دهیم داریم :



شکل ۵۰ـ۲

$$A'=\mathbb{R}-A=(-\infty,-۱)$$

مثال ۹: مجموعه جواب نامعادله‌ی مقابل را به صورت مجموعه و بازه نمایش دهید.

$$\frac{x+۱}{x}<۳$$

حل: همه‌ی جمله‌ها را به یک طرف انتقال می‌دهیم و مخرج‌مشترک می‌گیریم.

$$\frac{x+۱}{x}-۳<۰\Rightarrow\frac{x+۱-۳x}{x}<۰\Rightarrow\frac{-۲x+۱}{x}<۰$$

ـ ریشه‌های صورت و مخرج را به‌دست می‌آوریم.

$$-۲x+۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲} \quad \text{و} \quad x=۰$$

ـ طبق جدول ۳ـ۲ نامعادله را تعیین علامت می‌کنیم چون نامعادله کوچک‌تر از صفر است منفی‌ها را به عنوان جواب قابل قبول می‌پذیریم.

جدول ۳ـ۲

x	$-\infty$	۰		$\frac{۱}{۲}$	
$-۲x+۱$	+		+	۰	−
x	−	۰	+		+
$\frac{-۲x+۱}{x}<۰$	− جواب	نامعین	+	۰	− جواب

مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی $\frac{x+۱}{x}<۳$ به‌صورت بازه و مجموعه :

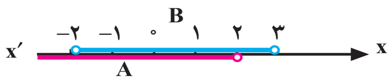
$$(-\infty,۰)\cup(\frac{۱}{۲},+\infty)$$
یا
$$\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x<۰ \text{ یا } x>\frac{۱}{۲}\}$$

مثال ۱۰: بازه‌های A، B و C در مقابل مفروض است. حاصل عبارت روبه‌رو را به‌صورت بازه نمایش دهید.

$A=(-\infty,۲)$ ، $B=(-۲,۳)$ ، $C=[۲,+\infty)$

$(A\cap B)\cup C$

حل: نمودار A و B را روی محور مشخص می‌کنیم (شکل ۵۱ـ۲).

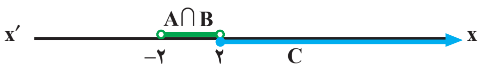


شکل ۵۱ـ۲

ـ اشتراک $A\cap B$ برابر است با :

$A\cap B=(-۲,۲)$

ـ بازه‌ی C و $A\cap B$ را روی محور مشخص می‌کنیم (شکل ۵۲ـ۲).



شکل ۵۲ـ۲

با توجه به نمودار ۵۲ـ۲ داریم :

$(A\cap B)\cup C=(-۲,+\infty)$

۸ـ۲ـ۲ـ بازه‌ی باز منفی بی‌نهایت و بسته‌ی a:

هرگاه بازه‌ی باز $-\infty$ و a، a را نیز شامل شود بازه‌ی باز $-\infty$ و بسته‌ی a به دست می‌آید که در نمودار ۵۳ـ۲ نمایش داده شده است.

$]-\infty,a]$ یا $(-\infty,a]$

شکل ۵۳ـ۲

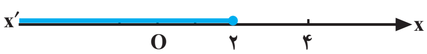
ـ نمایش مجموعه‌ای $(-\infty,a]$ به صورت روبه‌رو است.

$\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x\le a\}$

مثال ۱۱: مجموعه‌ی مقابل را به‌صورت نمودار و بازه نمایش دهید.

$A=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x\le ۲\}$

حل: نمایش نموداری به صورت شکل ۵۴ـ۲ است.



شکل ۵۴ـ۲

ـ نمایش به شکل بازه به صورت روبه‌رواست.

$A=(-\infty,+۲]$

مثال ۱۲: حاصل عبارت مقابل را به صورت بازه بنویسید.

$(-۳,+\infty)\cap(-\infty,۴)$

حل: هرکدام از بازه‌ها را روی محور مشخص می‌کنیم.
با توجه به شکل ۵۵ــ۲ حاصل اشتراک دو بازه‌ی $(-۳,+\infty)$ و $(-\infty,۴)$ برابر با :

شکل ۵۵ــ۲

$$(-۳,+\infty)\bigcap(-\infty,۴)=(-۳,۴)$$

۹ــ۲ــ۲ــ مجموعه‌ی اعداد حقیقی: بازه‌ی باز $-\infty$ و $+\infty$ را مجموعه‌ی همه‌ی اعداد حقیقی می‌نامند و نمایش نموداری آن به صورت شکل ۵۶ــ۲ و نمایش مجموعه‌ای آن به صورت روبه‌رو است.

$$\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$$

شکل ۵۶ــ۲

$$\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ -\infty<x<+\infty\}=\mathbb{R}$$

مثال ۱۳: با توجه به بازه‌ی B مقابل، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $\mathbb{R}\bigcap B$

ب) $\mathbb{R}\bigcup B$

ج) $\mathbb{R}-B$

د) $\mathbb{R}'$

هـ) B'

$$B=[۲,+\infty)$$

شکل ۵۷ــ۲

$$\mathbb{R}\bigcap B=B$$

$$\mathbb{R}\bigcup B=\mathbb{R}$$

$$\mathbb{R}-B=(-\infty,۲)$$

$$\mathbb{R}'=\mathbb{R}-\mathbb{R}=\emptyset$$

$$B'=\mathbb{R}-B=(-\infty,۲)$$

مثال ۱۴: مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی مقابل را به‌صورت بازه بنویسید.

$$-۲<۲x+۱\le۵$$

حل: از دو طرف عدد ۱ را کم می‌کنیم، داریم :

$$\Rightarrow -۳<۲x<۴$$

ــ دو طرف نامعادله را بر عدد ۲ تقسیم می‌کنیم.

$$\Rightarrow -\frac{۳}{۲}<x\le۲$$

ــ مجموعه‌ی جواب‌ها برابر است با :

$$\left(-\frac{۳}{۲},۲\right]$$

مثال ۱۵: مجموعه‌ی جواب‌های نامعادله‌ی مقابل را به صورت بازه بنویسید.

$$۵\le\frac{x}{۴}-۱<۷$$

حل: به دو طرف عدد ۱ را اضافه می‌کنیم ؛

$$\Rightarrow ۶\le\frac{x}{۴}<۸$$

ــ دو طرف را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم ؛

$$\Rightarrow ۲۴\le x<۳۲$$

ــ مجموعه‌ی جواب‌ها به صورت بازه برابر است با :

$$\Rightarrow [۲۴,۳۲)$$

تمرین

۱ــ هرگاه بازه‌های A ، B و C در مقابل مفروض‌اند، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

$A(-۳,۵)\ ,\ B=(-۷,۲)\ ,\ C[۳,۷]$

الف) $C-A$

ب) A'

ج) $A\cup B$

د) $B\cap C$

۲ــ جواب هریک از نامعادله‌های زیر را تعیین کنید و آن‌ها را روی محور $x'ox$ (محور اعداد حقیقی) نمایش دهید، سپس به صورت بازه بنویسید.

۱) $-۳x+۵\geq ۷$

۲) $\frac{۲x+۴}{۳}<\frac{۳x-۲}{۲}$

۳) $۵<\frac{x}{۳}+۲<۷$

۴) $x^۲<۵x-۴$

۵) $۲x^۲\geq ۳x-۱$

۶) $x^۲\leq +۷x-۱۲$

۳ــ نامعادله‌های زیر را حل کنید و جواب را به صورت بازه بنویسید و بر روی نمودار نمایش دهید.

الف) $\frac{x+۳}{x+۲}\leq ۰$

ب) $\frac{x+۲}{۲x-۵}\geq ۲$

۴ــ هرگاه $A=(-۵,۸]$ و $B=[-۲,۱۰)$ باشد، جاهای خالی را با عدد و نماد مناسب پُر کنید.

۱) $B\boxed{}A=(-۵,۱۰)$

۲) $A\cap B=[....\ ,\ ....]$

۳) $A-B=(....\ ,\ ....)$

۵ ــ هرگاه حسن بین ساعت ۹ و ۱۱، حسین بین ساعت ۱۳ و ۱۷ و محمود بین ساعت ۸ و ۱۹ در کتابخانه حضور داشته باشند :

الف) ساعت حضور هر۳ نفر را به صورت بازه بنویسید.

ب) کدام یک از این افراد می‌توانند در کتابخانه همدیگر را ملاقات کنند و در چه بازه‌ی زمانی؟

۶ ــ بازه‌های زیر را با مجموعه نمایش دهید و نمودار آن را رسم کنید.

الف) $(-۳,۷]=$

ب) $[۸,۹)=$

ج) $(-\infty,۳)=$

۷ــ مجموعه‌های زیر را به صورت بازه بنویسید.

۱) $\{x|x\in \mathbb{R}\ ,\ x\geq ۳\}$

۲) $\{x|x\in \mathbb{R}\ ,\ x\leq -۵\}$

۳) $\{x|x\in \mathbb{R}\ ,\ -۵<x<۵\}$

۴) $\left\{x|x\in \mathbb{R}\ ,\ ۰\leq x\leq \frac{۳}{۵}\right\}$

۵) $\{x|x\in \mathbb{R}\ ,\ -\sqrt{۵}\leq x<۸\}$

۸ ــ هرگاه $-۲<x\leq ۵$ باشد محدوده‌ی مقادیر زیر را بنویسید.

۱) $۲x+۳$

۲) $-۳x+۴$

۳) $۴x-۷$

۹ــ در شکل ۵۹ــ۲ حدود h را چنان بیابید که مساحت ذوزنقه‌ی شکل (الف) از مساحت مربع شکل (ب) بزرگ‌تر و از مساحت مستطیل شکل (ج) کوچک‌تر باشد.

شکل ۵۸ــ۲

۱)

۲)

۳)

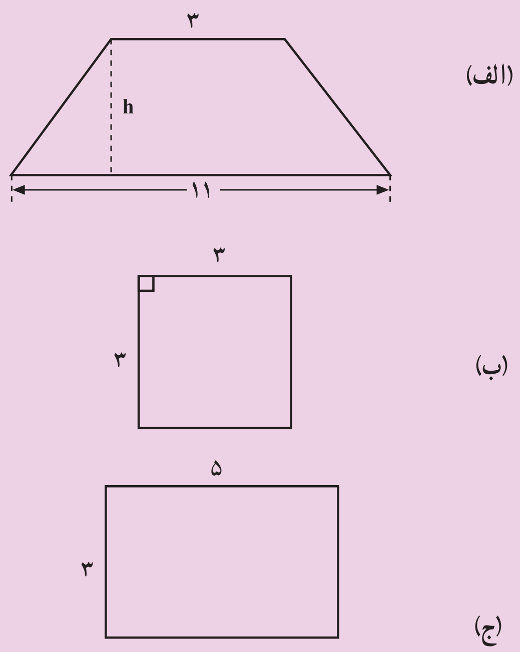
۴)

۵)

۱)

۲)

۳)



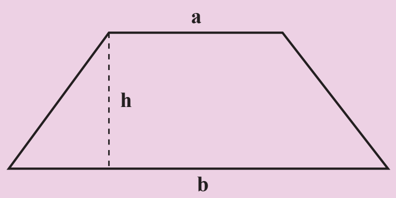
شکل ۵۹ــ۲

یادآوری

مساحت مربع برابر است با حاصل ضرب یک ضلع در خودش.

ــ مساحت مستطیل برابر است با طول× عرض

ــ مساحت ذوزنقه‌ای با قاعده‌های a و b و ارتفاع h، شکل ۶۰ــ۲، برابر است با : $S = \frac{۱}{۲}h(a+b)$.



شکل ۶۰ــ۲

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۲)

$$A=\left(-\infty\ ,\ +\frac{۱}{۶}\right]\cup[۱\ ,\ +\infty)$$

$$B=\left(-\infty\ ,\ -\frac{۲}{۳}\right)\cup\left[\frac{۱}{۷}\ ,\ +\infty\right)$$

$$C=\left(-\frac{۲}{۳}\ ,\ \frac{۱}{۷}\right]$$

$$D=\left[\frac{۵}{-۲۹}\ ,\ +\infty\right)$$

۱ــ متمم $A=[-۲,۱)$ را مشخص کرده و روی محور شکل ۶۱ــ۲ نشان دهید.

۲ــ هرگاه A مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $-۲\leq ۳x+۱<۱۰$ و B مجموعه‌ی جواب نامعادله‌ی $x^{۲}>۴$ باشد مقادیر زیر را به‌صورت بازه بنویسید.

۱) $A\cup B$

۲) $A\cap B$

۳) $A-B$

۳ــ کدام یک از بازه‌های A، B، C و D، جواب نامعادله‌های زیر است؟

۱) $\dfrac{-۳x+۱}{۲}\leq\dfrac{۷x+۵}{۵}$

۲) $۶x^{۲}\geq ۷x-۱$

۳) $\dfrac{-۷x+۱}{۳x+۲}\geq ۰$

۴) $\dfrac{-۷x+۱}{۳x+۲}\leq ۰$

بخش دوم

فصل سوم

تابع

هدف کلی

مفهوم تابع و ویژگی‌های مربوط به آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ تابع را تعریف کند ؛

۲ــ تابع با ضابطه را تعریف کند ؛

۳ــ تابع را به‌صورت جدول نمایش دهد ؛

۴ــ تابع را با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهد و دامنه و برد آن را مشخص کند ؛

۵ــ تابع را از روی نمودار تشخیص دهد و دامنه و برد آن را مشخص کند.

پیش آزمون (۳)

۱ــ از رابطه‌های زیر کدام تابع است؟ چرا؟

الف) $۳x+۵y^{۲}=۷$

ب) $|x|+|y|=۹$

۲ــ اگـــر $f(x)=-۲x^{۲}+۳$ و $D_f=\{۰,-۱,۲,۳,۵\}$ باشد، تابع f را به‌صورت جدول و زوج مرتب بنویسید.

۳ــ تابع f به‌صورت زیر مفروض است. نمایش نموداری آن را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} -۲ & ۱\le x<۳ \\ ۱ & ۳\le x<۵ \\ ۲/۵ & ۵\le x<۹ \end{cases}$$

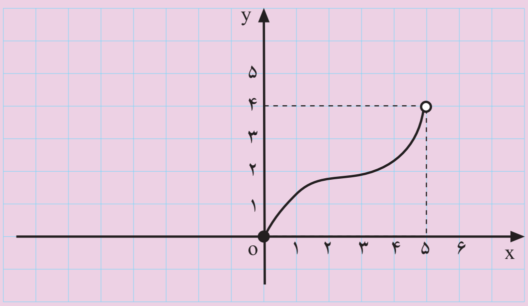
۴ــ دامنه و برد تابع f از نمودار ۲ـ۶۲ را بیابید.

$D_f=$..............

$R_f=$..............

۵ــ هرگاه $f(x)=ax^{۲}+۳x+۷$ و $f(۲)=۱۱$ باشد $f(-۲)$ را بیابید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۳)



نمودار ۲ـ۶۲

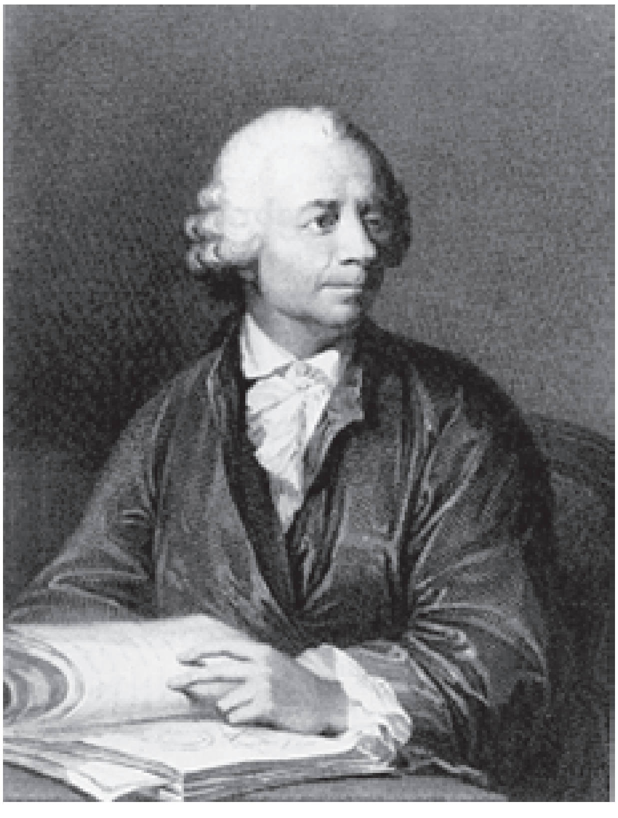
$f(-۲)=?$

۳ـ۲ـ تابع

مقدمه: بیش‌تر مطالب علمی از آغاز پیدایش تاکنون دچار تغییر و تکامل بوده است، مفهوم تابع نیز از این امر مستثنی نبوده است.

شکل ۶۳ـ۲ ـ لایب نیتز

کلمه‌ی تابع را در ریاضیات اولین بار **لایب نیتز**، در سال ۱۶۹۴ مطرح و سپس **لئونارد اویلر** (۱۷۸۳ـ۱۷۰۷) آن را به‌طور دقیق تعریف کرد. اما مفهوم کلی تابع که در آن مجموعه‌های دلخواهی به‌عنوان دامنه و برد در نظر گرفته می‌شود از طرف **ریچارد دِدِکیند** (۱۹۱۶ـ۱۸۳۱) بیان شد. به هر حال، یکی از مفاهیم اساسی ریاضی که در سایر علوم نیز نقش چشم‌گیری ایفا می‌کند تابع است. در این بخش ضمن معرفی چند تابع، مشخص‌نمودن تابع‌ها با ضابطه، جدول، نمودار و زوج مرتب را مورد بررسی قرار می‌دهیم.



شکل ۶۴ـ۲ ـ اویلر

۱ـ۳ـ۲ـ تابع با ضابطه (فرمول): مقادیر یک متغیر غالباً به مقادیر متغیر دیگری بستگی دارد، مثلاً :

ـ مساحت دایره (S) به شعاع (r) آن بستگی دارد.

$$S(r) = \pi r^{۲}$$

ـ حجم (V) مکعب با ابعاد (x) آن متناظر است.

$$V(x) = x^{۳}$$

ـ افزایش طول (L) فنر با وزنه‌ای (w) که به آن آویزان

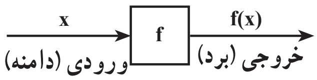
می‌شود متناظر است.

$$L = L_0 + KW$$

(L_0 طول اولیه‌ی فنر و K ضریب افزایش طول فنر)

ـ میزان هزینه‌ی خانوار به درآمد خانوار بستگی دارد.

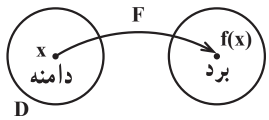
با توجه به مثال‌های بالا می‌بینیم که تابع به هر عضو از مجموعه اول، عضوی از مجموعه‌ی دوم را نسبت می‌دهد. بنابراین، تابع (f) ماشینی است که به هر ورودی مجاز، یک خروجی نسبت دهد (شکل ۶۵ـ۲).



شکل۶۵ـ۲ـ نمودار عمل یک تابع f

ورودی‌ها دامنه‌ی تابع (D_f) را تشکیل می‌دهند و خروجی‌ها برد آن را (R_f).

تعریف: تابع f از مجموعه‌ی D به مجموعه‌ی R قاعده‌ای است که به هر عنصر از x از مجموعه‌ی D به نام دامنه، عنصر منحصربه‌فرد f(x) از مجموعه‌ی R به نام برد را نظیر می‌کند.



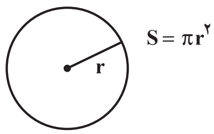
شکل ۶۶ـ۲

مقدار متناظر x را با f(x) نشان می‌دهند و این وابستگی به‌صورت مقابل نوشته می‌شود (بخوانید : y مساوی اِف ایکس).

$$y = f(x)$$

نکته: در مسائل مختلف ممکن است برحسب نیاز متغیر x یا تابع y با نمادهای دیگری بیان شود.

مثال: شعاع دایره (r) متغیر و مساحت دایره (S) تابع است (شکل ۶۷ـ۲) و همواره داریم :



شکل ۶۷ـ۲

قرارداد: وقتی f یک تابع با دامنه‌یD و برد R باشد، می‌نویسیم :

$$f: D \longrightarrow R$$

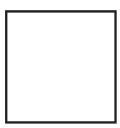
همچنین هرگاه، x عضو دلخواهی از دامنه باشد (ورودی) و f(x) (خروجی) مقدار تابع، به‌ازای x داریم :

$$x \xrightarrow{f} f(x) \quad \text{یا} \quad y = f(x)$$

به‌طورکلی می‌توان نوشت :

$$f: D \underset{y=f(x)}{\longrightarrow} R \quad \text{یا} \quad f: D \underset{x \to f(x)}{\longrightarrow} R$$

مثال: تابعی بنویسید که مساحت هر مربع را به طول ضلع آن وابسته کند.



شکل ۶۸ـ۲

حل: مساحت مربع با طول ضلع x برابر است با :

$$S = x^2$$

ـ طول ضلع x می‌تواند هر عدد حقیقی مثبت را اختیار کند.

$$S: (0, +\infty) \underset{x \to x^2}{\longrightarrow} \mathbb{R}^+$$

پس :

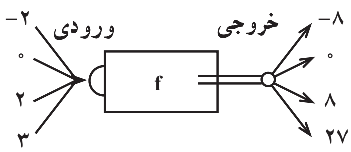
$$S:(۰,+\infty) \to \mathbb{R}^+$$
$$S(x) = x^۲$$

مثال: اگر $D = \{-۲,۰,۲,۳\}$ باشد، ماشین f را چنان طراحی کنید که عضو دامنه (D) را به مکعب تبدیل کند، سپس ضابطه‌ی f و عضوهای برد آن را بنویسید.

حل: تابع f هر عضو (x) را به مکعب‌اش ($x^۳$) تبدیل می‌کند، یعنی :

$$-۲ \xrightarrow{f} (-۲)^۳ = -۸$$
$$۰ \to ۰$$
$$۲ \to ۸$$
$$۳ \to ۲۷$$

ــ در شکل **۶۹ــ۲** طراحی ماشین f را مشاهده می‌کنید.



شکل ۶۹ــ۲

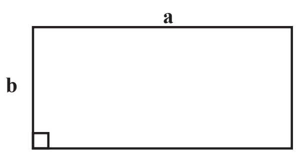
با توجه به اعداد ورودی و خروجی خواهیم داشت :

$$f:D \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^۳$$

با توجه به خروجی، برد آن برابر است با :

$$R_f = \{-۸,۰,۸,۲۷\} \quad \text{(برد)}$$

تذکر: اگر طول مستطیلی برابر a و عرض آن برابر b باشد :



شکل ۷۰ــ۲

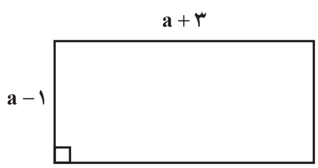
ــ **مساحت** (S) مستطیل برابر است با :

$$S = a \times b$$

ــ **محیط** (P) مستطیل برابر است با :

$$P = ۲(a + b)$$

مثال : هرگاه ابعاد مستطیلی برابر $a-۱$ و $a+۳$ باشد، محیط و مساحت آن را به‌صورت ضابطه بنویسید، سپس محیط و مساحت مستطیل را به ازای $a = ۴$ متر حساب کنید (شکل **۷۱ــ۲**).



شکل ۷۱ــ۲

حل: با توجه به فرمول محیط مستطیل داریم :

$P(a)=۲(a-۱+a+۳)$

ــ ضابطه‌ی محیط برحسب a :

$\Rightarrow P(a)=۲(۲a+۲)=۲(۲)(a+۱)$

$\Rightarrow P(a)=۴(a+۱)$

ــ به‌ازای متر۴ = a داریم :

$P(۴)=۴(۴+۱)=۲۰$ متر

ــ با توجه به فرمول مساحت (S) داریم :

$S(a)=(a-۱)(a+۳)$

ــ حاصل‌ضرب دو عامل :

$\Rightarrow S(a)=a^۲+۳a-a-۳$

ــ ضابطه‌ی مساحت برحسب a :

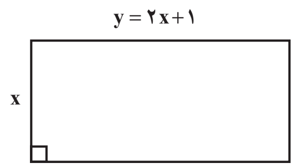
$\Rightarrow S(a)=a^۲+۲a-۳$

ــ به ازای متر ۴ = a داریم :

$S(۴)=۴^۲+۲(۴)-۳=۱۶+۸-۳$

$\Rightarrow S(۴)=۲۱$ متر مربع

فعالیت ۵ــ۲



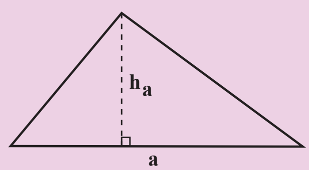
شکل۷۲ــ۲

با توجه به شکل ۷۲ــ۲ اگر مساحت را با S(x) و محیط را با P(x) نشان دهیم محیط و مساحت را به‌صورت ضابطه بنویسید.

الف) $P(x)=$

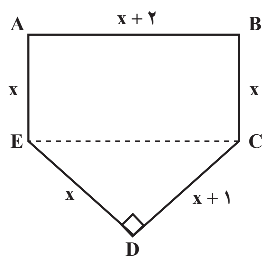
ب) $S(x)=$

نکته: مساحت مثلث با ارتفاع h و قاعده‌ی a برابر است با حاصل‌ضرب نصف ارتفاع در قاعده‌ی آن، یعنی :



شکل۷۳ــ۲

$S=\frac{۱}{۲}a.h_a$



شکل۷۴ــ۲

مثال:

الف) با توجه به شکل ۷۴ــ۲ ضابطه‌ای برای p(x) و S(x) بنویسید.

ب) به‌ازای $x = ۳$ مقادیر $P(۳)$ و $S(۳)$ را محاسبه کنید.

حل الف: محیط برابر است با مجموع اضلاع :

$$P(x) = x + x + ۲ + x + x + ۱ + x$$

ضابطه‌ی محیط برحسب متغیر x :

$$\Rightarrow P(x) = ۵x + ۳$$

مساحت کل =CDE مساحت مستطیل ABCE + مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ی

$$S(x) = x(x+۲) + \frac{۱}{۲}(x)(x+۱)$$

ــ پس از عملیات ضرب داریم :

$$\Rightarrow S(x) = x^۲ + ۲x + \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{۱}{۲}x$$

ــ با ساده کردن عبارت ضابطه‌ی مساحت برحسب متغیر x را به‌دست می‌آوریم.

$$\Rightarrow S(x) = \frac{۳}{۲}x^۲ + \frac{۵}{۲}x$$

حل ب: به‌ازای $x = ۳$ محیط برابر است با :

$$P(۳) = (۵ \times ۳) + ۳ = ۱۸$$

ــ به‌ازای $x = ۳$ مساحت برابر است با :

$$S(۳) = \frac{۳}{۲}(۳)^۲ + \frac{۵}{۲}(۳) = \frac{۲۷}{۲} + \frac{۱۵}{۲}$$

$$\Rightarrow S(۳) = \frac{۲۷+۱۵}{۲} = \frac{۴۲}{۲} = ۲۱$$

مثال: نرخ کرایه‌ی اتومبیلی برای هر کیلومتر طی مسافت ۲۵۰ تومان به‌اضافه‌ی ورودی ثابت ۵۰۰۰ تومان است. بنابراین کرایه‌ی اتومبیل تابعی از مسافت (x) طی شده برحسب کیلومتر می‌باشد. ضابطه‌ی تابع را بنویسید. سپس کرایه اتومبیل را به‌ازای طی مسافت ۶۰ کیلومتر حساب کنید.

حل:

ضابطه‌ی تابع $= f(x)$

مسافت طی‌شده × قیمت + ورودی ثابت $= f(x)$

$$\Rightarrow f(x) = ۵۰۰۰ + ۲۵۰x$$

ــ به‌ازای $x = ۶۰$ داریم :

$$f(۶۰) = ۵۰۰۰ + ۲۵۰ \times ۶۰ = ۵۰۰۰ + ۱۵۰۰۰$$

$\Rightarrow f(۶۰) = ۲۰۰۰۰$ تومان

مثال: ارتفاع استوانه‌ای ۳۰ سانتی‌متر است و می‌دانیم که حجم یک استوانه به ارتفاع h و شعاع قاعده R از رابطه‌ی $V = \pi R^۲ h$ حساب می‌شود. اگر $۱۰ \leq R \leq ۲۰$ سانتی‌متر تغییر کند حجم استوانه بین چه مقادیری تغییر می‌کند؟

تمرین

طول مستطیلی برابر $2x+1$ و عرض آن برابر $x+5$ است.
محیط و مساحت آن را برحسب x بنویسید.

$P(x)=\cdots\cdots$

$S(x)=\cdots\cdots$

فعالیت ۶ــ۲

اگر $x^2+y^2=10$ باشد :

الف) به ازای $x=1$ مقادیر y را بیابید.

ب) با توجه به مقادیر y، آیا رابطه‌ی $x^2+y^2=10$ ضابطه یک تابع است؟

خیر ☐ بله ☐

مثال: آیا رابطه‌ی $|y|=5x+2$ یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) به‌ازای $x=1$ مقادیر y را بیابید.

$$x=1\Rightarrow |y|=5\times1+2=7\Rightarrow y=\pm7$$

ب) آیا ضابطه‌ی $|y|=5x+2$، ضابطه‌ی یک تابع است؟

حل: ب) خیر، زیرا طبق قسمت (الف) به ازای $x=1$ دو مقدار برای y داریم.

تمرین

کدام‌یک از ضابطه‌های زیر، مربوط به یک تابع است؟

۱) $x^2+2y^3=54$

۲) $3x^2-5y=8$

سؤال: چه موقع یک معادله با دو متغیر ضابطه‌ی یک تابع

را مشخص می‌کند؟

جواب: برای این‌که یک رابطه‌ی بین x و y ضابطه‌ی یک تابع را مشخص کند باید برای هر داده x (ورودی) فقط یک مقدار برای y به‌دست آید.

مثال ۱: تعیین کنید معادله‌ی مقابل برحسب x ضابطه‌ی یک تابع است.

$$y^{۲} = x + ۱$$

حل: به‌ازای $x = ۰$ مقدار y را حساب می‌کنیم :

$$y^{۲} = ۰ + ۱ = ۱ \Rightarrow y = \pm ۱$$

ــ بنابراین تابع نیست زیرا به‌ازای $x = ۰$ دو مقدار برای y به‌دست آوردیم.

مثال ۲: تعیین کنید معادله‌ی مقابل برحسب x ضابطه‌ی یک تابع است.

$$-۳x + ۵y = ۲$$

حل: y را برحسب x مرتب می‌کنیم، یعنی :

$$۵y = ۲ + ۳x$$

$$\Rightarrow y = \frac{۲ + ۳x}{۵}$$

ــ چون به‌ازای هر x دقیقاً یک y به‌دست می‌آید معادله ضابطه‌ی تابع است.

مثال ۳: آیا معادله‌ی مقابل برحسب x ضابطه‌ی تابع است؟ چرا؟

$$|y| + x^{۲} = ۲۰$$

حل: به‌ازای $x = ۲$ داریم :

$$|y| + ۲^{۲} = ۲۰ \Rightarrow |y| = ۲۰ - ۴ \Rightarrow |y| = ۱۶$$

ــ بنابراین ضابطه‌ی تابع نیست، زیرا به‌ازای $x = ۲$ دو مقدار برای y داریم :

$$\Rightarrow y = \pm ۱۶$$

۲ــ۳ــ۲ــ تابع با جدول

مثال ۱: نمره‌ی ۵ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس در امتحان ریاضی طبق جدول ۴ــ۲ داده شده است.

به‌ازای هر شماره‌ی دانش‌آموزی یک نمره از آن درس داریم

جدول ۴ــ۲

شماره‌ی دانش‌آموز	۱	۲	۳	۴	۵
نمره‌ی دانش‌آموز	۱۸/۵	۱۵	۱۷	۱۲/۵	۱۹

مثال۲: در جدول ۵ــ۲، x تعداد کارگرهای یک شرکت و f(x) هزینه‌ی این شرکت است :

جدول ۵ــ۲

x	۰	۱	۲	۳	۴
f(x)	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰

الف) هزینه‌ی شرکت به‌ازای ۲ کارگر را محاسبه کنید.

$f(۲)=۲۰$

ب) f(۰) را بیابید (f(۰) هزینه‌ی شرکت بدون استخدام کردن کارگر است)

مقدار ثابت هزینه $f(۰)=۱۰$

ج) آیا می‌توانید ضابطه‌ای برای هزینه‌ی این شرکت بنویسید؟

حل: هزینه به ازای یک نفر

$f(۰)=۱۰$

$f(۱)=۱۵=۱۰+۵=۱۰+۵\times۱$

ــ هزینه به‌ازای دو نفر

$f(۲)=۲۰=۱۰+۱۰=۱۰+۵\times۲$

ــ هزینه به‌ازای ۳ نفر

$f(۳)=۲۵=۱۰+۱۵=۱۰+۵\times۳$

ــ هزینه به‌ازای n نفر

$f(n)=۱۰+۵n$

درنتیجه ضابطه‌ی هزینه‌ی شرکت به‌ازای x کارگر برابر است با :

$f(x)=۱۰+۵x$

فعالیت ۷ــ۲

با توجه به جدول ۶ــ۲ هرگاه x مسافت طی‌شده‌ی یک تاکسی تلفنی و L(x) هزینه‌ی آن باشد :

جدول ۶ــ۲

x	۰	۱	۲	۳	......
L(x)	۷	۱۱	۱۵	۱۹	......

الف) احمد برای رفتن مسافت ۳ کیلومتری چه هزینه‌ای را می‌پردازد؟

$L(۳)=$

ب) مقدار ثابت هزینه‌ی تاکسی تلفنی چقدر است؟

$L(۰)=$

ج) میزان هزینه‌ی احمد به‌ازای ۷ کیلومتر چقدر است؟

$L(۷)=$

د) به‌ازای چه مسافتی احمد بایستی ۴۷ تومان بپردازد؟

$L(x)=۴۷$

هـ) هرگاه ضابطه‌ی مقابل مفروض باشد، مراحل آن را بنویسید.

$L(x)=۷+۴x$

۳ــ۳ــ۲ــ تابع با زوج مرتب

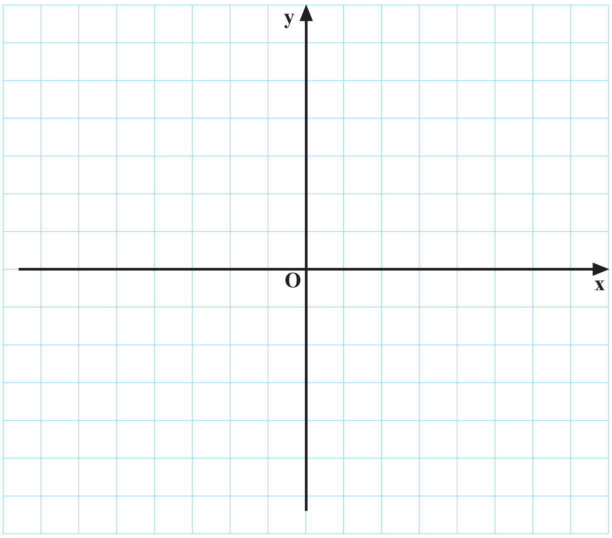
فعالیت ۸ ــ ۲

معادله‌ی $y=x-۳$ مفروض است.

الف) وقتی x از مجموعه‌ی $A=\{۰,۳,۵\}$ باشد، جدول ۷ــ۲ را کامل کنید و سپس نمودار $y=x-۳$ را رسم کنید.

جدول ۷ــ۲

x	۰	۳	۵
y			



نمودار ۷۵ــ۲

ب) آیا می‌توان معادله‌ی $y=x-۳$ را به‌صورت $f=\{(x,x-۳)|x\in\mathbb{R}\}$ (مجموعه‌ی زوج‌های مرتب) نوشت؟

بلی ☐ خیر ☐

ج) تابع f را به‌ازای $x\in A$ به‌صورت زوج‌های مرتب بنویسید.

مثال ۱: نمره‌ی ۵ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس با جدول ۸ــ۲ مشخص شده است.

جدول ۸ــ۲

x	۱	۲	۳	۴	۵
f(x)	۱۸/۵	۱۵	۱۷	۱۲/۵	۱۹

الف) تابع f را به‌صورت زوج مرتب بنویسید.

$f=\{(۱,۱۸/۵),(۲,۱۵),(۳,۱۷),(۴,۱۲/۵),(۵,۱۹)\}$

ب) دامنه‌ی تابع f را بنویسید.

$D_f=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

ج) برد تابع f را بنویسید.

$R_f=\{۱۸/۵,۱۵,۱۷,۱۲/۵,۱۹\}$

نتیجه: مجموعه‌ی مختص‌های اول یک تابع را دامنه و مجموعه‌ی مختص‌های دوم آن را برد می‌نامیم.

مثال ۲: دامنه و ضابطه‌ی تابع f مفروض است :

$$f(x) = ۴x - ۳ \ , \ D_f = \left\{-۲, -\frac{۱}{۲}, ۰, ۱, ۳\right\}$$

الف) f را با جدول ۹ــ۲ مشخص کنید.

جدول ۹ــ۲

x	-۲	$-\frac{۱}{۲}$	۰	۱	۳
f(x)	-۱۱	-۵	-۳	۱	۹

ب) R_f را به‌دست آورید.

$$R_f = \{-۱۱, -۵, -۳, ۱, ۹\}$$

تعریف: مجموعه‌ی زوج‌های مرتب را تابع گوییم هرگاه مؤلفه‌های اول (مختص اول) برابر نداشته باشد، اگر دو زوج مرتب، مؤلفه‌های اول برابر داشته باشند، مؤلفه‌های دوم (مختص دوم) نیز برابر باشند.

مثال ۳: از رابطه‌های t، s، f، g، h و k کدام‌یک تابع‌اند؟

حل: t تابع است زیرا مؤلفه‌ی اول برابر ندارد.

$t = \{(-۱, ۳)\}$

ــ s تابع است زیرا مؤلفه‌ی اول تکراری ندارد.

$S = \{(۰, ۱), (-۱, ۱), (۳, ۱), (-۷, ۱)\}$

ــ f تابع است زیرا مختص اول برابر ندارد.

$f = \{(۳, ۲), (۴, ۵), (۸, ۵)\}$

ــ g تابع است زیرا مختص اول برابر ندارد.

$g = \{(-۳, ۵), (۱, ۵), (۳, ۵)\}$

ــ h تابع نیست زیرا مختص اول برابر دارد.

$h = \{(۲, ۳), (-۵, ۴), (۳, ۱۰), (-۵, ۹)\}$

ــ k تابع نیست زیرا مختص اول برابر دارد.

$k = \{(۵, ۷), (۵, ۴), (۵, ۱۰), (۵, ۸)\}$

مثال ۴: مقدار m را در رابطه‌ی مقابل چنان بیابید که f یک تابع شود.

$f = \{(۳, ۳m - ۵), (۳, ۷)\}$

حل: چون f یک تابع است و نیز مختص اول برابر دارد،

پس مختص دوم آن‌ها نیز برابر است، یعنی :

$$۳m-۵=۷ \Rightarrow ۳m=۵+۷=۱۲$$

$$\Rightarrow m=\frac{۱۲}{۳} \Rightarrow \boxed{m=۴}$$

مثال ۵: هرگاه مقادیر مقابل داده شده باشد،

$$f(۲)=۵ \quad f(۳)=۴ \quad f(۵)=-۲$$

الف) تابع f را به‌صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) دامنه و برد f را بیابید.

حل:

$$f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۵,-۲)\}$$

$$D_f=\{۲,۳,۵\} \ , \ R_f=\{۵,۴,-۲\}$$

مثال ۶: تابع f در مقابل مفروض است.

$$f:D \to \mathbb{R}$$
$$f(x)=۲x+۱$$

این تابع را به‌صورت زوج مرتب بنویسید.

حل:

$$f=\{(x,۲x+۱) | x\in D, ۲x+۱\in \mathbb{R}\}$$

مثال ۷: تابع X ودامنه‌ی آن در مقابل داده شده است
.(g 9 ۱۰ m/s^۲)

$$X(t)=\frac{۱}{۲}gt^۲+۱۰۰ \ , \ D_X=\{۰,۱,۲,۳,۴\}$$

ـ X(t) را به‌صورت جدول مرتب کنید.

حل:

جدول ۱۰ــ۲

t	۰	۱	۲	۳	۴
X(t)	۱۰۰	۱۰۵	۱۲۰	۱۴۵	۱۸۰

ـ X(t) را به‌صورت زوج مرتب بنویسید.

$$X=\{(۰,۱۰۰),(۱,۱۰۵),(۲,۱۲۰),(۳,۱۴۵),(۴,۱۸۰)\}$$

ـ برد تابع X را به‌دست آورید.

$$R_x=\{۱۰۰,۱۰۵,۱۲۰,۱۴۵,۱۸۰\}$$

ـ $\frac{.X}{.t}$ را به‌ازای $t_۱=۲$ و $t_۲=۳$ محاسبه کنید.

$$\frac{.X}{.t}=\frac{X(t_۲)-X(t_۱)}{t_۲-t_۱}=\frac{۱۴۵-۱۲۰}{۳-۲}=\frac{۲۵}{۱}$$

$$\Rightarrow \frac{.X}{.t}=۲۵$$

مثال ۸: با توجه به مقادیر روبه‌رو کارهای زیر را انجام دهید.

$f(۳)=۵ \ , \ f(۴)=-۶ \ , \ f(۵)=۹ \ , \ f(-۴)=۹$

الف) تابع f را به‌صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) دامنه را به‌دست آورید.

ج) برد f را به‌دست آورید.

حل:

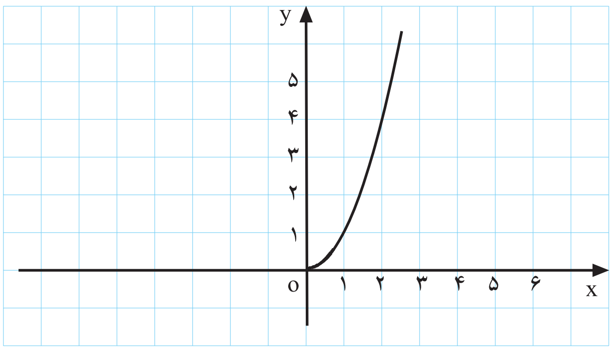
$f=\{(۳,+۵),(۴,-۶),(۵,۹),(-۴,۹)\}$

$D_f=\{۳,۴,۵,-۴\}$

$R_f=\{+۵,-۶,۹\}$

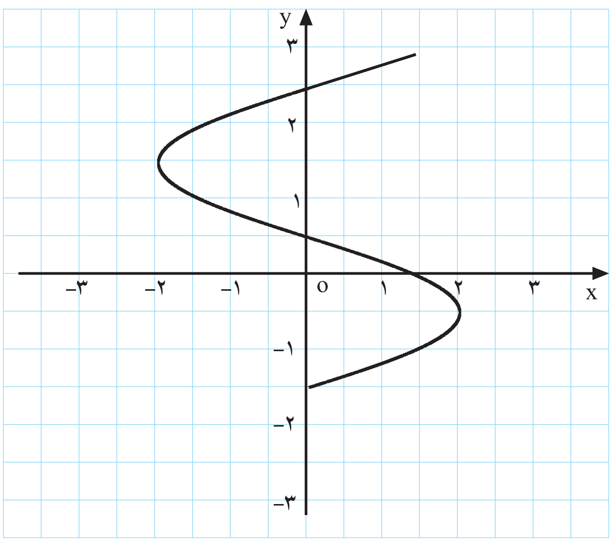
۴ــ۳ــ۲ــ نمایش نموداری تابع: تابع‌ها را می‌توان به‌صورت نمودار نیز نمایش داد.

مثلاً نمودار ۷۶ــ۲ نمودار یک تابع است. زیرا برای هر x فقط یک y وجود دارد.



نمودار ۷۶ــ۲

نمودار ۷۷ــ۲ نمودار تابع نیست چون به‌ازای $x=\frac{۱}{۲}$ بیش از یک مقدار برای y وجود دارد.



نمودار ۷۷ــ۲

تعریف: یک نمودار، نمودار یک تابع را مشخص می‌کند هرگاه هر خطی به موازات محور yها رسم کنیم نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

تمرین

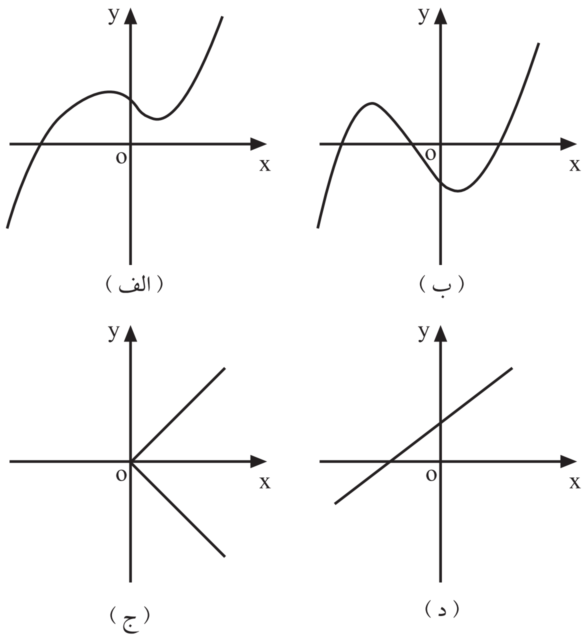
از نمودارهای ۷۸ــ۲ کدام یک نمودار یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) ☐

ب) ☐

ج) ☐

د) ☐

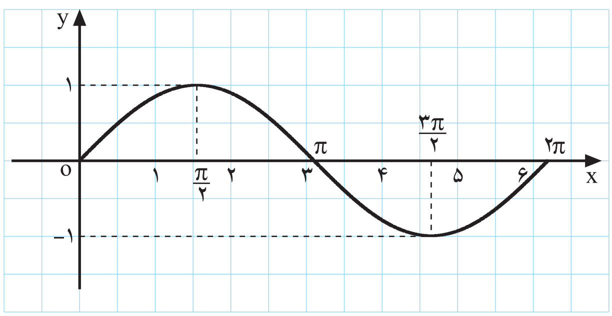


نمودارهای ۷۸ــ۲

مثال۱: با توجه به نمودار ۷۹ــ۲ــ الف به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) دامنه‌ی نمودار را بیابید.

ب) برد نمودار را به‌دست آورید.



نمودار ۷۹ــ۲ ــ الف

حل:

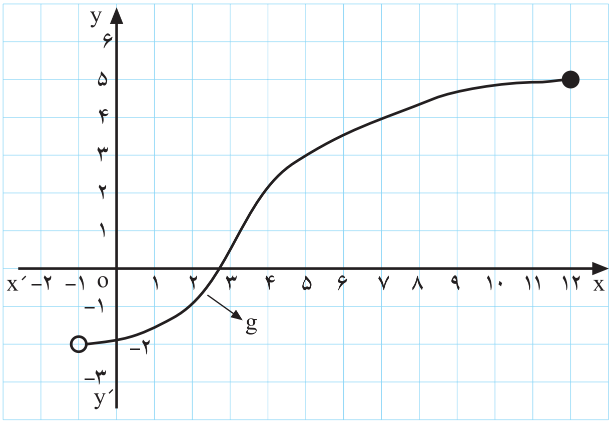
الف) برای تعیین دامنه از روی نمودار مقادیر xها را به‌صورت بازه می‌نویسیم، بنابراین :

$$D_f = [0, 2\pi]$$

ب) برای تعیین برد از روی نمودار مقادیر yها را به‌صورت بازه بیان می‌کنیم :

$$R_f = [-1, 1]$$

مثال ۲: با توجه به نمودار ۷۹ــ۲ــ ب به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.



نمودار ۷۹ــ۲ ــ ب

الف) دامنه‌ی نمودار را بیابید.
$D_g = (-۱,۱۲]$

ب) برد نمودار را به‌دست آورید.
$R_g = (-۲,۵]$

نتیجه: با توجه به فعالیت‌ها و مثال‌های حل‌شده، تابع‌ها را به چهار صورت می‌توان نمایش داد.

۱ــ با ضابطه ؛ مانند :
$y = -۳x + ۴$

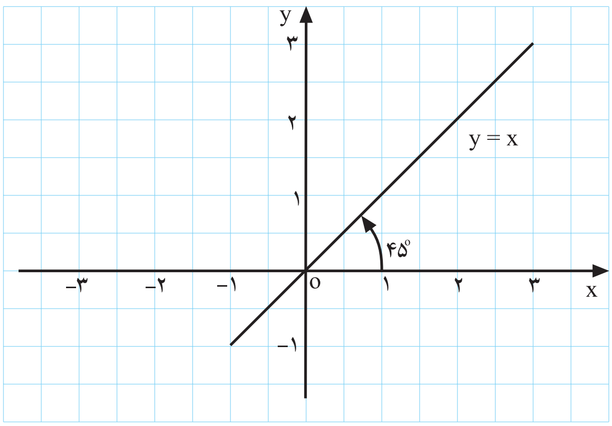
۲ــ با جدول ؛ مانند جدول ۱۱ــ۲

جدول ۱۱ــ۲

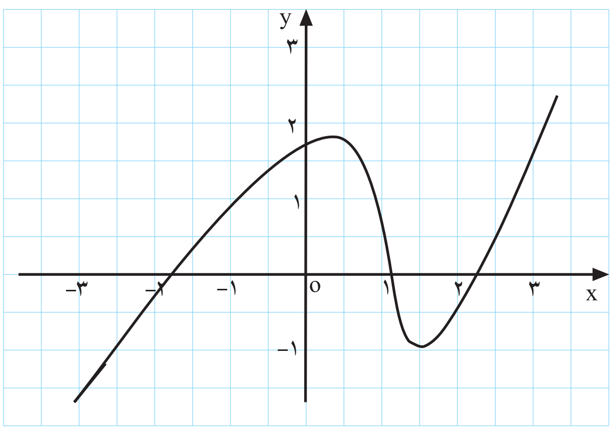
شماره‌ی دانش‌آموز	۱	۲	۳	۴	۵
قد دانش‌آموز	۱۶۲cm	۱۵۷cm	۱۷۰cm	۱۶۲cm	۱۷۲cm

۳ــ با زوج مرتب ؛ مانند :
$f = \{(x,y) | y = x,\ \ x,y \in \mathbb{R}\}$

۴ــ با نمودار ؛ مانند شکل‌های ۸۰ــ۲ و ۸۱ــ۲

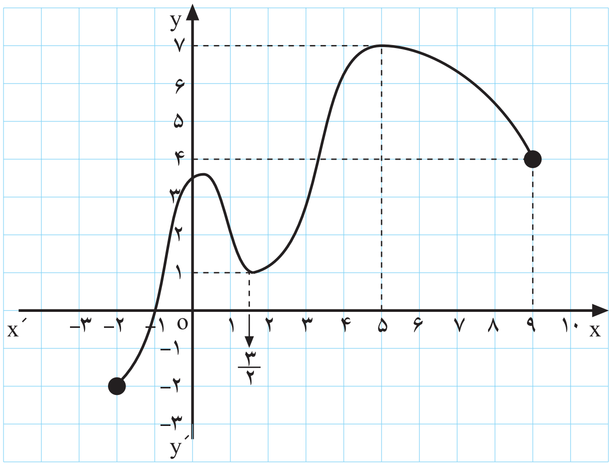


شکل ۸۰ــ۲



شکل ۸۱ــ۲

مثال ۳: تابع f با نمودار **۸۲ـ۲** مشخص شده است. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.



شکل ۸۲ـ۲

الف) D_f و R_f را به‌دست آورید :

$D_f=[-۲ \text{ و } ۹]$ و $R_f=[-۲ \text{ و } ۷]$

ب) با استفاده از نمودار ۸۲ـ۲، $f(\frac{۳}{۲})$ و $f(-۱)$ را بیابید.

$f(\frac{۳}{۲})=۱$ ، $f(-۱)=۰$

ج) اگر $f(x)=۷$ مقدار x چیست؟

$f(x)=۷ \rightarrow x=۵$

د) کم‌ترین مقدار تابع در بازه‌ی $[-۲,۷]$ چه مقدار است؟

$f(-۲)=-۲$

هـ) بیش‌ترین مقدار تابع در بازه‌ی $[-۲,۷]$ چه مقدار است؟

$f(۵)=۷$

مثال ۴: $f(x)$ و $f(-۳)$ در مقابل مفروض‌اند. مقدار b را به‌دست آورید.

$f(x)=۴x^۲+۳b-۷$ و $f(-۳)=۹$

حل: در $f(x)$ به جای x مقدار ۳− را قرار می‌دهیم و آن‌را برابر با ۹ قرار می‌دهیم.

$$f(-۳)=۹ \rightarrow ۴(-۳)^۲+۳b-۷=۹$$
$$\Rightarrow ۳۶+۳b-۷=۹$$

ـ با حل معادله مقدار b را به‌دست می‌آوریم.

$$\Rightarrow ۳b+۲۹=۹ \Rightarrow ۳b=۹-۲۹=-۲۰$$
$$\Rightarrow b=\frac{-۲۰}{۳}$$

آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۳)

$V_{(x)} =$

$V_{(۴)} =$

$x^۲ + ۲y^۳ = ۵۴$

$y = ۲\sqrt{۳}\cos x + ۱$

$D_f = \{۰, -۱, ۱, ۲\}$ و $f(x) = -۲x^۲ + ۱$

تمرین

۱ــ ابعاد مکعب مستطیلی برابر x، $x-۲$ و $x+۲$ است به‌طوری که $x > ۲$ ؛

الف) ضابطه‌ی حجم مکعب را بنویسید.

ب) به‌ازای $x = ۴$ حجم مکعب را محاسبه کنید.

راهنمایی: حجم مکعب‌مستطیل برابر است با حاصل‌ضرب ابعاد آن.

۲ــ آیا ضابطه‌ی مقابل مربوط به تابع است؟ چرا؟

۳ــ تابع مقابل مفروض است.

اگر $A\left|\begin{array}{l}\frac{\pi}{۶}\\ ۲b+۱\end{array}\right.$ یک نقطه از تابع باشد مقدار b را محاسبه کنید.

۴ــ تابع f و دامنه‌ی آن (D_f) مفروض است.

الف) تابع f را به‌صورت زوج مرتب بنویسید.

ب) جدول تابع را رسم کنید.

بخش دوم

فصل چهارم

دامنه‌ی تابع‌های حقیقی

هدف کلی
تشریح مفاهیم دامنه‌ی تابع‌هایی که برد آن‌ها زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است.

هدف‌های رفتاری: بعد از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ دامنه‌ی تابع را تعریف کند ؛

۲ــ دامنه‌ی تابع چند جمله‌ای را تشخیص دهد ؛

۳ــ دامنه‌ی توابع کسری را تعیین کند ؛

۴ــ دامنه‌ی تابع‌های رادیکالی را تعیین کند.

پیش‌آزمون (۴)

۱ــ دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

الف) $f = \{(۱,۵)\ و\ (-۲,۱)\ و\ (۵,۳)\ و\ (۷,۰)\}$

ب) $g(x) = \dfrac{۵x+۱}{۴x^۲-۱}$

پ) $Z(x) = \sqrt{۷-x^۲}$

ت) $k(x) = \sqrt{۳x-۵}$

ث) $h(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt[۳]{x-۲}-۲}$

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۴)

$D_f =$

$D_g =$

$D_z =$

$D_k =$

$D_h =$

۴ــ۲ــ دامنه‌ی تابع با ضابطه

دامنه‌ی توابع را در چند حالت بررسی می‌کنیم.

۱ــ۴ــ۲ــ دامنه‌ی توابع چند جمله‌ی از x، اعداد حقیقی می‌باشد.

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-۱} x^{n-۱} + \cdots + a_۱ x + a_۰ \,,$$

$$a_n \neq ۰ \;,\; n \in Z^+$$

به بیان دیگر :

$$D_f = \mathbb{R}$$

مثال: در زیر دو تابع داده شده‌اند، دامنه‌ی آن‌ها را بیابید.

الف) $f(x)=۴x+۵$

ب) $f(x)=۳x^۴-۵x+۷$

حل:

الف) $D_f=\mathbb{R}$

ب) $D_f=\mathbb{R}$

۲ــ۴ــ۲ــ دامنه‌ی توابع کسری

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

دامنه‌ی توابع کسری به صورت $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ ($p(x)$ و $q(x)$ چندجمله‌ای برحسب x) عبارت‌است از مجموعه‌ی اعداد حقیقی منهای ریشه‌های مخرج کسر (زیرا به ازای ریشه‌های مخرج کسر، تابع تعریف‌نشده است

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$$

$$D_f=\mathbb{R}-\{x \mid x\in\mathbb{R}, q(x)=\}$$

مثال۱: دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$f(x)=\frac{۳x+۱}{۵x-۱}$$

حل: ریشه‌ی مخرج کسر را پیدا می‌کنیم :

$$۵x-۱=۰ \Rightarrow ۵x=۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۵}$$

ــ دامنه‌ی تابع برابر است با :

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{\frac{۱}{۵}\right\}$$

مثال ۲: دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$g(x)=\frac{۵x+۴}{x^۲+۷x+۶}$$

حل: مخرج کسر را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$x^۲+۷x+۶=۰ \Rightarrow (x+۶)(x+۱)=۰$$

ــ ریشه‌های مخرج عبارتند از :

$$\Rightarrow \begin{cases} x+۶=۰ \Rightarrow x-\square۶ \\ x+۱=۰ \Rightarrow x-\square۱ \end{cases}$$

ــ دامنه‌ی تابع برابر است با :

$$\Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-۱,-۶\}$$

مثال ۳: دامنه‌ی تابع مقابل را بنویسید.

$$k(x)=\frac{x+۳}{x^{۲}+۲x-۳}$$

حل: مخرج کسر را مساوی صفر قرار می‌دهیم :

$$x^{۲}+۲x-۳=۰\Rightarrow (x+۳)(x-۱)=۰\Rightarrow$$

ــ ریشه‌های مخرج عبارتند از :

$$\begin{cases} x+۳=۰\Rightarrow x=-۳ \\ x-۱=۰\Rightarrow x=۱ \end{cases}$$

دامنه‌ی تابع k برابر است با :

$$D_k=\mathbb{R}-\{۱,-۳\}$$

تذکر: در تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ ، برای پیدا کردن دامنه نباید عبارت کسری را ساده کنیم (مثال ۳).

تمرین

دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی مقابل را بیابید.

$$f(x)=\frac{۵x^{۲}+x}{x^{۲}-۲x}$$

۳ــ۴ــ۲ــ دامنـه‌ی تابـع‌هـای شامل رادیــکال

(به این گونه توابع، توابع اصم نیز می‌گوییم) : دامنه‌ی توابع رادیکالی را در دو حالت با فرجه‌ی فرد و با فرجه‌ی زوج بررسی می‌کنیم.

$$f(x)=\sqrt[n]{f(x)}$$

دامنه‌ی تابع اصم با فرجه‌ی فرد:

$$f(x)=\sqrt[۲k+۱]{p(x)}\quad ,\quad k\in\mathbb{N}$$

ــ دامنه‌ی تابع f برابر است با :

$$D_f=D_p$$

مثال ۱: دامنه‌ی توابع داده‌شده را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt[۳]{۱-۵x}$

$$D_f=\mathbb{R}$$

ب) $f(x)=\sqrt[۳]{\dfrac{۱-۵x}{x^{۲}-۱۶}}$

$$D_f=\mathbb{R}-\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{R}\ ,\ x^{۲}-۱۶=۰\right\}$$

$$\Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{-۴,۴\}$$

دامنه‌ی تابع اصم با فرجه‌ی زوج

هرگاه $f(x)=\sqrt[۲K]{P(x)}$ ، $k\in N$ آنگاه :

$$f(x)=\sqrt[۲k]{p(x)}\ ,\quad k\in\mathbb{N}$$

$$D_f=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ p(x)\geq ۰\}$$

مثال ۲: دامنه‌ی تابع مقابل را پیدا کنید.

$$g(x)=\sqrt{۱-x}$$

حل: چون فرجه زوج است دامنه برابر است با :

$$D_g=\{x|x\in\mathbb{R},۱-x\geq ۰\}=(-\infty\ ,\ ۱]$$

مثال ۳: دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$k(x)=\sqrt{۳x-۸}$$

حل: چون فرجه زوج است، پس :

$$D_k=\{x|x\in\mathbb{R},۳x-۸\geq ۰\}$$

ــ نامعادله‌ی مقابل را حل می‌کنیم ؛

$$۳x-۸\geq ۰\Rightarrow ۳x\geq ۸\Rightarrow x\geq \frac{۸}{۳}$$

ــ دامنه‌ی تابع k برابر است با :

$$D_k=\left\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x\geq \frac{۸}{۳}\right\}=\left[\frac{۸}{۳}\ ,\ +\infty\right)$$

مثال ۴: دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$f(x)=\sqrt{\frac{۷-۲x}{۳x-۸}}$$

حل: چون فرجه زوج است، پس :

$$D_f=\left\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ \frac{۷-۲x}{۳x-۸}\geq ۰\right\}$$

برای پیدا کردن D_f نامعادله‌ی مقابل را حل می‌کنیم.

$$\frac{۷-۲x}{۳x-۸}\geq ۰$$

ــ ریشه‌های صورت و مخرج کسر را به دست می‌آوریم.

$$۷-۲x=۰\Rightarrow ۷=۲x\Rightarrow x=\frac{۷}{۲}$$

$$۳x-۸=۰\Rightarrow ۳x=۸\Rightarrow x=\frac{۸}{۳}$$

ــ با توجه به ریشه‌های نامعادله، جدول۱۲ــ۲ را تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۱۲ــ۲

x	$-\infty$	$\frac{۸}{۳}$		$\frac{۷}{۲}$	$+\infty$
$۷-۲x$	+		+	۰	−
$۳x-۸$	−	۰	+		+
$\frac{۷-۲x}{۳x-۸}$	−	تعریف نشده	+	۰	−
			جواب		

با توجه به جدول ۱۲ـ۲ دامنه را می‌یابیم، پس :

$$D_f = \left\{x \mid x \in \mathbb{R} \ , \ \frac{۸}{۳} \quad x \, 2 \, \frac{۷}{۲}\right\} = \left(\frac{۸}{۳} \ , \ \frac{۷}{۲}.\right.$$

فعالیت ۹ـ۲

تابع مقابل مفروض است.

$$f(x) = \sqrt{\frac{۳ - ۴x}{x^۲ - ۹}}$$

الف) ریشه‌ی عبارت $۴x - ۳$ را به‌دست آورید.

ب) ریشه‌های عبارت $x^۲ - ۹$ را به‌دست آورید.

ج) به‌ازای چه مقادیری از x تابع f تعریف نشده است؟

د) دامنه‌ی تابع f را بیابید.

مثال ۶: دامنه تابع مقابل را به‌دست آورید.

$$g(x) = \sqrt{\frac{۵ - ۷x}{x^۲ - x - ۱۲}}$$

حل: ریشه‌ی صورت کسر را به‌دست می‌آوریم.

$$۵ - ۷x = ۰ \Rightarrow ۵ = ۷x \Rightarrow x = \frac{۵}{۷}$$

ــ مخرج کسر را به حاصل‌ضرب دو عامل تبدیل می‌کنیم.

$$x^۲ - x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow (x - ۴)(x + ۳) = ۰$$

ــ ریشه‌های مخرج کسر را به‌دست می‌آوریم.

$$\Rightarrow \begin{cases} x - ۴ = ۰ \Rightarrow x = ۴ \\ x + ۳ = ۰ \Rightarrow x - \square ۳ \end{cases}$$

ــ دامنه‌ی g برابر است با :

$$D_g = \left\{x \mid x \in \mathbb{R}, \frac{۵ - ۷x}{x^۲ - x - ۱۲} \# ۰\right\}$$

ــ با توجه به ریشه‌های صورت و مخرج کسر، جدول ۱۳ـ۲ را تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۱۳ـ۲

x	$-\square$		-۳		$\frac{۵}{۷}$		۴		$+\infty$
$۵ - ۷x$		+		+	۰	−		−	
$x^۲ - x - ۱۲$		−	۰	$\square$		−	۰	+	
$\frac{۵ - ۷x}{x^۲ - x - ۱۲}$		− جواب	تعریف‌نشده	$\square$	۰	+ جواب	تعریف‌نشده	−	

ــ دامنه‌ی تابع g برابر با :

$$D_g - (\infty \ , -۳) \cup 3 \frac{۵}{۷} \ , ۴)$$

مثال ۷: دامنه‌ی تابع مقابل را محاسبه کنید.

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x)=۳x^{۲}-۵x+۴$$

حل: دامنه‌ی توابع چندجمله‌ای برابر اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ است.

$$D_f=\mathbb{R}$$

مثال ۸: دامنه‌ی تابع مقابل را به‌دست آورید.

$$f:\mathbb{R}\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x)=\sqrt{۶۴-x^{۲}}$$

حل: چون فرجه‌ی رادیکال زوج است، داریم :

$$D_f=\left\{x \middle| x\in\mathbb{R}, ۶۴-x^{۲}\geq ۰\right\}$$

ــ عبارت زیر رادیکال را برابر صفر قرار داده، ریشه‌های آن‌را به‌دست می‌آوریم.

$$۶۴-x^{۲}=۰\Rightarrow x^{۲}=۶۴\Rightarrow x=\pm ۸$$

ــ ریشه‌ها را به‌ترتیب صعودی در جدول ۱۴ــ۲ می‌نویسیم و عبارت زیر رادیکال را تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۱۴ــ۲

x	$-\infty$	$x<-۸$	-۸	$-۸<x<۸$	۸	$x>۸$
$۶۴-x^{۲}$		$-$	۰	$+$	۰	$-$
				جواب		

با توجه به جدول ۱۴ــ۲ دامنه برابر است با :

$$D_f=\left\{x \middle| x\in\mathbb{R}\ ,\ -۸\leq x\leq ۸\right\}=[-۸\ ،\ ۸].$$

مثال ۹: دامنه‌ی تابع مقابل را به‌دست آورید.

$$f:\mathbb{N}\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x)=\sqrt{۶۴-x^{۲}}$$

حل: با توجه به حل مثال ۸ دامنه‌ی تابع f برابر است با :

$$D_f=\left\{x \middle| x\in\mathbb{N}\ ,\ -۱\leq x\leq \right\}$$

ــ با شرط $x\in\mathbb{N}$ ، دامنه‌ی تابع f برابر است با :

$$D_f=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶,۷,\}$$

مثال ۱۰: دامنه‌ی تابع مقابل را به‌دست آورید.

$$f(x)=\sqrt{۳x^{۲}-۵x-۲}$$

حل: چون فرجه‌ی رادیکال زوج است، دامنه برابر است با :

$$D_f=\left\{x \middle| x\in\mathbb{R}\ ,۳x^{۲}-۵x-۲\geq ۰\right\}$$

ــ برای تعیین ریشه‌ها، عبارت را مساوی صفر قرار می‌دهیم :

$$۳x^{۲} - ۵x - ۲ \# ۰ \Rightarrow ۳x^{۲} - ۵x - ۲ = ۰$$

ــ با توجه به ضرایب c,b,a مبین معادله را تشکیل می‌دهیم :

$$\Delta = b^{۲} - ۴ac = (-۵)^{۲} - ۴(۳)(-۲) = ۲۵ + ۲۴ = ۴۹$$

چون $\Delta ۰$ ، معادله دارای دو ریشه‌ی $x_۱$ و $x_۲$ است.

ــ ریشه‌های $x_۱$ و $x_۲$ برابر است با :

$$x_۱ \text{ و } x_۲ = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(-۵) \pm \sqrt{۴۹}}{۲(۳)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۵+۷}{۶} = \frac{۱۲}{۶} \Rightarrow x_۱ = ۲ \\ x_۲ = \frac{۵-۷}{۶} = \frac{-۲}{۶} \Rightarrow x_۲ = \frac{-۱}{۳} \end{cases}$$

ــ ریشه‌ها را به‌ترتیب نزولی به صعودی در جدول ۱۵ــ۲ می‌نویسیم سپس عبارت $۳x^{۲} - ۵x - ۲$ را تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۱۵ــ۲

x	$x < -\frac{۱}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$		۲	$x > ۲$
$۳x^{۲} - ۵x - ۲$	+	۰	−	۰	+
	جواب				جواب

ــ با توجه به علامت نامعادله جواب مورد قبول برابر است با :

$$x - \square \frac{۱}{۳} \text{ یا } x \# ۲$$

ــ دامنه‌ی تابع f به‌صورت مجموعه برابر است با :

$$\Rightarrow D_f = \{x | x \in \mathbb{R} \ , \ x - \square \frac{۱}{۳} \text{ یا } x \# ۲$$

ــ به‌صورت بازه، دامنه برابر است با :

$$\Rightarrow D_f = (-\square \ , \ -\frac{۱}{۳}. \cup 3۲ \ , \ +\infty \ )$$

مثال ۱۱: دامنه‌ی تابع مقابل را به‌دست آورید.

$$Z(x) = \frac{۳ + x^{۲}}{x^{۲} - ۵x}$$

حل: ریشه‌ها را محاسبه می‌کنیم :

$$x^{۲} - ۵x = x(x-۵) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ x - ۵ = ۰ \Rightarrow x = ۵ \end{cases}$$

دامنه Z برابر با :

$$D_Z = \mathbb{R} - \{۰, ۵\}$$

مثال ۱۲: رابطه‌ی f به‌صورت مقابل مفروض است.

$$f = \{(x \ , \ y) | x + ۳y^{۲} = ۲۷ \ , \ x \ , \ y \in \mathbb{R}\}$$

آیا f یک تابع است؟ چرا؟

حل: به‌ازای $x = ۰$ چون دو مقدار برای y به‌دست می‌آید پس f یک تابع نیست.

$$x = ۰ \Rightarrow ۳y^{۲} = ۲۷ \Rightarrow y^{۲} = ۹ \Rightarrow y = \pm ۳$$

مثال ۱۳: دامنه‌ی تابع مقابل را به‌دست آورید.

$$f(x)=\frac{۳x+۱}{\sqrt{۹-x^{۲}}}$$

حل: چون فرجه زوج و عبارت زیر رادیکال مخرج کسر است، پس :

$$D_f=\{x|x\in\mathbb{R},۹-x^{۲}\ !\ \}$$

ــ نامعادله‌ی مقابل را حل می‌کنیم :

$$۹-x^{۲}\ !\ ۰\Rightarrow x^{۲}\quad ۹\Rightarrow |x|\quad ۳-\square\ ۳\quad x\quad ۳$$

ــ دامنه‌ی تابع f برابر است با :

$$D_f=(-۳,۳)$$

نکته: تابع f به‌صورت چند ضابطه‌ای در مقابل مفروض است دامنه‌ی تابع f برابر با اجتماع $D_۱$ و $D_۲$ و ... D_n است، یعنی :

$$f(x)=\begin{cases} f_۱(x) & , x\in D_۱ \\ f_۲(x) & , x\in D_۲ \\ \vdots & \quad\vdots \\ f_{n-۱}(x) & , x\in D_{n-۱} \\ f_n(x) & , x\in D_n \end{cases}$$

بنابراین، دامنه‌ی تابع f برابر است با :

$$D_f=D_۱\cup D_۲\cup D_۳\cup\cdots\cdots\cup D_n$$

مثال ۱۴: دامنه‌ی تابع مقابل را به‌دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases} ۵ & , \quad ۰\ 2\ x\quad ۴ \\ -۵ & , \quad x\ \#\ ۴ \end{cases}$$

حل: دامنه‌ی تابع f برابر با اجتماع دامنه‌های تک‌تک آن‌هاست، یعنی :

$$D_f=\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ ۰\ 2\ x\quad ۴\}\cup\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ x\ \#\ ۴\}$$

$$=\{x|x\in\mathbb{R},x\ \#\ \}\ = ۳,+\infty\ )$$

ــ دامنه‌ی f برابر با :

مثال: الف) دامنه‌ی تابع مقابل را بیابید.

$$f(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\ \#\ ۰ \\ -x+۳ & x\quad ۰ \end{cases}$$

ب) مقادیر $f(۰)$ و $f(-۱)$ را بیابید.

ج) تابع f را رسم کنید.

حل:

الف) هرگاه $f_۱(x) = x^۲$ و $f_۲(x) = -x + ۳$ دامنه‌ی f برابر است با :

$$D_f = D_{f_۱} \cup D_{f_۲} = [۰ , +\infty) \cup (-\infty , ۰) = (-\infty , +\infty) = \mathbb{R}$$

ب) $x = ۰$ را در ضابطه‌ی $f(x) = x^۲$ قرار می‌دهیم،

پس :

$$f(۰) = ۰^۲ = ۰$$

$x = -۱$ را در ضابطه‌ی $f(x) = -x + ۳$ قرار می‌دهیم،

یعنی :

$$f(-۱) = -(-۱) + ۳ = ۴$$

ج) با توجه به شرط‌های تابع، به‌ازای مقادیر دلخواه x مقادیر f(x) را برای هر ضابطه به‌دست می‌آوریم (جدول ۱۶ــ۲ــ الف و ب).

جدول ۱۶ــ۲

$x \geq ۰$

x	f(x)
۰	۰
۱	۱
۲	۴

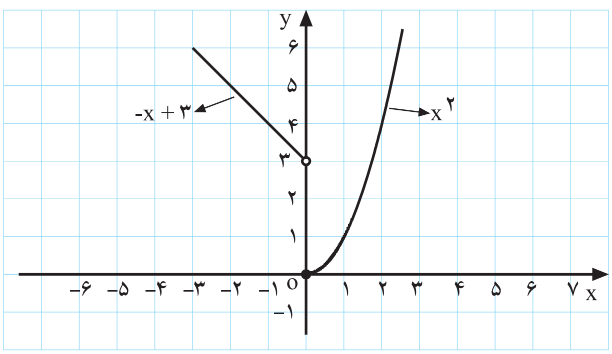
(الف)

$x < ۰$

x	f(x)
۰	۳
−۱	۴
−۲	۵

(ب)

ــ مقادیر جدول ۱۶ــ۲(الف) و (ب) را در دستگاه محورهای مختصات مشخص می‌کنیم و نمودار هریک را رسم می‌کنیم (شکل ۸۳ــ۲).

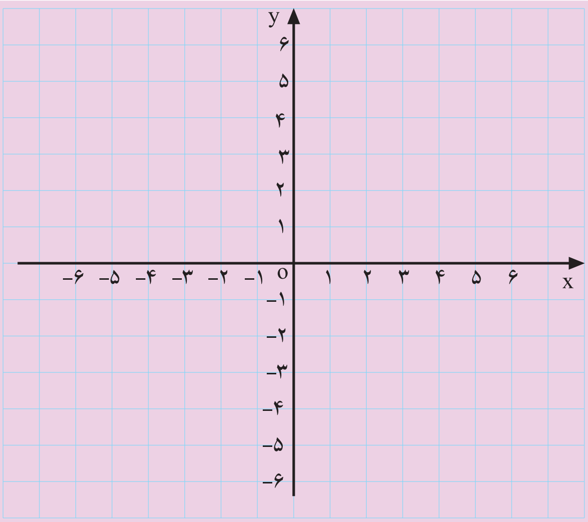


شکل ۸۳ــ۲

تمرین۱: تابع روبه‌رو مفروض است.

$$U(x) = \begin{cases} ۰ & x < ۰ \\ ۱ & x \geq ۰ \end{cases}$$

الف) نمودار تابع U را رسم کنید.



شکل ۸۴ـ۲

ب) دامنه‌ی تابع $U(x)$ را تعیین کنید.

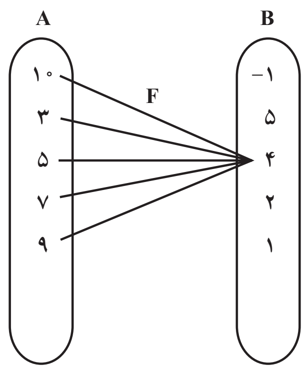
.

تمرین ۲: دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی مقابل را به‌دست آورید.

$$g(x)=\begin{cases}۱ & x\ !\ ۰\\ ۰ & x=۰\\ -۱ & x\quad ۰\end{cases}$$

مثال ۱۶: اگر شکل ۸۵ـ۲ نمایش مجموعه‌ی تابع f باشد،

یعنی : $f:A\longrightarrow B$



شکل ۸۵ـ۲

به سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

الف) مقادیر $f(۳)$ ، $f(۵)$ $f(۷)$, , $f(۹)$ ، $f(۱۰)$ را محاسبه کنید.

$f(۳)=۴\ ,\ f(۵)=۴\ ,\ f(۷)=۴,$

$f(۹)=۴\ ,\ f(۱۰)=۴$

ب) تابع f را به‌صورت زوج مرتب نمایش دهید.

$f=\{(۱۰,۴)\ ,\ (۳,۴)\ ,\ (۵\ ,۴)\ ,\ (۷\ ,۴)\ ,\ (۹\ ,\ ۴)\}$

سپس دامنه و برد آن را مشخص کنید.

$D_f=\{۱۰,۳,۵,۷,۹\}\qquad R_f=\{۴\}$

ج) $D_f\cap R_f$ را بیابید.

$D_f\cap R_f=\{\}$ یا 4

د) $D_f\cup R_f$ را پیدا کنید.

$D_f\cup R_f=\{۱۰\ ,\ ۳,\ ۵\ ,۷\ ,۹\ ,۴\}$

هـ) آیا می‌توانید ضابطه‌ای برای تابع f بنویسید؟

$f(۱۰)\ =۴, f(۳)\ =۴, f(۵)\ =۴, f(۷)\ =۴, f(۹)\ =۴$

ـ پس به‌ازای هر x از A ، داریم : $f(x)=۴$

نکته: تابع بالا را تابع ثابت می‌نامیم که در ادامه مطالب، معرفی می گردد.

مثلاً تابع‌های مقابل : $f(x)=۷\ ,\ g(x)-\square۱\ ,\ t(x)=\frac{۵}{۳}+\sqrt{۷}$

مثال ۱۷: تابع مقابل مفروض است. مقادیر زیر را محاسبه کنید. $f(x)=x+۳$

الف) $f(۴)$: به جای x، عدد ۴ را قرار می‌دهیم، پس :

$$f(۴)=۴+۳=۷\Rightarrow f(۴)=۷ \text{ یا } (۴\ ,\ ۷)$$

ب) $f(x+\Delta x)$: به جای x، $x+\Delta x$ را قرار می‌دهیم، یعنی :

$$f(x+\Delta x)=(x+\Delta x)+۳$$

ج) $f(x+\Delta x)-f(x)$:

تفاضل برابر است با : $f(x+\Delta x)-f(x)=x+\Delta x+۳-(x+۳)$

ـ پس از ساده کردن تفاضل به‌دست می‌آید.

$$f(x+\Delta x)-f(x)=\cancel{x}+\Delta x+\cancel{۳}-\cancel{x}-\cancel{۳}=\Delta x\ .$$

مثال ۱۸: تابع با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. مقادیر زیر را محاسبه کنید. $f(x)=۳x^۲-۵x$

الف) $f(۲)$: در تابع f به جای x، عدد ۲ را قرار می‌دهیم، پس :

$$f(۲)=۳(۲)^۲-۵(۲)=۱۲-۱۰=۲$$

ب) $f(۲+h)-f(۲)$:

در تابع f به جای x مقدار $۲+h$ را قرار می‌دهیم، یعنی : $f(۲+h)=۳(۲+h)^۲-۵(۲+h)$

ـ مقدار $f(۲+h)$ برابر است با : $\Rightarrow ۳(۴+۴h+h^۲)-۱۰-۵h=۳h^۲+۷h+۲$

ـ با توجه به مقادیر $f(۲)$ و $f(۲+h)$ ، تفاضل $f(۲+h)$ و $f(۲)$ برابر با :

$$f(۲+h)-f(۲)=۳h^{۲}+۷h+۲-۲=۳h^{۲}+۷h$$

تمرین

۱ـ تابع با ضابطه‌ی $g(x)=\begin{cases}۳x+۵ & x -\square ۲\\ x^{۲}+۴x & x-\square ۲\end{cases}$ مفروض است.

کارهای زیر را انجام دهید :

الف) جدول ۱۷ـ۲ (الف) و (ب) را تکمیل کنید.

جدول ۱۷ـ۲

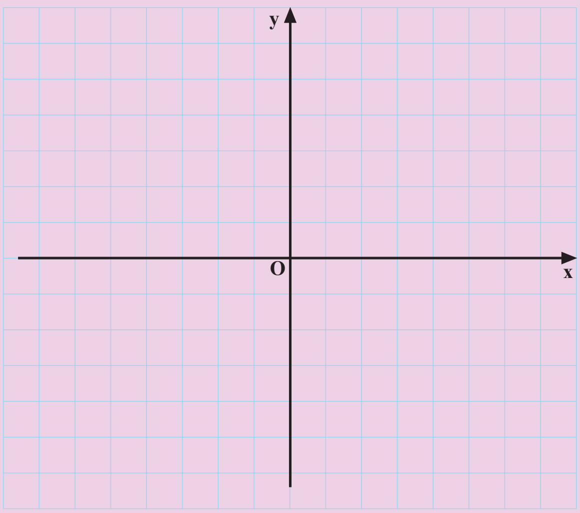
(ب) $x-\square ۲$

x	g(x)
−۲	
−۱	
۰	

(الف) $x<-۲$

x	g(x)
−۲	
−۳	
−۴	

ب) نمودار تابع g را با توجه به مقادیر به‌دست آمده از جدول ۱۷ـ۲ (الف) و (ب) رسم کنید.



شکل ۸۶ـ۲

۲ـ هرگاه $f(5)=۳5^{۲}-۵5+۴$ و $D_f=\{۰,۱,۲,۳,۴\}$ باشند.

جدول ۱۸ـ۲

5	۰	۱	۲	۳	۴
f(5)	۴	□	۶	□	□

الف) جدول ۱۸ـ۲ را تکمیل کنید.

ب) مؤلفه‌ی دوم تابع f را بنویسید.

$$f=\{(۰,۴),(۱,\cdots),(۲,\cdots),(۳,\cdots),(۴,\cdots)\}$$

ج) آیا می‌توان گفت $f(\frac{۵}{۶})=۰$ ؟ چرا؟

آزمون پایانی (۴)

۱ــ دامنه‌ی هریک از توابع زیر را بنویسید :

۱) $f(x) - \square ۵x^{۲} + ۴x + ۱$

۲) $f(x) = \dfrac{-۴x + ۱}{x^{۲} - ۷x + ۱۲}$

۳) $f(x) = \sqrt[۳]{\dfrac{۳x - ۱}{۵ - ۷x}}$

۴) $f(x) = \dfrac{۷x + ۱}{۵x^{۲} + ۸}$

۵) $f(x) = x - \sqrt{۱ - x^{۲}}$

۶) $f(x) = \sqrt{\dfrac{۳x - ۱}{x^{۲} - ۱}}$

۲ــ $f(x)$ و D_f در مقابل مفروض‌اند :

ــ تابع f را به‌صورت زوج مرتب و جدول نوشته و برد آن را بنویسید.

$f(x) = ۲\sin x + ۱$ و $D_f = \left\{۰, \dfrac{6}{۶}, \dfrac{6}{۳}, \dfrac{6}{۲}\right\}$

۳ــ تابع چندضابطه‌ای f در مقابل مفروض است دامنه و برد تابع f را بنویسید.

$$f_{(x)} = \begin{cases} -۲ & ۰ \; 2 \; x \quad ۳ \\ ۲/۵ & ۳ \; 2 \; x \quad ۵ \\ ۷ & ۵ \; 2 \; x \quad ۷ \end{cases}$$

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۴)

بخش دوم

فصل پنجم

چند تابع ویژه

هدف کلی

معرفی توابع ثابت، همانی، مثلثاتی و برخی از ویژگی‌های آن‌ها

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ نمودار تابع ثابت را رسم کند ؛

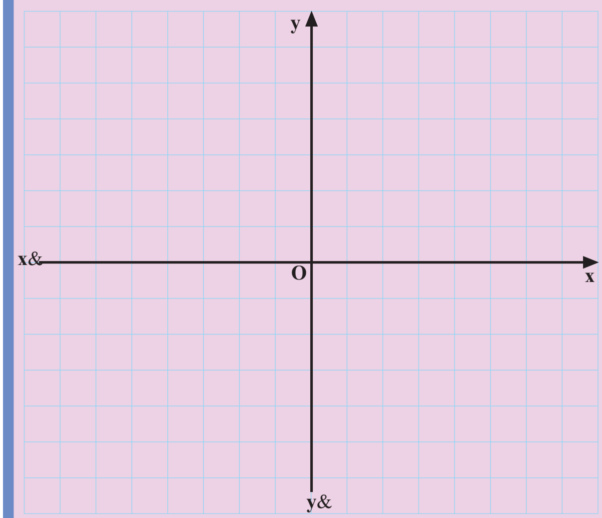
۲ــ تابع همانی را رسم کند ؛

۳ــ دامنه‌ی توابع مثلثاتی را تعیین کند ؛

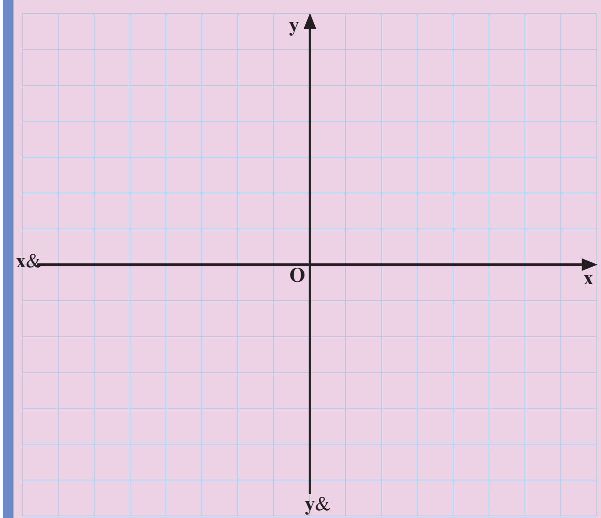
۴ــ تابع‌های مساوی را تعیین کند.

پیش آزمون (۵)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۵)



شکل ۸۷ـ۲



شکل ۸۸ـ۲

۱ـ نمودار تابع ۵□ − y را رسم کنید (شکل ۸۷ـ۲).

۲ـ تابع $I = \{(-۱,-۱),(۰,۰),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴)\}$ مفروض است.

ـ نقاط I را روی شکل ۸۸ـ۲ مشخص و به هم وصل کنید.

ـ نتیجه‌ای را که به‌دست می‌آورید به‌طور مختصر بنویسید.

۵ــ۲ــ چند تابع ویژه

دراین قسمت به بررسی چند تابع ویژه مانند تابع ثابت، تابع همانی و توابع مثلثاتی می‌پردازیم.

۱ــ۵ــ۲ــ تابع ثابت

فعالیت ۱۰ــ۲

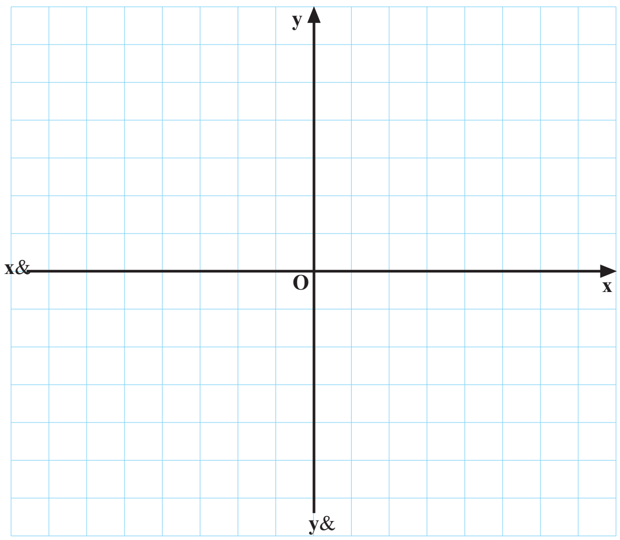
هرگاه $f(x) - \square$۷ باشد :

الف) جدول ۱۹ــ۲ را کامل کنید.

جدول ۱۹ــ۲

x	−۸	−۳	۰	۳	۴
f(x)	−۷	$\square$	$\square$	−۷	$\square$

ب) تابع f را در دستگاه محورهای مختصات شکل ۸۹ــ۲ رسم کنید.



شکل ۸۹ــ۲

ج) دامنه و برد تابع را به‌دست آورید.

د) آیا می‌توان گفت f یک تابع ثابت است؟

مثال: نمودار تابع مقابل را رسم کنید.

$f(x) = ۴$

حل: به ازای هر x داریم :

$f(x) = ۴$

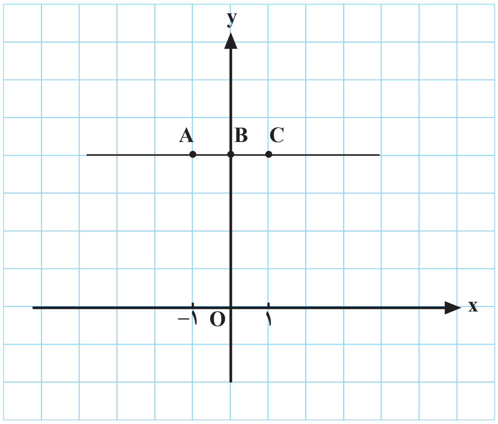
جدول ۲۰ــ۲ را تکمیل می‌کنیم.

با توجه به جدول تکمیل شده به ازای هر مقدار از x فقط یک مقدار برای y به‌دست می‌آید.

جدول ۲۰ــ۲

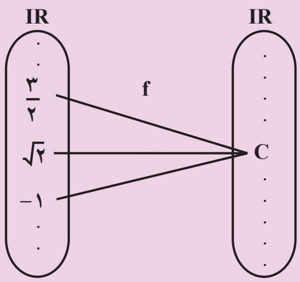
x	−۱	۰	۱
y	۴	۴	۴
	A(−۱,۴)	B(۰,۴)	C(۱,۴)

ـ در نمودار ۹۰ــ۲ خط $y=۴$ موازی محور xها را مشاهده می‌کنید.



نمودار ۹۰ــ۲

تعریف تابع ثابت: تابعی که در هر نقطه از دامنه‌اش مساوی مقدار ثابت c باشد تابع ثابت نام دارد.



نمودار ۹۱ــ۲

ـ شکل ریاضی آن مطابق رابطه‌ی روبه‌رو است.

$f: D_f \to \{c\} \qquad c \in \mathbb{R}$

$f(x)=c$

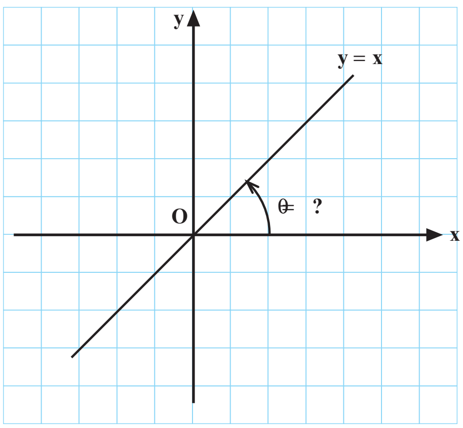
نکته : در تابع حقیقی $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ هرگاه $c \in \mathbb{R}$ و $f(x)=c$ آن‌گاه دامنه‌ی آن برابر مجموعه اعداد حقیقی و برد آن برابر $\{c\}$ است و خط $y=c$ موازی محورxهاست. به بیان دیگر : $D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=\{c\}$

۲ــ۵ــ۲ــ تابع همانی

فعالیت ۱۱ــ۲

با توجه به تابع با ضابطه‌ی $f(x)=x$ و نمودار ۹۲ــ۲ (نیمساز ربع اول و سوم) جاهای خالی را تکمیل کنید.

الف) تابع f را تابع .... می‌نامیم.

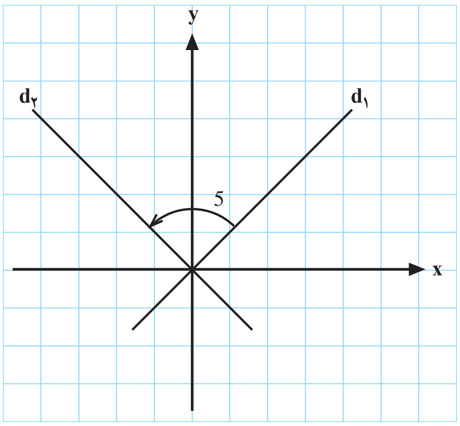


شکل ۹۲ــ۲

ب) شیب تابع همواره برابر یک است. به بیان دیگر $\tan\theta = \square$ و $\theta = \square$ است.

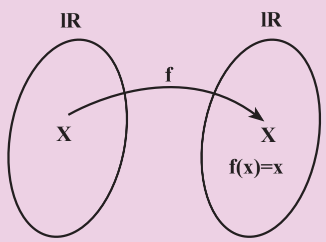
فعالیت ۱۲ــ۲

با توجه به شکل ۹۳ــ۲ هرگاه d_1 نیمساز ربع اول و سوم و d_2 نیمساز ربع دوم و چهارم باشد آن‌گاه زاویه‌ی 5 برابر .... است؟ چرا؟



شکل ۹۳ــ۲

نتیجه: هر تابع که هر عضو دامنه را به خودش متناظر کند یک تابع همانی است. ضابطه‌ی تابع، را با نماد $f(x) = x$ نمایش می‌دهیم (شکل ۹۴ــ۲).



شکل ۹۴ــ۲

نکته: دامنه و برد تابع همانی با هم برابر است و نمودار تابع همانی نیمساز ربع اول و سوم است.

مثال: مجموعه‌ی B، در مقابل، مفروض است.

$$B = \{۷, -۲, ۵\}$$

تابع همانی از مجموعه‌ی B را بنویسید.

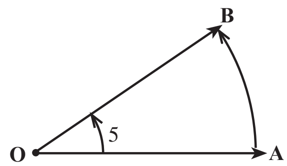
حل: فرض می‌کنیم I تابع همانی از B باشد، بنابراین خواهیم داشت :

$$I = \{(x,y) | x, y \in B, x = y\} = \{(۷,۷), (-۲,-۲), (۵,۵)\}$$

۳ــ۵ــ۲ــ مثلثات

زاویه: نیم خط $\overrightarrow{OA}$ شکل (۹۵ــ۲ــ الف) را حول نقطه‌ی O خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا در وضعیت $\overrightarrow{OB}$ قرار گیرد تا شکل ۹۵ــ۲ــ ب حاصل شود. زاویه‌ی حاصل (5 یا AOB 7) با سه نوع واحد، یعنی درجه، گراد و رادیان قابل اندازه‌گیری است.

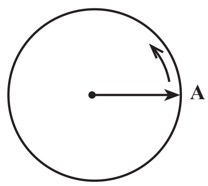
شکل ۹۵ــ۲ــ الف



شکل ۹۵ــ۲ــ ب

۱ــ درجه (D): هرگاه نیم خط $\overrightarrow{OA}$ یک دوران کامل نماید یک دایره تشکیل می‌شود. اندازه‌ی زاویه مرکزی مقابل به $\frac{۱}{۳۶۰}$ محیط دایره را یک درجه می‌نامند (شکل ۹۶ــ۲). اجزای درجه، دقیقه و ثانیه است و یک دقیقه برابر ۶۰ ثانیه است.

مثال ۱: نمایش مثلثاتی یک زاویه به اندازه‌ی سه درجه و چهار دقیقه و پنج ثانیه به شکل مقابل است.



۳° ۴& ۵&&

درجه دقیقه ثانیه

شکل ۹۶ــ۲

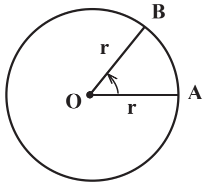
۲. گراد (G): اندازه‌ی زاویه مرکزی مقابل به $\frac{۱}{۴۰۰}$ محیط دایره را یک گراد می‌نامند. اجزای گراد عبارت است از :

دسی‌گراد ($\frac{۱}{۱۰}$ گراد)، سانتی‌گراد ($\frac{۱}{۱۰۰}$ گراد)، میلی‌گراد ($\frac{۱}{۱۰۰۰}$ گراد).

مثال: ۵/۴۳۲

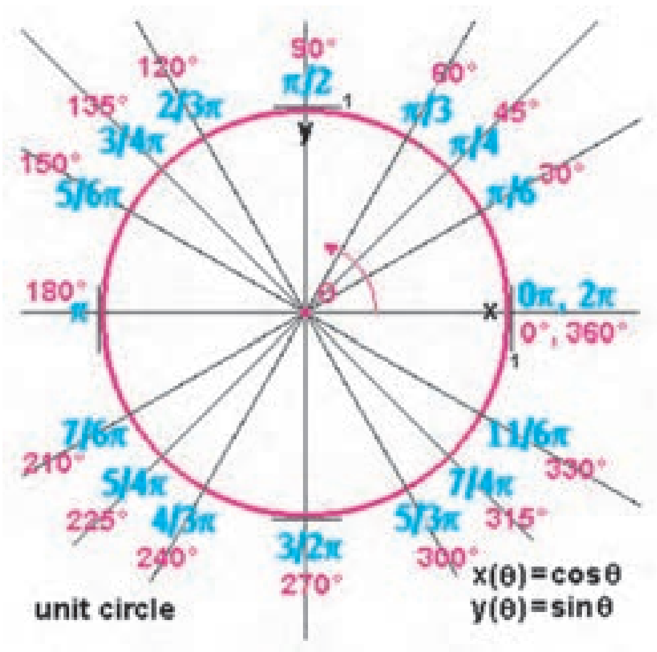
پنج گراد و چهار دسی گراد و سه سانتی‌گراد و دو میلی‌گراد.

۳. رادیان (R): اندازه‌ی زاویه مرکزی مقابل به کمانی از دایره که طول آن برابر با شعاع دایره باشد یک رادیان نامیده می‌شود (شکل ۹۷ــ۲).



شکل ۹۷ــ۲

با توجه به این که محیط دایره ۲6r می‌باشد، °۳۶۰ ۲6 رادیان است.



شکل ۹۸ــ۲

رابطه‌ی بین درجه، گراد و رادیان: با توجه به تعاریف زاویه، گراد و رادیان می‌توانیم رابطه‌ی مقابل را بنویسیم.

$$\frac{D}{۳۶۰}=\frac{G}{۴۰۰}=\frac{R}{۲6}$$

ــ هرگاه آن‌را بر عدد ۲ ساده کنیم داریم :

$$\boxed{\frac{D}{۱۸۰}=\frac{G}{۲۰۰}=\frac{R}{6}}$$

مثال ۲: ۴۵ درجه چند رادیان است؟

حل: رابطه‌ی رادیان و درجه را می‌نویسیم.

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{6}\ ,\ D=۴۵^\circ$$

$$\Rightarrow \frac{۴۵}{۱۸۰}=\frac{R}{6}\Rightarrow \frac{۱}{۴}=\frac{R}{6}\Rightarrow ۴R = 6 \Rightarrow$$

ــ °۴۵ برحسب رادیان برابر است با :

$$R=\frac{6}{۴}$$

نکته: 6 رادیان، ۱۸۰ درجه و ۲۰۰ گراد می‌باشد.

مثال ۳: $\frac{\pi}{۵}$ رادیان چند درجه و چند گراد است.

راه حل: برای تبدیل به درجه به جای π رادیان، ۱۸۰ درجه را قرار می‌دهیم، پس :

$$\frac{\pi}{۵} \xrightarrow{\text{تبدیل به درجه}} \frac{۱۸۰^\circ}{۵} = ۳۶^\circ$$

ــ برای تبدیل به گراد به جای π رادیان، ۲۰۰ گراد را قرار می‌دهیم، پس :

$$\frac{\pi}{۵} \xrightarrow{\text{تبدیل به گراد}} \frac{۲۰۰}{۵} = ۴۰ \text{ گراد}$$

نکته : رادیان $\frac{\pi}{۱۸۰}$ = یک درجه و $\frac{۱۸۰^\circ}{\pi}$ = یک رادیان. می‌باشد :

$$D = ۱^\circ \Rightarrow \frac{۱}{۱۸۰} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow ۱۸۰R = \pi \Rightarrow \quad R = \frac{\pi}{۱۸۰} \text{ رادیان}$$

$$R = ۱ \Rightarrow \frac{D}{۱۸۰} = \frac{۱}{\pi} \Rightarrow D \times \pi = ۱۸۰ \Rightarrow D = \frac{۱۸۰^\circ}{\pi} \text{ درجه}$$

مثال ۴: ۳۰ درجه چند رادیان و $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان چند درجه است؟

حل: ۳۰ درجه برابر $\frac{\pi}{۶}$ رادیان است، زیرا :

$$۳۰^\circ = ۳۰ \times \frac{\pi}{۱۸۰} = \frac{\pi}{۶} \text{ رادیان}$$

ــ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان برابر ۱۲۰ درجه است، زیرا :

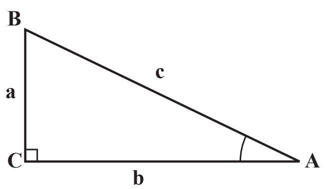
$$\frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲\pi}{۳} \times \frac{۱۸۰}{\pi} = ۱۲۰^\circ$$

ــ در روش دوم به جای π رادیان، ۱۸۰ درجه را قرار می‌دهیم پس $\frac{۲\pi}{۳}$ برابر با :

$$\text{یا} \quad \frac{۲\pi}{۳} = \frac{۲(۱۸۰)}{۳} = ۱۲۰^\circ$$

نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویه شکل ۹۹ــ۲ بنابر قرارداد داریم :



شکل ۹۹ــ۲

$$\text{سینوس زاویه‌ی A} = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی A}}{\text{وتر}} \qquad \sin A = \frac{a}{c}$$

$$\text{کسینوس زاویه‌ی A} = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی A}}{\text{وتر}} \qquad \cos A = \frac{b}{c}$$

$$\text{تانژانت زاویه‌ی A} = \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی A}}{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی A}} \qquad \tan A = \frac{a}{b}$$

$$\text{کتانژانت زاویه‌ی A} = \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی A}}{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی A}} \qquad \cot A = \frac{b}{a}$$

تمرین

۱. با توجه به مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC در شکل ۹۹ـ۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی B را به‌دست آورید.

$$\sin B = \frac{\square}{\square} \quad , \quad \cos B = \frac{\square}{\square}$$

$$\tan B = \frac{\square}{\square} \quad , \quad \cot B = \frac{\square}{\square}$$

۲. با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی، ABC در شکل ۹۹ـ۲ نسبت مثلثاتی برابر را به هم وصل کنید.

$b_۱)\ \sin B$	$a_۱)\ \sin A$
$b_۲)\ \cos B$	$a_۲)\ \cos A$
$b_۳)\ \tan B$	$a_۳)\ \tan A$
$b_۴)\ \cot B$	$a_۴)\ \cot A$

نتیجه: اگر دو زاویه متمم باشند $(\hat{A}+\hat{B}=۹۰^\circ)$ سینوس یکی برابر کسینوس دیگری و تانژانت یکی برابر با کتانژانت دیگری است (و برعکس)

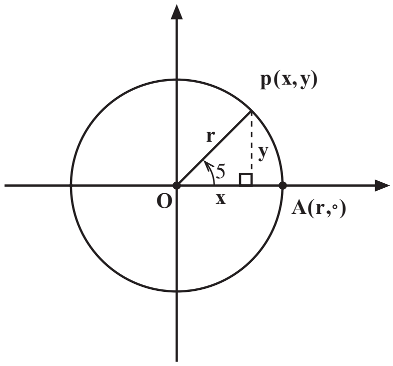
مثلاً :

$$۳۰^\circ + ۶۰^\circ = ۹۰^\circ \Rightarrow \begin{cases} \sin ۳۰ = \cos ۶۰^\circ \\ \cos ۳۰ = \sin ۶۰ \\ \tan ۳۰ = \cot ۶۰^\circ \\ \cot ۳۰ = \tan ۶۰ \end{cases}$$

$$۴۵^\circ + ۴۵^\circ = ۹۰ \Rightarrow \sin ۴۵^\circ = \cos ۴۵^\circ \ , \ \tan ۴۵^\circ = \cot ۴۵^\circ$$

فعالیت ۱۳ــ۲

از نقطه‌ی A روی دایره‌ی شکل ۱۰۰ــ۲ در جهت مثبت (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) شروع به حرکت می‌نماییم و به نقطه‌ای مانند P(x,y) می‌رسیم. نسبت مثلثاتی $(A\overset{8}{O}P)$ را بیابید.



شکل ۱۰۰ــ۲

$$r = \sqrt{x^۲ + y^۲}$$

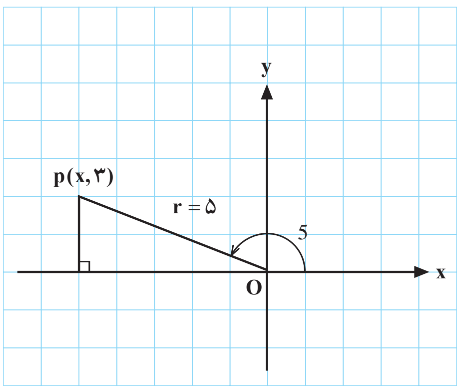
$$\sin\theta = \frac{\square}{r} \quad , \quad \cos\theta = \frac{\square}{r}$$

$$\tan\theta = \frac{\square}{\square} \quad , \quad \cot\theta = \frac{x}{y}$$

مثال ۱: در شکل ۱۰۱ــ۲، sin 5 ، cos 5 و tan 5 را بیابید.

حل:

ــ برای پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی ابتدا باید x_p را بیابیم.



شکل ۱۰۱ــ۲

ــ بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم :

$$r^۲ = x^۲ + y^۲ \Rightarrow ۵^۲ = x^۲ + ۳^۲ \Rightarrow x^۲ = ۱۶$$

ــ چون نقطه‌ی p در ناحیه‌ی دوم است، x_p منفی است.

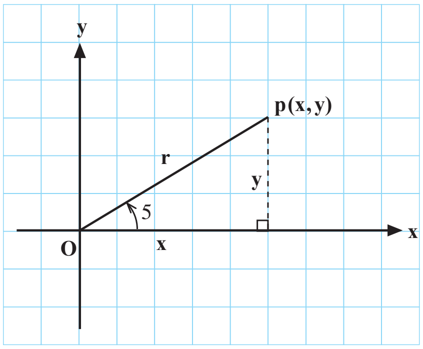
$$x - \square ۴$$

ــ بنابراین داریم :

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{۳}{۵} \ , \ \cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{-۴}{۵} \ , \ \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{۳}{-۴}$$

فعالیت ۱۴ــ۲

با توجه به تعاریف نسبت‌های مثلثاتی و شکل ۲ــ۱۰۲ جاهای خالی را پر کنید.



شکل ۲ــ۱۰۲

ــ بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم : $r^۲ = x^۲ + y^۲$

سینوس $\theta =$ $\dfrac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی 5}}{\text{وتر}}$ $۱)\ \sin\theta = \dfrac{\square}{r}$

کسینوس $\theta =$ $\dfrac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی 5}}{\text{وتر}}$ $۲)\ \cos\theta = \dfrac{\square}{r}$

تانژانت $\theta =$ $\dfrac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی 5}}{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی 5}}$ $۳)\ \tan\theta = \dfrac{\square}{\square}$

کتانژانت $\theta =$ $\dfrac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی 5}}{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی 5}}$ $۴)\ \cot\theta = \dfrac{\square}{\square}$

$$۵)\sin^۲\theta \quad \cos^۲\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^۲ + \left(\frac{x}{r}\right)^۲ = \frac{\square}{\square} = \bigcirc$$

ــ با توجه به شماره‌های ۱ و ۲ و طرفین و وسطین و جایگزینی x و y داریم :

$$۶)\ \tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{r\sin 5}{r\cos 5} = \frac{\sin 5}{\cos 5}$$

ــ با توجه به ۱ و ۲ و تعریف کتانژانت داریم :

$$۷)\ \cot\theta = \frac{x}{y} = \frac{\square}{\square} = \frac{\bigcirc}{\bigcirc}$$

نکته: عبارات مقابل به ازای تمامی زوایای θ درست است بنابراین اتحاد مثلثاتی نامیده می‌شوند.

$$\sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$$

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\ ,\ \cot\theta=\frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

تمرین

آیا عبارت روبه‌رو یک اتحاد مثلثاتی است؟ چرا؟

$$\sin\theta+\cos\theta=۱$$

فعالیت ۱۵ــ۲

الف) با توجه به اتحادهای مثلثاتی جاهای خالی را پر کنید.

$۱)\ \sin^۲\theta=۱-\square \qquad ۲)\ \cos^۲\theta=۱-\square$

ب) با توجه به حاصل‌ضرب تانژانت در کتانژانت جای خالی را پر کنید.

$$۳)\tan\theta\times\cot\theta=۱ \quad \tan\theta=\frac{۱}{\square}\ ,\ \cot\theta=\frac{۱}{\square}$$

ج) با فرض $\sin\theta\neq ۰$ دو طرف تساوی را بر $\sin^۲\theta$ تقسیم کنیم : جای خالی را پر کنید.

$$۴)\ \sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱\Rightarrow$$

$$\frac{\sin^۲\theta}{\sin^۲\theta}+\frac{\cos^۲\theta}{\sin^۲\theta}=\frac{۱}{\sin^۲\theta}\Rightarrow$$

$$۱+\square=\frac{۱}{\sin^۲\theta}$$

بنابراین :

ــ هرگاه با فرض $\cos\theta\neq ۰$ دو طرف تساوی مقابل را بر $\cos^۲\theta$ تقسیم کنیم، جای خالی را پر کنید.

$$۵)\ \sin^۲\theta+\cos^۲\theta=۱$$

$$\frac{\sin^۲\theta}{\cos^۲\theta}+\frac{\cos^۲\theta}{\cos^۲\theta}=\frac{۱}{\cos^۲\theta}\Rightarrow$$

$$۱+\square=\boxed{\frac{۱}{\cos^۲\theta}}$$

نتیجه: بنابر فعالیت (۱۵ــ۲ــ الف) داریم :

۱) $\sin^{2}\theta = 1-\cos^{2}\theta \ , \ \cos^{2}\theta = 1-\sin^{2}\theta$

بنابر فعالیت (۱۵ــ۲ــ ب) داریم :

۲) $\tan\theta \times \cot\theta = 1$ یا $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ یا $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$

بنابر فعالیت (۱۵ــ۲ــ ج) داریم :

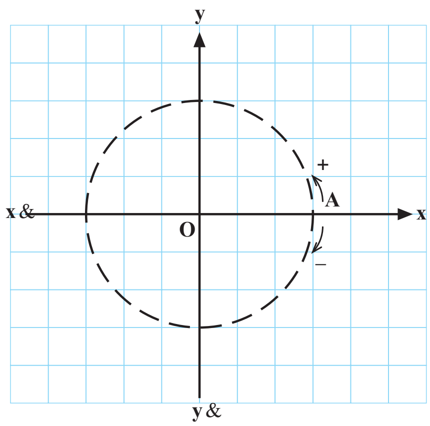
۳) $1+\tan^{2}\theta = \dfrac{1}{\cos^{2}\theta}$ یا $\cos^{2}\theta = \dfrac{1}{1+\tan^{2}\theta}$

بنابر فعالیت (۱۵ــ۲ــ د) داریم :

۴) $1+\cot^{2}\theta = \dfrac{1}{\sin^{2}\theta}$ یا $\sin^{2}\theta = \dfrac{1}{1+\cot^{2}\theta}$

دایره‌ی مثلثاتی

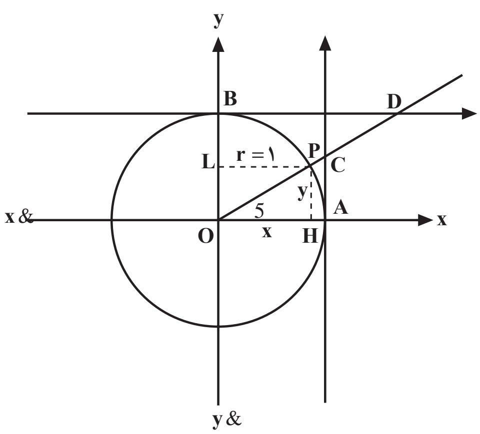
در دستگاه مختصات شکل ۱۰۳ــ۲ به کمک پرگار دایره‌ای به شعاع واحد (OA) رسم کنید. جهت دایره را خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر بگیرید. به این دایره، دایره‌ی مثلثاتی می‌گویند.



شکل ۱۰۳ــ۲

محورهای مثلثاتی

در شکل ۱۰۴ــ۲ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد و جهت مخالف عقربه‌های ساعت (دایره‌ی مثلثاتی) را مشاهده می‌کنید.



شکل ۱۰۴ــ۲

نقطه‌ی P(x,y) با جهت مثبت محور xها، زاویه‌ی θ می‌سازد. بنابر تعریف نسبت‌های مثلثاتی داریم :

$$\sin\theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = \overline{OL}$$

ــ محور $yo'y$ را محور سینوس‌ها می‌نامند. با توجه به‌تعریف دایره‌ی مثلثاتی و تغییرات $\sin\theta$ داریم :

$$-1 \le \sin\theta \le 1$$

ــ $x'ox$ را محور کسینوس‌ها می‌نامند. با توجه به شعاع دایره‌ی مثلثاتی داریم :

$$\cos\theta = \frac{x}{r} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

ــ تغییرات $\cos\theta$ برابر با :

$$-1 \le \cos\theta \le 1$$

با توجه به شکل ۴ــ۱۰ــ۲ و نسبت تشابه در مثلث‌های OAC و OPH داریم :

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} \text{ و } x \neq 0 \Rightarrow$$

$$\tan\theta = \overline{AC}$$

خط مماس بر دایره‌ی مثلثاتی در نقطه‌ی شروع (A) را محور تانژانت‌ها می‌نامند. بنابر نامحدود بودن خط داریم :

$$\tan\theta \in R$$

ــ با توجه به تعریف کتانژانت داریم :

$$\cot\theta = \frac{x}{y} \text{ ، } y \neq 0$$

ــ از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBD داریم : (شکل ۴ــ۱۰ــ۲)

$$\cot\theta = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BD}}{1} = \overline{BD}$$

ــ چون دو مثلث OPH و OBH به حالت سه زاویه، با یکدیگر متشابه می‌باشند و داریم :

$$\cot\theta = \frac{x}{y} = \overline{BD} \Rightarrow \cot\theta = BD$$

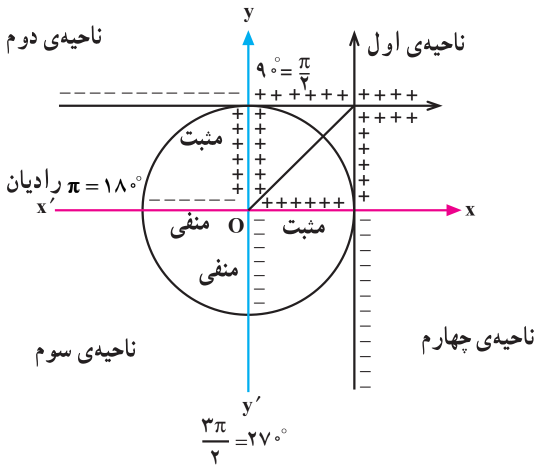
ــ بنابر نامحدود بودن، محور کتانژانت‌ها داریم :

$$\cot\theta \in IR$$

علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی چهارگانه‌ی دایره مثلثاتی

فعالیت ۱۶ــ۲

۱) در شکل ۱۰۵ــ۲ دایره‌ی مثلثاتی به همراه محورهای مثلثاتی رسم شده است. سؤال‌ها و جدول‌های زیر را کامل کنید.



شکل ۱۰۵ــ۲

تغییرات علامت $\sin\alpha$ در جدول ۲۱ــ۲

۱ــ تغییرات علامت $\sin\alpha$ را در جدول ۲۱ــ۲ کامل کنید.

جدول ۲۱ــ۲

α	ناحیه‌ی اول $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	ناحیه‌ی دوم $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	ناحیه‌ی سوم $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	ناحیه‌ی چهارم $\frac{3\pi}{2}<\alpha<4\pi$
علامت $\sin\alpha$	+	□	□	□

۲ــ تغییرات علامت $\cos\alpha$ را در جدول ۲۲ــ۲ کامل کنید.

جدول ۲۲ــ۲

α	$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$	$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$
علامت $\cos\alpha$	+	□	−	□

۳ــ با توجه به تغییرات علامت $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ در نواحی چهارگانه علامت $\tan\alpha$ را در جدول ۲۳ــ۲ تکمیل کنید.

جدول ۲۳ــ۲

α	ناحیه‌ی اول	ناحیه‌ی دوم	ناحیه‌ی سوم	ناحیه‌ی چهارم
علامت $\tan\alpha$	□	□	□	−

۴ــ با تکمیل جدول ۲۴ــ۲ علامت $\cot\alpha$ را در نواحی چهارگانه‌ی دایره مثلثاتی مشخص کنید.

جدول ۲۴ــ۲

α	$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<0<\pi$	$\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$	$0<\alpha<2\pi$
علامت $\cot\alpha$	□	□	+	−

ـ از رابطه‌ی روبه‌رو می‌توان نتیجه‌ی زیر را گرفت :

$\tan\alpha . \cot\alpha = ۱$

نتیجه: علامت‌های $\tan\alpha$ و $\cot\alpha$ همواره در ناحیه‌ی اول تا چهارم با هم برابر است.

مثال: رابطه‌ی مقابل همواره برقرار است، حدود α را مشخص کنید.

$\sin\alpha . \cos\alpha < ۰$ و $\sin\alpha > ۰$

حل: چون حاصل‌ضرب سینوس و کسینوس منفی است و $\sin\alpha > ۰$:

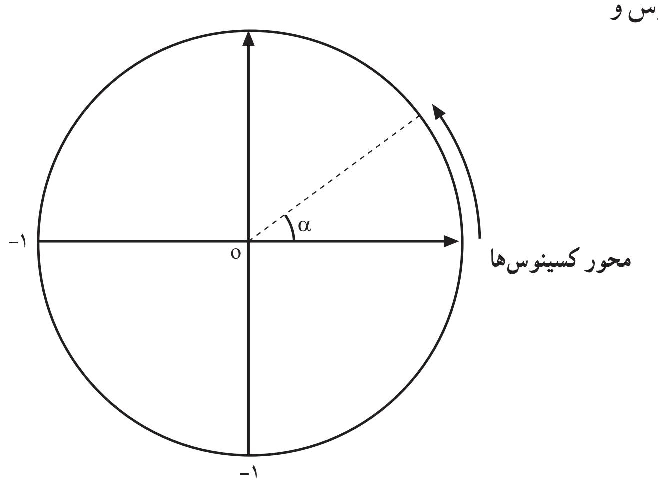
$\cos\alpha < ۰$

ـ پس α در ناحیه‌ی دوم قرار دارد، یعنی :

$\frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi$

فعالیت ۱۷ـ۲

در شکل ۱۰۶ـ۲ دایره‌ی مثلثاتی با محورهای سینوس و کسینوس رسم شده است.



شکل ۱۰۶ـ۲

۱ـ هر گاه $\alpha = ۰^\circ$ باشد محور کسینوس‌ها چه عددی را نشان می‌دهد؟

$\cos ۰^\circ = \square$

۲ـ هرگاه α از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ و از $\frac{\pi}{۲}$ تا π تغییر کند مقدار جبری کسینوس رفته رفته کم می‌شود در نقطه‌ی $\alpha = \frac{\pi}{۲}$ ، $\alpha = \pi$ مقدار کسینوس چه اعدادی را نشان می‌دهد؟

$\cos\frac{\pi}{۲} = \square$, $\cos\pi = \square$

۳ـ هرگاه α از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ و نیز از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π تغییر کند آیا مقدار کسینوس روبه افزایش است؟

بلی $\square$ خیر $\square$

در نقاط $x=\frac{۳\pi}{۲}$ و $x=۲\pi$ مقدار کسینوس چیست؟

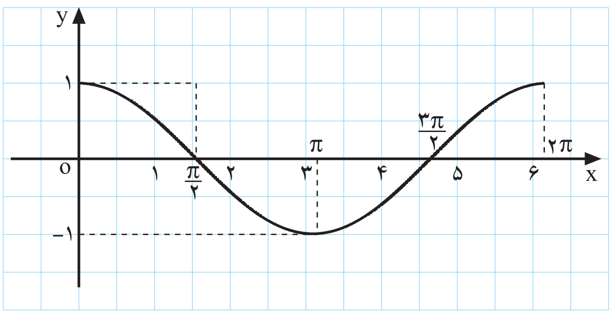
$\cos\frac{۳\pi}{۲}=\square$, $\cos ۲\pi=\square$

۴ــ جدول ۲۵ــ۲ را کامل کنید.

۵ــ با استفاده از جدول ۲۵ــ۲ و فعالیت ۱۳ــ۲ نمودار $y=\cos x$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم شده است.

جدول ۲۵ــ۲

α	۰	$\frac{\pi}{۲}=۹۰^\circ$	$\pi=۱۸۰^\circ$	$\frac{۳\pi}{۲}=۲۷۰^\circ$	$۲\pi=۳۶۰^\circ$
علامت $\cos\alpha$			-۱		



نمودار ۱۰۷ــ۲

۶ ــ هرگاه $\alpha=۰^\circ$ باشد امتداد زاویه محور سینوس‌ها را در مبدأ مختصات قطع می‌کند. در این حالت سینوس صفر درجه را به‌دست آورید (جدول ۲۶ــ۲ را تکمیل کنید).

جدول ۲۶ــ۲

α	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\sin\alpha$	$\square$	$\square$	۰	-۱	$\square$

$\sin(۰^\circ)=\square$

۷ــ وقتی α از ۰ تا $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند مقدار $\sin\alpha$ مثبت است. در $\alpha=\frac{\pi}{۲}$ مقدار سینوس **حداکثر** است. این مقدار چیست؟

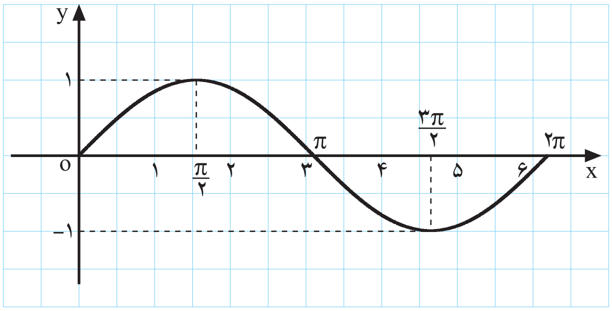
$\sin\frac{\pi}{۲}=\square$

۸ ــ در فواصل $\frac{\pi}{۲}$ تا π و π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ مقدار سینوس کاهش می‌یابد به‌طوری که در $\alpha=\frac{۳\pi}{۲}$ مقدار حداقل سینوس برابر -۱ می‌باشد. در ناحیه‌ی چهارم $(\frac{۳\pi}{۲}<\alpha<۲\pi)$ دوباره مقدار سینوس افزایش می‌یابد به‌طوری که در $\alpha=۲\pi$ مقدار آن صفر می‌شود.

$\sin\frac{۳\pi}{۲}=\square$

$\sin ۲\pi=۰$

ـ با توجه به مطالب بالا نمودار تابع $y=\sin x$ در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم شده است.



نمودار ۱۰۸ــ۲

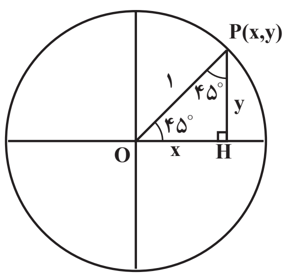
ـ با توجه به روابط روبه‌رو جدول ۲۷ــ۲ را تکمیل کنید.

$$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ ,\ \cot\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

جدول ۲۷ــ۲

α	۰	۹۰°	۱۸۰°	۲۷۰°	۳۶۰°
$\tan\alpha$	$\frac{۰}{۱}=۰$	$\square$	$\square$	نامعین	$\square$
$\cot\alpha$	نامعین $=\frac{۱}{۰}$	۰	$\square$	$\square$	$\square$

مثال: در دایـــره‌ی مثلثاتی شـکـل ۱۰۹ــ۲ مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه مفروض است. نسبت‌های مثلثاتی ۴۵° را به‌دست آورید.



شکل ۱۰۹ــ۲

حل: چون مثلث متساوی الساقین است. داریم :

$$OH=PH\Rightarrow x=y$$

ـ بنابر رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{OHP}$:

$$OP^۲=OH^۲+HP^۲\Rightarrow ۱=x^۲+x^۲\Rightarrow ۲x^۲=۱\Rightarrow x^۲=\frac{۱}{۲}$$

ـ چون x سمت راست مبدأ است پس جواب مثبت فقط قابل قبول است.

$$\Rightarrow x=\cancel{-\frac{۱}{\sqrt{۲}}}\ \text{یا}\ x=+\frac{۱}{\sqrt{۲}}\Rightarrow x=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

سینوس‌زاویه‌ی ۴۵° = $\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } ۴۵^\circ}{\text{وتر}}$، پس :

$$\sin(۴۵^\circ)=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱}\Rightarrow \sin ۴۵^\circ=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

کسینوس زاویه‌ی 45° = $\dfrac{\text{ضلع مجاور به } 45^\circ}{\text{وتر}}$ ، پس :

$$\cos(45^\circ)=\frac{x}{r}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1}\Rightarrow \cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

تانژانت زاویه‌ی 45° = $\dfrac{\text{ضلع مقابل به زاویه ی } 45^\circ}{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } 45^\circ}$ ، پس :

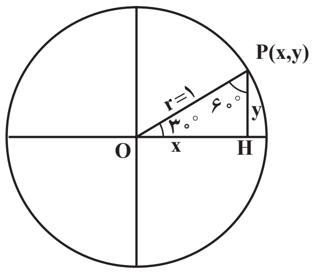
$$\tan(45^\circ)=\frac{y}{x}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow \tan 45^\circ=1$$

کتانژانت 45° = $\dfrac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی } 45^\circ}{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی } 45^\circ}$ ، پس :

$$\cot(45^\circ)=\frac{x}{y}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}\Rightarrow \cot 45^\circ=1$$

فعالیت ۱۸ـ۲

در شکل ۱۱۰ـ۲ مثلثی با دو زاویه‌ی 30° و 60° را مشاهده می‌نماییم، نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه را به‌دست آورید.



شکل ۱۱۰ـ۲

ـ می‌دانیم ضلع مقابل به زاویه‌ی 30° نصف وتر است، پس :

$$PH=y=\square$$

ـ بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم :

$$r^2=OH^2+PH^2\Rightarrow 1^2=x^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow x^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

ـ x و y در ناحیه‌ی اول است، پس فقط مثبت مورد قبول است.

$$\Rightarrow \cancel{x=-\sqrt{\frac{3}{4}}}\quad,\quad x=+\sqrt{\frac{3}{4}}\Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ـ چون دو زاویه‌ی 30° و 60° متمم یکدیگرند پس :

$$\sin(30^\circ)=\cos 60^\circ=\frac{\square}{\bigcirc}=\frac{1}{2}$$

ـ همچنین داریم :

$$\cos(30^\circ)=\frac{x}{r}=\frac{\square}{r}=\bigcirc=\sin 60^\circ$$

ـ $\tan 30^\circ$ برابر $\cot 60^\circ$ (زیرا $90^\circ=60^\circ+30^\circ$)، پس :

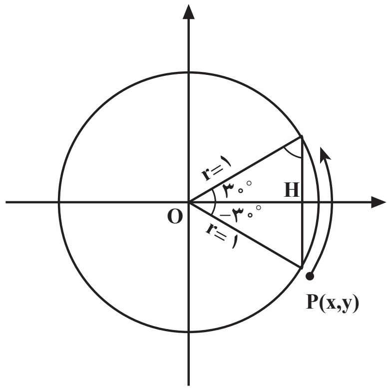
$$\tan(30^\circ)=\frac{\square}{x}=\frac{\frac{1}{2}}{\square}=\bigcirc=\cot 60^\circ$$

ـ $\cot 30^\circ$ برابر است با :

$$\cot(30^\circ)=\frac{x}{y}=\frac{\bigcirc}{\bigcirc}=\sqrt{3}=\tan\square$$

مثال ۱: نسبت مثلثاتی $\alpha = -۳۰^\circ$ را محاسبه کنید.

حل: در شکل ۱۱۱ـ۲ زاویه‌ی $\alpha = -۳۰^\circ$ را در جهت گردش عقربه‌های ساعت را جدا می‌کنیم.



شکل ۱۱۱ـ۲

ـ در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است.

$$\sin(۳۰^\circ) = PH = \frac{۱}{۲}$$

ـ با توجه به این که نقطه‌ی P در ناحیه‌ی چهارم واقع است. داریم :

$$y = -PH = -\frac{۱}{۲}$$

ـ بنابر قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت :

$$OP^۲ = OH^۲ + PH^۲ \Rightarrow ۱^۲ = x^۲ + \frac{۱}{۴} \Rightarrow x^۲ = ۱ - \frac{۱}{۴}$$

ـ چون $\theta = ۳۰^\circ$ در ناحیه‌ی چهارم واقع است فقط مثبت قابل قبول است.

$$x^۲ = \frac{۳}{۴} \Rightarrow x = \cancel{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \quad , \quad x = +\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ـ در نتیجه خواهیم داشت :

$$\sin(-۳۰^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{۱} \Rightarrow \sin(-۳۰^\circ) = \frac{-۱}{۲} = -\sin ۳۰^\circ$$

$$\cos(-۳۰^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱} \Rightarrow \cos(-۳۰^\circ) = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos ۳۰^\circ$$

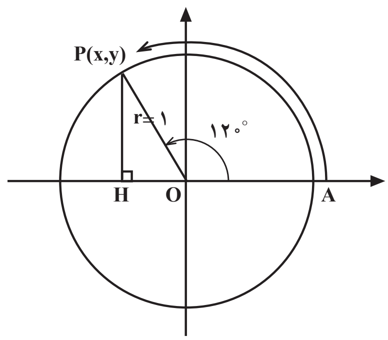
$$\tan(-۳۰^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{-۱}{\sqrt{۳}} = \frac{-\sqrt{۳}}{۳} = -\tan ۳۰^\circ$$

$$\cot(-۳۰^\circ) = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} = -\sqrt{۳} = -\cot ۳۰^\circ$$

نتیجه‌ی کلی: هرگاه دو زاویه مانند α و $-\alpha$ قرینه باشند، کسینوس آن‌ها برابر است ولی سایر نسبت‌های مثلثاتی قرینه‌ی یکدیگرند.

مثال ۲: نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\alpha = ۱۲۰$ را به‌دست آورید.

حل: در شکل ۱۱۲ــ۲ زاویه‌ی ۱۲۰° را روی دایره مثلثاتی جدا می‌کنیم.



شکل ۱۱۲ــ۲

ــ می‌دانیم ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است، پس:

$$OH = \frac{۱}{۲}OP = \frac{۱}{۲}(۱) \Rightarrow OH = \frac{۱}{۲}$$

ــ چون نقطه‌ی P در سمت چپ محور xها واقع است داریم:

$$x = -OH = \frac{-۱}{۲}$$

ــ بنابر قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

$$OP^۲ = PH^۲ + OH^۲ \Rightarrow ۱ = y^۲ + \frac{۱}{۴} \Rightarrow y^۲ = \frac{۳}{۴}$$

ــ چون نقطه‌ی p در ناحیه‌ی دوم است، پس y آن مثبت است.

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ یا } \cancel{y = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

ــ $\sin ۱۲۰$ برابر با $\sin ۶۰^\circ$ است زیرا:

$$\sin(۱۲۰^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin(۶۰^\circ)$$

ــ $\cos ۱۲۰$ برابر با $-\cos ۶۰^\circ$ است زیرا:

$$\cos(۱۲۰^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{۱} = \frac{-۱}{۲} = -\cos(۶۰^\circ)$$

ــ $\tan ۱۲۰$ برابر با $-\tan ۶۰^\circ$ است زیرا:

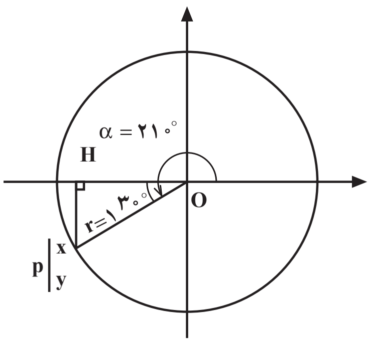
$$\tan(۱۲۰^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} = -\sqrt{۳} = -\tan(۶۰^\circ)$$

ــ $\cot ۱۲۰^\circ$ برابر با $-\cot ۶۰^\circ$ است زیرا:

$$\cot(۱۲۰^\circ) = \frac{x}{y} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{-۱}{\sqrt{۳}} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳} = -\cot(۶۰^\circ)$$

مثال ۳: نسبت مثلثاتی $\alpha = ۲۱۰^\circ$ را به‌دست آورید.

حل: زاویه‌ی ۲۱۰° را در شکل **۱۱۳ــ۲** روی دایره‌ی مثلثاتی جدا می‌کنیم.



شکل ۱۱۳ــ۲

ــ ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است، پس :

$$PH = \frac{۱}{۲}(OP) = \frac{۱}{۲}$$

ــ چون نقطه‌ی p زیر محور xها واقع است y منفی است، لذا داریم :

$$y = -PH = \frac{-۱}{۲}$$

ــ بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم :

$$OP^۲ = PH^۲ + OH^۲ \Rightarrow ۱ = \frac{۱}{۴} + x^۲ \Rightarrow x^۲ = \frac{۳}{۴}$$

ــ چون نقطه‌ی p در ناحیه‌ی سوم واقع است پس x منفی قابل قبول است، پس :

$$x = \cancel{\frac{\sqrt{۳}}{۲}} \text{ و } x = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ــ $\sin ۲۱۰^\circ$ برابر با $-\sin ۳۰^\circ$، زیرا :

$$\sin(۲۱۰^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{۱} = \frac{-۱}{۲} = -\sin(۳۰^\circ)$$

ــ $\cos ۲۱۰^\circ$ برابر با $-\cos ۳۰$، است زیرا :

$$\cos(۲۱۰^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲} = -\cos(۳۰^\circ)$$

ــ $\tan ۲۱۰^\circ$ برابر با $\tan(۳۰^\circ)$، زیرا :

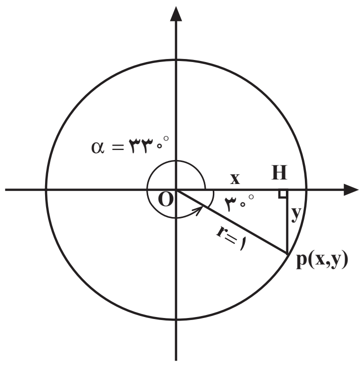
$$\tan ۲۱۰^\circ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \tan ۳۰^\circ$$

ــ $\cot(۲۱۰^\circ)$ برابر با $\cot(۳۰^\circ)$، زیرا :

$$\cot ۲۱۰^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{\frac{-۱}{۲}} = \sqrt{۳} = \cot ۳۰^\circ$$

مثال ۴: نسبت‌های مثلثاتی $\alpha = ۳۳۰$ را بیابید.

حل: روی دایره‌ی شکل ۱۱۴ــ۲ زاویه‌ی $\alpha = ۳۳۰^\circ$ را جدا می‌کنیم.



شکل ۱۱۴ــ۲

ــ ضلع مقابل به زاویه‌ی ۳۰° نصف وتر است، پس :

$$PH = \frac{۱}{۲} OP = \frac{۱}{۲}$$

ــ چون نقطه‌ی p در ناحیه‌ی چهارم است، پس :

$$y = -PH = \frac{-۱}{۲}$$

ــ بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم :

$$۱ = x^۲ + \frac{۱}{۴} \Rightarrow x^۲ = \frac{۳}{۴}$$

ــ چون p در ناحیه‌ی چهارم است، منفی مورد قبول نیست،

پس :

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \text{ و } x = \cancel{-\frac{\sqrt{۳}}{۲}}$$

ــ $\sin ۳۳۰^\circ$ برابر با $-\sin ۳۰$ ، زیرا :

$$\sin ۳۳۰^\circ = \frac{y}{r} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{۱} = \frac{-۱}{۲} = -\sin ۳۰^\circ$$

ــ $\cos(۳۳۰^\circ)$ برابر با $(+\cos ۳۰^\circ)$، زیرا :

$$\cos ۳۳۰^\circ = \frac{x}{r} = \frac{+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{۱} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos ۳۰^\circ$$

ــ $\tan(۳۳۰^\circ)$ برابر با $-\tan(۳۰^\circ)$ ، زیرا :

$$\tan ۳۳۰ = \frac{y}{x} = \frac{\frac{-۱}{۲}}{+\frac{\sqrt{۳}}{۲}} = \frac{-۱}{\sqrt{۳}} = \frac{-\sqrt{۳}}{۳} = -\tan ۳۰^\circ$$

ــ $\cot(۳۳۰^\circ)$ برابر با $-\cot(۳۰^\circ)$ ، زیرا :

$$\cot ۳۳۰^\circ = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{-\frac{۱}{۲}} = -\sqrt{۳} = -\cot ۳۰^\circ$$

تمرین

آیا می‌توانیم ادعا کنیم رابطه‌های مقابل درست است؟

بلی ☐   خیر ☐

$$\sin(۳۳۰^\circ)=\sin(۲\times۱۸۰-۳۰^\circ)=-\sin(۳۰^\circ)\ ,$$

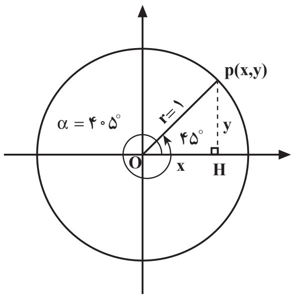
$$\cos(۳۳۰^\circ)=\cos(۲\times۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=\cos ۳۰$$

$$\tan ۳۳۰^\circ=\tan(۲\times۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=-\tan(۳۰^\circ)\ ,$$

$$\cot(۳۳۰^\circ)=(۲\times۱۸۰-۳۰^\circ)=-\cot ۳۰$$

مثال ۵: نسبت‌های مثلثاتی $\alpha=۴۰۵^\circ$ را بیابید.

حل: در شکل ۱۱۵ـ۲ زاویه‌ی $\alpha=۴۰۵^\circ$ را جدا می‌کنیم.



شکل ۱۱۵ـ۲

ـ ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی ۴۵° برابر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ وتر است، پس :

$$PH=\frac{\sqrt{۲}}{۲} \text{ و } OH=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ـ نقطه‌ی p در ناحیه‌ی اول قرار دارد پس :

$$y=PH=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ـ در مثلث $\overset{\Delta}{OHP}$ با توجه به تساوی دو زاویه، داریم :

$$OH=HP\Rightarrow x=y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

ـ $\sin(۴۰۵^\circ)$ برابر با $\sin(۴۵^\circ)$، زیرا :

$$\sin(۴۰۵^\circ)=\frac{y}{r}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\sin(۴۵^\circ)$$

ـ $\cos(۴۰۵^\circ)$ برابر با $\cos(۴۵^\circ)$، زیرا :

$$\cos(۴۰۵^\circ)=\frac{x}{r}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{۱}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\cos(۴۵^\circ)$$

ـ $\tan(۴۰۵^\circ)$ برابر با $\tan(۴۵^\circ)$، زیرا :

$$\tan(۴۰۵^\circ)=\frac{y}{x}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۱=\tan(۴۵^\circ)$$

ـ $\cot(۴۰۵^\circ)$ برابر با $\cot(۴۵^\circ)$، زیرا :

$$\cot(۴۰۵^\circ)=\frac{x}{y}=\frac{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}}=۱=\cot(۴۵^\circ)$$

با توجه به مثال حل شده در این قسمت می‌توانیم نتایج صفحه‌ی بعد را بیان کنیم :

نتیجه‌ی ۱: نسبت مثلثاتی $(-\alpha)$ برحسب α :

$$\sin(-\alpha^\circ) = -\sin\alpha^\circ$$
$$\cos(-\alpha^\circ) = \cos\alpha^\circ$$
$$\tan(-\alpha^\circ) = -\tan\alpha^\circ$$
$$\cot(-\alpha^\circ) = -\cot\alpha^\circ$$

مثال:

$$\sin(-۶۰^\circ) = -\sin(۶۰^\circ) = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\cos(-۶۰^\circ) = \cos(۶۰^\circ) = \frac{۱}{۲}$$
$$\tan(-۶۰^\circ) = -\tan(۶۰^\circ) = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$
$$\cot(-۶۰^\circ) = -\cot(۶۰^\circ) = -\sqrt{۳}$$

نتیجه‌ی ۲: نسبت مثلثاتی $\pi - \alpha$ برحسب α :

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot\alpha$$

مثال: $\alpha = \frac{۳\pi}{۴}$ یا $\alpha = \pi - \frac{\pi}{۴}$

$$\sin(\pi - \frac{\pi}{۴}) = \sin\frac{\pi}{۴} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\cos(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cos\frac{\pi}{۴} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$
$$\tan(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\tan\frac{\pi}{۴} = -۱$$
$$\cot(\pi - \frac{\pi}{۴}) = -\cot\frac{\pi}{۴} = -۱$$

نتیجه‌ی ۳: نسبت مثلثاتی $۲\pi - \alpha^\circ$ برحسب α :

$$\sin(۲\pi - \alpha^\circ) = -\sin\alpha^\circ$$
$$\cos(۲\pi - \alpha^\circ) = \cos\alpha^\circ$$
$$\tan(۲\pi - \alpha^\circ) = -\tan\alpha^\circ$$
$$\cot(۲\pi - \alpha^\circ) = -\cot\alpha$$

مثال: $\alpha = ۳۰۰^\circ = \frac{۵\pi}{۳}$ یا $\alpha = \frac{۵\pi}{۳} = ۲\pi - \frac{\pi}{۳}$

$$\sin(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\sin\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$
$$\cos(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = \cos\frac{\pi}{۳} = \frac{۱}{۲}$$
$$\tan(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\tan\frac{\pi}{۳} = -\sqrt{۳}$$
$$\cot(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = -\cot\frac{\pi}{۳} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

نتیجه‌ی ۴: نسبت مثلثاتی $۲\pi+\alpha$ برحسب α :

$$\sin(۲\pi+\alpha^\circ)=\sin\alpha^\circ$$

$$\cos(۲\pi+\alpha^\circ)=\cos\alpha^\circ$$

$$\tan(۲\pi+\alpha^\circ)=\tan\alpha^\circ$$

$$\cot(۲\pi+\alpha^\circ)=\cot\alpha^\circ$$

مثال: $\alpha=۳۹۰^\circ=۲\times۱۸۰^\circ+۳۰=۲\pi+\frac{\pi}{۶}$

$$\sin(۲\pi+\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

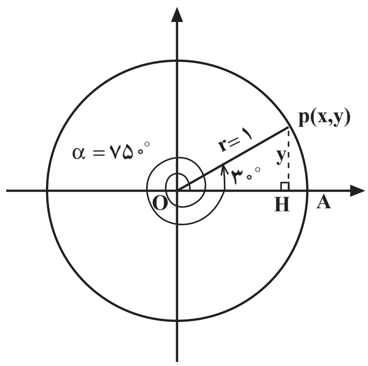
$$\cos(۲\pi+\frac{\pi}{۶})=\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan(۲\pi+\frac{\pi}{۶})=\tan\frac{\pi}{۶}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot(۲\pi+\frac{\pi}{۶})=\cot\frac{\pi}{۶}=\sqrt{۳}$$

مثال ۶: زاویه‌ی ۷۵۰° را روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص کنید و نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی ۷۵۰° را به‌دست آورید.

حل: زاویه‌ی ۷۵۰° را روی شکل ۱۱۶ـ۲ جدا می‌کنیم.



شکل ۱۱۶ـ۲

ـ پس از طی دو دور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، از نقطه‌ی شروع دایره، زاویه‌ی ۳۰° درجه را طی می‌کنیم؛ به ۷۵۰° می‌رسیم:

$۷۵۰^\circ\div۳۶۰=۲$ دور و ۳۰°

$$۷۵۰^\circ=۲\times۳۶۰^\circ+۳۰^\circ$$

ـ $\sin(۷۵۰^\circ)$ برابر با $\sin(۳۰^\circ)$:

$$\sin(۷۵۰^\circ)=\sin(۲\times۳۶۰^\circ+۳۰^\circ)=\sin(۳۰^\circ)=\frac{۱}{۲}$$

ـ $\cos(۷۵۰^\circ)$ برابر با $\cos(۳۰^\circ)$:

$$\cos(۷۵۰^\circ)=\cos(۲\times۳۶۰^\circ+۳۰^\circ)=\cos(۳۰^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ـ $\tan(۷۵۰^\circ)$ برابر با $\tan(۳۰^\circ)$:

$$\tan(۷۵۰^\circ)=\tan(۲\times۳۶۰^\circ+۳۰^\circ)=\tan(۳۰^\circ)=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

ـ $\cot(۷۵۰^\circ)$ برابر با $\cot(۳۰^\circ)$:

$$\cot(۷۵۰^\circ)=\cot(۲\times۳۶۰^\circ+۳۰^\circ)=\cot(۳۰^\circ)=\sqrt{۳}$$

ــ با توجه به حل مثال می‌توانیم نتیجه‌ی زیر را عنوان کنیم.

نتیجه: $\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha \ , \ k\in\mathbb{Z}$

$\cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha$

مثال: $\sin(۹۳۰^\circ)=\sin(۵\times۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=\sin۳۰=\frac{۱}{۲}$

$\cos(۹۳۰^\circ)=\cos(۵\times۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=\cos۳۰=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

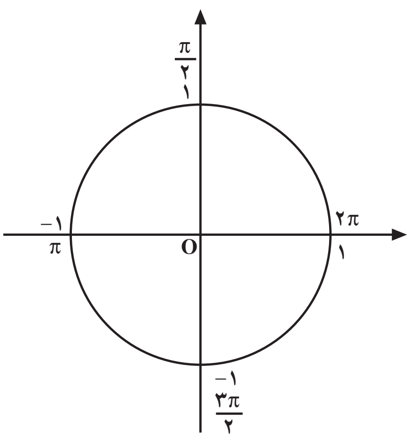
تمرین: نسبت‌های سینوس و کسینوس ۹۴۵° را بیابید.

پاسخ:

حل معادله‌های مثلثاتی

فعالیت ۱۹ــ۲

ــ دایره‌ی مثلثاتی در شکل ۱۱۷ــ۲ رسم شده است



شکل ۱۱۷ــ۲

۱ــ مقدار سینوس بین چه اعدادی قرار دارد؟

$-۱\leq\sin x\leq۱$

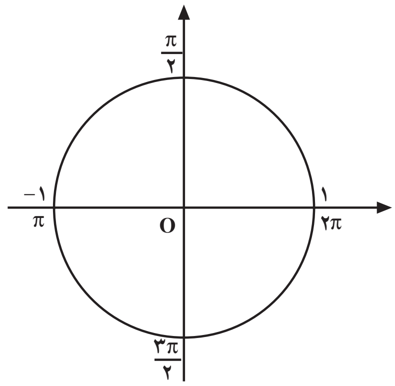
۲ــ تابع sinx به ازای چه زوایایی از x برابر یک می‌شود؟

$x=\boxed{}$

۳ــ تابع sinx به ازای چه مقدار از x برابر منفی یک می‌شود؟

$x=\boxed{}$

۴ــ وقتی $\sin x = ۰$ باشد، می‌خواهیم تمامی زوایایی را تعیین کنیم که مقدار سینوس آن‌ها صفر باشد. در شکل ۱۱۸ــ۲ مشخص کنید چه زوایایی دارای سینوس صفر می‌باشند؟



شکل ۱۱۸ــ۲

$\sin\boxed{} = ۰$ و $\sin\boxed{} = ۰$ و $\sin ۲\pi = ۰$

$\sin(۰^\circ + ۲\pi) = ?$

۵ ــ سینوس زوایای ۰، π، ۲π برابر صفر است. آیا سینوس زوایای ۳π، ۴π، ۵π و ... نیز صفر است؟ چرا؟

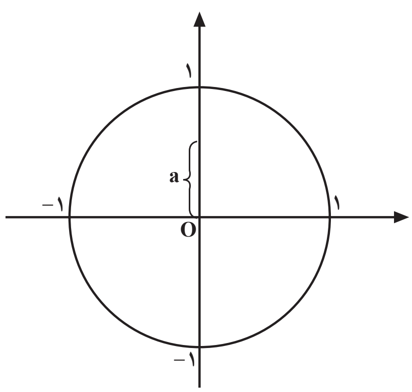
$\sin(\pi + ۲\pi) = ?$ و $\sin(\pi + ۳\pi) = ?$

$\sin(\pi + ۴\pi) = ?$

نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\sin x = ۰$ برابر است با : $x = k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

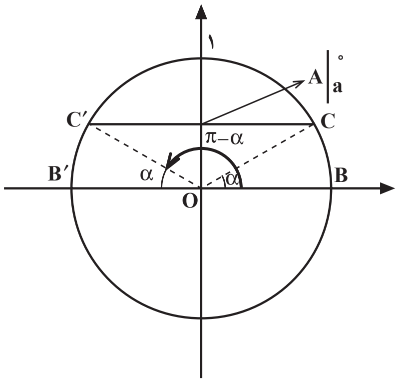
فعالیت ۲۰ــ۲

شکل ۱۱۹ــ۲ دایره‌ی مثلثاتی را نشان می‌دهد. برای پیدا کردن جواب‌های معادله‌ی $\sin x = a$، که $-۱ \le a \le ۱$، مراحل زیر را انجام دهید.



شکل ۱۱۹ــ۲

$\sin x = a$ و $-۱ \le a \le ۱$ و $x = ?$



شکل ۱۲۰ـ۲

۱ـ خط گذرا از نقطه‌ی $A(۰,a)$ و موازی با محور کسینوس‌ها را رسم کنید. این خط، دایره‌ی مثلثاتی را در چند نقطه قطع می‌کند؟ (شکل ۱۲۰ـ۲).

۲ـ نقاط C و C' را به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم. سینوس دو زاویه‌ی α و $\pi-\alpha$ با هم چه رابطه‌ای دارند؟ (شکل ۱۲۰ـ۲).

$$\sin(\pi-\alpha)\boxed{}\sin\alpha$$

۳ـ اگر α یا $\pi-\alpha$ یک جواب معادله باشند آیا هرچند بار دور دایره گردش نماییم مقدار سینوس تغییر می‌کند؟

$$\sin(\alpha+۲k\pi)=?\ \text{و}\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\sin((\pi-\alpha)+۲k\pi)=?$$

نتیجه: جواب کلی معادله‌ی مقابل عبارت است از :

$$\sin x=a=\sin\alpha \ ،\ -۱\le a\le ۱$$

$$x=۲k\pi+\alpha \ \text{یا}\ x=۲k\pi+(\pi-\alpha)\ ،k\in\mathbb{Z}$$

مثال: جواب‌های معادله‌ی مقابل را بیابید.

$$۲\sin^۲ x-\sin x=۰$$

حل: از sinx فاکتور می‌گیریم، بنابراین خواهیم داشت :

$$\sin x(۲\sin x-۱)=۰$$

ـ تک‌تک عوامل حاصل‌ضرب را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow\begin{cases}\sin x=\underset{x=۰^\circ}{۰}\Rightarrow x=k\pi+۰^\circ\Rightarrow\boxed{x=k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}}\\ ۲\sin x-۱=۰\Rightarrow ۲\sin x=۱\Rightarrow\sin x=\frac{۱}{۲}=\sin\frac{\pi}{۶}\Rightarrow\end{cases}$$

جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم.

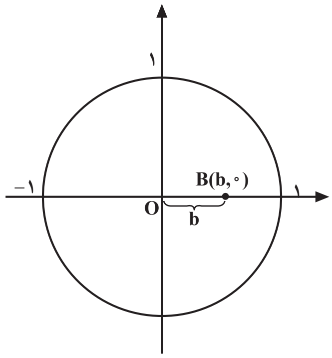
$$x=\frac{\pi}{۶}\ ,\ x=\pi-\frac{\pi}{۶}=۵\frac{\pi}{۶}$$

ـ جواب کلی معادله عبارت است از :

$$\Rightarrow\boxed{x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶}}\ \text{و}\ \boxed{x=۲k\pi+۵\frac{\pi}{۶}}$$

فعالیت ۲۱ــ۲

شکل ۱۲۱ــ۲ دایره‌ی مثلثاتی را نشان می‌دهد. برای پیدا کردن جواب‌های کلی معادله‌ی مقابل :



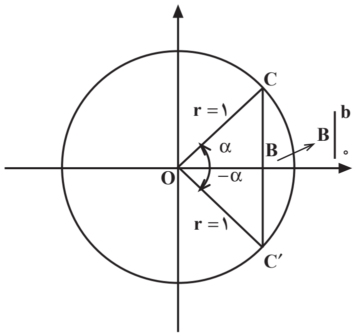
شکل ۱۲۱ــ۲

$\cos x = b$ ، $-۱ \le b \le ۱$

مراحل زیر را انجام دهید.

ــ خط گذرا از نقطه‌ی $B(b,۰)$ و موازی با محور سینوس‌ها را رسم کنید. این خط دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی C و C' قطع می‌کند (شکل ۱۲۲ــ۲).

ــ نقاط C و C' را به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم (شکل ۱۲۲ــ۲).



شکل ۱۲۲ــ۲

ــ دو زاویه‌ی ایجاد شده‌ی α و $-\alpha$ با هم چه رابطه‌ای دارند؟

$\cos(-\alpha) = \frac{OB}{r} \square$ $\cos\alpha = \frac{OB}{r}$

ــ آیا می‌توانیم رابطه‌ی مقابل را قبول کنیم؟

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ بلی ☐ خیر ☐

۳ــ اگر α و $-\alpha$ یک جواب معادله باشند و چندین بار زاویه دور دایره گردش کند $(۲k\pi)$ و بر روی α و $-\alpha$ قرار گیرد کسینوس برابر چه مقداری می‌باشد؟

$\cos(۲k\pi + \alpha) = \cos\alpha = \square$

$\cos(۲k\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \square$

نتیجه: جواب کلی معادله‌ی مقابل عبارت است از :

$\cos x = b = \cos\alpha$ ، $-۱ \le b \le ۱$

$x = ۲k\pi \pm \alpha \ , k \in \mathbb{Z}$

مثال: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی مقابل را پیدا کنید.

$\cos^{۲} x - ۲\cos x + \frac{۳}{۴} = ۰$

حل:

ــ حاصل جمع دو عدد $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{2}$ برابر ۲ و ضربشان برابر $\frac{3}{4}$ است، پس :

$$(\cos x-\frac{3}{2})(\cos x-\frac{1}{2})=0$$

با توجه به تغییرات cosx بین ۱− و ۱، جواب $\frac{3}{2}$ قابل‌قبول نیست.

ــ به ازای $\frac{1}{2}$ جواب قابل قبول، و زاویه‌ی x برابر است با :

$$\Rightarrow \begin{cases}\cos x-\frac{3}{2}=0\Rightarrow \cancel{\cos x=\frac{3}{2}}\\ \cos x=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\Rightarrow \boxed{x=\frac{\pi}{3}}\end{cases}$$

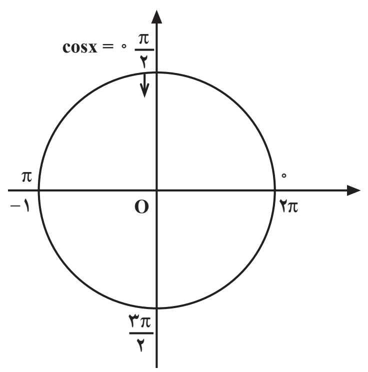
ــ با قرار دادن $\frac{\pi}{3}$ در رابطه‌ی کلی جواب‌های معادله را به‌دست می‌آوریم.

$$x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3} \quad \text{و} \quad k\in\mathbb{Z}$$

مثال: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$\cos x=0$$

حل: با توجه به شکل ۱۲۳ــ۲ به ازای $\frac{3\pi}{2}$ و $x=\frac{\pi}{2}$ معادله‌ی cosx برابر صفر است.



شکل ۱۲۳ــ۲

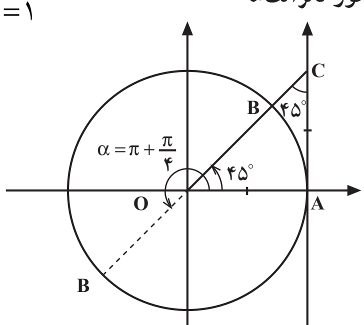
نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\cos x=0$ عبارت است از : $x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

مثال: معادله‌ی مثلثاتی مقابل را حل کنید.

$$\tan x=1$$

ــ برای پیدا کردن تمامی زوایایی که مقدار تانژانت آن‌ها برابر با عدد ۱ می‌باشد مراحل زیر را انجام دهید.

۱ــ در شکل ۱۲۴ــ۲ بر روی محور تانژانت پاره‌خط AC



شکل ۱۲۴ــ۲

را به اندازه‌ی واحد جدا کنید. از C به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم مقدار تانژانت زاویه‌ی حاصل (45°) برابر با چیست؟

$$\tan\frac{\pi}{4} = \boxed{}$$

۲ــ هرگاه نقطه‌ی B را به اندازه‌ی π واحد در جهت دایره‌ی مثلثاتی حرکت دهیم به نقطه‌ای مانند B' می‌رسیم. مقدار تانژانت زاویه‌ی $\pi+\frac{\pi}{4}$ برابر چیست؟

$$\tan(\pi+\frac{\pi}{4}) = ?$$

ــ هرگاه از B' به اندازه‌ی π واحد در جهت دایره‌ی مثلثاتی حرکت کنیم به نقطه‌ی B می‌رسیم. آیا مقدار تانژانت تغییر می‌کند؟

$$\tan(2\pi+\frac{\pi}{4}) = ?$$

ــ آیا رابطه‌ی مقابل صحیح است؟ چرا؟

$$\tan(k\pi+\frac{\pi}{4}) = 1 \quad \text{و} \quad k\in\mathbb{Z}$$

نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\tan x = m = \tan\alpha$ که $m\in\mathbb{R}$ برابر است با : $x = k\pi+\alpha \,,\, k\in\mathbb{Z}$

مثال‌های اضافی

مثال ۱: تابع روبه‌رو مفروض است.

$$f(x) = \frac{x}{2\sin x - 1}$$

الف) این تابع به ازای چه مقدار از x تعریف نمی‌شود؟

حل: به ازای ریشه‌های مخرج، تابع f تعریف نمی‌شود :

$$2\sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2\sin x = 1 \Rightarrow$$

$$\sin x = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

جواب‌های کلی عبارت است از :

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{6} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{6}) = 2k\pi + \frac{5\pi}{6} \end{cases} \quad k\in\mathbb{Z}$$

ب) دامنه‌ی تابع f را به‌دست آورید.

$$D_f = ?$$

حل: دامنه‌ی f عبارت از کلیه‌ی اعداد حقیقی به جز ریشه‌ی مخرج است، پس :

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{x \middle| x\in\mathbb{R}, x = 2k\pi+\frac{\pi}{6} \;\text{یا}\; x = 2k\pi+\frac{5\pi}{6}\right\}$$

مثال ۲: تابع با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. دامنه‌ی آن را به‌دست آورید.

$$f(x)=\frac{۱}{\sqrt{x^{۳}-۹x}}$$

حل: تابع f به ازای xهایی که $x^{۳}-۹x>۰$ تعریف شده است. نامعادله اخیر به روش تعیین علامت حل می‌شود.

$$x^{۳}-۹x=x(x^{۲}-۹)=۰$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=۰\\ x^{۲}-۹=۰\Rightarrow x^{۲}=۹\Rightarrow x=\pm ۳\end{cases}$$

ــ ریشه‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ در جدول **۲۸ــ۲** قرار داده و تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۲۸ــ۲

x		-۳		۰		۳	
x	−		−	۰	+		+
$x^{۲}-۹$	+	۰	−		−	۰	+
$x^{۳}-۹x$	−	۰	+ جواب	۰	−	۰	+ جواب

ــ در نتیجه دامنه‌ی f برابر است با :

$$D_f=(-۳,۰)\cup(۳,+\infty)$$

مثال ۳: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

$$f(x)=\sqrt{\frac{۲x+۱}{۳-۵x}}$$

الف) به‌ازای چه مقادیری از x تابع f تعریف شده است؟

حل:

ــ با توجه به زوج بودن فرجه‌ی رادیکال تابع f باید داشته باشیم :

$$\frac{۲x+۱}{۳-۵x}\geq ۰$$

ــ ریشه‌های صورت و مخرج نامعادله را به‌دست می‌آوریم :

$$۲x+۱=۰\Rightarrow ۲x=-۱\Rightarrow x=-\frac{۱}{۲}$$

$$۳-۵x=۰\Rightarrow ۳=۵x\Rightarrow x=\frac{۳}{۵}$$

ــ ریشه‌ها را به ترتیب نزولی به صعودی در جدول **۲۹ــ۲** قرار داده تعیین علامت می‌کنیم.

جدول ۲۹ــ۲

x		$-\frac{۱}{۲}$		$\frac{۳}{۵}$	
$۲x+۱$	−	۰	+		+
$۳-۵x$	+		+	۰	−
$\frac{۲x+۱}{۳-۵x}$	−	۰	+ جواب	نامعین	−

ــ با توجه به نامعادله، تابع در $\left[-\frac{۱}{۲},\frac{۳}{۵}\right)$ تعریف شده است.

ب) دامنه‌ی تابع f را پیدا کنید.

$$-\frac{۱}{۲}\leq x<\frac{۳}{۵}$$

حل:

با استفاده از جدول ۲۹ــ۲ دامنه‌ی f برابر است با :

$$D_f = \left\{x | x \in \mathbb{R}, -\frac{۱}{۲} \le x < \frac{۳}{۵}\right\} = \left[-\frac{۱}{۲}, \frac{۳}{۵}\right)$$

مثال ۴: تابع‌های f و g مفروض‌اند. مقادیر زیر را به‌دست آورید.

$$f(x) = ۷x^۲ - ۵x, g(x) = ۲\sin x - ۳$$

۱) $f(۰) + g(۰) = ?$

ــ f(۰) و g(۰) را از ضابطه‌ی مربوط به‌دست می‌آوریم و با هم جمع می‌کنیم :

$$\left.\begin{array}{l} f(۰) = ۷(۰)^۲ - ۵(۰) = ۰ - ۰ = ۰ \\ g(۰) = ۲\sin ۰ - ۳ = ۰ - ۳ = -۳ \end{array}\right\} \Rightarrow f(۰) + g(۰) = -۳$$

۲) $f(۳) - g(\frac{\pi}{۶}) = ?$

ــ f(۳) و $g(\frac{\pi}{۶})$ را از ضابطه‌ی مربوط به‌دست می‌آوریم و از هم کم می‌کنیم.

$$f(۳) = ۷(۳)^۲ - ۵(۳) = ۶۳ - ۱۵ = ۴۸$$

$$g(\frac{\pi}{۶}) = ۲\sin\frac{\pi}{۶} - ۳ = ۲ \times \frac{۱}{۲} - ۳ = ۱ - ۳ = -۲$$

$$\Rightarrow f(۳) - g(\frac{\pi}{۶}) = ۴۸ - (-۲) = ۵۰$$

مثال ۵: دامنه و برد تابع با ضابطه‌ی مقابل را به دست آورید.

$$f(x) = -۲\sin ۳x + ۵$$

حل: دامنه‌ی تابع شامل کلیه‌ی اعداد حقیقی است :

$$D_f = \mathbb{R}$$

ــ تغییرات تابع سینوس بین ۱− و ۱ است، بنابراین :

$$-۱ \le \sin ۳x \le ۱$$

ــ نامعادله را در عدد ۲− ضرب می‌کنیم، پس :

$$-۱ \times (-۲) \ge -۲ \times \sin ۳x \ge ۱ \times (-۲)$$

ــ چون نامعادله در عدد منفی ضرب شده است جهت نامعادله تغییر می‌کند.

$$+۲ \ge -۲\sin ۳x \ge -۲$$

به همه‌ی طرف‌های نامعادله عدد ۵ اضافه می‌کنیم.

$$۲ + ۵ \ge -۲\sin ۳x + ۵ \ge -۲ + ۵$$

ــ پس از ساده کردن برد تابع f برابر است با :

$$\Rightarrow ۷ \ge f(x) \ge ۳ \Rightarrow R_f = [۳, ۷]$$

مثال ۶: معادله‌ی مثلثاتی مقابل را حل کنید.

$$\sqrt{۳}\tan^{۲}x - \tan x = ۰$$

حل: از tanx فاکتور می‌گیریم و هر یک از عوامل را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$\tan x(\sqrt{۳}\tan x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \tan x = ۰ \\ \sqrt{۳}\tan x - ۱ = ۰ \end{cases}$$

ـ اولین جواب به ازای $\tan x = ۰$ برابر با :

$$\tan x = ۰ \Rightarrow x = ۰^\circ$$

ـ دومین جواب به‌ازای $\tan x = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$ برابر با :

$$\sqrt{۳}\tan x - ۱ = ۰ \Rightarrow \tan x = \frac{۱}{\sqrt{۳}} = \tan\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = \frac{\pi}{۶}$$

ـ جواب‌های کلی معادله برابر است با :

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\pi + \frac{\pi}{۶} \end{cases} ، k \in \mathbb{Z}$$

تمرین

۱ــ زوایــای $\frac{۱۱\pi}{۶}$ ، $\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{۵\pi}{۶}$ را بــرحسب درجــه بنویسید.

۲ــ نسبت‌های مثلثاتی ۳۰° و ۵۰° را برحسب رادیان بنویسید.

۳ــ معادله‌ی مقابل را حل کنید و جواب‌های کلی آن را به‌دست آورید.

$$\cos^۲ x - ۳\cos x + ۲ = ۰$$

۴ــ معادله‌ی مقابل را حل کنید و جواب‌های کلی را به‌دست آورید.

$$\sin ۲x = ۰$$

۴ــ۵ــ۲ــ تساوی دو تابع

فعالیت ۲۲ــ۲

دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند. جاهای خالی را در الف و ب تکمیل کنید.

$$f(x)=\sin^{۲}x+۳\ ,\ \ g(x)=-\cos^{۲}x+۴$$

الف) $D_f=\square$ و $D_g=\square$

ب) $R_f=\square$ و $R_g=\square$

ج) آیا می‌توان گفت: $f=g$ ؟ چرا؟

نتیجه: دو تابع f و g برابرند، هرگاه دو شرط را دارا باشند:

الف ــ دامنه‌های آن‌ها برابر باشند، یعنی $D_f=D_g$

ب ــ به ازای همه‌ی مقادیر x از دامنه، $f(x)=g(x)$ باشد.

مثال ۱: آیا دو تابع مقابل برابرند؟

$$f(x)=x+۲\ ,\ \ g_x=\frac{x^{۲}+۲x}{x}$$

حل: D_f و D_g را به‌دست می‌آوریم، آن‌گاه ثابت می‌شود برابر نیستند.

$$D_f=\mathbb{R}\ ,\ \ D_g=\mathbb{R}-\{۰\}\Rightarrow D_f\neq D_g$$

مثال ۲: آیا دو تابع مقابل برابرند؟

$$f(x)=۲-۲\sin^{۲}x \text{ و } g(x)=۲\cos^{۲}x$$

حل: D_f و D_g را به‌دست می‌آوریم:

$$D_f=\mathbb{R} \text{ و } D_g=\mathbb{R}\Rightarrow D_f=D_g$$

ــ برای هر x در دامنه‌ی تابع f $(D_f=D_g)$، $f(x)=g(x)$ زیرا

$$f(x)=۲-۲\sin^{۲}x=۲(۱-\sin^{۲}x)=۲\cos^{۲}x$$

پس، $f=g$.

فعالیت ۲۳ــ۲

دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۴}{x-۲} & x\neq ۲\\ ۳k+۱ & x=۲\end{cases} \text{ و } g(x)=x+۲$$

جاهای خالی زیر را تکمیل کنید.

الف) $D_g = \square$ و $D_f = (\mathbb{R} - \{۲\}) \cup \{۲\} = \square$

ب) $g(۲) = \square$

ج) هرگاه $f(۲) = g(۲)$ آن‌گاه $k = \square$

د) باتوجه به مقدار k، آیا می‌توان گفت دو تابع f و g برابرند؟

تمرین

کدام‌یک از زوج تابع‌های زیر برابرند؟

الف) $f(x) = \dfrac{x^۲ + ۷x + ۱۲}{x + ۳}$ و $g(x) = x + ۴$

ب) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^۲ - ۴x + ۳}{x - ۱} & x \neq ۱ \\ -۲ & x = ۱ \end{cases}$ و $g(x) = x - ۳$

آزمون پایانی (۵)

۱ــ $C \in \mathbb{R}$ و $y=C$ یک تابع ثابت است. نمودار تابع با توجه به دو مقدار مختلف ($C>0$ یا $C<0$) در کدام قسمت از محور xها قرار می‌گیرد؟ (بالا یا پایین محور)

۲ــ هرگاه $A=\{0,1,2\}$ تابعی از A بنویسید که مختص اول هر زوج آن برابر مختص دوم باشد.

۳ــ دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی مقابل را به‌دست آورید.

$$f(x)=\frac{\cos x}{2\sin x-\sqrt{3}}$$

۴ ــ آیا دو تابع f و g برابرند؟ چرا؟

$$f(x)=x-1 \ , \ g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & , \quad x\neq 1\\ 2 & \quad\ \ x=1\end{cases}$$

۵ ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض‌است. مقدار زیر را محاسبه کنید.

$$3f(\frac{\pi}{2})+2f(\frac{-\pi}{3})$$

$$f(x)=\begin{cases}2\sin x-1 & \dfrac{\pi}{3}\leq x<\dfrac{5\pi}{6}\\ \cos x & x<0\end{cases}$$

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۵)

بخش دوم

فصل ششم

عملیات روی تابع‌ها

هدف کلی

تعیین ضابطه‌ی $f \pm g$ و $f \times g$ و f / g با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g و کاربرد آن‌ها

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ چهار عمل اصلی روی دو تابع را تعریف کند ؛

۲ــ با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g، ضابطه‌ی تابع $f \pm g$ و $f \times g$ و f / g را بنویسد ؛

۳ــ دامنه‌ی تابع‌های $f \pm g$ و $f \times g$ و f / g را تعیین کند ؛

۴ــ چهار عمل اصلی تابع‌ها را در موارد کاربردی استفاده کند.

پیش آزمون (۶)

۱ــ توابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند :

الف) دامنه‌ی f و g را بیابید.

ب) ضابطه‌های $f+g$ و $f\times g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید و سپس دامنه‌ی هر یک را به دست آورید.

۲ــ توابع f و g با ضابطه‌های روبه رو مفروض‌اند.
مقادیر زیر را به دست آورید.

$(f+g)(۲)$ و $(\frac{g}{f})(۲)$

۳ــ توابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

حساب کنید :

الف) $f\times g$ و $۲f+۳g$

ب) D_{f+g} و $D_{f\times g}$

محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون (۶)

$f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{x}{x-۳}$

$f(x)=۷x+۱$ و $g(x)=\sqrt{x}$

$f(x)=\{(-۱,۰),(۲,۵),(۹,۱۱),(۱۱,۲۰)\}$

$g(x)=\{(۹,۱۷),(۷,۹),(-۱,۳)\}$

۶ـ۲ـ عملیات روی تابع‌ها (+، -،×، ÷)

اگر g و f دو تابع حقیقی باشند و به ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g دو عدد حقیقی به‌دست آید، می‌توان چهار عمل اصلی (اعمال روی توابع) یعنی جمع، تفریق، ضرب و تقسیم را تعریف کرد.

۱ـ۶ـ۲ـ جمع دو تابع f و g: جمع f و g به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

دامنه‌ی مجموع f و g برابر است با اشتراک دامنه‌های آن‌ها :

$$D_{f+g}=D_f\bigcap D_g$$

مثال: اگر داشته باشیم :

$$f(x)=\sqrt{۲-x} \quad \text{و} \quad g(x)=\sqrt{۳x-۵}$$

ضابطه‌ی $f+g$ را به‌دست آورید و سپس دامنه‌ی $f+g$ را محاسبه کنید.

حل: ضابطه‌ی $f+g$ برابر است با :

$$f(x)+g(x)=\sqrt{۲-x}+\sqrt{۳x-۵}$$

با توجه به زوج بودن فرجه‌ی رادیکال و شرط $۲-x\geq ۰$ دامنه f برابر است با :

$$D_f=\{x|x\in\mathbb{R},۲-x\geq ۰\}=\{x|x\in\mathbb{R},x\leq ۲\}=(-\infty,۲]$$

ـ دامنه‌ی تابع g همانند تابع f برابر است با :

$$D_g=\{x|x\in\mathbb{R},۳x-۵\geq ۰\}=\left\{x|x\in\mathbb{R},x\geq\frac{۵}{۳}\right\}$$

$$=\left[\frac{۵}{۳},+\infty\right)$$

دامنه‌ی $f+g$ برابر است با اشتراک دامنه‌های f و g :

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=(-\infty,۲]\cap\left[\frac{۵}{۳},+\infty\right)=\left[\frac{۵}{۳},۲\right]$$

۲ـ۶ـ۲ـ تفریق دو تابع f و g: تفریق g(x) از f(x) به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

دامنه‌ی تفاضل f و g برابر است با :

$$D_{f-g}=D_f\bigcap D_g$$

۳ـ۶ـ۲ـ حاصل‌ضرب دو تابع f و g: حاصل‌ضرب دو تابع f و g به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$$

ـ دامنه‌ی $f\times g$ برابر است با :

$$D_{f\times g}=D_f\bigcap D_g$$

مثال ۲: تابع‌های مقابل مفروض است

$$f(x)=۲x-۱ \ ، \ g(x)=\frac{x}{x-۱}$$

ضابطه‌ی $f-g$ و $f\times g$ را به‌دست آورید و دامنه‌ی هریک را محاسبه کنید.

ضابطه‌ی $f\times g$ برابر است با :

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=۲x-۱-\frac{x}{x-۱}\Rightarrow$$

ــ پس از مخرج مشترک خواهیم داشت :

$$f(x)-g(x)=\frac{۲x^۲-۲x-x+۱-x}{x-۱}=\frac{۲x^۲-۴x+۱}{x-۱}$$

ضابطه‌ی $f\times g$ برابر است با :

$$f(x)\times g(x)=(۲x-۱)\times(\frac{x}{x-۱})=\frac{۲x^۲-x}{x-۱}$$

ــ تابع f دوجمله‌ای است. دامنه‌ی آن برابر است با :

$$D_f=\mathbb{R}$$

ــ تابع g کسری است دامنه‌ی آن برابر است با :

$$D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

ــ دامنه‌ی $f-g$ و $f\times g$ برابر است با اشتراک دامنه‌های توابع f و g، بنابراین خواهیم داشت :

$$D_{f-g}=D_{f\times g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$$

۴ــ۶ــ۲ــ خارج قسمت دو تابع: تابع f/g به ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g که $g(x)\neq ۰$ به صورت مقابل تعریف می‌شود :

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)} \ , \ g(x)\neq ۰$$

دامنه‌ی f/g برابر است با :

$$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x|x\in\mathbb{R} \ , \ g(x)=۰\}$$

مثال ۳: تابع‌های f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند :

$$f(x)=\sqrt{۳-x} \ \text{و} \ g(x)=\sqrt{۱۱+x}$$

ضابطه‌ی f/g را به‌دست آورید و سپس دامنه‌ی آن را محاسبه کنید.

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{۳-x}}{\sqrt{۱۱+x}}$$

حل: چون فرجه رادیکال زوج است با شرط $۳-x\geq ۰$ دامنه‌ی f، برابر است با :

$$D_f=\{x|x\in\mathbb{R} \ , \ ۳-x\geq ۰\}=\{x|x\in\mathbb{R} \ , \ x\leq ۳\}$$
$$=(-\infty,۳]$$

ــ دامنه‌ی g با شرط $x+۱۱\geq ۰$ برابر است با :

$$D_g=\{x|x\in\mathbb{R},۱۱+x\geq ۰\}=\{x|x\in\mathbb{R}, \ x\geq -۱۱\}$$
$$=[-۱۱,+\infty)$$

ـ دامنه‌ی f/g طبق رابطه کلی برابر است با :

$$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ g(x)=0\}\Rightarrow$$

آن‌گاه خواهیم داشت :

$$D_{f/g}=(-\infty,3]\cap[-11,+\infty)-\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ g(x)=\sqrt{11+x}=0\}$$

$$\Rightarrow D_{f/g}=[-11,3]-\{x|x\in\mathbb{R}\ ,\ 11+x=0\}$$

پس $D_{f/g}$ برابر است با :

$$\Rightarrow D_{f/g}=[-11,3]-\{-11\}=(-11,3]$$

فعالیت ۲۴ــ۲

تابع‌های مقابل مفروض‌اند.

$$f(x)=\sqrt{x^2-4}\ \text{و}\ g(x)=\sqrt{9-x^2}$$

ـ جاهای خالی را تکمیل کنید.

۱) $D_f=\{x|x\in\mathbb{R},x^2-4\geq 0\}=(-\infty,-2]\cup\boxed{}$

۲) $D_g=\{x|x\in\mathbb{R},9-x^2\geq 0\}=[-3,\boxed{}]$

۳) $D_{f+g}=D_f\cap D_g=\boxed{}$

۴) $D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{\pm3\}=\boxed{}$

پاسخ:

مثال۴: تابع‌های مقابل مفروض‌اند. مطلوب است :

$$f=\{(3,5),(-4,9),(11,1)\}$$

$$g=\{(3,9),(20,5),(11,17),(0,12)\}$$

الف) $D_{f\times g},D_{f\pm g}$

ب) $f\times g,f+g$

حل: برای پیدا کردن دامنه‌های $f\pm g$ و $f\times g$ دامنه‌های f و g را می‌یابیم :

ـ اشتراک D_f و D_g برابر است با :

$$D_f=\{3,-4,11\}\ \text{و}\ D_g=\{3,20,11,0\}$$

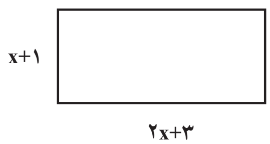
$$D_{f\pm g}=D_{f\times g}=D_f\cap D_g=\{3,11\}$$

حل ب: برای یافتن $f+g$ ، $f\times g$ دامنه‌های مشترک f و g را مشخص می‌کنیم و مقادیر مربوط به دامنه‌های مشترک را با

هم جمع و یا در هم ضرب می‌کنیم.

$$f+g=\{(۳,۵+۹),(۱۱,۱+۱۷)\}=\{(۳,۱۴),(۱۱,۱۸)\}$$
$$f\times g=\{(۳,۵\times ۹),(۱۱,۱\times ۱۷)\}=\{(۳,۴۵),(۱۱,۱۷)\}$$

مثال ۵: مستطیل مقابل مفروض است.



ــ ضابطه‌ای برای مساحت $S(x)$ بنویسید، سپس $S(۳)$ را محاسبه کنید.

حل : مساحت مستطیل $S(x)$ برابر است با طول ضرب در عرض.

$$S(x)=\overbrace{(۲x+۳)}^{\text{طول}}\times\overbrace{(x+۱)}^{\text{عرض}}$$

ــ $S(۳)$ برابر است با :

$$S(۳)=(۲\times۳+۳)(۳+۱)=۹\times۴=۳۶$$

مثال ۶: مختصات نقاط M و N در روبه‌رو مفروض است.

$$M\left|\begin{matrix}t+۴\\ t^{۲}\end{matrix}\right. \quad \text{و} \quad N\left|\begin{matrix}۲t-۱\\ ۴t+۳\end{matrix}\right.$$

الف) مختصات وسط MN را برحسب t به‌دست آورید. سپس به ازای $t=۳$ مختصات وسط را محاسبه کنید.

حل : x نقطه‌ی P وسط MN برابر است با :

$$x_P=\frac{x_M+x_N}{۲}=\frac{t+۴+۲t-۱}{۲}=\frac{۳t+۳}{۲}$$

ــ yنقطه‌ی P وسط MN برابر است با :

$$y_P=\frac{y_M+y_N}{۲}=\frac{t^{۲}+۴t+۳}{۲}$$

ــ به ازای $t=۳$، مقادیر x_p و y_p برابر است با :

$$x_P=\frac{۳(۳)+۳}{۲}=۶ \quad y_p=\frac{۳^{۲}+۴(۳)+۳}{۲}=۱۲$$

ب) طول پاره‌خط MN را برحسب t یافته، سپس به ازای $t=۴$ مقدار MN را حساب کنید.

حل ب: رابطه‌ی محاسبه‌ی طول پاره‌خط MN برابر است با :

$$MN=\sqrt{(x_M-x_N)^{۲}+(y_M-y_N)^{۲}}$$

ــ مختصات M و N را در رابطه‌ی MN قرار می‌دهیم :

$$MN=\sqrt{(t+۴-۲t+۱)^{۲}+(t^{۲}-۴t-۳)^{۲}}$$

ـ طول پاره‌خط MN برحسب t به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow MN=\sqrt{(۵-t)^۲+(t^۲-۴t-۳)^۲}$$

ـ به ازای $t=۴$ مقدار MN را محاسبه می‌کنیم.

$$MN=\sqrt{(۵-۴)^۲+(۴^۲-۴\times۴-۳)^۲}$$

$$=\sqrt{۱+۹}=\sqrt{۱۰}$$

تمرین: در مثال ۶، مختصات وسط پاره‌خط را به ازای $t=۰$ حساب کنید.

پاسخ:

مثال ۷: مقدار آبی که درهر ثانیه، برحسب لیتر، از فواره‌های A و B وارد استخر می‌شود به ترتیب از دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل محاسبه می‌شود.

$f(t)=۴t$ و $g(t)=۷t$

الف) مقدار آبی که از فواره‌های A و B وارد استخر می‌شود از چه دستوری محاسبه می‌شود؟

حل: اگرمجموع f(t) و g(t) را h(t) فرض کنیم داریم :

$$h(t)=(f+g)(t)=f(t)+g(t)=۴t+۷t$$

ـ آبی که وارد استخر می‌شود برابر است با :

$$h(t)=۱۱t$$

ب) در ۲۰ ثانیه چقدر آب وارد استخر می‌شود؟

$$h(t)=۱۱t\Rightarrow$$

به جای t عدد ۲۰ را درتابع با ضابطه‌ی h(t) قرار می‌دهیم :

$h(۲۰)=۱۱\times۲۰=۲۲۰$ لیتر

ج) فرض کنید گنجایش این استخر معادل ۷۷۰۰ لیتر باشد، پس از چند ثانیه پر می‌شود؟

$$h(t)=۱۱t$$

ـ مقدار h(t) را برابر ظرفیت استخر قرارمی‌دهیم، بنابراین :

$۱۱t=۷۷۰۰\Rightarrow t=\frac{۷۷۰۰}{۱۱}\Rightarrow t=۷۰۰$ ثانیه

تمرین

ضابطه‌ی تابع‌های مقابل داده شده‌اند :

$f(t)=t^{2}+2t, g(t)=3t$

۱ــ ضابطه‌ی $(f\pm g)$ را محاسبه کنید.

۲ــ به ازای $t=3$ مقدار $(f+g)(t)$ را پیدا کنید.

۳ــ به‌ازای $t=-3$ مقدار $(f-g)(t)$ را پیدا کنید.

مثال ۸: تابع‌های f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

$f(x)=\sqrt{x}$ ، $g(x)=\sqrt{2-x}$

ــ دامنه‌های $f+g$ و f/g را بیابید.

حل: باتوجه به زوج بودن فرجه‌ی رادیکال، دامنه‌ی f برابر است با :

$$D_f=\{x|x\in\mathbb{R}, x\geq 0\}=[0,+\infty)$$

ــ با توجه به زوج بودن فرجه‌ی رادیکال دامنه‌ی g برابر است با :

$$D_g=\{x|x\in\mathbb{R}, 2-x\geq 0\}=(-\infty,2]$$

ــ دامنه‌ی $f+g$ برابر است با :

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[0,2]$$

ــ دامنه‌ی f/g را محاسبه می‌کنیم،

$$D_{f/g}=D_f\cap D_g-\{x|x\in\mathbb{R}, g(x)=0\}\Rightarrow$$

دامنه‌ی f/g برابر است با :

$$D_{f/g}=[0,2]-\{2\}=[0,2)$$

تمرین

۱ــ تابع‌های f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند :

$f=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=\sqrt{9-x^{2}}$

الف) ضابطه‌های $f\times g$ و g/f را محاسبه کنید.

ب) دامنه‌های $f-g$ و g/f را محاسبه کنید.

۲ــ دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند :

$f(x)=3x+1$ ، $g(x)=x^{2}-2x$

مقدار $(f+g)(3)$ را محاسبه کنید.

آزمون پایانی (۶)

۱ــ تابع‌های f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند :

$$f(x)=\frac{۳x}{x^۲-۴} \text{ ، } g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$$

ــ دامنه‌های $f-g$ ، $f\times g$ و f/g را به‌دست آورید.

۲ــ تابع f با ضابطهٔ مقابل مفروض است. حاصل عبارت‌های $f(۳)\times f(۲)$ و $f(۳)+f(-۲)$ را به‌دست آورید.

$$f(x)=۳x^۲-۲x+۱$$

۳ــ تابع‌های f و g با ضابطه‌های روبه‌رومفروض‌اند :

$$f(x)=\sqrt{x+۱} \text{ و } g(x)=۳x-۲$$

الف) ضابطهٔ $f\times g$ و f/g را بنویسید.

ب) مقدار $(f+g)(۰)$ را بیابید.

ج) مقدار $\frac{f(۸)}{g(۲)}$ را بیابید.

۴ــ هرگاه

$$f=\{(-۱,۱),(۷,۳),(۹,۵),(۵,۱۱),(۰,۲),(۴,۰)\}$$

$$g=\{(-۱,۱۰),(۲,۵),(۷,۱۱),(-۵,۱۱),(۳,۹)\}$$

الف) دامنه‌های $f\pm g$ و $f\times g$ را بیابید.

ب) توابع $۲f+۳g$ و $f\times g$ را تعیین کنید.

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۶)

بخش دوم

فصل هفتم

ترکیب دو تابع

هدف کلی

ترکیب دو یا چند تابع و کاربردهای آن در حل مسائل

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ ضابطه‌ی fog و gof را با داشتن ضابطه‌ی f و g بنویسد ؛

۲ــ مقدار تابع‌های fog و gof را در بعضی از نقطه‌های دامنه‌اش تعریف کند ؛

۳ــ مسائل مربوط به کاربرد ترکیب تابع‌ها را حل کند.

پیش آزمون (۷)

۱ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رومفروض است :

الف) مقادیر $f(\circ)$ و $f(-۲)$ را به‌دست آورید.

ب) $f(x-۲)$ را بنویسید.

ج) $f(۳x+۲)$ را بنویسید.

۲ــ تابع‌های f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند.

ضابطه‌های fog و gof را بنویسید.

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. اگر

$f(-۱)=۴$ باشد مقادیر b و $f(-۲)$ را بیابید.

۴ــ تابع f و fog با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند،

$g(۳)$ را بنویسید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۷)

$f(x)=۳x+۲$

$f(x)=\sqrt{x+۱}$ ، $g(x)=x^۲-۱$

$f(x)=۳x^۲+۲bx-۷$

$f(x)=۲x+۱$ ، $(fog)(x)=۳x+۴$

۷ــ۲ــ ترکیب دو تابع

فعالیت ۲۵ــ۲

فرض کنید $f:A\to B$ و $g:B\to C$

$x\to ۳x+۵$ $\quad x\to x^{۲}$

با توجه به تابع‌های f و g و شکل ۱۲۵ــ۲ به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

۱ــ مقدارهای $f(۳)$ و $g(۹)$ برابر چه اعدادی هستند؟

۲ــ مقدارهای $f(۲)$ و $g(۴)$ برابر چه اعدادی هستند؟

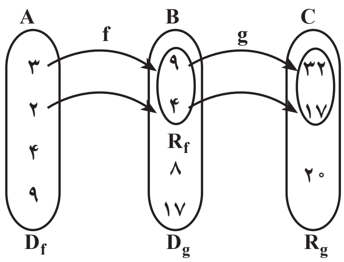
۳ــ آیا روابط $g(f(۳))=g(۹)$ و $g(f(۲))=g(۴)$ صحیح است؟

۴ــ مجموعه‌ی $D_g\cap R_f$ را به‌دست آورید.

۵ــ با توجه به شکل ۱۲۵ــ۲ و روابط بالا، آیا می‌توان تابع h را به‌صورت $h:A\to C$ با ضابطه‌ی زیر تعریف کرد؟

$x\to ۳x^{۲}+۵$

(در حالت کلی $g(f(x))$ را می‌توان با نماد $(gof)(x)$ نشان داد)



شکل ۱۲۵ــ۲

تعریف: دو تابع f و g مفروض‌اند. ترکیب تابع g با f را با gof نشان می‌دهند و تابع $gof:A\to C$ است که به‌ازای هر $x\in A$، $(gof)(x)=g(f(x))$. شکل ۱۲۶ــ۲ نمودار ترکیب این دو تابع است.

$$f:A\longrightarrow B \quad و \quad g:B\longrightarrow C$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "gof"'] & f(x) \arrow[r, "g"] & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

شکل ۱۲۶ــ۲

تذکر: gof هنگامی قابل تعریف است که $D_g\cap R_f\neq\varnothing$.

مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است؛

$$f(x)=x^{۲}+۲x+۳$$

مقدارهای مقابل را به‌دست آورید.

$f(۱)$ ، $f(۳)$ ، $f(z)$ ، $f(-۲z+۱)$

حل: برای محاسبه‌ی $f(۱)$ به جای x، ۱ را قرار می‌دهیم:

$$f(۱)=۱^{۲}+۲(۱)+۳=۱+۲+۳=۶$$

ــ برای محاسبه‌ی $f(۳)$، به جای x، ۳ را قرار می‌دهیم:

$$f(۳)=۳^{۲}+۲(۳)+۳=۹+۶+۳=۱۸$$

ـ برای محاسبه‌ی $f(z)$ ، به جای x ، z را قرار می‌دهیم :

$$f(z)=z^{۲}+۲z+۳$$

ـ برای محاسبه‌ی $f(-۲z+۱)$ ، به جای x، $-۲z+۱$ را قرار می‌دهیم :

$$f(-۲z+۱)=(-۲z+۱)^{۲}+۲(-۲z+۱)+۳$$

ـ با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای داریم :

$$\Rightarrow f(-۲z+۱)=۴z^{۲}-۴z+۱-۴z+۲+۳$$

ـ پس از ساده کردن $f(-۲z+۱)$ به‌دست می‌آید :

$$\Rightarrow f(-۲z+۱)=۴z^{۲}-۸z+۶$$

مثال ۲: توابع f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض اند ؛ $(fog)(x)$ ، $gof(x)$ را به‌دست آورید.

$$f(x)=x^{۲}\ ,\ g(x)=-۲x+۳$$

حل: روش اول: fog برابر است با :

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=\big(g(x)\big)^{۲}=(-۲x+۳)^{۲}$$

ـ gof برابر است با :

$$(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=-۲f(x)+۳=-۲x^{۲}+۳$$

روش دوم: در $f\big(g(x)\big)$ به جای $g(x)$ مقدار آن را قرار می‌دهیم، یعنی :

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=f(-۲x+۳)=(-۲x+۳)^{۲}$$

ـ در $g\big(f(x)\big)$ به جای $f(x)$ مقدار آن را قرار می‌دهیم :

$$(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=g(x^{۲})=-۲x^{۲}+۳$$

مثال ۳: تابع‌های f و fog با ضابطه‌های روبه‌رومفروض اند.

$$f(x)=۴x+۱ \text{ و } (fog)(x)=۳x-۱$$

ـ ضابطه تابع g را بیابید، سپس $g(۱)$ را حساب کنید.

حل: در رابطه‌ی fog به جای x در $f(x)$ مقدار $g(x)$ را قرار می‌دهیم ؛

$$(fog)(x)=f\big(g(x)\big)=۴g(x)+۱$$

از تابع fog با ضابطه‌ی $۳x-۱$ خواهیم داشت :

$$\Rightarrow ۴g(x)+۱=۳x-۱$$

ــ ضابطه‌ی g برابر است با :

$$\Rightarrow ۴g(x)=۳x-۱-۱ \Rightarrow g(x)=\frac{۳x-۲}{۴}$$

ــ در $g(x)$، به جای x عدد ۱ را قرار می‌دهیم :

$$g(۱)=\frac{۳\times ۱-۲}{۴}=\frac{۱}{۴}$$

مثال ۴: تابع‌های f و g مفروض‌اند.

$$f=\{(-۱,۷),(۳,۴),(۷,۵),(۴,۲)\}$$

$$g=\{(۷,۱۱),(۰,۱),(۵,۱۸),(۹,۹)\}$$

الف) $D_g \cap R_f$ را به‌دست آورید.

حل الف) $D_g=\{۷,۰,۵,۹\}$ و $R_f=\{۷,۴,۵,۲\} \Rightarrow$

$$D_g \cap R_f=\{۷,۵\}$$

ب) $gof(۷)$ و $gof(-۱)$ را به‌دست آورید.

حل ب)

$$(gof)(۷)=g(f(۷))=g(۵)=۱۸$$

$$(gof)(-۱)=g(f(-۱))=g(۷)=۱۱$$

ج) دامنه‌ی gof را به‌دست آورید.

حل ج) $gof=\{(۷,۱۸),(-۱,۱۱)\} \Rightarrow$

ــ دامنه‌ی gof برابر است با :

$$D_{gof}=\{۷,-۱\}$$

مثال ۵: رابطه‌ی مقابل مفروض است. $f(t)$ را به‌دست آورید.

$$f(-۴t+۱)=۵t-۱$$

حل: عبارت $-۴t+۱$ را برابر متغیر x قرار می‌دهیم و t را بر حسب x محاسبه می‌کنیم.

$$-۴t+۱=x \Rightarrow -۴t=x-۱ \Rightarrow t=\frac{x-۱}{-۴}$$

ــ درتابع f، متغیرها را برحسب x مرتب می‌کنیم.

$$f(x)=۵\left(\frac{x-۱}{-۴}\right)-۱=\frac{۵x-۵}{-۴}-۱$$

ــ مخرج مشترک می‌گیریم :

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۵x-۵+۴}{-۴}$$

ــ ضابطه $f(x)$ برابر است با :

$$\Rightarrow f(x)=\frac{۵x-۱}{-۴}$$

ــ به جای متغیر x متغیر t را قرار می‌دهیم، پس داریم :

$$f(t)=\frac{۵t-۱}{-۴}$$

مثال ۶: تابع‌های f و (fog) با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند.
مقدار g(۳) را محاسبه کنید.

$$f(x)=۳x+۲ \text{ و } (fog)(x)=\frac{۲x-۱}{۱-۵x}$$

حل: ابتدا (fog)(x) را به‌دست می‌آوریم :

$$(fog)(x)=f(g(x))=۳g(x)+۲=\frac{۲x-۱}{۱-۵x}\Rightarrow$$

ــ از طرف دوم رابطه مخرج مشترک می‌گیریم.

$$۳g(x)=\frac{۲x-۱}{۱-۵x}-۲=\frac{۲x-۱-۲+۱۰x}{۱-۵x}=\frac{۱۲x-۳}{۱-۵x}$$

ــ ضابطه‌ی g(x) برابر است با :

$$\Rightarrow ۳g(x)=\frac{۳(۴x-۱)}{۱-۵x}\Rightarrow g(x)=\frac{۴x-۱}{۱-۵x}$$

ــ به جای x، عدد ۳ را قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow g(۳)=\frac{۴(۳)-۱}{۱-۵(۳)}\Rightarrow g(۳)=\frac{۱۱}{-۱۴}$$

فعالیت ۲۶ــ۲

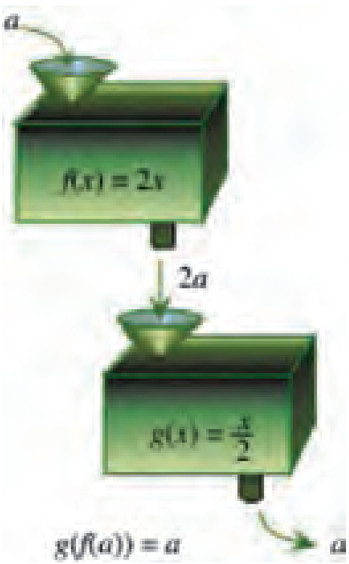
تابع‌های f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

$$f(x)=۲x \text{ و } g(x)=\frac{x}{۲}$$

با توجه به شکل ۱۲۷ــ۲ آیا می‌توان ادعا کرد که :

الف) ۲ = (gof)(۲) ؟ چرا؟

ب) (gof)(a) = a ؟ چرا؟



شکل ۱۲۷ــ۲

مثال ۷: تابع‌های f و g با ضابطه‌های روبه‌رومفروض‌اند.

$$f(x)=۳x+۷ \text{ و } g(x)=۲x-۳$$

ــ معادله‌ی مقابل را حل کنید.

$$۳(fog)(x)+۲(gof)(x)=۷$$

حل: ضابطه‌ی تابع fog برابر است با :

$$(fog)(x)=۳g(x)+۷=۳(۲x-۳)+۷$$

$$\Rightarrow (fog)(x)=۶x-۲$$

ــ ضابطه‌ی تابع gof برابر است با :

$$(gof)(x)=g\big(f(x)\big)=۲f(x)-۳$$

$$=۲(۳x+۷)-۳$$

ــ پس از ساده کردن داریم :

$$\Rightarrow gof(x)=۶x+۱۱$$

ــ مقادیر (fog)(x) و(gof)(x) را در معادله قرار می‌دهیم :

$$۳(fog)(x)+۲(gof)(x)=۱۸x-۶+۱۲x+۲۲=۷$$

ــ مقدار x برابر است با :

$$\Rightarrow ۳۰x+۱۶=۷\Rightarrow ۳۰x=۷-۱۶\Rightarrow x=\frac{-۳}{۱۰}$$

آزمون پایانی (۷)

۱ــ دو تابع f و g با ضابطه‌های روبه‌رومفروض‌اند. مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(۰)$ و $g(f(۰))$

ب) $g(۱)$ و $f(g(۱))$

۲ــ دو تابع f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند. ضابطهٔ توابع fog ، gof و fof را بنویسید.

۳ــ دو تابع f و (fog) با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند. مقدار $g(-۲)$ را حساب کنید.

۴ــ دو تابع f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند. ریشه‌های $(gof)(x)=۳x$ را به‌دست آورید.

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۷)

$f(x)=\frac{۵x+۳}{۳x-۱}$ و $g(x)=۱-۴x$

$f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=۴x-۳$

$f(x)=۳x+۱$ و $(fog)(x)=\frac{۱}{۴}x+۳$

$f(x)=x^۲+۲$ و $g(x)=x+۳$

بخش سوم

حد و پیوستگی

هدف کلی بخش

مفاهیم حد و به‌کارگیری آن در تعیین پیوستگی توابع

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	حد
دوم	پیوستگی
سوم	تعمیم حد

بخش سوم

فصل اول

حد

هدف کلی

مفاهیم میل کردن یک متغیر به یک عدد و میل کردن مقدارهای یک تابع به عدد و تعمیم مفهوم حد

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ میل کردن یک متغیر را از چپ و راست به یک عدد، به سوی $+\infty$ یا به سوی $-\infty$ تعریف کند ؛

۲ــ حد تابع را تعریف کند ؛

۳ــ حد چپ و راست یک تابع در یک نقطه را تعریف کند ؛

۴ــ حد چپ و راست تابع را از روی نمودار آن تعیین کند ؛

۵ ــ حد چپ و راست تابع را از روی ضابطه‌ی آن تعیین کند.

۶ــ حد توابع کسری را که صورت و مخرج آن‌ها، (وقتی که $x \to a$) برابر صفر می‌شود، به‌دست آورد.

۷ــ قضیه فشردگی را در تعیین حد بعضی از توابع به‌کار برد.

پیش آزمون (۱)

۱ــ اعداد $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۳}{۴}$ ، $\frac{۴}{۵}$ ، $\frac{۵}{۶}$ ، ... بر روی محور اعداد حقیقی مشخص شده‌اند (شکل ۱ــ۳).

الف) این اعداد به کدام عدد نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

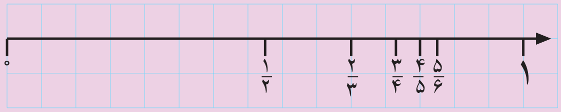
ب) این اعداد از کدام سمت (راست یا چپ) به این عدد نزدیک می‌شوند؟

۲ــ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=-|x-۱|$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده است. با توجه به شکل ۲ــ۳ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

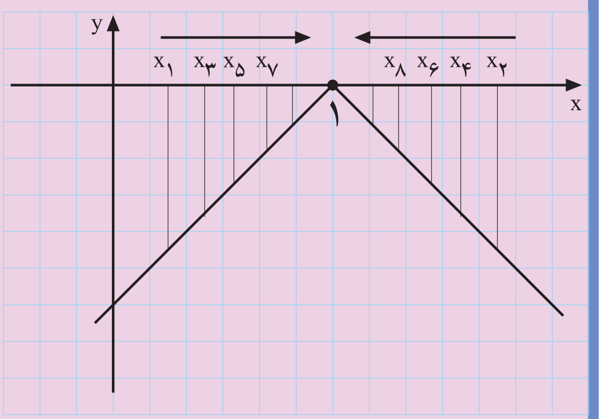
الف) هرگاه $x_۱$ ، $x_۳$ ، $x_۵$ ، ... از چپ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر شوند، $f(x_۱)$ ، $f(x_۳)$ ، ... به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

ب) هرگاه مقادیر $x_۲$ ، $x_۴$ ، $x_۶$ ، ... از مقادیر بیشتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر گردند، $f(x_۲)$ ، $f(x_۴)$ ، ... به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون (۱)



شکل ۱ــ۳



شکل ۲ــ۳

۱ـ۳ـ حد

مفهوم حد یکی از مفاهیم پایه در ریاضیات است. در این بخش سعی شده که به صورت شهودی به بیان این مفهوم بپردازیم.

فعالیت ۱ـ۳

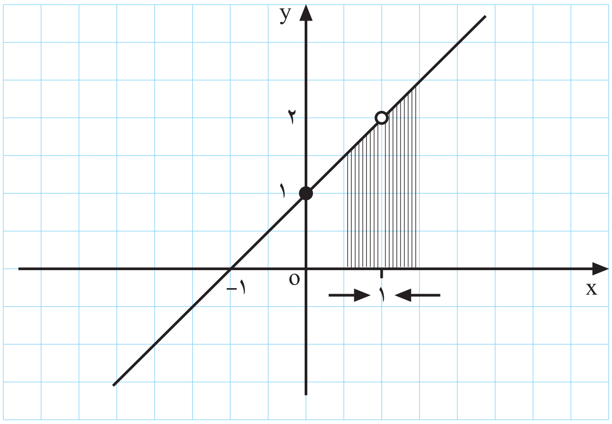
نمودارهای مقابل را نگاه کنید، سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱ـ در شکل ۳ـ۳ وقتی بر روی محور xها به عدد ۱ نزدیک شویم مقدار y به کدام عدد نزدیک می‌شود؟

۲ـ آیا مقدار تابع در $x=۱$ وجود دارد؟

بله ☐ خیر ☐

$f(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱}$ و $x\neq ۱$

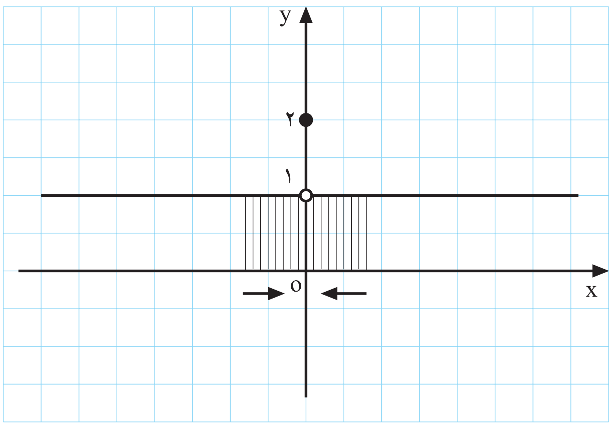


شکل ۳ـ۳

۳ـ در شکل ۴ـ۳ وقتی x از راست و یا از چپ به عدد صفر (۰) نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود مقدار y به کدام عدد نزدیک می‌شود؟

پاسخ:

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x\neq ۰ \\ ۲ & x=۰ \end{cases}$$

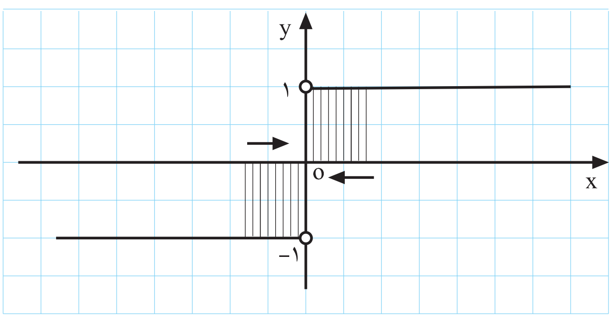


شکل ۴ـ۳

۴ـ در شکل ۵ ـ۳ وقتی که x از سمت راست صفر یعنی ازمقادیر بیشتر از صفر به عدد ۰ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود مقدار f(x) به کدام عدد نزدیک‌تر می‌شود؟

۵ ـ در شکل ۵ ـ۳ وقتی که x از سمت چپ صفر یعنی از مقادیر کم‌تر از ۰ به عدد صفر نزدیک‌تر می‌شود f(x) به کدام عدد نزدیک می‌شود؟

$$f(x)=\begin{cases} \frac{|x|}{x} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$$



شکل ۵ـ۳

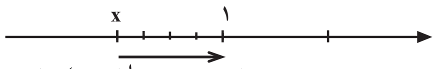
مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x-۱}=\frac{(x-۱)(x+۱)}{x-۱}=x+۱ \text{ ، } x\neq ۱$$

جدول ۱ــ۳ مقادیر مختلف تابع را به ازای چند عدد نزدیک به ۱ نشان می‌دهد. همان‌طور که در جدول ۱ــ۳ مشاهده می‌کنید، هرچه مقدار x با مقادیر کمتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد (از چپ به عدد ۱ میل می‌کند) تابع f یا y به ۲ میل می‌کند و هرچه x با مقادیر بیشتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد (از راست به ۱ میل می‌کند) مقدار تابع f یا y به عدد ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود (به عدد ۲ میل می‌کند) (جدول ۲ــ۳).

جدول ۱ــ۳

x	۰→	۰/۸→	۰/۹→	۰/۹۹→	۰/۹۹۹→	۰/۹۹۹۹→	...۱
f(x)	۱	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۱/۹۹۹۹	?



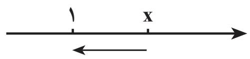
$x\to ۱^{-}(x<۱ \text{ یا } x-۱<۰)$

(میل کردن x به عدد ۱ از چپ)

از ترکیب نماد جدول‌های ۱ــ۳ و ۲ــ۳ جدول ۳ــ۳ به‌دست می‌آید.

جدول ۲ــ۳

x	۱	...	←۱/۰۰۰۱	←۱/۰۰۱	←۱/۰۱	←۱/۱	←۲
f(x)	?	...	←۲/۰۰۰۱	←۲/۰۰۱	←۲/۰۱	←۲/۱	←۳



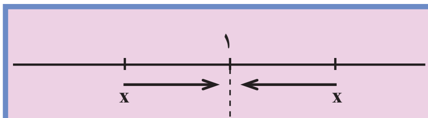
$x\to ۱^{+}(x>۱ \text{ یا } x-۱>۰)$

(میل کردن x به عدد ۱ از راست)

جدول ۳ــ۳

x	۰→	۰/۸→	۰/۹→	۰/۹۹→	۰/۹۹۹→	۰/۹۹۹۹→	۱	←۱/۰۰۰۱	←۱/۰۰۱	←۱/۰۱	←۱/۱	←۲
f(x)	۱	۱/۸	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۱/۹۹۹۹	۲	←۲/۰۰۰۱	←۲/۰۰۱	←۲/۰۱	←۲/۱	۳

نتیجه: حد تابع f وقتی x به ۱ میل می‌کند برابر ۲ می‌باشد و آن را به صورت مقابل می‌نویسیم :



«میل کردن x به عدد ۱»

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=۲$$

فعالیت ۲ــ۳

تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است :

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & x\neq ۰ \\ ۲ & x=۰ \end{cases}$$

با تکمیل جدول ۴ــ۳ به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

جدول ۴ــ۳

x	−۱→	−۰/۱→	−۰/۰۱→	−۰/۰۰۱→	۰)	۰/۰۰۱)	۰/۰۱)	۰/۱)	۰/۵	) ۱
f	۱	$\square$	۱	$\square$	$\square$	۱	$\square$	۱	$\square$	$\square$

۱ــ هرگاه x از چپ به عدد ۰ میل کند f(x) به کدام عدد میل می‌کند؟

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=?$$

۲ــ هرگاه x از راست به عدد صفر میل کند f(x) به کدام عدد میل می‌کند؟

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=?$$

۳ــ حد f(x) وقتی x به ۰ میل می‌کند چیست؟

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=?$$

تابع f در نقطه‌ی $x=a$ زمانی دارای حد می‌باشد که حد چپ و حد راست تابع در این نقطه برابر باشند. به بیان دیگر :

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

فعالیت ۳ــ۳

تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. با تکمیل جاهای خالی به سؤال‌های ۱، ۲ و ۳ پاسخ دهید.

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}=\dfrac{\square}{x}=۱ & x>۰ \\ ۰ & x=۰ \\ \dfrac{|x|}{x}=\dfrac{\square}{x}=-۱ & x<۰ \end{cases}$$

۱ــ با توجه به جدول ۵ ــ۳ وقتی x از چپ به صفر میل می‌کند f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

جدول ۵ــ۳

x	۱→–	۰/۱→–	۰/۰۱→–	۰/۰۰۱→–	۰/۰۰۰۱→	۰
f(x)	۱	۱	□	□	۱	۱

$\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = \square$

۲ــ با توجه به جدول ۶ ــ۳ وقتی x از راست (با مقادیر بیش‌تر از صفر) به عدد صفر میل می‌کند f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

جدول ۶ــ۳

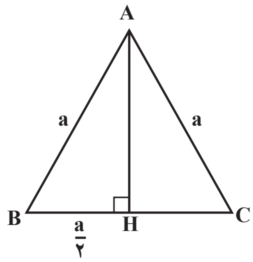
x	۰...	←۰/۰۰۱	←۰/۰۱	←۰/۱	←۰/۷	←۱
f(x)	۱...	□	۱	□	□	...۱

$\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x) = \square$

$\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = \square$

۳ــ با توجه به سؤال‌های ۱ و ۲ آیا تابع f در $x = ۰$ دارای حد می‌باشد؟ چرا؟

مثال: در شکل ۶ ــ۳ مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a رسم شده است. مساحت مثلث را برحسب a حساب کنید.



شکل ۶ــ۳

حل: در مثلث متساوی‌الاضلاع میانه، ارتفاع و عمودمنصف بر یکدیگر منطبق می‌باشند، در نتیجه BH برابر است با :

$$BH = \frac{BC}{۲} = \frac{a}{۲}$$

ــ مساحت مثلث از رابطه‌ی مقابل به‌دست می‌آید :

$$S = \frac{۱}{۲} BC \times AH \quad \text{و} \quad AB = BC = AC = a \quad (۱)$$

ــ طول ارتفاع مثلث قائم‌الزاویه‌ی AHB را محاسبه می‌کنیم :

$$AB^۲ = BH^۲ + AH^۲ \Rightarrow AH^۲ = AB^۲ \quad BH^۲$$

ــ مقدار BH و AB را در رابطه قرار می‌دهیم و AH را به‌دست می‌آوریم.

$$AH^۲ = AB^۲ \quad (\frac{AB}{۲})^۲ \Rightarrow AH^۲ = \frac{۴AB^۲ \quad AB^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} AB \quad (۲)$$

ــ با قراردادن مقدار AH و BC در رابطه‌ی مساحت خواهیم داشت :

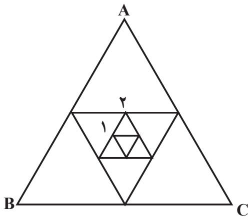
$$S = \frac{۱}{۲}(a)(\frac{\sqrt{۳}}{۲}a) \Rightarrow S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$$

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع a برابر است با : $S = \frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$

برای مثال، اگر طول ضلع برابر $a_۰ = ۴$ باشد داریم :

$$a_۰ = ۴ \Rightarrow S_۰ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۴)^۲ \Rightarrow S_۰ = ۴\sqrt{۳}$$

۲) هرگاه وسط ضلع‌های مثلث شکل ۶ــ۳ را به هم وصل کنیم مثلث جدیدی (شکل ۷ــ۳) به‌دست می‌آید. اگر $a_۱$ طول ضلع و $S_۱$ مساحت این مثلث باشد، $a_۱$ و $S_۱$ را حساب کنید.



شکل ۷ــ۳

۳ــ هرگاه عمل قبل را سه مرتبه‌ی دیگر ادامه دهیم (شکل ۷ــ۳) در هریک از مثلث‌های ایجاد شده طول ضلع مثلث و مساحت آن را محاسبه کنید.

$$a_۱ = \frac{a_۰}{۲} = ۲ \text{ و } S_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۲)^۲ = \sqrt{۳}$$

$$a_۲ = \frac{a_۱}{۲} = ۱ \text{ و } S_۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(۱)^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$a_۳ = \frac{a_۲}{۲} = \frac{۱}{۲} \text{ و } S_۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۱۶}$$

$$a_۴ = \frac{a_۳}{۲} = \frac{۱}{۴} \text{ و } S_۴ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}(\frac{۱}{۴})^۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۶۴}$$

۴ــ هرگاه عمل فوق را n مرتبه تکرار کنیم مقدارهای a_n و S_n به چه عددی میل می‌کنند؟

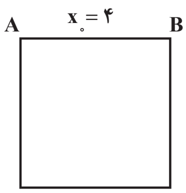
$$a_۰ = ۴, a_۱ = ۲, a_۲ = ۱, a_۳ = \frac{۱}{۲}, a_۴ = \frac{۱}{۴}, \cdots$$

همان‌طوری که می‌بینیم هرقدر تعداد این مراحل زیاد شود مخرج کسرهای a_n و S_n رو به افزایش است به‌طوری که حاصل کسر از هر عدد کوچک مثبتی کمتر می‌شود یعنی به سمت صفر میل می‌کند.

$$S_۰ = ۴\sqrt{۳}, S_۱ = \sqrt{۳}, S_۲ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}, S_۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۱۶}, S_۴ = \frac{\sqrt{۳}}{۶۴}, \cdots$$

فعالیت ۴ــ۳

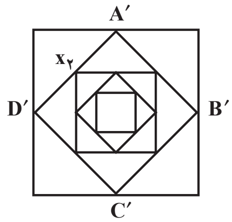
۱ــ در شکل ۸ ــ۳ مربعی به طول ضلع ۴ را مشاهده می‌کنید. اگر $x_۰$ طول ضلع و $S_۰$ مساحت مربع باشد مساحت مربع چقدر است؟



شکل ۸ ــ۳

$$S_۰ = x_۰^۲ \Rightarrow S_۰ = ۱۶$$

۲ــ وسط ضلع‌های مربع را به یکدیگر وصل کنید (شکل ۹ــ۳) طول ضلع جدید را $x_۱$ و مساحت آن را $S_۱$ می‌نامیم. $x_۱$ و $S_۱$ را به‌دست آورید.



شکل ۹ــ۳

$$x_۱^۲ = ۲^۲ + \square^۲ \Rightarrow x_۱ = ۲\sqrt{\square}$$

$$S_۱ = x_۱^۲ = \square$$

۳ــ عمل فوق را سه بار دیگر تکرار می‌کنیم.

در هر یک از مربع‌های ایجاد شده طول ضلع مربع و مساحت آن را محاسبه کنید.

$$x_۲^۲ = (\sqrt{۲})^۲ + (\sqrt{۲})^۲ = ۴ \Rightarrow x_۲ = \square$$

$$S_۲ = x_۲^۲ = \square$$

۴ــ هرگاه $n \to +\infty$، x_n به چه عددی میل می‌کند؟

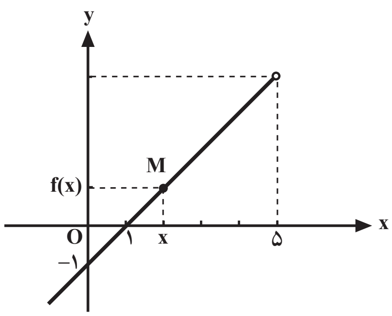
۵ ــ هرگاه $n \to +\infty$، S_n به چه عددی میل می‌کند؟

$$x_۳^۲ = \square^۲ + ۱^۲ = ۲\ ,\ x_۳ = \sqrt{۲}\ ,\ S_۳ = x_۳^۲ = \square$$

$$x_۴^۲ = (\frac{\sqrt{۲}}{۲})^۲ + \square = ۱\ ,\ x_۴ = \square\ ,\ S_۴ = x_۴^۲ = ۱$$

$$S_n \to \square\ ,\ x_n \to \square$$

مثال: در شکل مقابل متحرک M روی مسیر داده شده از چپ به راست حرکت می‌کند، وقتی x به عدد ۵ نزدیک و نزدیک‌تر شود، $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شود؟



$$\lim_{x\to ۵^-} f(x) = \square$$

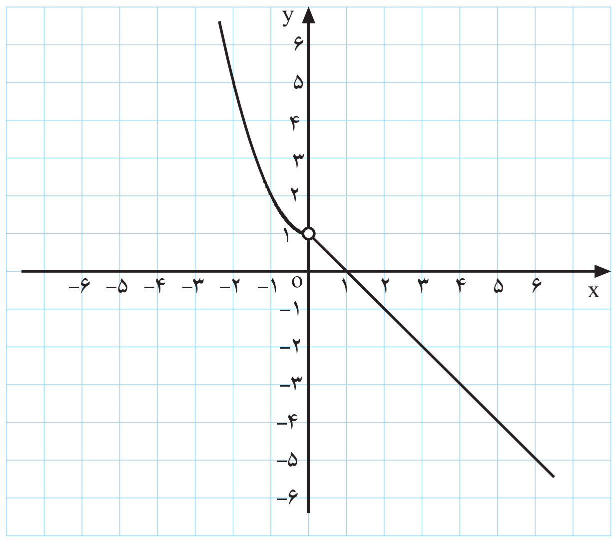
شکل ۱۰ــ۳

تعریف حد: در یک بازه‌ی باز شامل عدد a، تابع $f(x)$ را گوییم دارای حد است اگر هر قدر متغیر x به عدد a نزدیک شود مقدار تابع به عدد L نزدیک گردد (ممکن است $f(a)$ تعریف نشده باشد). این موضوع را با نماد ریاضی $\lim_{x\to a} f(x) = L$ نشان می‌دهیم.

فعالیت ۵ ــ ۳

تابع $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۱ & x<۰ \\ ۱-x & x>۰ \end{cases}$

تعریف شده است (شکل ۱۱ــ۳).



شکل ۱۱ــ۳

۱ــ با توجه به شکل ۱۱ــ۳، حد $f(x)$ را وقتی $x\to ۰$ به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=\square$$

۲ــ جدول ۷ــ۳ را کامل کنید.

جدول ۷ــ۳

x	۰)	۰/۰۰۰۰۱)	۰/۰۰۱)	۰/۰۱)	۰/۱)	۰/۷)	۱
f(x)	?)	۰/۹۹۹۹	$\square$)	$\square$)	۰/۹	۰/۳)	۰

۳ــ وقتی $x\to ۰^{+}$، حد $f(x)$ چیست؟

$$\lim_{x\to ۰^{+}} f(x)=\square$$

۴ــ جدول ۸ ــ۳ را کامل کنید.

جدول ۸ ــ۳

x	-۱ →	-۰/۱ →	-۰/۰۱ →	-۰/۰۰۱ →	-۰/۰۰۰۱	…	۰
f(x)	۲	۱/۰۱	$\square$	۱/۰۰۰۰۰۱	$\square$		?

۵ ــ وقتی $x\to ۰^{-}$، حد $f(x)$ به چه عددی میل می‌کند؟

$$\lim_{x\to ۰^{-}} f(x)=\square$$

۶ ــ با توجه به مراحل ۳ و ۵ حد مقابل را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۰} f(x)=\square$$

فعالیت ۶ــ۳

تابع f با ضابطه روبه‌رو مفروض است.

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x>۰ \\ a+۳ & x<۰ \end{cases}$$

الف) جدول ۹ــ۳ را با توجه به مقادیر f(x) تکمیل کنید.

ب) با توجه به جدول وقتی $x \to ۰^+$ مقدار f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

جدول ۹ــ۳

x	۰	)	۰/۰۰۰۱	)	۰/۰۰۱	)	۰/۰۱	)	۰/۱
f(x)	···		$\square$	)	۱/۰۰۲		$\square$	)	۱/۲

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\square$$

ج) اگر تابع f در $x=۰$ دارای حد باشد مقدار a را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^-} f(x) \Rightarrow ۱=\square \Rightarrow a=-۲$$

تمرین

۱ــ تابع f به صورت روبه‌رو تعریف شده است.

$$f(x)=\begin{cases}۱-۲x & x>۲\\ x-۵ & x<۲\end{cases}$$

الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

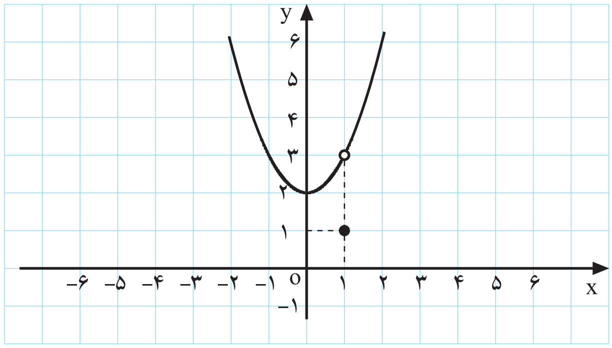
ب) آیا تابع f در $x=۲$ دارای حد می‌باشد؟

بلی ☐ خیر ☐

۲ــ در هریک از شکل‌های زیر مقدار حد را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\begin{cases}x^{۲}+۲ & x\neq ۱\\ ۱ & x=۱\end{cases}$

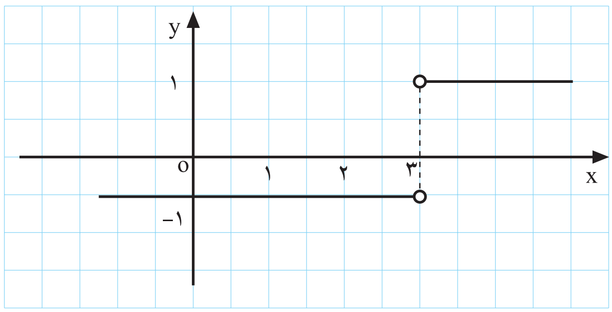
$\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=?$



شکل ۱۲ــ۳

ب) $f(x)=\dfrac{|x-۳|}{x-۳}$

$\lim\limits_{x\to ۳} f(x)=?$



شکل ۱۳ــ۳

۳ــ در هر یک از تمرین‌های زیر ابتدا جدول داده شده را کامل کنید سپس مقدار حد را به‌دست آورید.

جدول‌های ۱۰ــ۳

x	۱/۹→	۱/۹۹→	۱/۹۹۹→	۲	۲/۰۰۱→	۲/۰۱→	۲/۱→
f(x)	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐

الف) $f(x) = ۲x + ۷$

$\lim\limits_{x \to ۲} f(x) = \square$

جدول ۱۱ــ۳

x	۴/۰۰۰۱	)	۴/۰۰۱	)	۴/۰۱	)	۴/۱
f(x)	$\square$		$\square$		$\square$		$\square$

ب) $f(x) = \sqrt{x - ۴}$

$\lim\limits_{x \to ۴^+} f(x) = \square$

۴ــ مقدار b را طوری بیابید که تابع f با ضابطه‌ی مقابل در نقطه‌ی $x = ۳$ دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \cos \pi x + b & x < ۳ \\ x^۲ + ۲ & x > ۳ \end{cases}$$

۵ ــ تابع f با ضابطه‌ی رو به رو مفروض است.

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & x \neq ۰ \\ ۰ & x = ۰ \end{cases}$$

نمودار آن را رسم کنید و سپس $\lim\limits_{x \to ۰} f(x)$ را به‌دست آورید.

۶ ــتابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

الف) جاهای خالی را پر کنید.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\square} = ۱ & x > ۰ \\ \dfrac{x}{\square} = \bigcirc & x < ۰ \end{cases}$$

ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

ج) با استفاده از نمودار رسم شده حدهای مقابل را به‌دست آورید.

$\lim\limits_{x \to ۰^+} f(x) = \square$ و $\lim\limits_{x \to ۰^-} f(x) = \square$

د) آیا تابع فوق در نقطه‌ی $x = ۰$ دارای حد می‌باشد؟

بله ☐ خیر ☐

۱ــ۱ــ۳ــ بخش‌پذیری چند جمله‌ای‌ها بر $x-a$: اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه‌ی n باشد، وقتی $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی یکتایی مانند $q(x)$ و r به‌دست می‌آید.

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$$

$$\begin{array}{r|l} \text{مقسوم}\ f(x) & x-a\ \text{مقسوم‌علیه} \\ L(x) & q(x)\ \text{خارج‌قسمت} \\ \hline \text{(باقی‌مانده)}\ r & \end{array}$$

در نتیجه به ازای هر x داریم :

$$f(x)=(x-a)q(x)+r\ ,r\in\mathbb{R}$$

مثال: باقی‌مانده و خارج‌قسمت تقسیم‌های مقابل را به دست آورید :

الف) $۴x^۲-۷x+۶\div x-۲$

حل: الف)

$$\begin{array}{r|l} ۴x^۲-۷x+۶ & x-۲ \\ & \bigcirc+\square \end{array}$$

ابتدا $۴x=\frac{۴x^۲}{x}=\bigcirc$ را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و حاصل را از مقسوم کم می‌کنیم ؛ داریم ؛

$$۴x(x-۲)=۴x^۲-۸x$$

$$\begin{array}{r|l} ۴x^۲-۷x+۶ & x-۲ \\ \underline{-\ ۴x^۲\mp ۸x} & ۴x+\square \\ x+۶ & \\ \underline{-\ x\mp ۲} & \\ ۸ & \end{array}$$

سپس $۱=\frac{x}{x}=\square$ را در مقسوم ضرب کرده و حاصل را از $x+۶$ کم می‌کنیم ؛ داریم :

$$\begin{array}{r|l} ۴x^۲-۷x+۶ & x-۲ \\ \underline{-\ ۴x^۲\mp ۸x} & ۴x+۱ \\ x+۶ & \\ \underline{-\ x\mp ۲} & \\ ۸ & \end{array}$$

خارج قسمت $=۴x+۱$

باقی‌مانده $=۸$

$$(۴x+۱)(x-۲)+۸=۴x^۲-۷x+۶$$

ب) $x^۲+۷x+۱۲\div x+۴$

حل: ب) ابتدا $x=\frac{x^۲}{x}=\bigcirc$ را در مقسوم علیه ضرب کرده و حاصل را از مقسوم کم می‌کنیم ؛ داریم ؛

$$\begin{array}{r|l} x^۲+۷x+۱۲ & x+۴ \\ & \bigcirc+\square \end{array}$$

$$x(x+۴)=x^۲+۴x$$

$$\begin{array}{l|l} x^۲+۷x+۱۲ & x+۴ \\ \underline{-x^۲\pm ۴x} & x+\boxed{\ } \\ \quad ۳x+۱۲ & \end{array}$$

$$۳(x+۴)=۳x+۱۲$$

سپس $۳ = \frac{۳x}{x} = \boxed{\ }$ را در مقسوم‌علیه ضرب کرده و حاصل را از $۳x+۱۲$ کم می‌کنیم ؛ داریم :

$$\begin{array}{l|l} x^۲+۷x+۱۲ & x+۴ \\ \underline{-x^۲\pm ۴x} & x+۳ \\ \quad ۳x+۱۲ & \\ \underline{\quad -۳x\pm ۱۲} & \\ \qquad ۰ & \end{array}$$

$g(x) =$ خارج قسمت $= x+۳$

$r =$ باقی‌مانده $= ۰$

$$x^۲+۷x+۱۲=(x+۴)(x+۳)+۰$$

نکته: اگر $f(x)$ یک چند جمله‌ای باشد باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر $r=f(a)$ خواهد بود.

مثال: باقی‌مانده‌ی تقسیم $f(x)=۴x^۲-۷x+۶$ بر $x-۲$ را به دست آورید.

مراحل حل: ریشه‌ی مقسوم علیه را به دست می‌آوریم :

$$x-۲=۰ \Rightarrow x=۲$$

ـ $f(۲)$ یعنی باقی‌مانده‌ی تقسیم را حساب می‌کنیم :

$$r=f(۲)=۴(۲)^۲-۷(۲)+۶ \Rightarrow r=۸$$

نکته: چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است هرگاه : $r=f(a)=۰$

از این خاصیت در تجزیه‌ی چند جمله‌ای‌ها استفاده می‌کنیم ؛ یعنی هرگاه $f(a)=۰$ باشد می‌توانیم بنویسیم :

$$f(x)=(x-a)g(x)$$

مثال: مقدار m را طوری تعیین کنید که تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو بر $x-۱$ بخش‌پذیر باشد.

$$f(x)=۳x^۲+۴x-۷m$$

مراحل حل: ریشه‌ی مقسوم‌علیه را به دست می‌آوریم :

$$x-۱=۰ \Rightarrow x=۱$$

ـ به ازای $x=1$ ، $f(1)$ را حساب می‌کنیم و برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$x=1 \Rightarrow f(1)=3+4-7m=0$$

ـ با حل معادله مقدار m به دست می‌آید :

$$\Rightarrow 7-7m=0 \Rightarrow 7m=7 \Rightarrow m=1$$

نکته: در محاسبه‌ی حد $\lim\limits_{x\to a} q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ (f و g چند جمله‌ای‌اند) هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ باشد مقدار حد به صورت $\left(\frac{+0}{,0}\right)$ در می‌آید، برای محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to a} q(x)$ باید ابتدا عامل صفر کننده $(x-a)$ را از صورت و مخرج کسر حذف نمود و سپس حد را محاسبه کرد.

$$q(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x\to a} q(x)=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}f_1(x)}{\cancel{(x-a)}g_1(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

مثال ۱: حد مقابل را به‌دست آورید :

$$\lim_{x\to 1} q(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}=?$$

مراحل حل: حد صورت کسر وقتی $x\to 1$ برابر است با :

$$\lim_{x\to 1} 2x^2+x-3=2(1)^2+1-3=0$$

ـ حد مخرج کسر در $x=1$ برابر است با :

$$\lim_{x\to 1} x^2+x-2=0$$

ـ چون صورت و مخرج کسر بر $(x-1)$ بخش‌پذیر است، بنابراین داریم :

$$2x^2+x-3=(x-1)(2x+3)$$
$$x^2+x-2=(x-1)(x+2)$$

ـ برای رفع ابهام خواهیم داشت :

$$q(x)=\frac{2x^2+x-3}{x^2+x-2}=\frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+2)}=\frac{2x+3}{x+2}$$

در نتیجه حد $q(x)$ وقتی $x\to 1$ را به دست می‌آوریم :

$$\lim_{x\to 1} q(x)=\lim_{x\to 1}\frac{2x+3}{x+2}=\frac{5}{3}$$

مثال ۲: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+10}=?$$

حل: حد صورت و مخرج کسر وقتی $x \to ۲$ صفر می‌شود.

$$\lim_{x\to ۲} x^۲ - ۵x + ۶ = \lim_{x\to ۲} x^۲ - ۷x + ۱۰ = ۰$$

ــ صورت و مخرج کسر را به عاملی از $x-۲$ تبدیل می‌کنیم، بنابراین :

$$x^۲ - ۵x + ۶ = (x-۲)(x-۳)$$

$$x^۲ - ۷x + ۱۰ = (x-۲)(x-۵)$$

ــ برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم :

$$q(x) = \frac{x^۲ - ۵x + ۶}{x^۲ - ۷x + ۱۰} = \frac{(x-۲)(x-۳)}{(x-۲)(x-۵)} = \frac{x-۳}{x-۵}$$

ــ حد تابع وقتی $x \to ۲$ به دست می‌آید.

$$\lim_{x\to ۲} q(x) = \lim_{x\to ۲} \frac{x-۳}{x-۵} = \frac{۲-۳}{۲-۵} = \frac{-۱}{-۳} = \frac{۱}{۳}$$

مثال ۳: حد تابع مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to -۱} \frac{۷x^۲ + ۵x - ۲}{۳x^۲ + ۷x + ۴} = ?$$

ــ وقتی $x \to -۱$ حد صورت برابر است با :

$$\lim_{x\to -۱} ۷x^۲ + ۵x - ۲ = ۷(-۱)^۲ + ۵(-۱) - ۲ = ۰$$

ــ وقتی $x \to -۱$ حد مخرج کسر برابر است با :

$$\lim_{x\to -۱} ۳x^۲ + ۷x + ۴ = ۳(-۱)^۲ + ۷(-۱) + ۴ = ۰$$

ــ چون صورت و مخرج کسر به ازای $x = -۱$ برابر صفر گردید، پس هر یک از آن‌ها بر $x+۱$ بخش‌پذیرند، یعنی :

$$۷x^۲ + ۵x - ۲ = (x+۱)(۷x-۲)$$

$$۳x^۲ + ۷x + ۴ = (x+۱)(۳x+۴)$$

چون $x \to -۱$ بنابراین $x \neq -۱$ لذا داریم :

$$q(x) = \frac{۷x^۲ + ۵x - ۲}{۳x^۲ + ۷x + ۴} = \frac{(x+۱)(۷x-۲)}{(x+۱)(۳x+۴)} = \frac{۷x-۲}{۳x+۴}$$

حد تابع را وقتی به $x \to -۱$ به دست می‌آوریم :

$$\lim_{x\to -۱} q(x) = \lim_{x\to -۱} \frac{۷x-۲}{۳x+۴}$$

بنابراین خواهیم داشت :

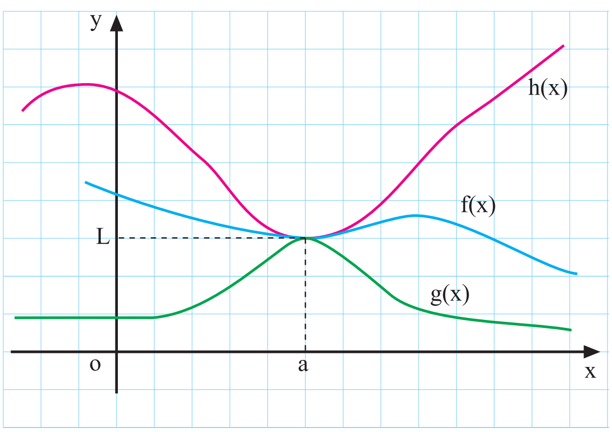
$$\lim_{x\to -۱} q(x) = \frac{-۷-۲}{-۳+۴} = \frac{-۹}{۱} = -۹$$

قضیه‌ی فشردگی: اگر به ازای هر x از بازه‌ی شامل a (به جز احتمالاً در $x = a$) داشته باشیم :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

و $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$ آن‌گاه داریم :

$$\lim_{x\to a} f(x) = L$$



شکل ۱۴ــ۳

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=?$$

حل: cosx در محدوده‌ی دو عدد ۱− و ۱ قرار دارد، یعنی :

$$-۱\le \cos x\le ۱$$

ــ از طرفی $x\to+\infty$ ، پس $x>۰$ و $\frac{۱}{x}>۰$ بنابراین خواهیم داشت :

$$\frac{-۱}{x}\le\frac{\cos x}{x}\le\frac{۱}{x}$$

ــ از طرفی حد $\frac{۱}{x}$ و $\frac{-۱}{x}$ وقتی x به سمت $+\infty$ میل می‌کند برابر است با :

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{-۱}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x}=۰$$

ــ طبق قضیه‌ی فشردگی حد تابع برابر است با :

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{\cos x}{x}=۰$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳\sin x}{x^۳}=?$$

حل: می‌دانیم که $-۱\le\sin x\le ۱$ بنابراین داریم :

$$-۳\le ۳\sin x\le ۳$$

از طرفی وقتی x عددی مثبت باشد می‌توان نوشت :

$$\underbrace{-\frac{۳}{x^۳}}_{g(x)}\le\underbrace{\frac{۳\sin x}{x^۳}}_{f(x)}\le\underbrace{\frac{۳}{x^۳}}_{h(x)}$$

از طرفی $\lim_{x\to+\infty}\frac{-۱}{x^۳}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x^۳}=۰$ بنابراین با توجه به قضیه‌ی فشردگی داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۳\sin x}{x^۳}=۰$$

فعالیت ۷ــ۳

با استفاده از جدول‌های ۱۲ــ۳ و ۱۳ــ۳ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱ــ وقتی x با مقادیر کوچک‌تر از ۰ به عدد صفر میل می‌کند ($x\to ۰^-$) مقدار تابع به چه عددی میل می‌کند؟

$$\lim_{x\to ۰^-}f(x)=\square$$

جدول ۱۲ــ۳

x	$-\frac{\pi}{۳۰}$	$-\frac{\pi}{۱۸۰}$	$-\frac{\pi}{۹۰۰۰}$	…	۰
$f(x)=\frac{\sin x}{x}$	۰/۹۹۸۷۳	۰/۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۹۹۹۹۹۹۸	…	

۲ــ وقتی x با مقادیر بزرگ‌تر از ۰ به عدد صفر میل می‌کند مقدار تابع به چه عددی میل می‌کند؟

جدول ۱۳ــ۳

x	۰ …	$\frac{\pi}{۹۰۰۰}$	$\frac{\pi}{۱۸۰}$	$\frac{\pi}{۳۰}$
$f(x)=\frac{\sin x}{x}$	…	۰/۹۹۹۹۹۹۹۹۸	۰/۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۸۷۳

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\square$$

با توجه به فعالیت ۷ــ۳ همواره داریم :

قضیه‌ی ۱ــ۳ــ (x برحسب رادیان است)

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

مثال: حد روبه‌رو را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=?$$

با توجه به این که $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ ، داریم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\cos x}$$

ــ در نتیجه مقدار حد برابر است با :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan x}{x}=۱\times\frac{۱}{\cos ۰}=۱\times\frac{۱}{۱}=۱$$

مثال: حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۴x}{x}$$

حل: صورت و مخرج کسر را در عدد ۴ ضرب می‌کنیم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۴x}{x}=\lim_{x\to ۰}۴.\frac{\tan ۴x}{۴x}$$

ــ با توجه به $\lim_{t\to ۰}\frac{\tan t}{t}=۱$ خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan ۴x}{x}=\lim_{t\to ۰}۴\frac{\tan t}{t}=۴\times ۱=۴$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan\sqrt{۲}x}{۵x}$$

ــ صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{۲}$ ضرب می‌کنیم :

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan\sqrt{۲}x}{۵x}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt{۲}\times\tan\sqrt{۲}x}{۵\sqrt{۲}x}$$

ــ با فرض $\sqrt{۲}x=t$ حد برابر است با

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\tan\sqrt{۲}x}{۵x}=\lim_{t\to ۰}\frac{\sqrt{۲}}{۵}.\frac{\tan t}{t}=\frac{\sqrt{۲}}{۵}.۱=\frac{\sqrt{۲}}{۵}$$

نتیجه:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin ax}=\frac{1}{a} \text{ و } \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan ax}=\frac{1}{a} \;,\; \lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{x}=a \;,\; \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{x}=a$$

مثال: حد روبه‌رو را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{7x}$$

حل: صورت و مخرج را در عدد ۳ ضرب می‌کنیم :

$$\frac{\tan 3x}{7x}=\frac{3\tan 3x}{7\times 3x}$$

ــ با توجه به $\lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t}=1$ حد را به دست می‌آوریم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\tan 3x}{7\times 3x}=\frac{3}{7}\times 1=\frac{3}{7}$$

مثال: حد روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=?$$

ــ چون $x\neq 0$ است صورت کسر را در $\frac{3}{3x}$ و مخرج را $\frac{2}{2x}$ ضرب می‌کنیم :

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x}=\frac{3.\frac{\sin 3x}{3x}}{2.\frac{\sin 2x}{2x}}$$

ــ در نتیجه مقدار حد برابر است با :

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\times\frac{\sin 3x}{3x}}{2\times\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{3\lim\frac{\sin 3x}{3x}}{2\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}=\frac{3\times 1}{2\times 1}=\frac{3}{2}$$

مثال: حد مقابل را محاسبه کنید :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{1-\cos 2x}$$

می‌دانیم که : $1-\cos 2x=2\sin^2 x$ ، بنابراین داریم :

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{1-\cos 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{2\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{x}{\sin x}$$

ــ در نتیجه مقدار حد برابر است با :

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\times\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1\times 1=1$$

آزمون پایانی (۱)

۱ــ اگر تابع f در $\mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد (شکل ۱۵ــ۳) :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x} & x>0\\ x & x\leq 0\end{cases}$$

حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)+\lim_{x\to 0^+} f(x)=?$$

۲ــ فرض کنید تابع f به صورت زیر در $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد :

$$f(x)=\begin{cases}3x+1 & x\neq 2\\ 2x & x=2\end{cases}$$

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ را به‌دست آورید.

ج) در تساوی زیر a را بیابید.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=a.f(2)$$

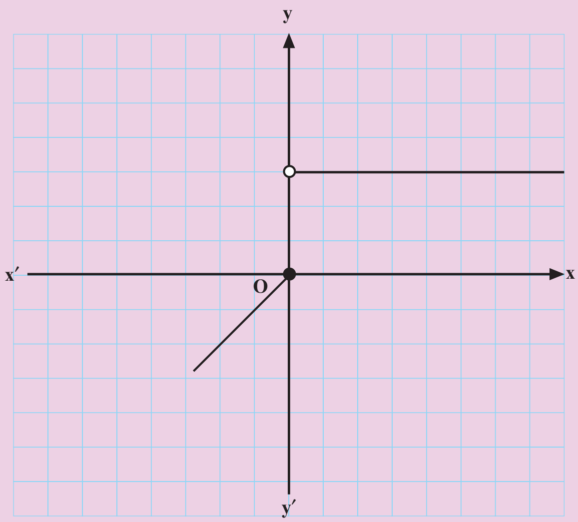
۳ــ حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{4x^3-5x^2+1}{x^2-1}$

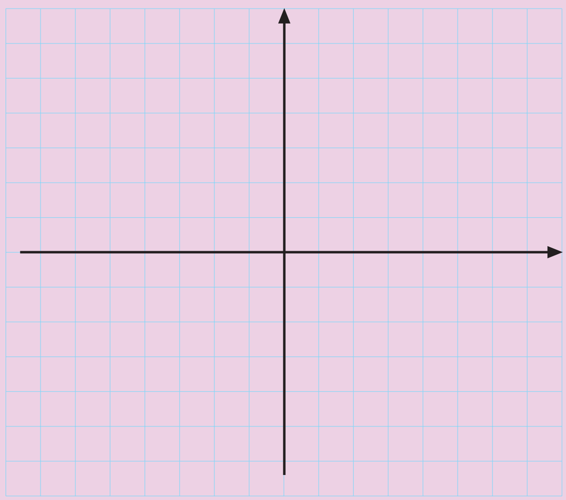
ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{(2x-\pi)}$

ج) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\sin\dfrac{1}{x}$

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۱)



شکل ۱۵ــ۳



شکل ۱۶ــ۳

بخش سوم

فصل دوم

پیوستگی

هدف کلی
شناسایی توابع پیوسته و حل مسائل آن

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ تابع پیوسته را تعریف کند ؛

۲ــ با استفاده از قضیه‌های پیوستگی، حد تابع را در نقطه‌های موردنظر حساب کند ؛

۳ــ نقطه‌های ناپیوستگی تابع‌ها را تعیین کند ؛

۴ــ مسائل پیوستگی را به طور نسبی حل کند.

پیش‌آزمون (۲)

۱ـ شکل ۱۷ـ۳ نمودار تابع f با دامنه‌ی $[۱,۶)$ را نشان می‌دهد.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ را در جای خالی بنویسید.

$\boxed{}$

ب) $f(۲)$ را محاسبه کنید و در جای خالی بنویسید.

$\boxed{}$

ج) آیا نمودار f در نقطه‌ی $x = ۲$ گسستگی دارد؟

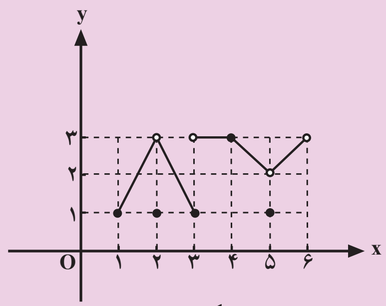
د) آیا نمودار تابع f در $[۳,۵)$ پیوسته است؟

هـ) آیا تابع در نقطه‌ی $x = ۵$ حد دارد؟

و) آیا نمودار تابع در نقطه‌ی $x = ۵$ پیوسته است؟

۲ـ نمودار تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} ۱ & x \geq ۰ \\ ۰ & x < ۰ \end{cases}$ را رسم کنید و سپس به سؤالات صفحه‌بعد پاسخ دهید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۲)



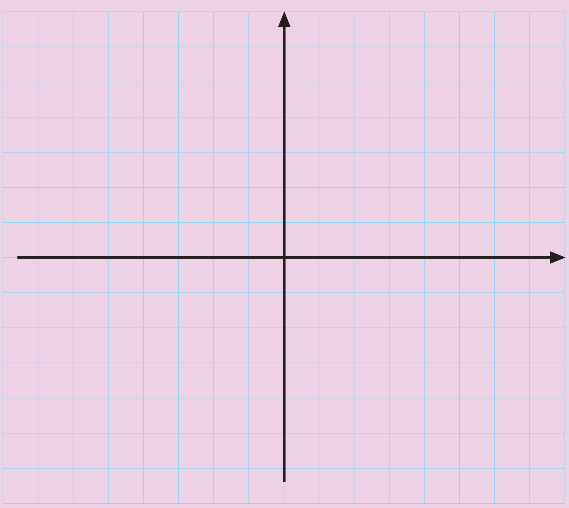
شکل ۱۷ـ۳

بلی : ☐
خیر : ☐

بلی : ☐
خیر : ☐

$\lim\limits_{x\to ۵} f(x) = \boxed{}$

بلی : ☐
خیر : ☐



شکل ۱۸ـ۳

الف) حد $f(x)$ وقتی $x \to 0^+$ را بیابید.

ب) حد $f(x)$ وقتی $x \to 0^-$ را بیابید.

ج) آیا تابع در نقطه‌ی $x = 0$ دارای حد می‌باشد؟

د) $f(0)$ را محاسبه کنید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۲)

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \square$

$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \square$

بلی : ☐

خیر : ☐

$f(0) = \square$

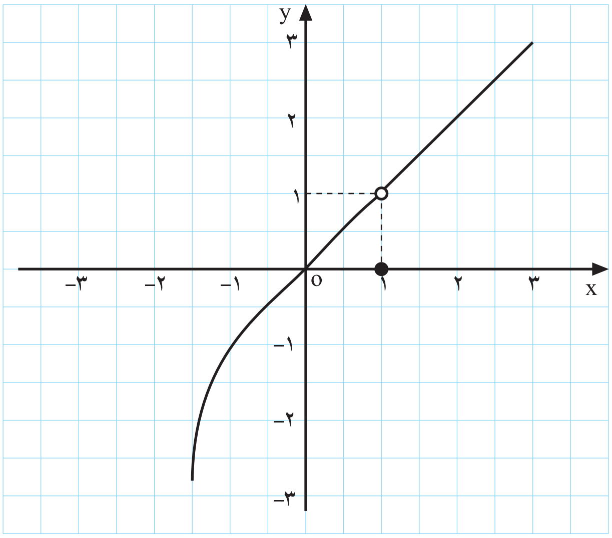
۲ـ۳ـ پیوستگی

اصطلاح پیوسته بودن یک تابع در ریاضی، به مفهوم یک پارچه بودن و عدم گسستگی است. به عبارت دیگر اگر تابع f در هیچ نقطه‌ای از دامنه‌اش بریدگی نداشته باشد پیوسته است.

ــ نمودار ۱۹ــ۳ مفروض است.

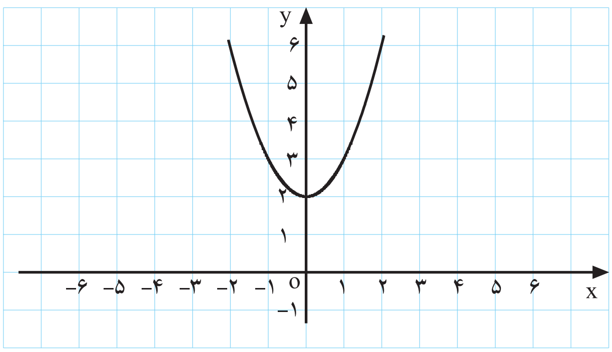
ــ در این نمودار یک بریدگی در نقطه‌ی (۱،۱) مشاهده می‌کنیم، بنابراین تابع پیوسته نیست.

ــ در نمودار ۱۹ ــ۳ وقتی $x \to 1^-$ مقدار f(x) نیز به عدد ۱ میل می‌کند در حالی که مقدار تابع در نقطه‌ی $x = 1$ برابر صفر می‌باشد. بنابراین حد تابع در نقطه‌ی $x = 1$ با مقدارش برابر نیست.



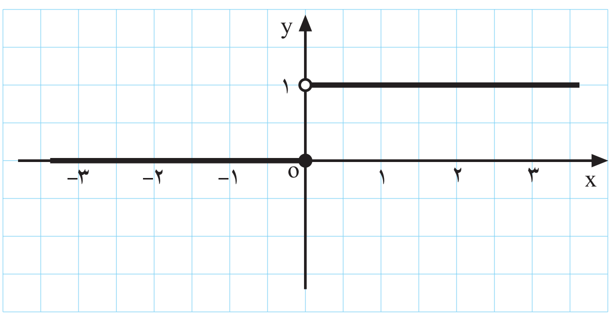
شکل ۱۹ــ۳

در شکل ۲۰ــ۳ نمودار بریدگی ندارد، بنابراین پیوسته است.



شکل ۲۰ــ۳

ــ در شکل ۲۱ــ۳ در نقطه‌ی $x = 0$ ، نمودار دارای بریدگی است، بنابراین تابع در آن نقطه پیوسته نیست و دارای حد نیز نمی‌باشد، زیرا $\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ در حالی که $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1$ است ؛ هرچند که مقدار تابع در $x = 0$ برابر با حد چپ تابع در نقطه‌ی $x = 0$ می‌باشد.



شکل ۲۱ــ۳

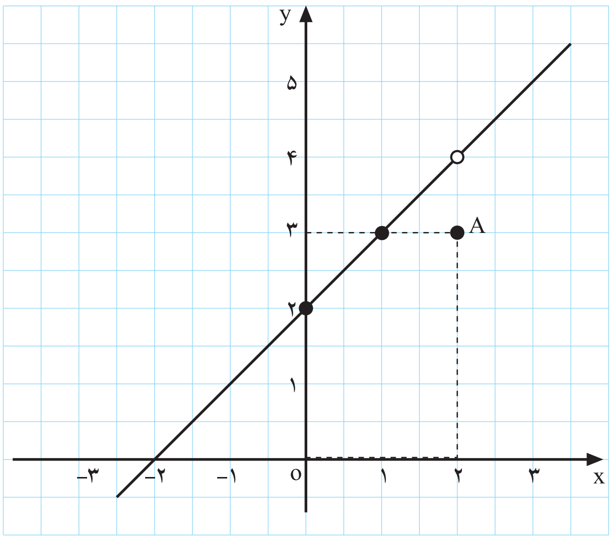
مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است پس از رسم نمودار تابع، پیوستگی آن را بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۴}{x-۲} & x\neq ۲\\ ۳ & x=۲\end{cases}$$

حل: دامنه‌ی این تابع $D_f=\mathbb{R}$ است. با فرض $x\neq ۲$ و با استفاده از اتحاد مزدوج $x^۲-۴=(x-۲)(x+۲)$ داریم :

$$f(x)=\begin{cases}x+۲ & x\neq ۲\\ ۳ & x=۲\end{cases}$$

نمودار این تابع در شکل ۲۲ــ۳ مشاهده می‌شود.
با مشاهده‌ی شکل تابع می‌بینیم که تابع در نقطه‌ی (۲،۴) دارای بریدگی است، بنابراین پیوسته نمی‌باشد.



شکل ۲۲ــ۳

از طرف دیگر با مشاهده‌ی نمودار تابع می‌بینیم وقتی $x\to ۲^+$ یا $x\to ۲^-$، $f(x)$ به عدد ۴ میل می‌نماید.

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۴$$

همچنین مقدار تابع در $x=۲$ موجود می‌باشد، امّا با حد تابع برابر نمی‌باشد در حالی که اگر $f(۲)=۴$ باشد بریدگی موجود در خط پوشانده می‌شود و تابع در دامنه‌اش پیوسته می‌گردد.

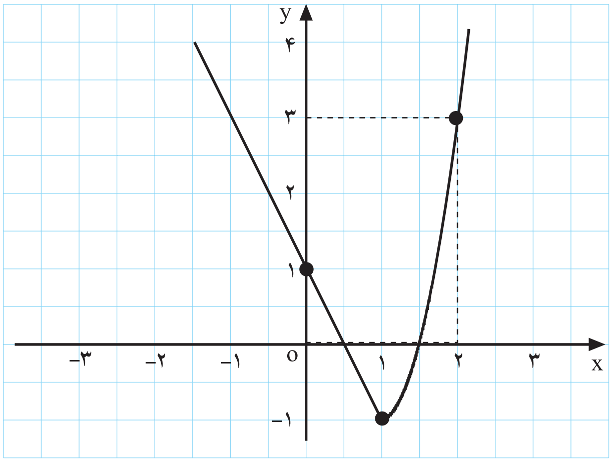
$$f(۲)=۳$$

مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است، پس از رسم در مورد پیوستگی تابع بحث کنید.

$$f(x)=\begin{cases}۱-۲x & x\leq ۱\\ x^۲-۲ & x>۱\end{cases}$$

حل: ضابطه‌ی تابع برای $x\leq ۱$ خط $f(x)=۱-۲x$ و

برای $x>۱$ ، سهمی $f(x)=x^۲-۲$ می‌باشد (شکل ۲۳ــ۳).



شکل ۲۳ــ۳

با توجه به نمودار ۲۳ــ۳ مشاهده می‌کنیم که تابع در دامنه‌اش $D_f=\mathbb{R}$ پیوسته می‌باشد. به ویژه مشاهده می‌کنیم که $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=-۱$ که با $f(۱)=-۱$ برابر می‌باشد، پس تابع در این نقطه نیز پیوسته است.

تعریف: تابع f را در نقطه‌ی $x=a$ پیوسته گوییم هرگاه :

۱) تابع f در $x=a$ تعریف شده باشد. $f(a)$ مشخص شده باشد.

۲) حد تابع در $x=a$ وجود داشته باشد. $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود داشته باشد.

۳) حد تابع f وقتی $x\to a$ وجود داشته باشد و با مقدار تابع برابر باشد. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

نتیجه‌ی ۱: شرط پیوستگی تابع f در $x=a$: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

نتیجه‌ی ۲: از آن‌جا که با پیوسته بودن تابع f در $x=a$ حد و مقدار تابع در این نقطه برابر است بنابراین برای به‌دست آوردن حد f وقتی $x\to a$ کافی است در ضابطه‌ی آن به جای متغیر مقدار a را قرار دهیم.

خط با ضابطه‌ی $f(x)=۲x+۱$ در $\mathbb{R}$ پیوسته می‌باشد بنابراین داریم :

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۲(۲)+۱=۵$$

پیوستگی تابع f دربازه‌ی $[a,b]$

تابع f به $[a,b]$ پیوسته است هرگاه :

۱ــ در (a,b) پیوسته باشد ؛ یعنی به ازای هر عضو این بازه حد و مقدارش یکی باشد ؛

به ازای هر $c\in(a,b)$ داشته باشیم $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

۲ ــ در $x=a$ از راست پیوسته باشد (پیوستگی راست داشته باشد) یعنی داشته باشیم :

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=f(a)$$

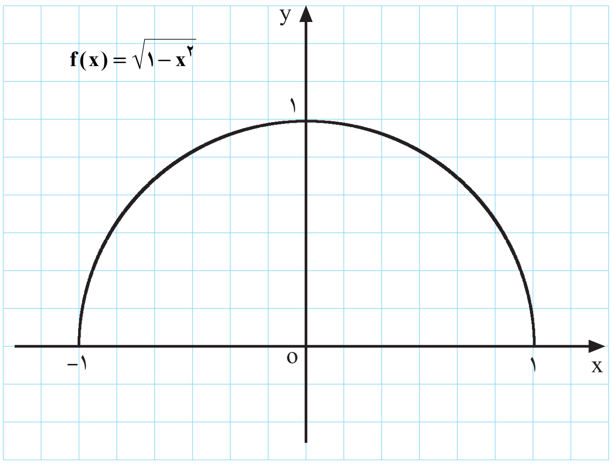
۳ــ در $x=b$ از چپ پیوسته باشد (پیوستگی چپ داشته باشد.)

$$\lim_{x\to b^-} f(x)=f(b)$$

مثال: پیوستگی تابع مقابل را در بازه‌ی $[-۱,۱]$ بررسی کنید.

$$f(x)=\sqrt{۱-x^۲}$$

حل : نمودار این تابع به صورت نیم دایره است (شکل ۲۴ــ۳).



شکل ۲۴ــ۳

با توجه به نمودار می‌بینیم که :

۱ــ به ازای هر $c\in(-۱,۱)$ داریم :

$$\lim_{x\to c} f(x)=\sqrt{۱-c^۲}=f(c)$$

۲ــ در $x=-۱$ تابع پیوستگی راست دارد، زیرا :

$$\lim_{x\to -۱^+} f(x)=\sqrt{۱-(-۱)^۲}=۰=f(-۱)$$

۳ــ در $x=۱$ تابع پیوستگی چپ دارد، زیرا :

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\sqrt{۱-(۱)^۲}=۰=f(۱)$$

بنابراین تابع f بربازه‌ی $[-۱,۱]$ پیوسته می‌باشد.

۱ــ۲ــ۳ــ قضیه‌های پیوستگی

قضیه‌ی ۱: توابع زیر در هر نقطه از دامنه‌شان پیوسته‌اند.

۱ــ تابع چند جمله‌ای

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-۱}x^{n-۱}+\cdots+a_۱x+a_۰$$

اعداد $a_۰$ ، $a_۱$ ، $a_۲$ ، $\cdots a_n$ اعداد حقیقی می‌باشند.

۲ــ توابع گویا

$$f(x)=\frac{p(x)}{g(x)}\ ,\ g(x)\neq ۰$$

۳ــ توابع رادیکالی

$$f(x)=\sqrt[n]{x}$$

۴ــ توابع مثلثاتی

$$f(x)=\sin x, g(x)=\cos x, m(x)=\tan x, n(x)=\cot x$$

۵ــ تابع قدرمطلق

$$f(x)=|x|$$

مثال: حد توابع مقابل را بیابید.

چون اعداد داده شده در دامنه‌ی توابع می‌باشد بنابراین برای محاسبه‌ی حد توابع مقدار هر یک از تابع‌ها را به ازای اعداد داده شده به دست می‌آوریم.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}(x^۲-۴x+۱)=(۱)^۲-۴(۱)+۱=-۲$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۶}}\sin x=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۵}\sqrt{۲x-۱}=\sqrt{۲(۵)-۱}=۳$

قضیه‌ی ۲: هرگاه a و k اعداد حقیقی و f و g دو تابع پیوسته در $x=a$ باشند توابع مقابل در $x=a$ پیوسته می‌باشند.

۱) $f+g$

۲) $f-g$

۳) $f\times g$

۴) $\frac{f}{g}$ (با شرط $g(a)\neq ۰$)

۵) kf

نکته: با توجه به قضیه‌ی ۱ و ۲ می‌توان پیوستگی بسیاری از توابع دیگر را نتیجه گرفت؛ به طور مثال، توابع مقابل در دامنه‌شان پیوسته هستند.

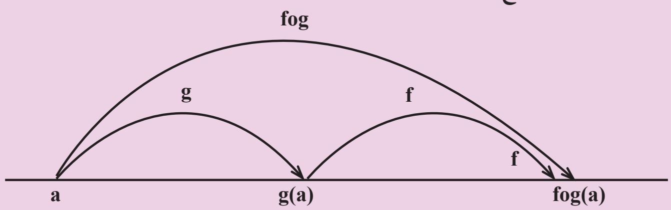
$$f(x)=۲x+\sin x$$

$$f(x)=۷\tan x$$

$$f(x)=\frac{x^۲+۳}{\cos x}$$

نکته: حاصل جمع، تفریق و حاصل ضرب تعداد متناهی از توابع پیوسته در $x=a$ در این نقطه پیوسته می‌باشند.

قضیه: اگر تابع g در a و f در g(a) پیوسته باشد آن‌گاه تابع مرکب با ضابطه $fog(x)=f(g(x))$ در $x=a$ پیوسته است.



شکل ۲۵ــ۳

مثال: تابع با ضابطه‌ی $y=\left|\frac{\cos x}{x^2+4}\right|$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

$$\left.\begin{array}{l} g(x)=\frac{\cos x}{x^2+4} \text{ در } \mathbb{R} \text{ پیوسته} \\ f(x)=|x| \text{ در } \mathbb{R} \text{ پیوسته} \end{array}\right\} \Rightarrow y=fog(x)$$

در $\mathbb{R}$ پیوسته است.

مثال: حدود الف و ب را به دست آورید.

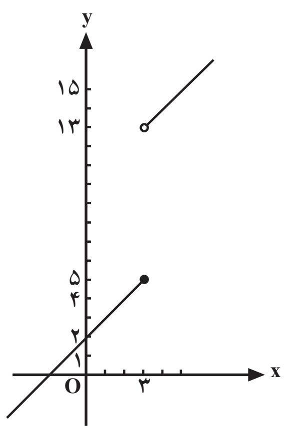
حل: چون این دو تابع در دامنه‌شان پیوسته می‌باشند. برای پیدا کردن حدهای آن‌ها کافی است مقدار تابع را در نقاط خواسته شده پیدا کنیم.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^4+2x+1}{5\sin x+2}=\frac{3(0)^4+2(0)+1}{5\sin 0+2}=\frac{1}{2}$

ب) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{4-x^2}}{1+x}=\frac{\sqrt{4-(1)^2}}{1+1}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

مثال: شکل ۲۶ــ۲ نمودار تابع مقابل است. نقاط پیوستگی تابع را مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} 2x+7 & x>3 \\ x+2 & x\le 3 \end{cases}$$



شکل ۲۶ــ۳

حل: چون ضابطه‌ی تابع به ازای $x>3$ ، $f(x)=2x+7$ و به ازای $x\le 3$ ، $f(x)=x+2$ چند جمله‌ای می‌باشد، بنابر قضیه‌ی ۱ پیوستگی، تابع در این بازه‌ها پیوسته است. بنابراین تنها لازم است در نقطه‌ی $x=3$ پیوستگی آن بررسی شود.

به ازای $x=3$ مقدار $f(x)$ برابر است با :

$$f(3)=3+2=5$$

ـ حد تابع، وقتی $x \to ۳^-$ و $x \to ۳^+$ ، برابر است با :

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = ۳+۲ = ۵$$ و
$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = \lim_{x\to ۳^+} ۲(۳) + ۷ = ۱۳$$

ـ حد چپ و راست برابر نیستند. بنابراین تابع در $x = ۳$ حد ندارد و لذا پیوسته هم نمی‌باشد. ناحیه‌ی پیوستگی تابع با ضابطه‌ی بالا عبارت است از :

$$\mathbb{R} - \{۳\}$$

مثال: مقدار a را در تابع روبه‌رو چنان محاسبه کنید که در $x = ۱$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ax^۲ + ۲x & x < ۱ \\ x^۲ + ۳ax + ۲ & x \geq ۱ \end{cases}$$

حل: شرط پیوستگی تابع f در $x = ۱$:

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = f(۱)$$

پس تابع f در $x = ۱$ حد دارد، یعنی :

$$\lim_{x\to ۱^-} ax^۲ + ۲x = \lim_{x\to ۱^+} x^۲ + ۳ax + ۲$$

ـ مقدار a برابر است با :

$$\Rightarrow a(۱)^۲ + ۲(۱) = ۱^۲ + ۳a(۱) + ۲$$
$$\Rightarrow ۳a - a = -۱ \Rightarrow a = \frac{-۱}{۲}$$

مثال: مقدار a و b را چنان بیابید که تابع f در $x = ۳$ پیوسته باشد.

$$f(x) = \begin{cases} ۳x^۲ + a & x < ۳ \\ x - ۱ & x = ۳ \\ |x| + ۲b & x > ۳ \end{cases}$$

حل: چون تابع باید در $x = ۳$ پیوسته باشد بنابراین در این نقطه حد دارد و این حد با مقدار تابع ($f(۳)$) برابر است.

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x) = ۳(۳)^۲ + a = ۲۷ + a$$
$$\lim_{x\to ۳^+} f(x) = |۳| + ۲b = ۳ + ۲b$$

ـ مقدار تابع به ازای $x = ۳$ از ضابطه‌ی $x - ۱$ به دست می‌آید، بنابراین :

$$f(۳) = ۳ - ۱ = ۲$$

ـ با توجه به پیوستگی تابع به ازای $x = ۳$ حد چپ و راست برابر مقدار تابع است، پس :

$$\begin{cases} ۲۷ + a = ۲ \Rightarrow a = ۲ - ۲۷ \Rightarrow a = -۲۵ \\ ۳ + ۲b = ۲ \Rightarrow ۲b = ۲ - ۳ = -۱ \Rightarrow b = \frac{-۱}{۲} \end{cases}$$

ـ در $x=۳$ تابع f پیوسته است، پس حد راست با مقدار تابع برابر است.

مثال: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. پیوستگی این تابع را در $x=۳$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases}\sin\frac{\pi}{۳}x & x>۳\\ ۹-x^{۲} & x\leq ۳\end{cases}$$

ـ با توجه به پیوسته بودن هر یک از ضابطه‌ها داریم :

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=۹-(۳)^{۲}=۰$$

$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\sin(\frac{\pi}{۳}\times ۳)=\sin\pi=۰$$

بنابراین تابع در $x=۳$ حد دارد.

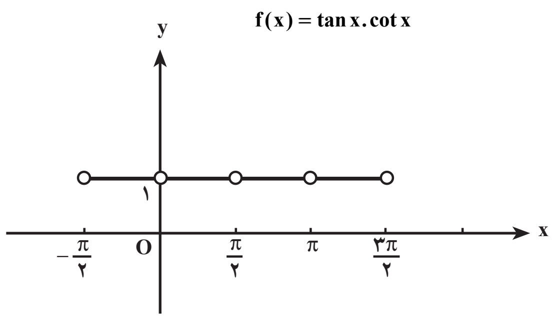
مقدار تابع در نقطه‌ی $x=۳$ برابر است با :

$$f(۳)=۹-۳^{۲}=۰$$

چون حد و مقدار تابع با یکدیگر برابرند تابع در $x=۳$ پیوسته است.

$$\lim_{x\to ۳} f(x)=f(۳)=۰$$

مثال: شکل ۲۷ـ۳ نمودار تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو را در بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ نشان می‌دهد. تابع در چه نقاطی پیوسته نیست؟



شکل ۲۷ـ۳

حل: تابع در نقاط $(۰,۱)$ ، $(\frac{\pi}{۲},۱)$ ، $(\pi,۱)$ ، $(۳\frac{\pi}{۲},۱)$ و $(-\frac{\pi}{۲},۱)$ دارای ناپیوستگی است.

تمرین

۱ــ پیوستگی تابع‌های زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

$$۱)\ f(x)=\begin{cases}۱-۲x & x\neq ۵\\ -۱۴ & x=۵\end{cases}\quad (x_\circ=۵ \text{ در})$$

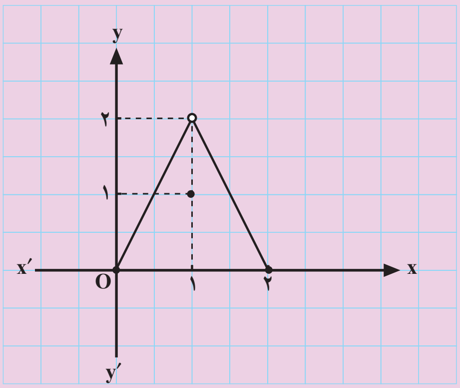
$$۲)\ f(x)=\begin{cases}x+۱ & x<۱\\ ۲x & x=۱\\ x^۳+x & x>۱\end{cases}\quad (x_\circ=۱ \text{ در})$$

۲ــ شکل ۲۸ــ۳ نمودار تابع f را نشان می‌دهد.

الف) آیا $f(۱)$ وجود دارد؟ بلی ☐ خیر ☐

ب) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

ج) آیا نمودار f در $x=۱$ پیوسته است؟



شکل ۲۸ــ۳

۳ــ به ازای چه مقدار از a تابع f در $x=۲$ پیوسته است؟

$$f(x)=\begin{cases}x^۲+x & x<۲\\ ۳ax & x\geq ۲\end{cases}$$

۴ــ نقاط ناپیوستگی توابع زیر را بیابید.

$$۱)\ f(x)=\frac{۲x}{x^۲-۵x}$$

$$۲)\ f(x)=\frac{|x|}{x}$$

$$۳)\ f(x)=\sqrt{x-۲}$$

$$۴)\ f(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۵x}$$

۵ــ تابع‌های f با ضابطه‌های زیر داده شده است در هر یک از قسمت‌های الف و ب مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع‌ها در $\mathbb{R}$ پیوسته باشند.

$$\text{الف})\ f(x)=\begin{cases}۵\sin x+۲ & x<\circ\\ b+۱ & x=\circ\\ bx^۲+a & x>\circ\end{cases}$$

$$\text{ب})\ f(x)=\begin{cases}۱-x+a & x<۴\\ ۲x & x=۴\\ \frac{۸}{x}-b & x>۴\end{cases}$$

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۲)

۱ــ پیوستگی تابع‌های زیر را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید.

$$۱)\ f(x)=\begin{cases}\frac{x}{۲}+۳ & x<۲\\ ۵x-۶ & x\geq ۲\end{cases}\quad (x=۲)$$

$$۲)\ f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۱}{x+۱} & x\neq -۱\\ ۳ & x=-۱\end{cases}\quad (x=-۱)$$

۲ــ نقاط پیوستگی تابع‌های زیر را بیابید.

$$۱)\ f(x)=\frac{۷x+۱}{x^۳-x}$$

$$۲)\ f(x)=\sqrt{۳-x}$$

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی زیر داده شده است. مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x+a}{۳x+۱} & x>۲\\ ۵ & x=۲\\ ۵bx+۴ & x<۲\end{cases}$$

بخش سوم

فصل سوم

تعمیم حد

هدف کلی

تعیین حد تابع وقتی متغیر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند، همچنین بررسی تابع‌هایی که حد آن‌ها، وقتی x به سمت یک عدد حقیقی یا $\pm\infty$ میل می‌کند، برابر $+\infty$ یا $-\infty$ است.

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ حد بی‌نهایت را تعریف کند ؛

۲ــ حد در بی‌نهایت را برای یک تابع تعریف کند.

پیش‌آزمون (۳)

۱ــ تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) جدول ۱۴ــ۳ را کامل کنید.

ب) هر چقدر x با مقادیر کمتر از ۴ به عدد ۴ نزدیک می‌شود f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است :

به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

الف) جدول ۱۵ــ۳ را کامل کنید.

ب) هر چقدر x با مقادیر بیش‌تر از ۴ به عدد ۴ نزدیک و نزدیک‌تر شود f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

۳ــ حدهای مقابل را محاسبه کنید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۳)

$$f(x)=\frac{۳}{x-۴}$$

جدول ۱۴ــ۳

x	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹		۳/۹۹۹		۴
f(x)	−۱	$\square$	$\square$	$\square$	$\cdots$	$\square$	$\cdots$	$\square$

$$\lim_{x\to ۴^-} f(x)=\square$$

$$f(x)=\frac{۳}{x-۴}$$

جدول ۱۵ــ۳

x	۵	۴/۵	۴/۱	۴/۰۱	۴/۰۰۱	$\square$
f(x)	۳	$\square$	$\square$	$\square$	$\square$	$+\infty$

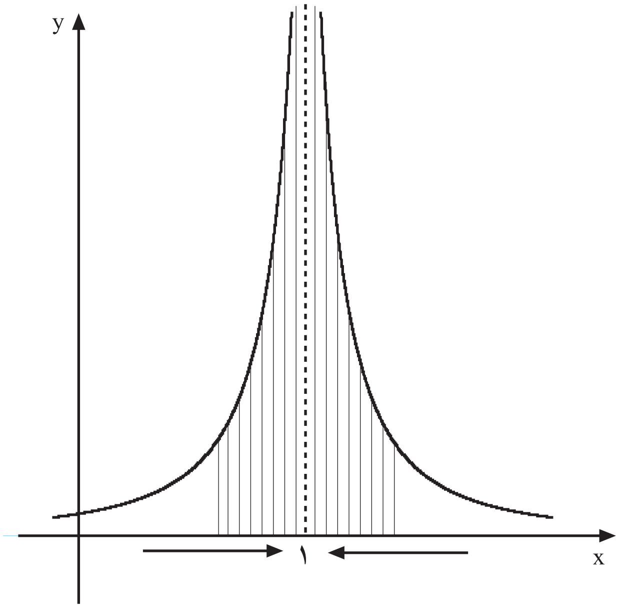
$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=\square$$

الف) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{۵x+۱}{۳x-۲}=?$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۷x^۲-۴x+۲}{-۵x+۳}=?$

۳ــ۳ــ حدبی‌نهایت

در قسمت‌های قبل با حدهایی که به صورت $\lim_{x\to a} f(x) = L$ است و در آن‌ها a و L هر دو اعداد حقیقی می‌باشند، آشنا شدیم. اکنون با حدهایی که در آن‌ها L بی‌نهایت است آشنا می‌شویم.



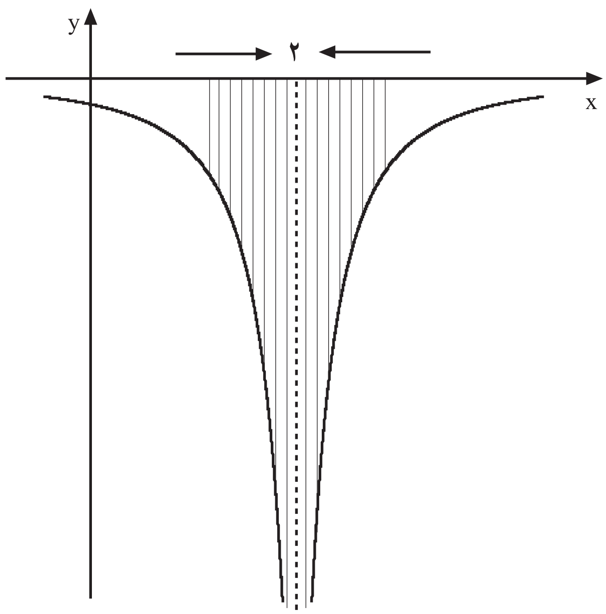
نمودار ۲۹ــ۳

فعالیت ۸ــ۳

با توجه به نمودارهای مقابل به هر یک از سؤالات زیر پاسخ دهید.

۱ــ در نمودار ۲۹ــ۳ وقتی x به عدد ۱ (یک) میل می‌کند مقدار f(x) از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌شود، یعنی به $+\infty$ میل می‌کند و داریم :

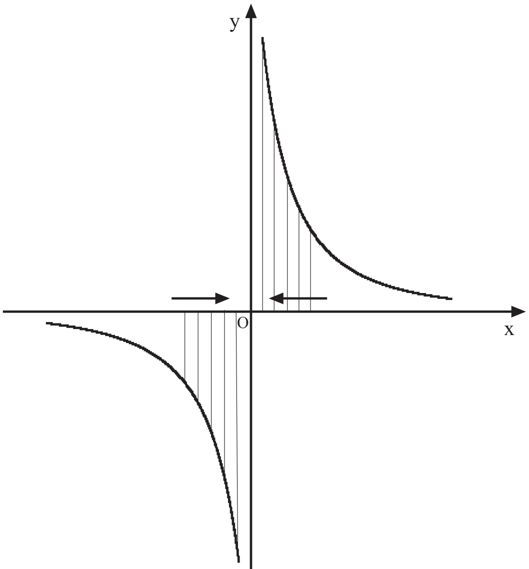
$$\lim_{x\to\square} f(x) = \bigcirc$$



نمودار ۳۰ــ۳

۲ــ در نمودار ۳۰ــ۳ وقتی x به عدد ۲ میل می‌کند f(x) از هر عدد منفی کوچکی کوچک‌تر می‌شود، یعنی داریم :

$$\lim_{x\to\square} f(x) = \bigcirc$$



نمودار ۳۱ــ۳

۳ــ در نمودار ۳۱ــ۳ وقتی x با مقادیر بیش‌تر از صفر به عدد ۰ نزدیک شود $(x \to 0^+)$ ، $f(x)$ از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌شود $(f(x) \to +\infty)$ پس داریم :

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$$

با توجه به نمودار، حد چپ تابع در $x = 0$ برابر چیست؟

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \square$$

آیا تابع f در $x = 0$ دارای حد می‌باشد؟

مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$$

جدول ۱۶ــ۳

x	۰	۰/۵	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	...
f(x)	۱	۴	10^2	10^4	10^6	10^8	...

جدول ۱۷ــ۳

x	۲	۱/۵	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱
f(x)	۱	۴	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰۰۰

جدول‌های ۱۶ــ۳ و ۱۷ــ۳ مقادیر مختلف تابع را به ازای اعداد نزدیک به یک نشان می‌دهند (شکل ۲۹ــ۳). هر چه x از مقادیر کم‌تر از ۱ و یا بیش‌تر از یک به عدد ۱ میل می‌کند مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت بزرگی بزرگ‌تر می‌گردد. بنابراین به مثبت بی‌نهایت $(+\infty)$ میل می‌کند، پس می‌توان نوشت :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = +\infty$$

فعالیت ۹ــ۳

تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است.

$$f(x) = \frac{-1}{(x-2)^2}$$

در نمودار ۳۰ــ۳ شکل این تابع را مشاهده کرده‌اید.

۱ــ جدول ۱۸ــ۳ را تکمیل کنید.

جدول ۱۸ــ۳

x	۳	۲/۵	۲/۱	۲/۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۰۰۱	۲...
f(x)	-1	$\square$	$\square$	-10^4	$\square$	-10^8	

۲ــ وقتی x با مقادیر بیش‌تر از ۲ (از راست) به عدد ۲ میل می‌کند آیا مقدار f(x) از هر عدد منفی کم‌تر می‌شود؟ (جدول ۱۸ــ۳)

بلی ☐ خیر ☐

۳ــ جدول ۱۹ــ۳ را تکمیل کنید.

جدول ۱۹ــ۳

x	۱	→	۱/۵	→	۱/۹	→	۱/۹۹	→	۱/۹۹۹	→	۱/۹۹۹۹	→	۲
f(x)	−۱		☐		−۱۰۰		−۱۰۰۰۰		−۱۰۰۰۰۰۰		☐		

۴ــ وقتی x با مقادیر کم‌تر از ۲ (ازچپ) به عدد ۲ میل می‌کند جدول ۱۹ــ۳ مقدار f(x) از هر عدد کوچکی کوچک‌تر می‌شود.

۵ــ با توجه به جدول ۱۸ــ۳ حد مقابل را حساب کنید.

$\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x) = \square$

۶ــ با استفاده از جدول ۱۹ــ۳ حد مقابل را حساب کنید.

$\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x) = \square$

۷ــ حاصل حد مقابل را به دست آورید.

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = \square$

تمرین

تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

۱ــ جدولی تنظیم کنید که وقتی x با مقادیر کم‌تر از ۲ به ۲ نزدیک می‌شود مقادیر f(x) را نشان دهد.

۲ــ جدولی را تنظیم کنید که وقتی x با مقادیر بیش‌تر از ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود مقادیر f(x) را نشان دهد.

محل پاسخ:

$$f(x) = \frac{۵}{x-۲}$$

مثال: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. نمودار f(x) را در شکل ۳۱ــ۳ مشاهده می‌کنید.

$$f(x)=\frac{۱}{x}$$

با توجه به جدول ۲۰ــ۳ می‌بینیم وقتی که x از راست به عدد ۰ (صفر) نزدیک می‌شود، f(x) از هر عدد بزرگی بزرگ‌تر می‌شود. به عبارت دیگر، f(x) را می‌توانیم از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر کنیم به شرط آن که x را به اندازه‌ی کافی به ۰ نزدیک کنیم. در این حالت می‌گوییم حد تابع f وقتی $x\to ۰^+$ برابر با $+\infty$ می‌باشد و آن را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم.

جدول ۲۰ــ۳

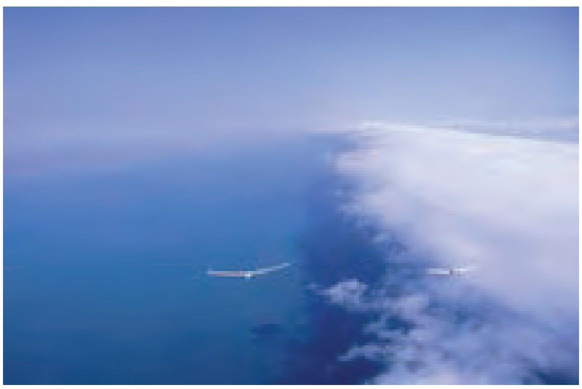
x	۰	…	←	۰/۰۰۰۱	←	۰/۰۰۱	←	۰/۰۱	←	۰/۱
f(x)	…	…	←	۱۰۰۰۰	←	۱۰۰۰	←	۱۰۰	←	۱۰

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=+\infty$$

جدول ۲۱ــ۳

x	−۰/۱	→	−۰/۰۱	→	−۰/۰۰۱	→	−۰/۰۰۰۱	→	…	۰
f(x)	−۱۰	→	−۱۰۰	→	−۱۰۰۰	→	−۱۰۰۰۰	→	…	$-\infty$

با مشاهده‌ی جدول ۲۱ــ۳ درمی‌یابیم وقتی که x از چپ به عدد ۰ نزدیک می‌شود f(x) از هر عدد منفی کوچک‌تر می‌شود به عبارت دیگر f(x) می‌تواند از هر عدد منفی، کوچک‌تر شود، به شرط آن که x به اندازه‌ی کافی به ۰ نزدیک شود.



شکل ۳۲ــ۳

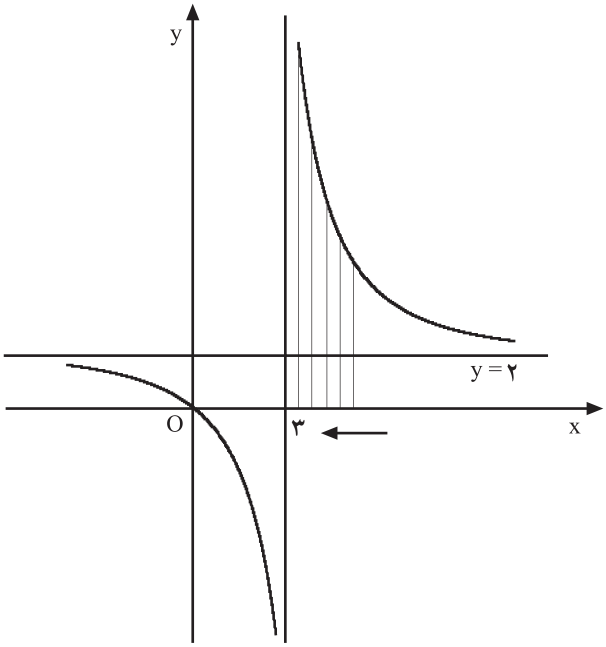
در این حالت می‌گوییم حد تابع f وقتی $x\to ۰^-$ برابر با $-\infty$ می‌باشد، و آن را به صورت مقابل نمایش می‌دهیم :

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=-\infty$$

نتیجه: با توجه به مثال‌های حل شده، در می‌یابیم وقتی مخرج کسر به صفر میل کند و صورت کسر مخالف صفر باشد قدرمطلق کسر از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر می شود، یعنی کسر بی‌کران افزایش می‌یابد.

مثال: حدهای الف، ب و ج را محاسبه کنید.

الف) $\lim_{x\to ۳^+} \frac{۲x}{x-۳}$

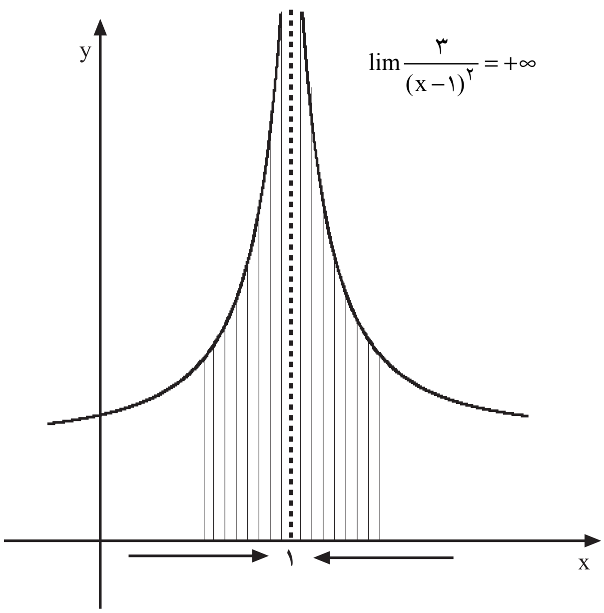


نمودار ۳۳ــ۳

حل الف: چون وقتی $x \to ۳^{+}$ مقدار صورت کسر ($۲x \to ۶$) عددی مثبت و مخرج کسر از سمت مقادیر بزرگ‌تر از صفر به عدد ۰ میل می‌کند، بنابراین حاصل کسر به $+\infty$ میل می‌کند (نمودار ۳۳ــ۳). یعنی :

$$\lim_{x \to ۳^{+}} \frac{۲x}{x-۳} = +\infty$$

ب) $\lim_{x \to ۱} \frac{۳}{(x-۱)^{۲}}$

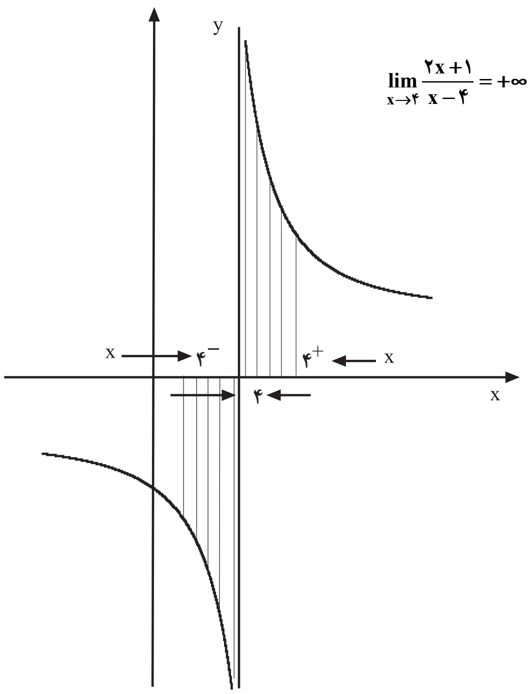


نمودار ۳۴ــ۳

حل ب: وقتی $x \to ۱$ در مخرج کسر : $(x-۱)^{۲} \to ۰^{+}$ ؛ بنابراین مقدار کسر به $+\infty$ میل می‌کند (نمودار ۳۴ــ۳).

حل ج: وقتی $x \to ۴^+$ مخرج کسر با مقادیر بیش‌تر از صفر به صفر میل می‌کند. بنابراین با توجه به مثبت بودن صورت کسر $(۲x+۱ \to ۹)$ مقدار حد به $+\infty$ میل می‌کند (نمودار ۳ـ۳۵).

ج) $\lim\limits_{x \to ۴} \frac{۲x+۱}{x-۴}$



نمودار ۳ـ۳۵

هرگاه $x \to ۴^-$ مخرج کسر با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند. با توجه به مثبت بودن صورت کسر، حاصل کسر از هر عدد منفی کم‌تر می‌باشد. بنابراین به $-\infty$ میل می‌کند (نمودار ۳ـ۳۵).

$$\lim_{x \to ۴^-} \frac{۲x+۱}{x-۴} = -\infty$$

با توجه به مثال‌های حل‌شده می‌توان قضیه‌ی زیر را نتیجه گرفت:

قضیه‌ی ۲ـ۳ــ هرگاه a عدد حقیقی باشد و داشته باشیم:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \ , \ L \neq ۰ \ , \ \lim_{x \to a} g(x) = ۰$$

الف) اگر $L > ۰$ و $g(x)$ با مقادیر مثبت به صفر میل کند،

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$$

ب) اگر $L < ۰$ و $g(x)$ با مقادیر مثبت به صفر میل کند، آن‌گاه:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$$

ج) اگر $L>0$ و $g(x)$ با مقادیر منفی به صفر میل کند، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$$

د) اگر $L<0$ و $g(x)$ با مقادیر منفی به صفر میل کند، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

مثال: حد کسر مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{3x+1}{x-1}=?$$

حل: حد صورت کسر برابر است با :

$$\lim_{x\to 1^+}3x+1=3(1)+1=4$$

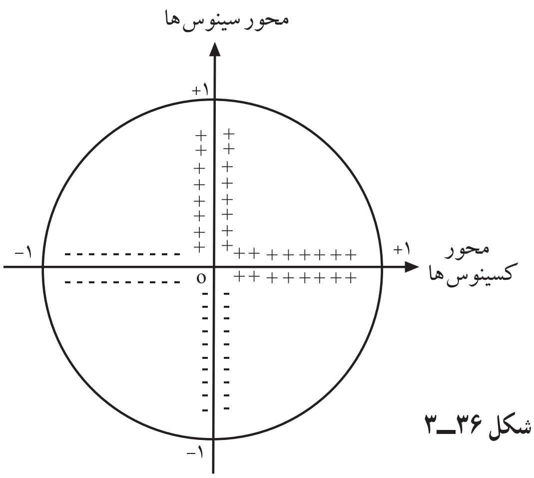
ــ مخرج کسر با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند، پس بنابر قضیه‌ی الف ــ۲ــ۳ داریم :

$$\lim_{x\to 1^+}x-1=0$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{3x+1}{x-1}=+\infty$$

مثال: حد کسر مقابل را به دست‌آورید.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{2\sin x+1}{\cos x}=?$$



شکل ۳۶ــ۳

ــ با توجه به دایره‌ی مثلثاتی، وقتی x با مقادیر بیش‌تر از $\frac{\pi}{2}$ به $\frac{\pi}{2}$ میل می‌کند چون زاویه در ناحیه‌ی دوم قرار دارد مقدار کسینوس آن منفی است (شکل ۳۶ــ۳) بنابراین مخرج کسر با مقادیر منفی به عدد صفر میل می‌کند. بنابر قضیه‌ی ج‍ــ۲ــ۳ مقدار کسر از هر عدد منفی کوچکی کوچک‌تر می‌باشد در نتیجه :

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+}\frac{2\sin x+1}{\cos x}=-\infty$$

مثال: حد کسر مقابل را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{-2x}{4-x^2}=?$$

حل: چون $x>2$ بنابراین ؛ $x^2>4$ و $-x^2<-4$ لذا داریم :

$$4-x^2<0$$

ــ یعنی مخرج کسر با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند.

حد صورت کسر برابر است با :

$$\lim_{x\to ۲^+} -۲x = -۴$$

بنابر قضیه‌ی (د ــ ۲ ــ ۳) داریم :

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{-۲x}{۴-x^۲} = +\infty$$

قضیه‌ی ۳ــ۳ــ اگر $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a} g(x) = L$ ($L \neq ۰$ عددی ثابت است) آن‌گاه :

الف) حد حاصل مجموع دو تابع برابر است با : $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = +\infty$

ب) حد حاصل ضرب دو تابع وقتی $L > ۰$، برابر است با : $\lim_{x\to a}[f(x)\times g(x)] = +\infty$

ج) حد حاصل ضرب دو تابع وقتی $L < ۰$، برابر است با : $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = -\infty$

مثال ۱: حد عبارت روبه‌رو را به دست آورید.

$$\lim_{x\to ۳^+} \left(\frac{۷}{x-۳} + \frac{۲}{x+۱}\right) = ?$$

حل: حد هر یک از کسرها را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۳^+} \frac{۷}{x-۳} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to ۳^+} \frac{۲}{x+۱} = \frac{۱}{۲}$$

حل: طبق قضیه‌ی (الف ــ ۳ ــ۳) داریم :

$$\lim_{x\to ۳^+} \left(\frac{۷}{x-۳} + \frac{۲}{x+۱}\right) = +\infty + \frac{۱}{۲} = +\infty$$

مثال ۲: حد عبارت مقابل را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to ۲^+} \left(\frac{x+۲}{x-۲} \cdot \frac{۲}{۱-x}\right) = ?$$

حل: حد هر یک از کسرها را به‌دست می‌آوریم.

$$\lim_{x\to ۲^+} \frac{x+۲}{x-۲} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to ۲^+} \frac{۲}{۱-x} = -۲$$

ــ طبق قضیه‌ی (ج ــ۳ــ۳) داریم :

$$\lim_{x\to ۲^+} \left(\frac{x+۲}{x-۳} \cdot \frac{۲}{۱-x}\right) = (+\infty)(-۲) = -\infty$$

قضیه‌ی ۴ــ۳ــ اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L$ ($L\neq ۰$ عددی ثابت است) آن‌گاه :

الف) حد حاصل مجموع دو تابع برابر است با : $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)]=+\infty$

ب) اگر $L>۰$ ، حد حاصل ضرب دو تابع برابر است با : $\lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)]=+\infty$

ج) اگر $L<۰$ ، حد حاصل ضرب دو تابع برابر است با : $\lim\limits_{x\to a}[f(x).g(x)]=-\infty$

مثال: حد عبارت روبه‌رو را محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۴^-}\left(\frac{۲x}{x-۴}\cdot\frac{۳}{x-۷}\right)=?$

چون $x\to ۴^-$ ، بنابراین $x<۴$ و $x-۴<۰$ می‌باشد، لذا داریم :

$$\lim_{x\to ۴^-}\frac{۲x}{x-۴}=-\infty$$

از طرفی :

$$\lim_{x\to ۴^-}\frac{۳}{x-۷}=-۱$$

بنابر قضیه ج ــ۴ــ۳ داریم :

$$\lim_{x\to ۴^-}\left(\frac{۲x}{x-۴}\cdot\frac{۳}{x-۷}\right)=(-\infty)(-۱)=+\infty$$

مثال: حد عبارت مقابل را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to -۲}\left(\frac{x^۲+۳}{(x+۲)^۲}+\frac{۲x+۱}{x-۱}\right)=?$$

چون وقتی $x\to -۲$ ، $(x+۲)^۲$ با مقادیر مثبت به صفر میل می‌کند ؛ بنابراین :

$$\lim_{x\to -۲} x^۲+۳=-۱ \ , \ \lim_{x\to -۲}\frac{x^۲+۳}{(x+۲)^۲}=+\infty$$

از طرفی $x<-۲$ و نزدیک -۲ است، بنابراین :

$$\lim_{x\to -۲} ۲x+۱=-۳$$

لذا خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to -۲}\frac{۲x+۱}{x-۱}=\frac{-۳}{-۳}=۱$$

پس حد مجموع این دو تابع برابر است با :

$$\lim_{x\to -۲}\left(\frac{x^۲+۳}{(x+۲)^۲}+\frac{۲x+۱}{x-۱}\right)=(+\infty)+۱=+\infty$$

تمرین

۱ــ حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to ۳^{+}} \frac{۲x}{x-۳}$

۲) $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} \frac{۱-۳x}{x(۲-x)}$

۳) $\lim\limits_{x\to -۱} \frac{۲}{(x+۱)^{۲}}$

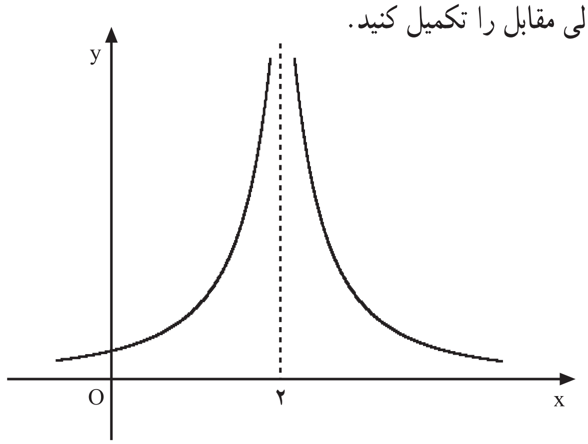
۴) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}^{-}} \tan x$

۵) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}} \cot x$

۶) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۳}{x^{۴}}$

۲ــ با توجه به نمودار ۳۷ــ۳ ، ۳۸ــ۳ و ۳۹ــ۳ جاهای خالی مقابل را تکمیل کنید.

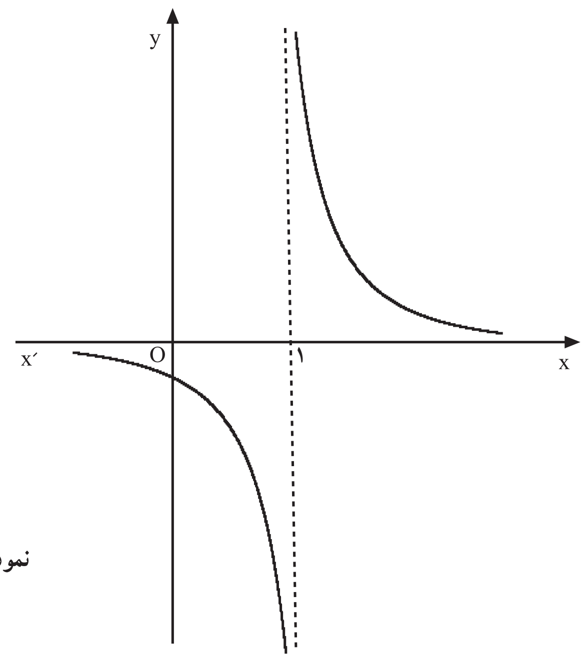
$\lim_{x\to ۲} f(x)=\square$



نمودار ۳۷ــ۳

$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=\square$

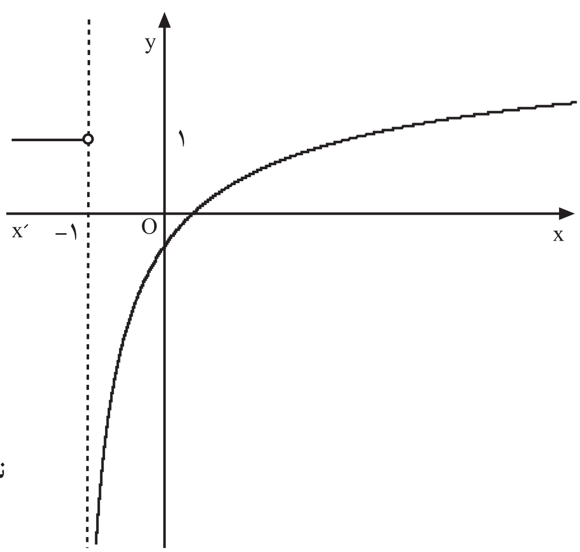
$\lim_{x\to ۱^+} f(x)=\square$



نمودار ۳۸ــ۳

$\lim_{x\to -۱^-} f(x)=\square$

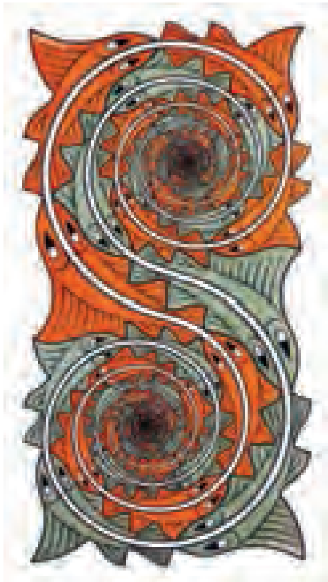
$\lim_{x\to -۱^+} f(x)=\square$



نمودار ۳۹ــ۳

۱ــ۳ــ۳ــ حد در بی‌نهایت : در $\lim_{x\to a} f(x)=L$ هرگاه a بی‌نهایت باشد، حد حاصل را حد در بی‌نهایت می‌نامند.

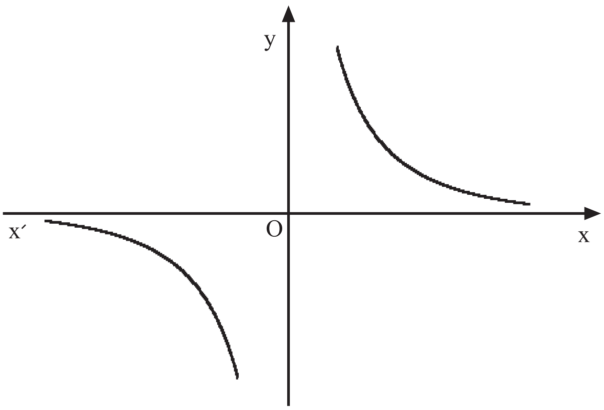
برای داشتن درک بهتری از این نوع حدها به مثال‌های زیر توجه کنید.



شکل ۴۰ــ۳

مثال: با توجه به نمودار ۴۱ــ۳ درمی‌یابیم که هرگاه مقدار x از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر شود ($x\to+\infty$) آن‌گاه f(x) به صفر نزدیک می‌گردد. همچنین وقتی x از هر عدد منفی کم‌تر شود ($x\to-\infty$) مقدار f(x) به صفر میل می‌کند. بنابراین داریم :

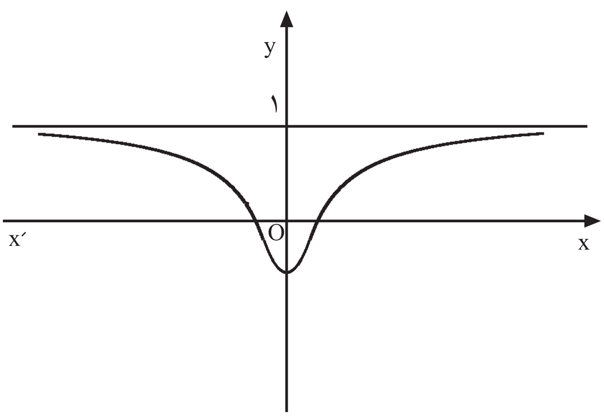
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=0$$



نمودار ۴۱ــ۳

همچنین هرگاه به نمودار ۴۲ــ۳ توجه کنیم در می‌یابیم که وقتی x از هر عدد مثبتی بیش‌تر باشد ($x\to+\infty$) و یا از هر عدد منفی کوچک‌تر شود ($x\to-\infty$) مقدار f(x) به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد ($f(x)\to 1$) یعنی داریم :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=1$$



نمودار ۴۲ــ۳

مثال: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است :

$$f(x)=\frac{۱}{x}$$

با توجه به جدول ۲۲ــ۳ می‌بینیم که هرگاه x بزرگ‌و بزرگ‌تر شود به طوری که از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر شود $(x \to +\infty)$ مقدار f(x) به عدد ۰ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود $(y \to ۰)$ یعنی با توجه به جدول ۲۳ــ۳ درمی‌یابیم که وقتی $x \to -\infty$، f(x) با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند، یعنی :

جدول ۲۲ــ۳

x	۱→۱۰→۱۰۰→۱۰۰۰→۱۰۰۰۰→۱۰۰۰۰۰→۱۰۰۰۰۰۰→...
f(x)	۱→۰/۱→۰/۰۰۱→۰/۰۰۰۱→۰/۰۰۰۰۱→۰/۰۰۰۰۰۱→...

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=۰$$

جدول ۲۳ــ۳

x	$-۱۰^{۶}$ −□ $۱۰^{۵}$ −□ ۱۰۰۰−□ ۱۰۰−□ ۱۰−□ ۱
f(x)	$-۱۰^{+۶}$ −□ $۱۰^{+۵}$ −□ ۰/۰۰۱−□ ۰/۰۱−□ ۰/۱−□ ۱

فعالیت ۹ــ۳

تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است (شکل ۴۲ــ۳) با تکمیل جدول‌های ۲۴ــ۳ و ۲۵ــ۳ به سؤالات زیر پاسخ دهید :

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۱}{x^{۲}+۱}$$

جدول ۲۴ــ۳

x	۱→۱۰→۱۰۰→۱۰۰۰→۱۰۰۰۰
f(x)	۰→۰/۹۸۰۱۹۸→۰/۹۹۹۸→□→□

جدول ۲۵ــ۳

x	−۱۰۰۰۰	−	□ ۱۰۰۰	−	□ ۱۰۰	−	□ ۱۰	)	۰	)	۱
f(x)	□		۰/۹۹۹۹۸		□		۰/۹۸۰۱۹۸				

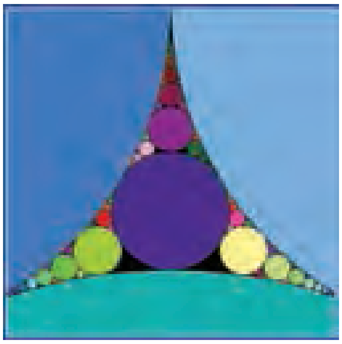
۱ــ وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند $(x \to +\infty)$، f(x) به کدام عدد میل می‌کند؟

۲ــ وقتی $x \to -\infty$ مقدار f(x) به چه عددی میل می‌کند؟

پاسخ:

قضیه‌ی ۵ــ۳ــ اگر n عددی صحیح و مثبت باشد، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{x^n}=۰$$



شکل ۴۳ــ۳

مثال: حد مقابل را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۷}{x^۵}=?$$

بنابر قضیه‌ی ۵ــ۳ داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۷}{x^۵}=۷\times\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{x^۵}=۷\times۰=۰$$

مثال: حد مقابل را به‌دست آورید :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x+۲}{x-۱}=?$$

حل: از x صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}(۳+\frac{۲}{x})}{\cancel{x}(۱-\frac{۱}{x})}=$$

ــ بنابر قضیه‌ی ۵ــ۳ داریم :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۳+\frac{۲}{x}}{۱-\frac{۱}{x}}=\frac{۳+۰}{۱-۰}=۳$$

مثال: حد مقابل را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۲x^۲-۱}{x^۲+۳}=?$$

از $x^۲$ در صورت و مخرج کسر فاکتور می‌گیریم. با توجه به قضیه‌ی ۵ــ۳ داریم :

$$\lim\frac{۲x^۲-۱}{x^۲+۳}=\lim\frac{\cancel{x^۲}(۲-\frac{۱}{x^۲})}{\cancel{x^۲}(۱+\frac{۳}{x^۲})}=\frac{۲-۰}{۱+۰}=۲$$

ــ حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱-x}{x^۳+x^۲+۱}=?$$

ـ از بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم.

ـ بنابر قضیه‌ی ۵ـ۳ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{۱}{x^n}=۰$ داریم :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x(\frac{۱}{x}-۱)}{x^۳(۱+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۳})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{۱}{x}-۱}{x^۲(۱+\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x^۳})}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{۰-۱}{x^۲(۱+۰+۰)}=۰$$

مثال: حد مقابل را بیابید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۳-۷x}{x^۲-x}=?$$

ـ از بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم.

بنابر قضیه ۵ـ۳ خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۳-۷x}{x^۲-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^۳(۱-\frac{۷}{x^۲})}{x^۲(۱-\frac{۱}{x})}$$

تابع برابر است با :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^۳}}{\cancel{x^۲}}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

مثال: حد مقابل را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۴x^۲+x+۲}{x^۲+۷x-۳}=?$$

با فاکتورگیری $x^۲$ از صورت و مخرج کسر و بنابر قضیه‌ی ۵ـ۳ داریم :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x^۲}(۴+\frac{۱}{x}+\frac{۲}{x^۲})}{\cancel{x^۲}(۱+\frac{۷}{x}-\frac{۳}{x^۲})}=\frac{۴+۰+۰}{۱+۰-۰}=۴$$

نکته: در محاسبه‌ی $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$، (f(x) و g(x) چند جمله‌ای هستند) :

ـ اگر درجه‌ی f(x) کوچکتر از درجه‌ی g(x) باشد، آن‌گاه حد تابع برابر صفر است. مانند: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{۷x}{x^۲+۳}=۰$

ـ هرگاه f(x) و g(x) هم درجه باشند مقدار حد برابر خارج قسمت ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت به ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی مخرج است ؛ مانند :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۶x^۳+۷x-۴}{۵x^۳-۴x^۲+۳}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۶x^۳}{۵x^۳}=\frac{۶}{۵}$$

ـ اگر درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج بیش‌تر باشد حد تابع بی‌نهایت می‌شود ؛ مانند :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۵x^۴+۶x}{۳x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۵x^۴}{۳x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۵}{۳}x^۳=\begin{cases}+\infty\\-\infty\end{cases}$$

مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$f(x)=\frac{ax^{m}+x+1}{3x^{2}+7}$$

مقادیر a و m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=4$$

مراحل حل: چون مقدار حد تابع عددی مخالف صفر شده است، بنابراین صورت و مخرج هم درجه‌اند، لذا داریم :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^{m}+x+1}{3x^{2}+7}=4\Rightarrow m=2$$

ــ با توجه به مقدار حد تابع، مقدار a برابر است با :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^{2}+x+1}{3x^{2}+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^{2}}{3x^{2}}=\frac{a}{3}=4\Rightarrow \boxed{a=12}$$

مثال: مقدار حد روبه‌رو را محاسبه نمایید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+7}}}{5x+2}$$

ــ چون درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر است بنابراین حد برابر صفر است، یعنی :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+7}}}{5x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{5x}=0$$

تمرین

۱ــ حدهای زیر را به دست آورید.

۱) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^{2}+7x}{x^{2}-1}$

۲) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{(2x-1)(x+3)}{1-x+x^{2}}$

۳) $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{7x+1}{-\frac{1}{3}x^{2}+2}$

۴) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{4}+3x-1}{4x^{3}+2x-x}$

۲ــ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\frac{4ax^{m+1}+7x}{3x^{3}+9x-2}$ داده شده است. مقادیر a و m را طوری بیابید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=3$$

آزمون پایانی (۳)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۳)

۱ــ اگر داشته باشیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{ax^{m+۱}-۱۱x+۴}{۶x^{۳}+۴x^{۲}-۵}=\dfrac{۳}{۵}$ ، مقدار m و a را به دست آورید.

۲ــ اگر تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد مقدار a و b را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}ax+۵ & x>۱\\ ۳ & x=۱\\ -bx+۴ & x<۱\end{cases}$$

۳ــ حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to۳}\dfrac{x^{۳}-۲۷}{۵x^{۲}-۱۴x-۳}$

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{۵x+۱}{۷x^{۲}-۴x}$

۳) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^{۲}-۲x|x|+۳}{۵x^{۲}-۴x+۳}$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{۷}-۶x}{x^{۴}+۳x+۱}$.

بخش چهارم

مشتق و کاربردهای آن

هدف کلی بخش

تعیین رفتار تابع‌ها و رسم دقیق نمودار آن‌ها

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	مشتق
دوم	کاربرد مشتق ۱

بخش چهارم

فصل اول

مشتق

هدف کلی

درک مفهوم مشتق و به‌دست آوردن مشتق توابع

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ به کمک تعریف حد، مشتق توابع را به‌دست آورد ؛

۲ــ مشتق یک تابع را در یک نقطه تعریف کند ؛

۳ــ قضیه‌های مشتق و فرمول‌های آن را برای تعیین مشتق توابع دیگر به‌کار گیرد.

پیش‌آزمون (۱)

۱ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

الف) $f(x+h)$ را حساب کنید.

ب) $f(x+h)-f(x)$ را به‌دست آورید.

ج) $\lim\limits_{h\to ۰}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ را حساب کنید.

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

الف) $f(۲)$ را حساب کنید.

ب) $f(x)-f(۲)$ را به‌دست آورید.

ج) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)-f(۲)}{x-۲}$ را حساب کنید.

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. هرگاه نمو x را Δx و نمو y را Δy بنامیم :

الف) نمو y را بیابید. ($\Delta y = ?$)

ب) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ را تعیین کنید.

ج) مقدار $\lim\limits_{\Delta x\to ۰}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ را به‌دست آورید.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون (۱)

$f(x)=x^{۲}-۲x$

$f(x)=x^{۲}+۳$

$f(x)=-x^{۳}+۵$

۱ــ۴ــ نمو متغیر: اگر f تابعی با ضابطه‌ی $y=f(x)$ و با دامنه‌ی D_f و $x_{۱}$ و $x_{۲}$ دو مقدار متمایز از D_f باشند، در این‌صورت $x_{۲}-x_{۱}$ را نمو متغیر گوییم و آن را با x . نمایش می‌دهیم.

نمو متغیر: $.\ x=x_{۲}-x_{۱} \Rightarrow x_{۲}=x_{۱}+\square x$

نمو تابع: اگر متغیر مستقل x نموی به اندازه‌ی x . داشته باشد، آن‌گاه متغیر وابسته f(x) نموی به اندازه‌ی y . خواهد داشت. اگر $y_{۱}=f(x_{۱})$ و $y_{۲}=f(x_{۲})$ دو مقدار از تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ به‌ازای $x_{۱}$ و $x_{۲}$ باشند، در این‌صورت $y_{۲}-y_{۱}$ را نمو تابع گوییم و آن را با y . نمایش می‌دهیم:

نمو تابع: $.\ y=y_{۲}-y_{۱}=f(x_{۲})-f(x_{۱})$

$\Rightarrow \square y=f(x_{۱}+\square x)-f(x_{۱})$

$.\ y=f(x+\square x)-f(x)$

مثال ۱: تابع f مفروض است، نمو تابع را به‌دست آورید:

$f(x)=۳x^{۲}+۵$

حل: نمو تابع عبارت است از:

$.\ y=f(x+\square x)-f(x)$

ــ در تابع اصلی به‌جای متغیر x مقدار $x+\square x$ را قرار می‌دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت:

$.\ y=۳(x+\square x)^{۲}+۵-(۳x^{۲}+۵)\Rightarrow$

ــ عبارت را ساده می‌کنیم:

$.\ y=\cancel{۳x^{۲}}+۶x..\ x+۳.\ x^{۲}+\cancel{۵}-\cancel{۳x^{۲}}-\cancel{۵}$

y . برابر است با:

$\Rightarrow \square y=۶x..\ x+۳.\ x^{۲}$

مثال ۲: تابع f باضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است نمو تابع را به‌دست آورید.

$f(x)=x+۷$

حل: نمو تابع برابر است با:

$.\ y=f(x+\square x)-f(x)\Rightarrow \square y=(x+\square x)+۷-(x+۷)$

ــ پس از ساده کردن عبارت، y . برابر است با:

$\Rightarrow \square y=x+\square x+۷-x-۷\Rightarrow \square y=\square x$

مثال ۳: تابع f باضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است:

$f(x)=x^{۲}-۵x$

الف) به‌ازای $x=۲$ و $x=۰/۱$. مقدار y . را به‌دست آورید.

حل: نمو تابع برابر است با :

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

ــ $x+\Delta x$ را به‌جای متغیر $f(x)$ قرار می‌دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت :

$$\Delta y = (x+\Delta x)^{2} - 5(x+\Delta x) - (x^{2} - 5x)$$

ــ پس از ساده کردن عبارت داریم :

$$\Rightarrow \Delta y = \cancel{x^{2}} + 2x\Delta x + \Delta x^{2} - \cancel{5x} - 5\Delta x - \cancel{x^{2}} + \cancel{5x}$$

ــ Δy برابر است با :

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^{2} - 5\Delta x$$

ــ به‌ازای $x=2$ و $\Delta x = 0/1$، Δy را محاسبه می‌کنیم :

$$\Delta y = 2(2)(0/1) + 0/1^{2} - 5(0/1) \Rightarrow \Delta y = -0/09$$

ب) به‌ازای $x=2$ و $\Delta x = 0/01$، مقدار Δy را به‌دست آورید.

حل: با توجه به قسمت الف، داریم :

$$\Delta y = 2x\Delta x + \Delta x^{2} - 5\Delta x \Rightarrow$$

ــ به‌ازای $\Delta x = 0/01$ و $x=2$ مقدار Δy را به‌دست می‌آوریم :

$$\Delta y = 2(2)(0/01) + (0/01)^{2} - 5(0/01) = -0/0099$$

> **نکته:** (در تابع پیوسته f) از مقایسه‌ی مقدار Δy درحالت الف و ب نتیجه می‌گیریم که هرقدر مقدار Δx کوچک‌تر شود مقدار Δy نیز کوچک‌تر خواهد شد.

۱ــ۱ــ۴ــ تعریف و محاسبه‌ی مشتق: مشتق تابع f را با f' نمایش می‌دهیم و به سه روش زیر تعریف می‌کنیم :

روش ۱: به‌طورکلی حد نمو تابع به نمو متغیر را مشتق تابع می‌نامیم، در صورتی‌که حد موجود و متناهی باشد. یعنی :

$$1)\ f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

روش ۲: با تعویض h به Δx خواهیم داشت :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

روش ۳: مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=a$:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال ۱: مشتق تابع مقابل را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنید.

$$f(x)=۲-۵x$$

مراحل حل: رابطه‌ی مشتق برابر است با :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ـ $x+\Delta x$ را به‌جای متغیر تابع با ضابطه $f(x)$ جایگزین می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۲-۵(x+\Delta x)-(۲-۵x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-۵\Delta x}{\Delta x}$$

ـ پس از ساده کردن صورت مشتق تابع به‌دست می‌آید.

$$f'(x)=-۵$$

مثال ۲: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست می‌آید :

$$f(x)=x^{۲}+۶$$

حل: رابطه‌ی مشتق برابر است با :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Rightarrow$$

ـ به‌جای متغیر، در تابع مقدار $x+h$ را قرار می‌دهیم :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^{۲}+۶-(x^{۲}+۶)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{x^{۲}}+۲xh+h^{۲}+\cancel{۶}-\cancel{x^{۲}}-\cancel{۶}}{h}$$

ـ پس از ساده کردن، مشتق به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{۲xh+h^{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۲x+h)}{h}=\lim_{h\to ۰}۲x+h$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲x$$

مثال ۳: مشتق تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$$f(x)=x^{۲}-۴\ ،\ x_{۰}=۵$$

حل: $f(۵)$ را حساب می‌کنیم،

$$f(۵)=۵^{۲}-۴=۲۵-۴\Rightarrow f(۵)=۲۱$$

ـ مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=۵$ برابر است با :

$$f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{f(x)-f(۵)}{x-۵}$$

ـ به‌جای $f(x)$ و $f(۵)$ مقدار آن‌ها را قرار می‌دهیم، پس :

$$\Rightarrow f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{(x^{۲}-۴)-۲۱}{x-۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{x^{۲}-۲۵}{x-۵}$$

ـ با استفاده از اتحاد مزدوج کسر را ساده می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{\cancel{(x-۵)}(x+۵)}{\cancel{x-۵}}=\lim_{x\to ۵} x+۵$$

ـ مشتق تابع در $x=۵$ برابر است با :

$$\Rightarrow f'(۵)=۱۰$$

مثال ۴: مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده به‌دست آورید.

$$f(x)=x^{۲}-۵x \ ، \ x_{۰}=۳$$

حل: مقدار $f(۳)$ را حساب می‌کنیم :

$$f(۳)=۳^{۲}-۵(۳)\Rightarrow f(۳)=-۶$$

ـ مشتق تابع f در $x=۳$ برابر است با :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۵x-(-۶)}{x-۳}$$

ـ با استفاده از اتحاد جمله‌ی مشترک صورت کسر تابع را تجزیه می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۵x+۶}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۲)\cancel{(x-۳)}}{\cancel{x-۳}}$$

ـ مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=۳$ برابر است با :

$$\Rightarrow f'(۳)=\lim_{x\to ۳} x-۲=۳-۲\Rightarrow f'(۳)=۱$$

می‌دانیم $\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$ و از طرفی حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتی Δx به صفر میل می‌کند درصورتی وجود دارد که حد چپ و راست آن برابر باشند ؛ به بیان دیگر تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ در $x=a$ دارای مشتق است هرگاه داشته باشیم :

$$\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^{-}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مثال ۵: مشتق‌پذیری تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید.

$$f(x)=|x+۵| \ ، \ x_{۰}=-۵$$

حل: رابطه‌ی مشتق تابع f در $x=a$ برابر با :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ـ مقدار تابع f را در $x=-۵$ حساب می‌کنیم :

$$f(-۵)=|-۵+۵|=۰$$

ـ مشتق تابع f در $x=-۵$ برابر است با :

$$f'(-۵)=\lim_{x\to -۵}\frac{f(x)-f(-۵)}{x-(-۵)}=\lim_{x\to -۵}\frac{|x+۵|-۰}{x+۵}$$

ـ حد تابع را با استفاده از تعریف قدرمطلق حساب می‌کنیم.

ـ هرگاه $x > -۵$ حد تابع برابر است با :

$$\lim_{x\to -۵^+}\frac{|x+۵|}{x+۵}=\lim\frac{\cancel{(x+۵)}}{\cancel{x+۵}}=۱$$

ـ هر گاه $x < -۵$ حد تابع برابر است با :

$$\lim_{x\to -۵^-}\frac{|x+۵|}{x+۵}=\lim\frac{\cancel{-(x+۵)}}{\cancel{x+۵}}=-۱$$

ـ مشتق f در $x=-۵$ وجود ندارد، زیرا :

$$۱\neq -۱$$

مثال ۶: مشتق تابع مقابل را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنید.

$$f(x)=۳+۵x$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق را می‌نویسیم :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

با جای‌گذاری $f(x+\Delta x)$ و $f(x)$ در رابطه داریم :

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۳+۵(x+\Delta x)-(۳+۵x)}{\Delta x}$$

ـ صورت کسر را ساده می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\cancel{۳}+\cancel{۵x}+۵\Delta x-\cancel{۳}-\cancel{۵x}}{\Delta x}$$

ـ مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۵(\Delta x)}{\Delta x}=۵$$

مثال ۷: مشتق تابع روبه رو را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

$$f(x)=\frac{۵}{x}$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق برابر است با :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ـ به جای متغیر x در تابع $x+\Delta x$ قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\frac{۵}{x+\Delta x}-\frac{۵}{x}}{\Delta x}$$

ـ از صورت کسر مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{\frac{\cancel{۵x}-\cancel{۵x}-۵\Delta x}{x(x+\Delta x)}}{\frac{\Delta x}{۱}}$$

ـ کسر مرکب را به کسر ساده تبدیل می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-۵\cancel{\Delta x}}{x(x+\Delta x)}\times\frac{۱}{\cancel{\Delta x}}$$

ـ حد تابع را حساب می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-۵}{x(x+\Delta x)}=\frac{-۵}{x(x+۰)}$$

مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x)=\frac{-5}{x^2}$$

مثال ۸: مشتق تابع روبه رو را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

$$f(x)=x^3$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق برابر است با :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\Rightarrow$$

ـ با استفاده از اتحاد مکعب صورت را ساده می‌کنیم.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$

ـ از متغیر h در صورت فاکتور می‌گیریم.

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$

ـ مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2\Rightarrow f'(x)=3x^2$$

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ی خواسته شده حساب کنید.

$$f(x)=\sqrt{x}\ ،\ x=2$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=2$ برابر است با :

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

ـ با توجه به صورت کسر مخرج را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

ـ پس از رفع ابهام از تابع داریم :

$$\Rightarrow f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

ـ مشتق تابع f در $x=2$ برابر است با :

$$f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

مثال ۱۰: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ی خواسته شده به‌دست آورید.

$$f(x)=x^2+5\ ،\ x=3$$

حل: مقدار $f(x)$ در $x=3$ برابر است با :

$$f(3)=3^2+5=14$$

ـ رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=3$ برابر است با :

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$

ـ به جای $f(x)$ مقدار تابع را جایگزین می‌کنیم :

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{x^2+5-14}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$$

ـ صورت کسر را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه و ساده می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}x+3$$

مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=3$ برابر است با :

$$\Rightarrow f'(3)=3+3\Rightarrow f'(3)=6$$

۲ــ۱ــ۴ــ برخی از رابطه‌های مشتق

قاعده‌ی ۱ : مشتق تابع ثابت :

$$f(x)=c \text{ و } c\in\mathbb{R}$$

مشتق تابع ثابت همواره برابر صفر است.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0}0=0$$

مشتق تابع ثابت همواره برابر صفر است ؛ به بیان دیگر :

$$f(x)=c\ ,\ c\in\mathbb{R}\Rightarrow f'(x)=0$$

مثال:

$$f(x)=-2\sqrt{5}\Rightarrow f'(x)=0$$

قاعده‌ی ۲ : مشتق تابع درجه اول :

$$f(x)=ax+b\text{ ، }a\neq 0,a,b\in\mathbb{R}$$

ـ از رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ برابر است :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

ـ عبارت حاصل را حساب می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{a(x+h)+b-(ax+b)}{h}$$

مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{ah}{h}=a$$

مشتق تابع با ضابطه $f(x)=ax+b$ برابر است با : $f'(x)=a$

مثال ۱: مشتق تابع روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$f(x) = -۵x + ۷$$

ـ مشتق تابع برابر است با ضریب x :

$$f'(x) = -۵$$

مثال ۲: مشتق تابع روبه‌رو را به‌دست آورید.

$$f(x) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}x - ۵\pi$$

حل: مشتق تابع برابر است با ضریب x :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

مثال ۳: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق، محاسبه کنید.

$$f(x) = x^{۲}$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه f(x) برابر است با :

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow$$

ـ با استفاده از اتحاد مربع کامل عبارت را ساده می‌کنیم :

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{(x+h)^{۲} - x^{۲}}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{\cancel{x^{۲}} + ۲xh + h^{۲} - \cancel{x^{۲}}}{h}$$

ـ پس از فاکتورگیری از h، مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{h(۲x+h)}{h} = \lim_{h \to ۰} ۲x + h \Rightarrow f'(x) = ۲x$$

نتیجه: هرگاه $f(x) = x^{۲}$ آن‌گاه $f'(x) = ۲x$

در حالت کلی می‌توان قاعده‌ی ۳ را بیان کرد.

قاعده‌ی ۳: هرگاه $f(x) = x^{n}$ و $n \in \mathbb{R}$ آن‌گاه $f'(x) = nx^{n-۱}$

مثال ۴: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

$y = x^{۲}$ ، $y' = ۲x^{۲-۱} = ۲x$

$y = x^{۷}$ ، $y' = ۷x^{۷-۱} = ۷x^{۶}$

$y = x^{-۶}$ ، $y' = -۶x^{-۶-۱} = -۶x^{-۷} = \frac{-۶}{x^{۷}}$

$y = x^{\frac{۴}{۳}}$ ، $y' = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۴}{۳}-۱} = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}} = \frac{۴}{۳}\sqrt[۳]{x}$

قاعده‌ی ۴: فرض کنید $f(x)=u^n$، (u برحسب متغیر x) $\qquad f'(x)=nu'u^{n-1}$

مثال ۵: مشتق تابع مقابل را بیابید.

$$f(x)=(-4x+7)^3$$

حل:

ـ مشتق تابع برابر است با :

$$y'=3(-4)(-4x+7)^{3-1}\Rightarrow y'=-12(-4x+7)^2$$

قاعده‌ی ۵: فرض کنید $f(x)=kg(x)$، (kمقدار ثابت) آن‌گاه : $\qquad f'(x)=kg'(x)$

اثبات قاعده‌ی ۵: رابطه‌ی کلی تعریف مشتق عبارت است از :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ـ در رابطه‌ی کل به جای $f(x)$ مساوی آن یعنی $kg(x)$ را قرار می‌دهیم، پس :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{kg(x+\Delta x)-kg(x)}{\Delta x}$$

$$=k.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

در نتیجه مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)=k.g'(x)}$$

مثال ۶: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x)=7x^5$

$$f'(x)=7\times 5\times x^4=35x^4$$

ب) $f(x)=-6(\frac{3}{2}x+5)^6$

$$f'(x)=(-6)(6)(\frac{3}{2})(\frac{3}{2}x+5)^{6-1}=-54(\frac{3}{2}x+5)^5$$

مثال ۷: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x}$

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب) $f(x)=\sqrt{-3x+5}$

$$f(x)=(-3x+5)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(-3)(-3x+5)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-3}{2}(-3x+5)^{-\frac{1}{2}}=\frac{-3}{2}\times\frac{1}{(-3x+5)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{-3}{2\sqrt{-3x+5}}$$

نتیجه‌ی ۱: اگر $y=\sqrt{u}$ (u برحسب x) آن‌گاه $y'=\dfrac{u'}{۲\sqrt{u}}$

اثبات نتیجه‌ی ۱: می‌دانیم $\sqrt[m]{u^n}=u^{\frac{n}{m}}\ (m,n\in\mathbb{N})$

پس :

$$y=\sqrt{u}=u^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲}(u')\times u^{\frac{۱}{۲}-۱}=\frac{۱}{۲}u'.u^{-\frac{۱}{۲}}$$

ـ چون $n\in\mathbb{N}$ و $a^{-n}=\dfrac{۱}{a^n}$ مشتق برابر است با :

$$\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲}u'\times\frac{۱}{u^{\frac{۱}{۲}}}\Rightarrow y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$$

نتیجه‌ی ۲: هرگاه $y=\sqrt[m]{u^n}$ آن‌گاه : $y'=\dfrac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

مثال ۸: مشتق تابع مقابل را محاسبه کنید :

$$y=\sqrt[۳]{(-۴x+۳)^۲}$$

حل: با استفاده از نتیجه‌ی ۲ مشتق تابع برابر است با :

$$y'=\frac{۲(-۴)}{۳\sqrt[۳]{(-۴x+۳)^{۳-۲}}}=\frac{-۸}{۳\sqrt[۳]{-۴x+۳}}$$

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$$f(x)=\sqrt{۲x+۵}\ \text{و}\ x=۲$$

حل: با استفاده از نتیجه‌ی ۲ مشتق تابع برابر است با :

$$y'=\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۲x+۵}}$$

ـ مقدار مشتق به ازای $x=۲$ برابر است با :

$$y'_{(۲)}=\frac{۱}{\sqrt{۲\times۲+۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۹}}=\frac{۱}{۳}$$

مثال ۱۰: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

$$f(x)=\sqrt[۵]{(۲x+۱)^۳}\ ،\ x=۰$$

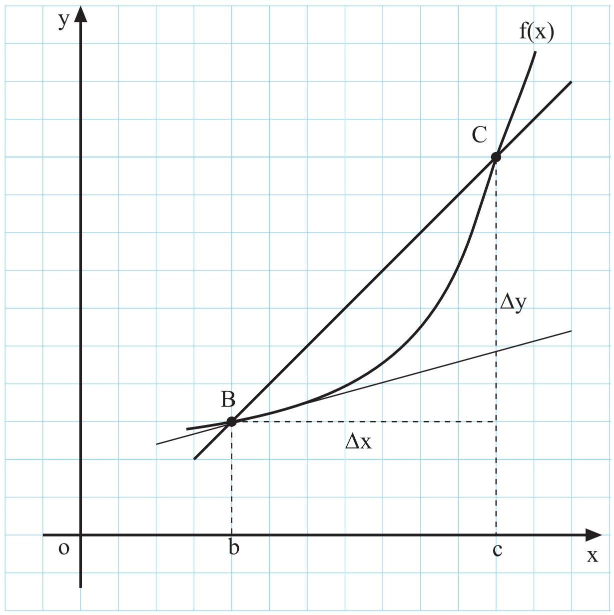
حل: با استفاده از نتیجه ۲ مشتق تابع برابر است با :

$$y'=\frac{۲\times۳}{۵\sqrt[۵]{(۲x+۱)^{۵-۳}}}=\frac{۶}{۵\sqrt[۵]{(۲x+۱)^۲}}$$

مقدار مشتق به ازای $x=۰$ برابر است با :

$$\Rightarrow y'_{(۰)}=\frac{۶}{۵\sqrt[۵]{(۰+۱)^۲}}=\frac{۶}{۵}$$

۳ــ۱ــ۴ــ تعبیر هندسی مشتق: نمودار ۱ــ۴ را مشاهده کنید : اگر $B(b,f(b))$ نقطه‌ای از منحنی باشد،



نمودار ۱ــ۴

ــ شیب خط مماس برابر است با :

$$m = f'(b) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x}$$

نتیجه: شیب خط مماس (ضریب زاویه) بر نمودار $y=f(x)$ که از نقطه‌ی $(b,f(b))$ می‌گذرد برابر مشتق تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=b$، یعنی :

$$m = f'(b)$$

مثال ۱: معادله‌ی خط مماس بر منحنی روبه‌رو را که از نقطه‌ی $A(-۱,۱)$ می‌گذرد بنویسید.

$$f(x) = -x^۲ + ۲$$

حل: شیب خط مماس بر منحنی تابع $f(x)$ در $x = ۱$ برابر است با :

$$f'(x) = -۲x \Rightarrow m = f'(-۱) = -۲(-۱) \Rightarrow m = ۲$$

ــ معادله‌ی خط مماس بر منحنی که از نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} x_۱ \\ y_۱ \end{matrix}\right.$ می‌گذرد برابر است با :

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \quad (/\ )$$

$A\begin{vmatrix}-۱\\۱\end{vmatrix}$ و $m=۲$ را در رابطه‌ی (*) قرار می‌دهیم :

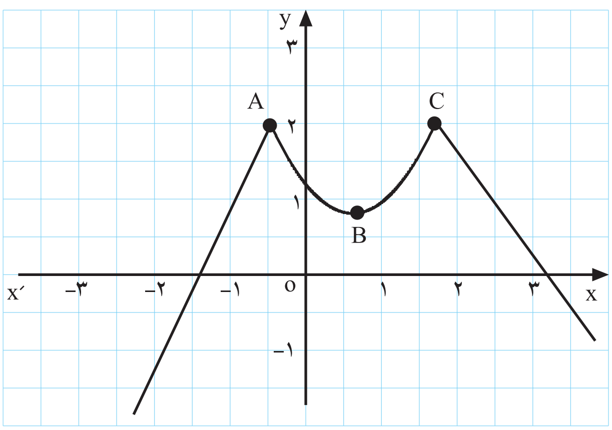
$$y-۱=۲(x+۱)\Rightarrow y=۲x+۲+۱\Rightarrow$$

ــ معادله‌ی خط مماس که از نقطه‌ی A می‌گذرد برابر است با :

$$\boxed{y=۲x+۳}$$

نکته: درنقاطی که مماس بر نمودار وجود نداشته باشد، تابع مشتق ندارد.

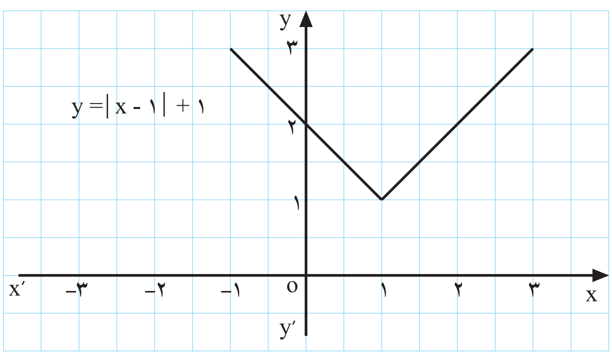
مثال ۲: در نقاط C و A در نمودار ۲ــ۴ مماس وجود ندارد، پس در این نقاط تابع f مشتق ندارد. ولی در نقطه‌ی B دارای مشتق است، زیرا می‌توان در نقطه‌ی B مماس بر منحنی رسم کرد.



نمودار ۲ــ۴

مثال ۳: با توجه به نمودار ۳ــ۴ آیا تابع مقابل در $x=+۱$ دارای مشتق است؟ چرا؟

حل: خیر، زیرا نمی‌توان در نقطه‌ی $x=۱$ مماس بر نمودار ۳ــ۴ رسم کرد.



نمودار ۳ــ۴

۴ــ۱ــ۴ــ قضیه‌های مشتق

قضیه‌ی ۱: اگر تابع f در x=a مشتق داشته باشد در این نقطه پیوسته است.

مثال ۱: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است این تابع در $x=۱$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر است با :

$$f(x)=x^۲-۳x$$

$$f'(x)=۲x-۳ \Rightarrow f'(۱)=-۱$$

ــ بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۱ تابع پیوسته است، زیرا :

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=f(۱)=-۲$$

قضیه‌ی ۲: (مشتق حاصل‌جمع دو تابع)

اگر u و v دو تابع برحسب x و مشتق‌پذیر باشند و $f(x)=u+v$ ، آن‌گاه $f'(x)=u'+v'$

مثال ۲: مشتق تابع مقابل را به دست آورید.

$$y=x^۲+x^۳$$

$x^۲$ و $x^۳$ دو تابع مشتق‌پذیرند، پس :

$$y'=۲x+۳x^۲$$

قضیه‌ی ۳: اگر u و v برحسب x،دارای مشتق باشند و $f=u \quad v$ آن‌گاه : $f'=u'v+v'u$

مثال ۳: مشتق تابع مقابل را به‌دست آورید.

$$f(x)=(-۶x^۲+۷x)(۳x^۴+\sqrt{x})$$

ــ با استفاده از قضیه‌ی ۳، مشتق f(x) برابر است با :

$$f'(x)=(-۱۲x+۷)(۳x^۴+\sqrt{x})+(۱۲x^۳+\frac{۱}{۲\sqrt{x}})(-۶x^۲+۷x)$$

تذکر: مشتق حاصل‌ضرب دو تابع به حاصل‌ضرب تعداد متناهی تابع قابل تعمیم است.

مثال ۴: مشتق تابع مقابل را به ازای $x=۲$ به دست آورید.

$$f(x)=(x-۲)(x-۵)(x+۶)$$

حل: مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x)=(x-۲)'(x-۵)(x+۶)+(x-۲)(x-۵)'(x+۶)+(x-۲)(x-۵)(x+۶)'$$

ــ پس از محاسبه‌ی مشتق هر پرانتز خواهیم داشت :

$$\Rightarrow f'(x)=(x-۵)(x+۶)+(x-۲)(x+۶)+(x-۲)(x-۵)$$

ــ به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow f'(۲)=(۲-۵)(۲+۶)+(۲-۲)(۲+۶)+(۲-۲)(۲-۵)$$

پس مشتق $f(x)$ به ازای $x=۲$ برابر است با :

$$f'(۲)=-۲۴$$

قضیه‌ی ۴: (مشتق حاصل تقسیم دو تابع)

اگر $u'(x)$ و $v'(x)$ وجود داشته باشد و $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ به شرط $v(x)\neq ۰$ آن‌گاه داریم :

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x).u(x)}{v^{۲}(x)}$$

مثال ۵: مشتق تابع مقابل را بنویسید.

$$y=\frac{-۷x+۵}{۳+۴x}$$

حل: با استفاده از قضیه‌ی ۴ داریم :

$$\Rightarrow y'=\frac{-۷(۳+۴x)-۴(-۷x+۵)}{(۳+۴x)^{۲}}$$

$$=\frac{-۲۱-۲۸x+۲۸x-۲۰}{(۳+۴x)^{۲}}$$

پس از ساده کردن، مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow y'=\frac{-۴۱}{(۳+۴x)^{۲}}$$

مثال ۶: مشتق تابع مقابل را به‌دست آورید.

$$f(x)=\frac{۵}{x^{۳}}$$

حل: طبق قضیه‌ی ۴ داریم :

$$f'(x)=\frac{۰\times x^{۳}-(۳x^{۲})\times ۵}{(x^{۳})^{۲}}=\frac{-۱۵x^{۲}}{x^{۶}}$$

ـ مشتق تابع برابر است با :

$$f(x) = -\frac{۱۵}{x^۴}$$

قضیه‌ی ۵: (مشتق ترکیب دو تابع)

اگر y تابعی برحسب u با ضابطه‌ی $y = f(u)$ و u نیز تابعی برحسب x با ضابطه‌ی $u = g(x)$ باشد، آن گاه y تابعی برحسب x با این ضابطه :

$$y = f(u) = f(g(x)) = (fog)(x)$$

می‌باشد. حال اگر $u = g(x)$ در x مشتق‌پذیر و تابع f در $u = g(x)$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه y نیز در x مشتق‌پذیر است و همچنین :

$$y' = (fog)'(x) = f'(g(x)).g'(x)$$

مثال ۷: تابع‌های u و y در مقابل مفروض‌اند. مشتق y را برحسب x (y'_x) به‌دست آورید.

$$y = -۲u^۳ \ , \ u = ۳x^۲ + ۵x$$

ـ با توجه به قضیه‌ی ۵ و رابطه‌ی y'_x خواهیم داشت :

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u) \Rightarrow y' = (۶x + ۵)(-۶u^۲)$$

ـ درعبارت مشتق، به جای u، مساوی آن را قرار می‌دهیم، پس :

$$y' = -۶(۶x + ۵)(۳x^۲ + ۵x)^۲$$

مثال ۸: تابع‌های u و y در مقابل مفروض‌اند ؛

$$y = ۳u^۲ + ۵u - ۳ \text{ و } u = \sqrt{۳x + ۱}$$

ابتدا y'_x را یافته، سپس مقدار $y'_{(۵)}$ را حساب کنید.

حل: با کاربرد قضیه‌ی ۵ مشتق تابع مرکب عبارت است از :

$$y = f(u) \Rightarrow y' = u'f'(u) \Rightarrow$$

$$y'_x = \left(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x + ۱}}\right)(۶u + ۵) \Rightarrow$$

ـ در مشتق تابع به جای u مقدار آن را قرار می‌دهیم :

$$y'_x = \left(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x + ۱}}\right)(۶\sqrt{۳x + ۱} + ۵) \Rightarrow$$

ـ برای محاسبه‌ی $y'_{(۵)}$ به جای x عدد ۵ را در مشتق قرار می‌دهیم.

$$y'_{(۵)} = \left(\frac{۳}{۲\sqrt{۳ \times ۵ + ۱}}\right)(۶\sqrt{۳ \times ۵ + ۱} + ۵)$$

ـ مشتق تابع در $x = ۵$ برابر است با :

$$\Rightarrow y'_{(۵)} = \left(\frac{۳}{۸}\right)(۲۹) \Rightarrow y'_{(۵)} = \frac{۸۷}{۸}$$

(مشتق توابع مثلثاتی)

الف) مشتق تابع سینوس

۱ــ اگر $y=\sin x$ آن‌گاه $y'=\cos x$

۲ــ اگر $y=\sin u$ (u برحسب x) آن‌گاه $y'=u'\cos u$

مثال‌های نمونه:

$$y=\sin x+۷x \rightarrow y'=\cos x+۷$$

$$y=۲\sin x+۳\sin(x^{۲}+x) \Rightarrow$$

$$y'=۲\cos x+۳(۲x+۱)\cos(x^{۲}+x)$$

ب) مشتق تابع کسینوس

۱ــ اگر $y=\cos x$ آن‌گاه $y'=\square\sin x$

۲ــ اگر $y=\cos u$ (u برحسب x) آن‌گاه $y'=\square u'\sin u$

$$y=\cos\sqrt{x} \Rightarrow y'=\square\frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$$

$$y=\cos ۲x \quad ۷\cos ۳x \rightarrow y'=\square ۲\sin ۲x+۲۱\sin ۳x$$

ج) مشتق تابع تانژانت

۱ــ اگر $y=\tan x$ آن‌گاه $y'=۱+\tan^{۲}x=\frac{۱}{\cos^{۲}x}$

۲ــ اگر $y=\tan u$ (u برحسب x) آن‌گاه

$$y'=u'(۱+\tan^{۲}u)=\frac{u'}{\cos^{۲}u}$$

$$y=(۳x+۵)\tan x \Rightarrow y'=۳\tan x+(۳x+۵)(۱+\tan^{۲}x)$$

$$y=\tan ۴x \rightarrow y'=۴(۱+\tan^{۲}۴x)=\frac{۴}{\cos^{۲}۴x}$$

د) مشتق تابع کتانژانت

۱ــ اگر $y=\cot x$ آن‌گاه

$$y'=\square(۱+\cot^{۲}x)=\frac{۱}{\sin^{۲}x}$$

۲ــ اگر $y=\cot u$ آن‌گاه

$$y'=\square u'(۱+\cot^{۲}u)=\frac{u'}{\sin^{۲}u}$$

$$y=\cot^{۳}x \Rightarrow y'=\square ۳(۱+\cot^{۲}x)\cot^{۲}x$$

$$y=\cot ۷x \Rightarrow y'=\square ۷(۱+\cot^{۲}۷x)=\frac{۷}{\sin^{۲}۷x}$$

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$$f(x)=۵x^{۲}\quad ۳\sin ۲x \ ، \ x=\frac{\pi}{۴}$$

حل: مشتق تابع را به ازای $x=\frac{\pi}{۴}$ حساب می‌کنیم.

$$f'(x)=۱۰x\quad ۶\cos ۲x \Rightarrow f'(\frac{\pi}{۴})=۱۰(\frac{\pi}{۴})\quad ۶\cos ۲(\frac{\pi}{۴})$$

ـ در $x=\frac{\pi}{۴}$ ، مشتق برابر است با :

$$\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۴})=\frac{۵\pi}{۲}\quad ۶\overset{۰}{\cancel{\cos}}\frac{\pi}{۲}=\frac{۵\pi}{۲}$$

مثال ۱۰: مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

$$f(x)=\sin ۳x.\cos ۲x \ ، \ x=\frac{\pi}{۶}$$

حل: مشتق حاصل‌ضرب دو تابع برابر است با :

$$f'(x)=۳\cos ۳x\cos ۲x\quad ۲\sin ۲x.\sin ۳x \Rightarrow$$

ـ به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ ، مشتق برابر است با :

$$f'(\frac{\pi}{۶})=۳\cos\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۳}\quad ۲\sin\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۲}\Rightarrow$$

ـ پس از ساده کردن مشتق به‌دست می‌آید.

$$f'(\frac{\pi}{۶})=۳(۰)\overset{۰}{\cancel{(\frac{۱}{۲})}}\quad ۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times ۱=\square\sqrt{۳}$$

مثال ۱۱: مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده به‌دست آورید.

$$f(x)=x\sqrt{۲x} \text{ و } x=\frac{۹}{۲}$$

حل: مشتق حاصل‌ضرب دو تابع برابر است.

$$f'(x)=۱\times\sqrt{۲x}+\frac{۲}{۲\sqrt{۲x}}\times x=\sqrt{۲x}+\frac{x}{\sqrt{۲x}}$$

ـ به ازای $x=\frac{۹}{۲}$ مقدار مشتق برابراست با :

$$\Rightarrow f'(\frac{۹}{۲})=\sqrt{۹}+\frac{\frac{۹}{۲}}{\sqrt{۹}}=۳+\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۲}$$

مثال ۱۲: مشتق تابع مقابل را به ازای نقطه‌ی داده شده به‌دست آورید.

$$f(x)=۲x+\cot\frac{x}{۲} \text{ و } x=\pi$$

حل: مشتق جمع دو تابع برابر جمع مشتق‌های آن دو تابع است ؛ در نتیجه داریم :

$$f'(x)=۲\quad\frac{۱}{۲}(۱+\cot^{۲}\frac{x}{۲})\Rightarrow f'(\pi)=۲\quad\frac{۱}{۲}(۱+\cot^{۲}\frac{\pi}{۲})$$

ـ به ازای $x=\pi$ مقدار مشتق برابر است با :

ـ پس از ساده کردن $f'(\pi)$ به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow f'(\pi)=۲\quad\frac{۱}{۲}(۱+۰)=۲\quad\frac{۱}{۲}=\frac{۴\quad ۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f'(\pi)=\frac{۳}{۲}$$

مثال ۱۳: مشتق تابع مقابل را به‌ازای عدد داده شده محاسبه کنید.

$$f(x)=\frac{۳}{۵x-۱} \text{ و } x=۱$$

ــ با استفاده از مشتق کسر به ازای $x=۱$ مشتق را به‌دست می‌آوریم :

$$f'(x)=\frac{۰\times(۵x-۱)-۵\times۳}{(۵x-۱)^۲}=\frac{-۱۵}{(۵x-۱)^۲}\Rightarrow$$

$$f'(۱)=\frac{-۱۵}{۱۶}$$

مثال ۱۴: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده محاسبه کنید.

$$f(t)=\frac{۲t-۴}{۵-۴t} \text{ ، } t=۴$$

ــ مشتق تابع کسری برابر است با :

$$f'(t)=\frac{۲(۵-۴t)-(-۴)(۲t-۴)}{(۵-۴t)^۲}=\frac{۱۰-۸t+۸t-۱۶}{(۵-۴t)^۲}$$

ــ به ازای $t=۴$ ، مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{-۶}{(۵-۴t)^۲}\Rightarrow f'(۴)=\frac{-۶}{۱۲۱}$$

مثال ۱۵: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده محاسبه کنید.

$$y=\sqrt{۴+\sin ۲x} \text{ و } x=۰$$

حل: مشتق تابع به ازای $x=۰$ برابر است با :

$$y'=\frac{\cancel{۲}\cos ۲x}{\cancel{۲}\sqrt{۴+\sin ۲x}}\Rightarrow y'_{(۰)}=\frac{\cos(۰)}{\sqrt{۴+\sin(۰)}}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۱۶: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده محاسبه کنید.

$$f(0)=\sin^۳+\square\cos^۷ 0 \text{ ، } =\square\frac{\pi}{۲}$$

حل: مشتق برابر است با :

$$f'(0)=۳\cos 0\sin^۲-\square ۷\sin 0\cos^۶ 0$$

ــ به ازای $\square=\frac{\pi}{۲}$ ، مقدار مشتق به‌دست می‌آید.

$$f'(\frac{\pi}{۲})=۳\cos\frac{\pi}{۲}\sin^۲\overset{۰}{\cancel{\frac{\pi}{۲}}}-۷\sin\overset{۰}{\cancel{\frac{\pi}{۲}}}\cos^۶\frac{\pi}{۲}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۲})=۰$$

مثال ۱۷: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده حساب کنید.

$$f(x)=(x^۲+\cos x)(-۳x+۴) \text{ ، } x=۰$$

حل: مشتق تابع حاصل ضرب برابر است با :

$$f'(x)=(2x-\sin x)(-3x+4)-3(x^2+\cos x)$$

ــ به ازای $x=0$ مقدار مشتق به‌دست می‌آید.

$$f'(0)=(2(0)-\sin(0))(-3(0)+4)-3(0^2+\cos(0))$$

$$\Rightarrow f'(0)=0-3\Rightarrow f'(0)=-3$$

۵ــ۱ــ۴ــ مشتق دوم یک تابع:

با تکرار عمل مشتق‌گیری در صورت وجود مشتق می‌توان از مشتق تابع دوباره مشتق گرفت که به آن مشتق مرتبه‌ی دوم تابع می‌گوییم و آن را به صورت y'' یا $f''(x)$ نمایش می‌دهیم.

مثال:

$$f(x)=3x^5-6x^2+11$$

$$f'(x)=15x^4-12x$$

$$f''(x)=60x^3-12$$

نکته: اگر تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ روی بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد، اگر تابع f' روی I مشتق‌پذیر باشد آنگاه می‌گوییم تابع f روی I مشتق دوم دارد و مشتق دوم y را با $f''(x)$ نمایش می‌دهیم و به همین ترتیب مشتق مرتبه‌ی سوم را با $f'''(x)$ یا $f^{(3)}(x)$ و … و مشتق مرتبه‌ی nام را با $f^{(n)}(x)$ نمایش می‌دهیم.

$$f^{(3)}(x)=180x^2 \text{ و } f^{(4)}(x)=360x$$

$$f^{(5)}(x)=360 \text{ و } f^{(6)}(x)=0$$

مثال ۱: در تابع روبه‌رو $f''(x)$ را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$$f(x)=-3x^3+5x^2 \text{ و } x=-2$$

ــ از مشتق اول دوباره مشتق می‌گیریم :

$$f'(x)=-9x^2+10x\Rightarrow f''(x)=-18x+10$$

ــ به ازای $x=-2$ مشتق دوم تابع برابر است با :

$$f''(-2)=-18(-2)+10\Rightarrow f''(-2)=46$$

مثال ۲: در تابع مقابل $f''(x)$ را در نقطه‌ی داده شده به‌دست آورید.

$$f(x)=\sin x+\cos x \quad x=\frac{\pi}{4}$$

ــ از مشتق اول دوباره مشتق می‌گیریم :

$$f'(x)=\cos x-\sin x\Rightarrow f''(x)=-\sin x-\cos x$$

ــ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ مشتق دوم تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f''(\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ــ پس از ساده کردن داریم :

$$\Rightarrow f''(\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$$

مثال ۳: تابع مقابل مفروض است، هرگاه $y''_{(2)}=9$ باشد

$$y=\frac{1}{3}x^3-5Bx^2+3x$$

مقدار B را محاسبه کنید.

حل: مشتق اول و دوم تابع را پیدا می‌کنیم :

$$y' = x^۲ - ۱۰Bx + ۳ \Rightarrow y'' = ۲x - ۱۰B$$

ــ مشتق را برابر عدد داده شده قرار می‌دهیم، B به‌دست می‌آید.

$$۹ = ۲(۲) - ۱۰B \Rightarrow ۱۰B = ۴ - ۹ \Rightarrow B = \frac{-۵}{۱۰} = \frac{-۱}{۲}$$

مثال ۴: تابع‌های f و g مفروض‌اند :

$$f(x) = x^{\frac{۴}{۳}} \text{ و } g(x) = x\sqrt{x}$$

نشان دهید بین مشتق‌های دوم آن‌ها رابطه‌ی روبه‌رو برقرار است :

$$f''(۸) + g''(۴) = \frac{۳۵}{۷۲}$$

حل: مشتق اول تابع با ضابطه f(x) برابر است با :

$$f(x) = x^{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۴}{۳}-۱} = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}$$

ــ برای محاسبه‌ی $f''(x)$ از $f'(x)$ مشتق می‌گیریم :

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{۴}{۳}(\frac{۱}{۳})x^{\frac{۱}{۳}-۱} = \frac{۴}{۹}x^{-\frac{۲}{۳}} = \frac{۴}{۹x^{\frac{۲}{۳}}}$$

ــ به ازای $x = ۸$ مقدار $f''(x)$ برابر است با :

$$f''(x) = \frac{۴}{۹\sqrt[۳]{x^۲}} \Rightarrow f''(۸) = \frac{۴}{۹\sqrt[۳]{۸^۲}} = \frac{۱}{۹}$$

ــ مشتق اول g(x) برابر است با :

$$g'(x) = ۱ \times \sqrt{x} + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times x \Rightarrow g'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{۲\sqrt{x}}$$

ــ برای محاسبه‌ی $g''(x)$ از $g'(x)$ مشتق می‌گیریم :

$$g''(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{۱ \times (۲\sqrt{x}) - x(۲ \times \frac{۱}{۲\sqrt{x}})}{(۲\sqrt{x})^۲}$$

ــ مشتق دوم g(x) برابر است با :

$$\Rightarrow g''(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{\frac{۲x - x}{\sqrt{x}}}{۴x} = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{۱}{۴\sqrt{x}}$$

ــ به ازای $x = ۴$ مشتق دوم g(x) برابر است با :

$$\Rightarrow g''(۴) = \frac{۱}{۲\sqrt{۴}} + \frac{۱}{۴\sqrt{۴}} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} = \frac{۲+۱}{۸}$$

$$\Rightarrow g''(۴) = \frac{۳}{۸}$$

ــ با مقایسه‌ی مقادیر مشتق دوم نتیجه می‌گیریم که رابطه برقرار است.

$$f''(۸) + g''(۴) = \frac{۱}{۹} + \frac{۳}{۸} = \frac{۸ + ۲۷}{۷۲} = \frac{۳۵}{۷۲}$$

آزمون پایانی (۱)

۱ــ مشتق تابع‌های زیر را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

۱) $f(x)=۵-۳x$

۲) $f(x)=x^{۲}-۷x$

۲ــ با استفاده از تعریف مشتق، ثابت کنید تابع $f(x)=|x-۲|$ در نقطه‌ی $x=۲$ مشتق ندارد.

۳ــ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $y=\sqrt[۳]{(۲x^{۲}+۳x)^{۲}}$

۲) $y=(۳x^{۲}+۵x)^{۶}$

۳) $y=(-۶\sin ۲x+\cos ۳x)^{۴}$

۴) $y=\dfrac{۱-۷x}{۳x+۴}$

۴ــ مشتق دوم توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y=۳\sqrt{۵x+۱}+۷x^{۲}$

ب) $y=۲\cos ۳x$

ج) $y=\dfrac{۳}{x}$

د) $y=(۳x^{۲}-۵x)^{۳}$

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۱)

بخش چهارم

فصل دوم

کاربرد مشتق (۱)

هدف کلی

استفاده از مشتق تابع برای رسم خط مماس و قائم در یک نقطه از نمودار تابع، تعیین نزولی یا صعودی بودن یک تابع و به دست آوردن نقطه‌های ماکزیمم یا مینیمم یک تابع.

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ معادله‌ی خط مماس در یک نقطه از نمودار یک تابع را بنویسد ؛

۲ــ معادله‌ی خط عمود بر یک منحنی را در نقطه‌ای واقع بر آن بنویسد ؛

۳ــ با استفاده از مشتق، صعودی یا نزولی بودن تابع را مشخص کند ؛

۴ــ جدول تغییرات تابع را تعیین کند ؛

۵ــ نقطه‌های ماکسیمم یا مینیمم یک تابع را مشخص کند.

پیش آزمون (۲)

۱ــ تابع $f(x)=-2x^2+4x+1$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده است.

الف) $f(2)$ را حساب کنید.

ب) اگر شیب خط مماس D که از نقطه‌ی به طول $x=2$ می‌گذرد برابر $f'(2)$ باشد مقدار آن را بیابید.

ج) معادله‌ی خط مماس (D) را که از نقطه‌ی به طول $x=2$ می‌گذرد بنویسید.

د) نمودار منحنی $f(x)=-2x^2+4x+1$ و خط D را رسم کنید.

۲ــ مشتق تابع $f(x)=-3x^2+3x+1$ را در $\mathbb{R}$ تعیین علامت کنید.

۳ــ ماکسیمم مقدار تابع با ضابطه $f(x)=6-2x^2$ را به‌دست آورید.

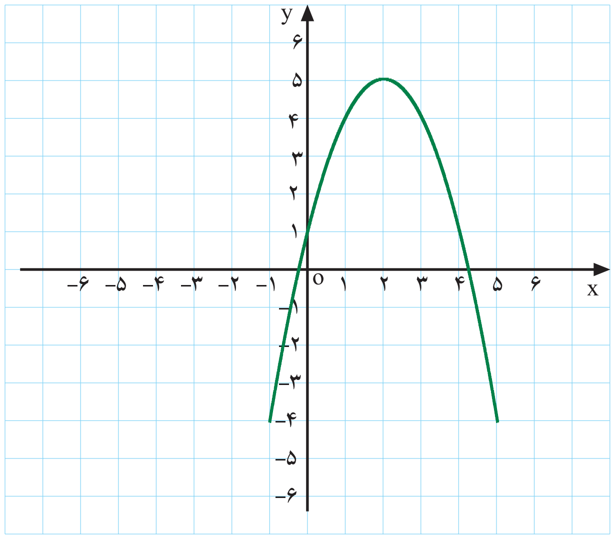
محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون (۲)

۲ــ۴ــ کاربردهای مشتق (۱)

۱ــ۲ــ۴ــ شیب خط مماس و عمود بر یک منحنی (ضریب زاویه)

فعالیت ۱ــ۴

نمودار منحنی $f(x)=-x^{2}+4x+1$ را در شکل ۴ــ۴ مشاهده می‌کنید.



نمودار ۴ــ۴

الف) مقدار $f(2)$ را حساب کنید.

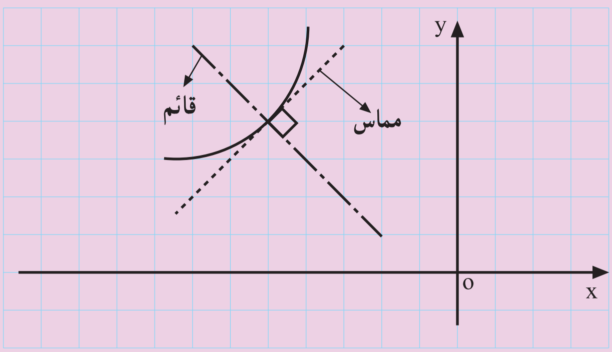
ب) مشتق f را به‌دست آورید.

ج) $f'(2)$ را حساب کنید.

د) آیا می‌توان گفت $f'(2)$ برابر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی $x=2$ است؟

پاسخ:

نتیجه: ضریب زاویه‌ی خط مماس بر منحنی تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ در نقطه‌ی به طول $x=a$ عبارت است از مشتق تابع در آن نقطه ؛ به بیان دیگر : (m ضریب زاویه است) $f'(a)=m=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$



نمودار ۵ــ۴

ضریب زاویه‌ی خط عمودی که از نقطه‌ی به طول $x=a$ می‌گذرد برابر است با : (m' ضریب زاویه‌ی عمود)

$$m'=\frac{-1}{f'(a)} \text{ یا } m'=\frac{-1}{m}$$

(m' ضریب زاویه‌ی عمود است.)

مثال : ضریب زاویه‌ی خط مماس و عمود بر منحنی تابع مقابل در نقطه‌ی داده شده را حساب کنید.

$$y=-۳x^{۲}+۵x+۷ \;,\; x=۱$$

حل: به ازای $x=۱$ ضریب زاویه‌ی خط مماس برابر است با :

$$y'=-۶x+۵ \Rightarrow m=y'(۱)=-۶(۱)+۵ \Rightarrow m=-۱$$

ـ ضریب زاویه‌ی خط عمود برابر است با :

$$m'=\frac{-۱}{m} \Rightarrow m'=\frac{-۱}{-۱} \Rightarrow m'=۱$$

مثال: ضریب زاویه‌ی خط مماس و عمود بر منحنی تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

$$y=\sqrt{۵x^{۳}+۳x+۴} \;,\; x=۰$$

حل: ضریب زاویه‌ی خط مماس و خط عمود در نقطه‌ی $x=۰$ برابر است با :

$$y'=\frac{۱۵x^{۲}+۳}{۲\sqrt{۵x^{۳}+۳x+۴}} \Rightarrow m=y'(۰)=\frac{۳}{۴} \quad \text{و}$$

$$m'=\frac{-۱}{m}=\frac{-۴}{۳}$$

تمرین: ضریب زاویه‌ی خط مماس بر منحنی تابع‌های زیر را در نقطه‌های داده شده به‌دست آورید.

۱) $f(x)=۳+۵\sin ۲x \;,\; x=\pi$

۲) $f(x)=-۳x^{۲}+۵x+۷ \;,\; x=۲$

۳) $g(x)=\frac{-۳x}{۲x+۴} \;,\; x=۱$

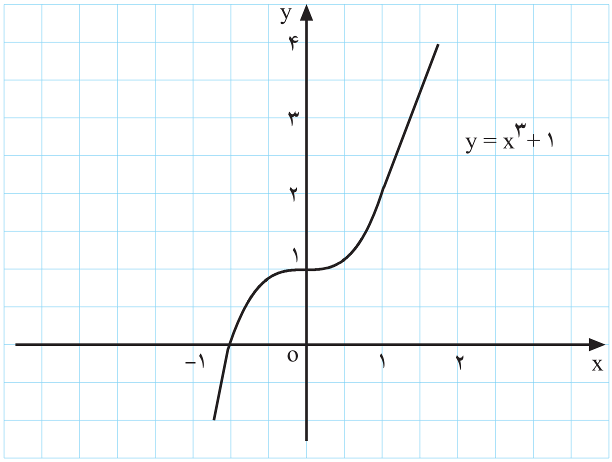
۴) $z(t)=\frac{۵}{t} \;,\; t=۳$

۵) $f(x)=\sqrt{۲x+۵} \;,\; x=۲$

۲ــ۲ــ۴ــ تعیین معادله‌ی خط مماس و خط عمود

فعالیت ۲ــ۴

تابع $f(x)=x^{۳}+۱$ و منحنی آن نمودار ۶ــ۴ رسم شده است.



نمودار ۶ــ۴

الف) مقدار $f(۲)$ را حساب کنید.

ب) مشتق f را به دست آورید.

ج) مقدار $f'(۲)$ را حساب کنید.

محل پاسخ:

$f(۲)=$

$f'(x)=$

$f'(۲)=$

د) آیا می‌توان گفت معادله‌ی روبه‌رو معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی $x=۲$ است؟ بلی : ☐ خیر : ☐

$$y-f(۲)=f'(۲)(x-۲)$$

هـ) آیا معادله‌ی مقابل معادله‌ی خط عمود است؟ بلی : ☐ خیر : ☐

$$y-f(۲)=\frac{-۱}{f'(۲)}(x-۲)$$

نتیجه: هرگاه $A(a,f(a))$ روی منحنی $y=f(x)$ واقع باشد. معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=a$ برابر است با :

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

همچنین، معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=a$ برابر با :

$$y-f(a)=\frac{-۱}{f'(a)}(x-a)$$

می‌دانیم که ضریب زاویه‌ی خط مماس برابر است با :

$$m=f'(a)$$

ــ ضریب زاویه‌ی خط عمود نیز برابر است با :

$$m'=\frac{-۱}{f'(a)}$$

مثال ۲: معادله‌ی خط مماس و خط عمود بر منحنی تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده بنویسید :

$$f(x) = -x^{۲} + ۳x \ , \ x = ۲$$

حل: $f(۲)$ در نقطه‌ی داده شده برابر است با :

$$f(۲) = -(۲)^{۲} + ۳(۲) = ۲$$

ــ از تابع مشتق می‌گیریم :

$$f'(x) = -۲x + ۳$$

ــ با قرار دادن x نقطه در مشتق، ضریب زاویه به‌دست می‌آید.

$$m = f'(۲) = -۲(۲) + ۳ = -۱$$

ــ مقدار $f(۲)$ و $f'(۲)$ را در معادله‌ی خط قرار می‌دهیم :

$$y - f(۲) = f'(۲)(x - ۲) \Rightarrow y - ۲ = -۱(x - ۲)$$

ــ در نتیجه معادله‌ی خط مماس برابر است با :

$$\Rightarrow y = -x + ۴$$

ــ ضریب زاویه‌ی خط مماس را عکس قرینه می‌کنیم و آن را ضریب زاویه‌ی خط عمود بر منحنی قرار می‌دهیم و معادله‌ی خط عمود را به دست می‌آوریم.

$$y - f(۲) = -\frac{۱}{f'(۲)}(x - ۲) \Rightarrow y - ۲ = \frac{-۱}{-۱}(x - ۲)$$

$$\Rightarrow y = x$$

مثال ۳: معادله‌ی خط مماس بر منحنی مقابل را در نقطه‌ی داده شده بنویسید.

$$y = -۲\sin ۲x \ \text{و} \ x = \frac{\pi}{۶}$$

حل: مقدار y به ازای $x = \frac{\pi}{۶}$ برابر است با :

$$f(\frac{\pi}{۶}) = -۲\sin ۲(\frac{\pi}{۶}) = -\sqrt{۳}$$

ــ y' را به ازای $x = \frac{\pi}{۶}$ محاسبه کرده و آن را برابر ضریب زاویه‌ی خط قرار می‌دهیم :

$$y' = -۴\cos ۲x \Rightarrow m = f'(\frac{\pi}{۶}) = -۴\cos\frac{\pi}{۳} = -۲$$

ــ معادله‌ی خط مماس برابر است با :

$$y - f(\frac{\pi}{۶}) = f'(\frac{\pi}{۶})(x - \frac{\pi}{۶})$$

ــ پس از ساده‌کردن خواهیم داشت :

$$y + \sqrt{۳} = -۲(x - \frac{\pi}{۶}) \Rightarrow y = -۲x + \frac{\pi}{۳} - \sqrt{۳}$$

مثال ۴: معادله‌ی خط عمود بر منحنی تابع f را در نقطه‌ی داده شده بنویسید.

$$f(x)=\tan x \quad \text{و} \quad x=\frac{\pi}{۴}$$

حل: به ازای x نقطه y نقطه برابر است با :

$$f(\frac{\pi}{۴})=\tan(\frac{\pi}{۴})=۱$$

ـ از تابع مشتق می‌گیریم

$$f'(x)=۱+\tan^{۲} x$$

ـ ضریب زاویه‌ی خط مماس به ازای x نقطه در رابطه‌ی مشتق برابر است با :

$$f'(\frac{\pi}{۴})=۱+\tan^{۲}(\frac{\pi}{۴})=۱+۱=۲$$

ـ معادله‌ی خط عمود بر منحنی برابر است با :

$$y-y_{۱}=\frac{-۱}{f'(\frac{\pi}{۴})}(x-x_{۱})\Rightarrow$$

ـ به ازای مختصات نقطه، معادله‌ی خط به‌دست می‌آید.

$$y-۱=\frac{-۱}{۲}(x-\frac{\pi}{۴})\Rightarrow y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{\pi}{۸}+۱$$

تمرین

معادله‌ی خط مماس و خط عمود بر منحنی تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی $x=۰$ و $x=۱$ به‌طور جداگانه بنویسید.

$$f(x)=x^{۳}+۵x-۴$$

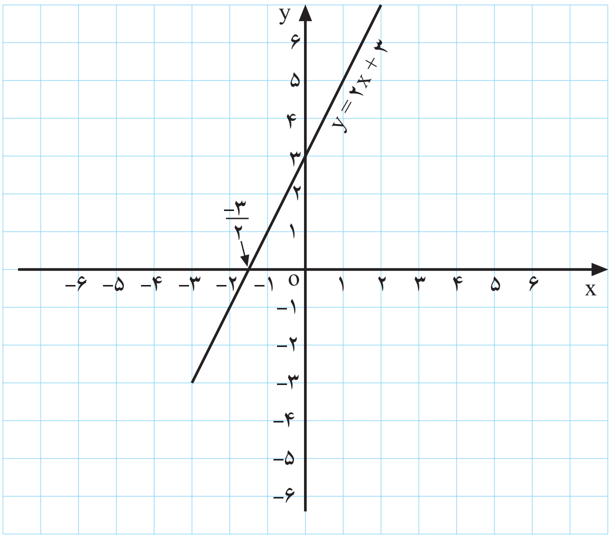
شرح عملیات :

۳ــ۲ــ۴ــ مشتق و رفتار تابع

فعالیت ۳ــ۴

خط $y=۲x+۳$ و نمودار آن ۷ــ۴ را مشاهده می‌کنید.

الف) به ازای $x_۱=-\frac{۳}{۲}$ و $x_۲=۰$ ، $f(x_۱)$ و $f(x_۲)$ را حساب کنید.



نمودار ۷ــ۴

ب) آیا نتیجه‌ی روبه‌رو درست است؟

بلی : ☐   خیر : ☐ $\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}>۰$

ج) با توجه به $D_f=\mathbb{R}$ به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به دامنه، آیا می‌توان نتیجه‌ی مقابل را گرفت؟

$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$

ــ از طرفی y' همواره مثبت است.

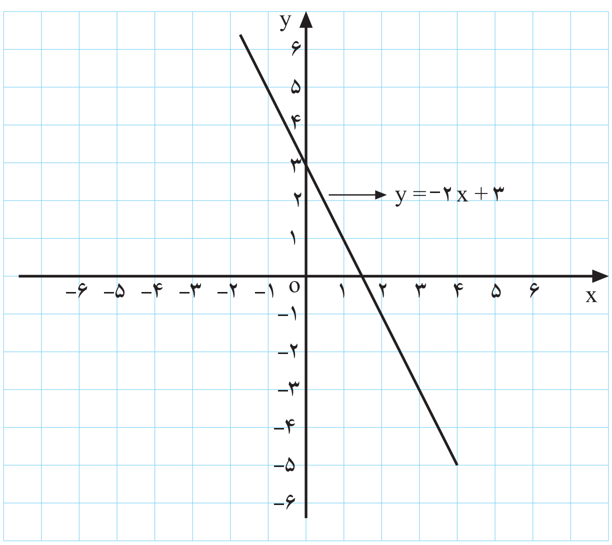
$y'=۲>۰$

> اگر تابع $y=f(x)$ بر (a,b) تعریف شده باشد و بر این بازه $y'>۰$ $(y'<۰)$ آنگاه y بر (a,b) صعودی (نزولی) است.

مثال: هرگاه $y=-۲x+۳$ ، به ازای هر مقدار x از دامنه‌ی تابع $y'=-۲<۰$ باشد می‌گوییم تابع y نزولی است ؛ به بیان دیگر :

$$x_۱<x_۲ \Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$$

نمودار خط $y=-۲x+۳$ را در مقابل مشاهده می‌کنید.



نمودار ۸ــ۴

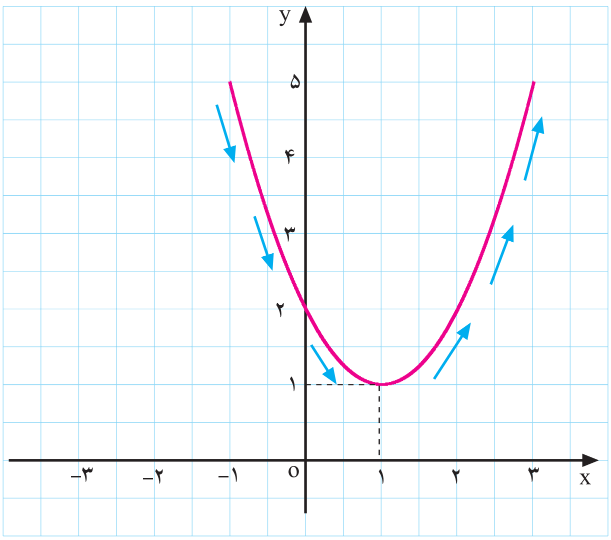
فعالیت ۴ـ۴

منحنی $y=x^{۲}-۲x+۲$ را در نمودار ۹ـ۴ مشاهده می‌کنید.

الف) آیا ریشه‌ی مشتق تابع y، یعنی $y'=۲x-۲$ برابر $x=۱$ است؟ بلی : □ خیر : □

ب) به ازای $x<۱$، علامت y' را مشخص کنید. آیا می‌توان گفت در فاصله‌ی $x\in(-\infty,۱)$ تابع نزولی است.

ج) به ازای $x>۱$، علامت y' را مشخص کنید. آیا تابع در فاصله‌ی $x\in(۱,+\infty)$ صعودی است؟



نمودار ۹ـ۴

د) با توجه به موارد بالا، جدول ۱ـ۴ را تکمیل کنید.

هـ) با توجه به نمودار ۹ـ۴ و جدول ۱ـ۴ نقطه‌ی مینیمم تابع $y=x^{۲}-۲x+۲$ چه نقطه‌ای است؟

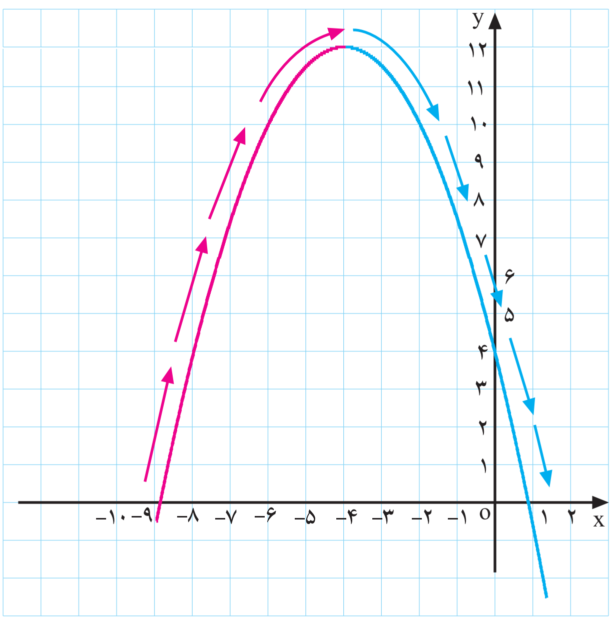
جدول ۱ـ۴

x	$-\infty$	$x<۱$	۱	$x>۱$	$+\infty$
$y'=۲x-۲$		□	۰	□	
y	$+\infty$	↘	□	↗	$+\infty$

فعالیت ۵ـ۴

الف) با توجه به منحنی $y=\frac{-۱}{۲}x^{۲}-۴x+۴$ و جدول ۲ـ۴ منحنی این تابع را رسم کنید (نمودار ۱۰ـ۴).

ب) نقطه‌ی ماکزیمم تابع و علامت y' را روی دامنه‌اش مشخص کنید.

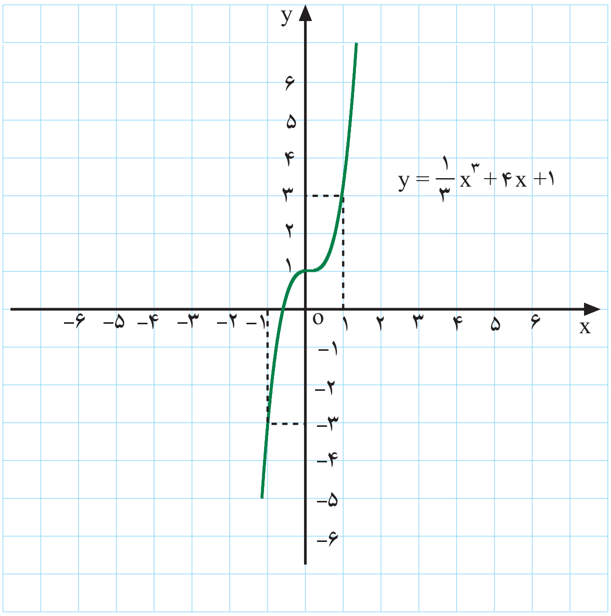


نمودار ۱۰ـ۴

جدول ۲ـ۴

x	$-\infty$	$x<-۴$	-۴	$x>-۴$	$+\infty$
$y'=-x-۴$			۰		
	$-\infty$	↗	۱۲	↘	$-\infty$

قضیه‌ی ۱: فرض کنید تابع f بر بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد و برای هر نقطه‌ی x متعلق به I داشته باشیم $f'(x) \geq 0$، در این صورت تابع f بر I صعودی است.



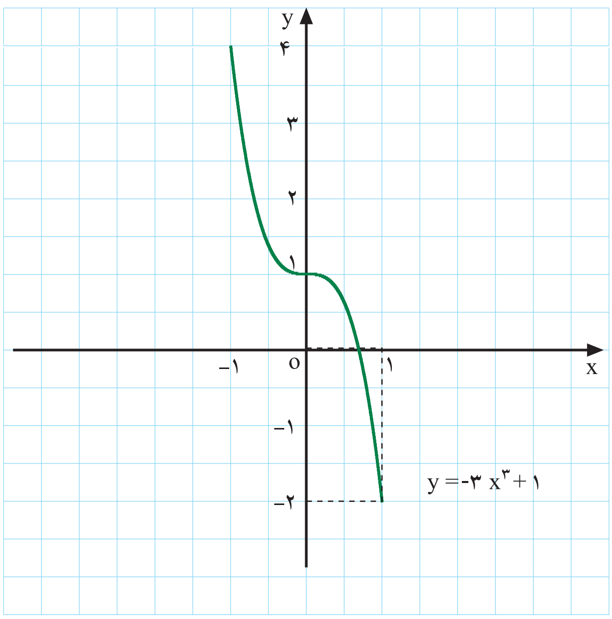
نمودار ۱۱ــ۴ــ یک تابع صعودی

مثال ۱: منحنی تابع $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 1$ را مشاهده می‌کنید (نمودار ۱۱ــ۴).

ــ مشتق این تابع همواره صعودی است، زیرا

$y' = x^2 + 4 > 0$

قضیه‌ی ۲: اگر تابع f بر بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد و برای هر نقطه‌ی x متعلق به I داشته باشیم $f'(x) \leq 0$، آنگاه تابع f بر I نزولی است.



نمودار ۱۲ــ۴ ــ یک تابع نزولی

مثال ۲: تابع $y = -3x^3 + 1$ مفروض است. چون، $y' = -9x^2 \leq 0$ بنابراین تابع نزولی است (نمودار ۱۲ــ۴).

تعریف: تابع f را بر بازه‌ی I یکنوا گوییم در صورتی که f بر I صعودی یا نزولی باشد.

مثال ۳: رفتار تابع روبه‌رو را به‌دست آورید.

$$y=۴x-۱۰۵\ ,\ x\in(-\infty,+\infty)$$

حل: مشتق تابع برابر است با :

$$y'=۴>۰\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

بنابراین تابع $y=۴x-۱۰۵$ بر $\mathbb{R}$ صعودی است.

مثال ۴: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y=\frac{۳x+۱}{۲x-۱},\ x\in(\frac{۱}{۲},+\infty)$$

حل: مشتق تابع y را حساب می‌کنیم.

$$y'=\frac{۳(۲x-۱)-۲(۳x+۱)}{(۲x-۱)^۲}=\frac{۶x-۳-۶x-۲}{(۲x-۱)^۲}\Rightarrow$$

ــ با توجه به علامت y'، تابع روی $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ نزولی است.

$$y'=\frac{-۵}{(۲x-۱)^۲}<۰$$

مثال ۵: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y=\tan x-x\ ,\ x\in(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$$

حل : با توجه به مشتق تابع، روی بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲})$ صعودی است.

$$y'=\cancel{۱}+\tan^۲ x-\cancel{۱}\Rightarrow y'=\tan^۲ x\geq ۰$$

مثال ۶: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y=\cot ۳x-۵x\ ,\ x\in(\frac{\pi}{۳}\ و\ \frac{۲\pi}{۳})$$

حل : با توجه به علامت y'، تابع روی $(\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۲\pi}{۳})$ نزولی است.

$$y'=-۳(۱+\cot^۲ ۳x)-۵\Rightarrow y'=-۸-۳\cot^۲ ۳x<۰$$

مثال ۷: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y=\frac{-۱}{۳}x^۳-۵x+۱۱$$

حل: با توجه به علامت y'، تابع نزولی است.

$$y'=-x^۲-۵<۰$$

مثال ۸: تابع y مفروض است. حدود b را چنان محاسبه کنید که تابع همواره در بازه‌ی $(-\infty,\frac{۵}{۳})$ در بازه‌ی نزولی باشد.

$$y=\frac{۲x+b}{۳x-۵}$$

حل: مشتق تابع (y') را به دست می‌آوریم :

$$y'=\frac{۲(۳x-۵)-۳(۲x+b)}{(۳x-۵)^۲}=\frac{۶x-۱۰-۶x-۳b}{(۳x-۵)^۲}$$

چون می‌خواهیم تابع همواره نزولی باشد باید $y' \leq ۰$:

ــ حدود b برابر است با :

$$\Rightarrow y' = \frac{-۱۰-۳b}{(۳x-۵)^۲} \leq ۰ \Rightarrow -۱۰-۳b \leq ۰ \Rightarrow$$

$$-۳b \leq ۱۰ \Rightarrow b \geq -\frac{۱۰}{۳}$$

مثال ۹: رفتار تابع f را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} ۳x^۳ + ۵x & x < ۰ \\ -۵x + ۴ & x > ۰ \end{cases}$$

حل: مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x) = \begin{cases} ۹x^۲ + ۵ & x < ۰ \\ -۵ & x > ۰ \end{cases}$$

ــ به ازای $x < ۰$ تابع همواره صعودی است، زیرا :

$$f'(x) = ۹x^۲ + ۵ > ۰$$

ــ به ازای $x > ۰$ تابع همواره نزولی است، زیرا :

$$f'(x) = -۵ < ۰$$

مثال ۱۰: ثابت کنید تابع مقابل بر دامنه‌اش یکنواست.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۴x & x > ۱ \\ ۱ + ۲x & x < ۱ \end{cases}$$

حل: مشتق تابع f برابر است با :

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x + ۴ & x > ۱ \\ ۲ & x < ۱ \end{cases}$$

ــ به ازای $x > ۱$ ، تابع f صعودی است، زیرا :

$$f'(x) = ۲x + ۴ > ۰ \quad , \quad x > ۱$$

ــ به ازای $x < ۱$ تابع f صعودی است، زیرا :

$$f'(x) = ۲ > ۰ \qquad x < ۱$$

ــ با توجه به مقادیر مشتق، تابع f یکنواست.

$$\Rightarrow f'(x) > ۰ \quad x \in \mathbb{R} - \{۱\}$$

تمرین

۱ــ رفتار تابع‌های زیر را بررسی کنید (صعودی یا نزولی بودن)

$$۱)\ y=(۲x-۳)^{۲}$$

$$۲)\ y=\frac{-۲x}{۴x+۵}$$

$$۳)\ y=۵\tan ۳x+۴x^{۳}$$

۲ــ تابع مقابل مفروض است. حدود m را در بازهٔ $(-\frac{۲}{۵},+\infty)$ چنان بیابید که این تابع همواره نزولی باشد.

$$y=\frac{-۳x+m}{۵x+۲}$$

۳ــ تابع g در مقابل مفروض است. آیا g بر دامنه‌اش یکنواست.

$$g(x)=\begin{cases}-۲x+۱ & , \ x>۰\\ x^{۲}+۴ & , \ x<۰\end{cases}$$

۴ــ حدود b را درتابع مقابل چنان بیابید که همواره تابع f صعودی باشد.

$$f(x)=(۳b+۲)x-۱۱$$

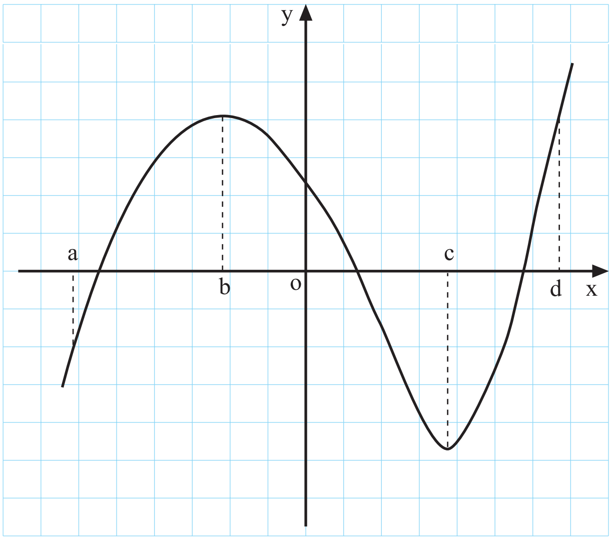
محل پاسخ

۴ـ۲ـ۴ـ تغییرات تابع: منحنی تابع f را در شکل ۱۳ـ۴ مشاهده می‌کنید.

ـ در بازه‌های (a,b) ، (c,d) تابع صعودی است.

ـ دربازه‌ی (b,c) تابع f نزولی است.

نکته: منظور از بررسی تغییرات تابع، معین‌کردن قسمت‌هایی از دامنه است که تابع در آن صعودی یا نزولی می‌باشد. که برای رسم دقیق نمودار یک تابع به کار برده می‌شود.



شکل ۱۳ـ۴

مثال ۱: تابع مقابل مفروض است. جدول تغییرات این تابع را مورد بررسی قرار دهید و منحنی آن را رسم کنید.

$$y=-۵+۲x^{۲}$$

حل: ریشه‌ی مشتق را به‌دست می‌آوریم.

$$y'=۴x=\circ \Rightarrow x=\circ$$

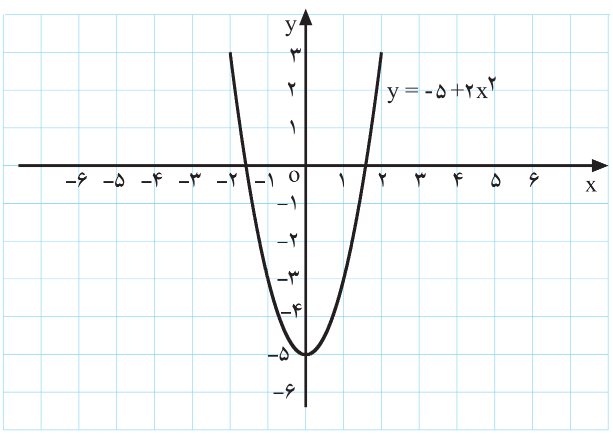
ـ جدول تغییرات تابع را با توجه به ریشه‌ی مشتق تابع تنظیم کرده و تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

ـ با توجه به جدول ۳ـ۴ تابع در فاصله‌ی $(-\infty,\circ)$ نزولی و در فاصله‌ی $(\circ,+\infty)$ صعودی است.

جدول ۳ـ۴

x	$-\infty$		$\circ$		$+\infty$
y′		$-$	$\circ$	$+$	
y	$+\infty$	↘	-۵	↗	$+\infty$
		نزولی		صعودی	

ـ نمودار ۱۴ـ۴ با توجه به جدول ۳ـ۴ رسم شده است.



نمودار تابع ۱۴ـ۴

مثال ۲: تغییرات تابع مقابل را بررسی کنید. (بدون رسم)

$$y=\frac{x^۳}{۳}-\frac{x^۲}{۲}-۲x+۲\quad,\quad x\in\mathbb{R}$$

حل: از تابع مشتق می‌گیریم :

$$y'=x^۲-x-۲=(x-۲)(x+۱)=۰$$

ـ ریشه‌های مشتق را به‌دست می‌آوریم ؛

$$\Rightarrow\begin{cases}x-۲=۰\Rightarrow x=۲\\ \text{یا}\\ x+۱=۰\Rightarrow x=-۱\end{cases}$$

ـ با تعیین علامت ریشه‌های مشتق تغییرات تابع را در جدول ۴ـ۴ مشخص می‌کنیم.

جدول ۴ـ۴

x	$-\infty$		-۱		۲		$+\infty$
y'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{۱۹}{۶}$ max	$\searrow$	$-\frac{۴}{۳}$ min	$\nearrow$	$+\infty$

با مشاهده‌ی جدول ۴ـ۴ در می‌یابیم که در بازه‌ی $(-\infty,-۱)$ و بازه‌ی $(۲,+\infty)$ تابع صعودی و در بازه‌ی $(-۱,۲)$ نزولی است.

مثال ۳: تغییرات تابع مقابل را بررسی کنید (بدون رسم)

$$y=(۲x-۱)^۲+۱\ ,\ x\in\mathbb{R}$$

حل: ریشه‌های مشتق تابع را به دست می‌آوریم :

$$y'=۴(۲x-۱)=۰\Rightarrow ۲x-۱=۰\Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

ـ با توجه به جدول ۵ـ۴ تابع در بازه‌ی $(-\infty,\frac{۱}{۲})$ نزولی و در بازه‌ی $(\frac{۱}{۲},+\infty)$ صعودی است.

جدول ۵ـ۴

x	$-\infty$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	۱	$\nearrow$	$+\infty$

تمرین

تغییرات تابع‌های زیر را بررسی کنید (بدون رسم نمودار)

الف) $y=-۲x^۲+۸x$

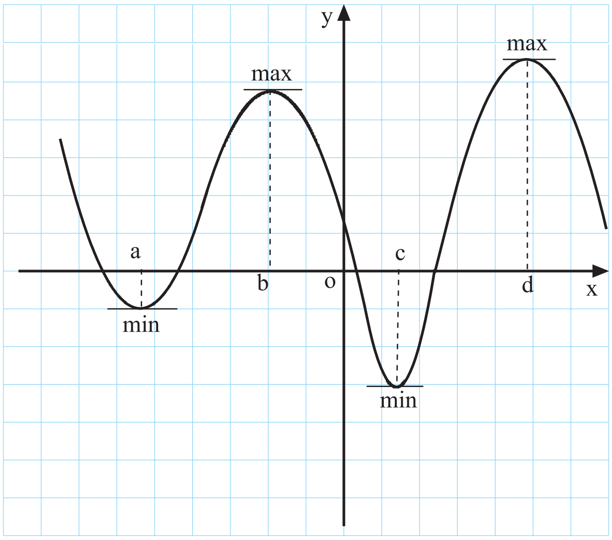
ب) $y=۴x-\frac{۱}{۶}x^۳$

محل پاسخ:

۵ـ۲ـ۴ـ ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع: در نمودار ۱۵ـ۴ تابع در نقاط b و d ماکسیمم نسبی و در نقاط a و c مینیمم نسبی دارد.

اگر بخواهیم با استفاده از جدول تغییرات و مشتق تابع این نقاط را به دست آوریم چه مراحلی باید انجام گیرد؟

برای این منظور فعالیت ۶ــ ۴ را انجام دهید.



نمودار ۱۵ــ۴

فعالیت ۶ــ۴

تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$f(x) = x^{۳} - ۱۲x + ۱$$

الف) حدهای روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \square \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \square$$

ب) ریشه‌های مشتق تابع f را به‌دست آورید.

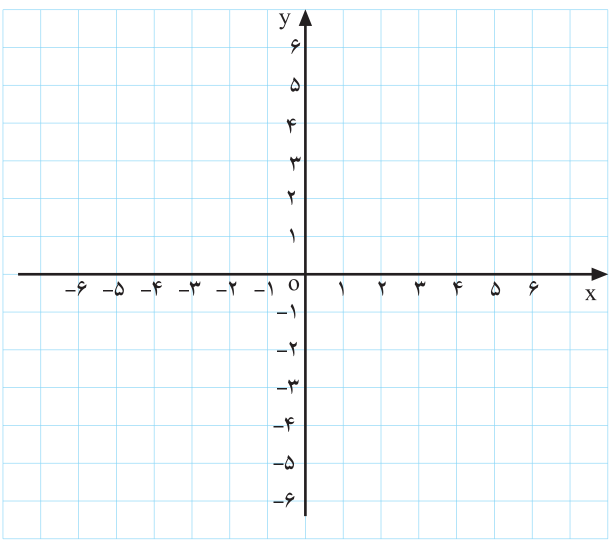
ج) جدول ۶ــ۴ را تکمیل کنید.

د) با توجه به تعیین علامت، نقاط ماکسیمم و مینیمم تابع را تعیین کنید.

جدول ۶ــ۴

x	$-\infty$	$\square$	$\square$	$+\infty$
y'		∘	∘	
y	$-\infty$	$\square$	$\square$	$+\infty$

هـ) با استفاده از جدول نمودار تابع f را رسم کنید.



نمودار ۱۶ــ۴

تعریف ۱: تابع f در نقطه‌ی $(x_\circ, f(x_\circ))$ دارای مینیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل $x_\circ$، مانند D_f 1 (a,b) باشد به قسمتی که برای هر x از این بازه داشته باشیم:

$$f(x_\circ) \le f(x)$$

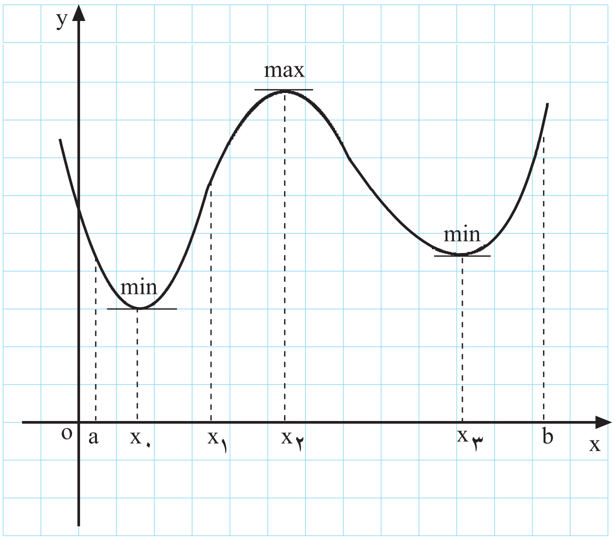
$f(x_\circ)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع می‌نامیم. (نمودار ۱۷ــ۴)

تعریف ۲: گوییم تابع f در نقطه‌ی $(x_۲, f(x_۲))$ دارای ماکسیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل $x_۲$، مانند D_f 1 (a,b) باشد به قسمتی که برای هر x از این بازه داشته باشیم:

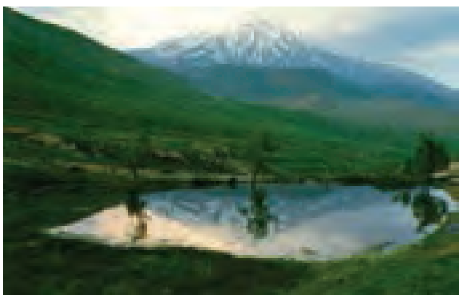
$$f(x_۲) \ge f(x)$$

$f(x_۲)$ را مقدار ماکسیمم نسبی تابع نامیم. (نمودار ۱۷ــ۴)

در شکل ۱۷ــ۴ نمودار $y = f(x)$ را مشاهده می‌کنیم که دارای چند نقطه‌ی ماکسیمم و مینیمم نسبی است.



نمودار ۱۷ــ۴: $y = f(x)$



شکل ۱۸ــ۴

تعریف ۳: نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع را نقاط اکسترمم تابع نامیم.

مثال ۱: برای تعیین جهت تغییرات و نقاط اکسترمم تابع با ضابطه $y=f(x)$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

$$y=x^{۳}-\frac{۱}{۳}x+۱$$

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty} x^{۳}=+\infty \ , \ \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$$

ب) ریشه‌های $y'=۰$ را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم :

$$y'=۳x^{۲}-\frac{۱}{۳}=۰\Rightarrow ۳x^{۲}=\frac{۱}{۳}$$

ج) با توجه به موارد الف و ب جدول تغییرات را تشکیل می‌دهیم.

$$\Rightarrow x^{۲}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow\begin{cases}x_{۱}=-\frac{۱}{۳}\\ x_{۲}=+\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

د) با استفاده از تغییرات علامت، نقاط max و min را مشخص می‌کنیم.

جدول ۷ــ۴

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{۲۹}{۲۷}$	$\searrow$	$\frac{۲۵}{۷}$	$\nearrow$	$+\infty$
			max		min		

نکته‌ی ۱: در صورتی که مشتق در نقطه‌ی $x_{۰}$ برابر صفر باشد ولی در دو طرف دارای یک علامت باشد تابع در $x_{۰}$ اکسترمم نسبی ندارد.

نکته‌ی ۲: هرگاه در تابع پیوسته‌ای معادله‌ی $y'=۰$ ریشه نداشته باشد تابع در دامنه‌اش همواره صعودی یا نزولی می‌باشد.

مثال ۲: اکسترمم‌های تابع مقابل را به دست آورید.

$$y=۳x-x^{۲}$$

حل: مشتق تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم :

$$y'=۳-۲x=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

ــ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم (جدول ۸ــ۴).

جدول ۸ــ۴

x	$-\infty$		$\frac{۳}{۲}$		$+\infty$
y'		+	۰	−	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{۹}{۴}$	$\searrow$	$-\infty$
			max		

ــ با توجه به جدول ۸ــ۴ تغییرات و علامت مشتق بازه‌ی $(-\infty,\frac{۳}{۲})$ تابع صعودی و در بازه‌ی $(\frac{۳}{۲},+\infty)$ تابع نزولی است.

ـ نقطه‌ی $(\frac{۹}{۴},\frac{۳}{۲})$ نقطه‌ی ماکسیمم تابع است.

مثال ۳: جدول تغییرات تابع مقابل را به‌دست آورید و با رسم منحنی تابع، نقاط اکسترمم را نیز مشخص سازید.

$$y = \sin x + ۲ \qquad ۰ \le x \le ۲\pi$$

حل: ریشه‌های مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$y' = \cos x = ۰$$

$$\cos x = ۰ \Rightarrow x = \frac{\pi}{۲} + k\pi , x \in [۰, ۲\pi]$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{۳\pi}{۲}$$

ـ مشتق را تعیین علامت می‌کنیم (جدول ۹ـ۴).

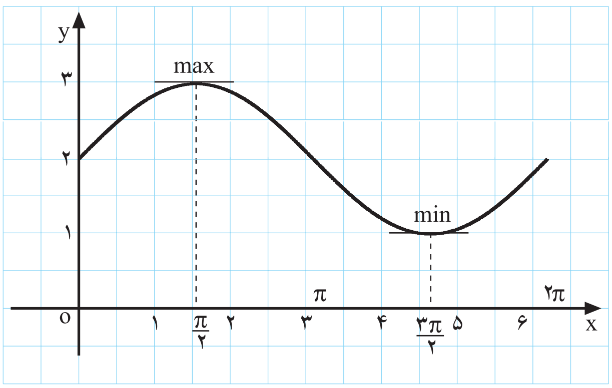
جدول ۹ـ۴

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		نقطه کمکی π		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π
y′		+	۰	−		−	۰	+	
y	۲	↗	۳ max	↘	۲	↘	min	↗	۲

ـ با توجه به تغییر علامت مشتق، تابع در بازه‌های $(۰,\frac{\pi}{۲})$ و $(\frac{۳\pi}{۲},۲\pi)$ صعودی و در بازه‌ی $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ نزولی است.

ـ نقاط به‌دست آمده از جدول ۹ـ۴ را بر روی دستگاه مختصات تعیین می‌کنیم.

ـ با رسم نقاط به یکدیگر منحنی تابع به‌دست می‌آید.



نمودار ۱۹ـ۴

مثال ۴: اکسترمم تابع مقابل را در بازه‌ی $[-۲,۳]$ به‌دست آورید.

$$f(x) = ۲x^۲ - ۸x + ۳$$

حل ۳: ریشه‌های y' را پیدا می‌کنیم و در جدول ۱۰ـ۴ قرار می‌دهیم.

$$y' = ۴x - ۸ = ۰ \Rightarrow x = ۲$$

جدول ۱۰ـ۴

x	−۲		۲		۳
y′		−	۰	+	
y	۲۷	↘	−۵ min	↗	−۳

ـ با توجه به جدول ۱۰ـ۴ نقطه‌ی $(۲,-۵)$ نقطه‌ی مینیمم نسبی است.

مثال ۵: مقادیر a و b و c از تابع مقابل را چنان محاسبه کنید که نقاط (۳,۲۲−) و (۱,۱۰−) اکسترمم تابع و نقطه‌ی (۱,۷−) نقطه‌ای از تابع باشد.

$$y = ax^۳ + bx^۲ - ۹x + c$$

حل: از تابع مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$y' = ۳ax^۲ + ۲bx - ۹$$

$$y' = ۳ax^۲ + ۲bx - ۹ = ۰$$

ــ به جای متغیر در مشتق $x = -۳$ و $x = ۱$ را قرار می‌دهیم در نتیجه خواهیم داشت:

$$\begin{cases} ۳a(-۳)^۲ + ۲b(-۳) - ۹ = ۰ \\ ۳a(+۱)^۲ + ۲b(۱) - ۹ = ۰ \end{cases}$$

ــ برای محاسبه‌ی a و b دستگاه دو مجهولی درجه اول را از روش حذفی حل می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} \\ ۳ \end{array}\begin{cases} ۲۷a - ۶b = ۹ \\ ۳a + ۲b = ۹ \end{cases}$$

ــ با حذف b مقدار a به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} ۲۷a - \cancel{۶b} = ۹ \\ +۹a + \cancel{۶b} = ۲۷ \end{cases}$$

$$۳۶a = ۳۶ \Rightarrow \boxed{a = ۱}$$

ــ مقدار a را در یکی از معادلات دستگاه قرار می‌دهیم تا b به‌دست آید:

$$۳(۱) + ۲b = ۹ \Rightarrow ۲b = ۹ - ۳ \Rightarrow \boxed{b = ۳}$$

ــ برای محاسبه‌ی c مقدار a و b را در تابع قرار می‌دهیم، در نتیجه:

$$y = x^۳ + ۳x^۲ - ۹x + c$$

ــ از طرفی با قراردادن مختصات نقطه‌ی (۱,۷−) از منحنی در رابطه‌ی به‌دست آمده خواهیم داشت.

$$۷ = (-۱)^۳ + ۳(-۱)^۲ - ۹(-۱) + c \Rightarrow ۷ = -۱ + ۳ + ۹ + c$$

ــ مقدار c برابر است با:

$$\Rightarrow c = ۷ - ۱۱ \Rightarrow \boxed{c = -۴}$$

مثال ۶: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. اگر این تابع در نقطه‌ی (۱,۷−) دارای اکسترمم باشد مقدار c و b را محاسبه کنید.

$$f(x) = x^۳ + ۶bx + c$$

حل: مشتق تابع برابر است با:

$$f'(x) = ۳x^۲ + ۶b$$

ــ تابع در $x = -۱$ دارای اکسترمم است، پس:

$$f'(-۱) = ۰ \Rightarrow ۳(-۱)^۲ + ۶b = ۰ \Rightarrow ۳ + ۶b = ۰$$

ـ مقدار b برابر است با :

$$\Rightarrow 6b=-3 \Rightarrow b=\frac{-3}{6} \Rightarrow \boxed{b=-\frac{1}{2}}$$

ـ به ازای $b=-\frac{1}{2}$ ضابطه‌ی تابع برابر است با :

$$f(x)=x^3+6(-\frac{1}{2})x+c \Rightarrow f(x)=x^3-3x+c$$

ـ نقطه‌ی $(-1,7)$ را در ضابطه‌ی تابع جایگزین می‌کنیم :

$$7=(-1)^3-3(-1)+c \Rightarrow 7=-1+3+c$$

ـ مقدار c برابر است با :

$$c=7-2 \Rightarrow \boxed{c=5}$$

مثال ۷: تابع g با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

نقطه‌ی $(1,3)$ اکسترمم تابع است. m و n را محاسبه کنید.

$$g(x)=-x^2+5mx+n$$

حل: نقطه‌ی $(1,3)$ بر نمودار g واقع است، پس :

$$g(1)=3 \Rightarrow -(1)^2+5m(1)+n=3 \Rightarrow \boxed{5m+n=4}$$

ـ مشتق تابع به ازای $x=1$ برابر صفر است، پس :

$$g'(x)=-2x+5m \Rightarrow -2(1)+5m=0 \Rightarrow m=\frac{2}{5}$$

ـ به ازای $m=\frac{2}{5}$ مقدار n را حساب می‌کنیم :

$$5(\frac{2}{5})+n=4 \Rightarrow 2+n=4 \Rightarrow$$

$$n=4-2 \Rightarrow \boxed{n=2}$$

مثال ۸: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است.

$$f(x)=(3a+1)x^3+5ax^2+5x-7$$

مقدار a را چنان محاسبه کنید که در $x=-1$ تابع دارای اکسترمم باشد.

حل: مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x)=3(3a+1)x^2+10ax+5$$

ـ به ازای $x=-1$ مشتق تابع برابر صفر است، پس :

$$f'(-1)=(9a+3)(-1)^2+10a(-1)+5=0 \Rightarrow \boxed{a=+8}$$

تمرین

۱ــ نقاط اکسترمم تابع‌های زیر را در بازه‌های داده شده مشخص کنید.

$$۱)\ y=\cos x+\frac{۱}{۲}x \quad x\in[۰,۲\pi]$$

$$۲)\ y=-۵x^{۲}+۴x+۱ \quad x\in\mathbb{R}$$

$$۳)\ y=x^{۳}-\frac{۱}{۲}x^{۲}+۱ \quad x\in\mathbb{R}$$

۲ــمقدار a و b را چنان بیابید که نقطه‌ی $(-۲,۴)$ ماکسیمم‌تابع $y=-۵x^{۲}+bx+a$ باشد.

۳ــ مقدار c را در تابع $f(x)=cx^{۳}+(۵-۲c)x+۵$ چنان بیابید که نقطه‌ی $x=۲$ نقطه‌ی اکسترمم تابع باشد.

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۲)

۱ــ معادله‌ی خط مماس و خط عمود بر نمودار تابع $y=x^{3}-4x$ در نقطه‌ی $x=2$ را بنویسید.

۲ــ صعودی و نزولی بودن تابع‌های زیر را از طریق تعیین علامت مشتق تابع مشخص کنید.

۱) $f(x)=x^{3}-9x^{2}+1 \quad x\in\mathbb{R}$

۲) $f(x)=7-x^{2} \quad x\in\mathbb{R}$

۳ــ به کمک مشتق، تابع‌های زیر را رسم کنید.

۱) $y=4x-x^{2}$

۲) $y=2x^{3}-6x+1$

۴ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=bx^{3}+(2b+3)x^{2}+7x$ داده شده است. مقدار b را چنان به دست آورید که در $x=+1$ تابع اکسترمم داشته باشد.

۵ــ جدول تغییرات تابع $y=\cos x+3$ را در بازه‌ی $x\in[0,\pi]$ یافته و سپس منحنی آن را رسم کنید.

منابع و مآخذ

۱ــ رولاندای لارسن، رابرت پی‌هوستتلر، بروس اچ ادواردز (۱۳۷۲)، حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه‌ی تحلیلی، ترجمه دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، نشر اتحاد

۲ــ روبرت الیس، دنی گولیک (۱۳۷۳) حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه‌ی تحلیلی، ترجمه دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده، انتشارات پژوهش

۳ــ جورج توماس، راس فینی (۱۳۷۷)، حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، ترجمه دکتر مهدی بهزاد و همکاران، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ ششم

۴ــ بابلیان، اسماعیل و همکاران (۱۳۸۳) ریاضی ۳ (پودمانی) : فنی و حرفه‌ای (کلیه رشته‌های زمینه‌ی صنعت و رشته‌ی کامپیوتر، زمینه‌ی خدمات)، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۵ــ پاریاب، خلیل و همکاران (۱۳۸۰)، ریاضی ۵ : فنی و حرفه‌ای (کلیه‌ی رشته‌های زمینه‌ی صنعت و رشته‌ی کامپیوتر و ماشین‌های کشاورزی)، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۶ــ بابلیان، اسماعیل و همکاران (۱۳۸۰) ریاضیات ۱ : نظری (رشته‌های علوم تجربی ــ ریاضی و فیزیک ــ فنی و حرفه‌ای) سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش.

۷ــ Kaufmann, Jeromee (1988), Precalculous, Pws - Kent Publishing

۸ــ JACOBS, RUSSELF, (1981), Introductory Algebra2, Harcouvt Brace Jovanovich Publishing

۹ــ Bolster, l.c, cox, G.f., Gibb, E.G., Hansen., V.P, Kirkpatrick, J.E., Robitaille, D.F., Trimble, H.C., Varce, I.E., Walch, R., wisner, R.J, Mathematics Around Us, (1975), Scott Foresman and company.