

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

ریاضی

سال سوم دوره راهنمایی تحصیلی

مرحله دوم تعلیمات عمومی

وزارت آموزش و پرورش سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی

نام کتاب : ریاضی سوم راهنمایی - ۱۳۳

مؤلفان : دکتر مسعود فرزانه، صفر باهت‌شیروانده، محمدتقی دیبایی و پرویز فرهودی‌مقدم

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : اداره کل چاپ و توزیع کتاب‌های درسی

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۹-۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۰۹۲۶۶ ۸۸۳۰، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹

وبسایت: www.chap.sch.ir

رسام : فاطمه رئیس‌یان فیروزآباد

تصویرگر و طراح جلد : علیرضا رضائی‌کُر

صفحه‌آرا : مریم نصرتی

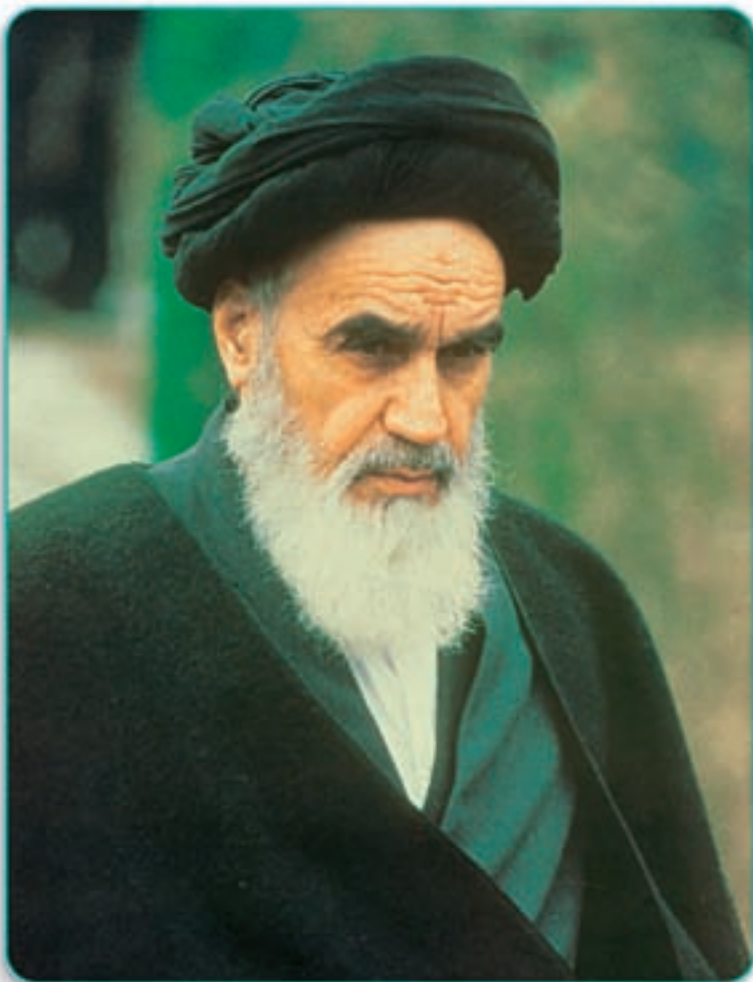
ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران - تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (داروپخش)

تلفن: ۵-۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۰۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۴۴۵/۶۸۴

چاپخانه : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار : ۱۳۹۱

حق چاپ محفوظ است.



انسان [تا] آن آخر عمرش، هم به علم احتیاج دارد و هم به آموزش و پرورش، هیچ انسانی نیست که مستغنی از علم باشد و مستغنی از پرورش و تربیت.

این کتاب براساس هدف‌های آموزش ریاضی و مطابق با ریز برنامه‌ی تهیه و تصویب شده در شورای آموزش ریاضی دوره‌ی همگانی و با توجه به توصیه‌های آن شورا در دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی وزارت آموزش و پرورش تألیف شده است.

در جلسه‌های ۱۰۷ تا ۱۴۳ شورای مذکور (از تاریخ ۱۳۶۱/۶/۲۷ تا ۱۳۶۲/۷/۳۰) که خاصّ برنامه‌ریزی ریاضی دوره‌ی راهنمایی بوده است، اشخاص ذیل شرکت داشته‌اند:

آقایان دکتر عبدالرحمن آذری، سیدحمید آذین، دکتر اسماعیل بابلیان، صفر باهمّت، دکتر محمدحسن بیژن‌زاده، دکتر همایون نقفی، میرزا جلیلی، دکتر غلامرضا جهانشاهلو، محسن حسام‌الدینی، محمدتقی دیبایی، دکتر ارسلان شادمان، دکتر احمد شاهورانی، دکتر عبدالله شیدفر، خانم اختر شهبازی، دکتر محمدتقی صدر، علی‌اکبر عصارى، دکتر مسعودفرزان، پرویز فرهودی مقدم، احمد قرائی، دکتر رحیم کریمپور، غلامحسین کیانی امین، احمد مظاهری، اکبر مقیمی و شکرالله نعمتی.

فهرست مطالب

۱۴	جذر	۱	حساب و مجموعه‌های اعداد
۱۴	یادآوری		
۱۵	جذر تقریبی	۱	مجموعه‌ی عددهای طبیعی
۱۷	جذر اعداد اعشاری	۱	عددهای طبیعی
۱۸	امتحان جذر	۲	عدد اوّل
۲۰	مجموعه‌ی عددهای صحیح	۴	تعیین عددهای اوّل
	نمایش مجموعه‌ی عددهای صحیح	۸	حل مسئله
۲۰	صحیح	۱۰	توان

توزیع پذیری ضرب نسبت	۲۳	جمع عددهای صحیح
۵۶ به جمع و تفریق	۲۵	تفریق عددهای صحیح
۵۹ معادله	۲۸	رسم ۱
۵۹ یادآوری	۲۹	مجموعه‌ی عددهای گویا
۶۱ روش حل معادله	۲۹	معرفی اعداد گویا
۶۳ راهبرد تشکیل معادله		نمایش اعداد گویا
۶۶ رسم ۳	۳۰	روی محور
		تساوی کسرها و کسر
۶۷ هندسه‌ی ۱	۳۱	علامت‌دار
		جمع و تفریق عددهای گویا
۶۷ زاویه و دایره	۳۵	ضرب و تقسیم عددهای گویا
۶۷ دایره		
وضع یک خط و یک دایره	۳۸	مختصات و جبر
۶۸ نسبت به هم		
۶۹ زاویه‌ی مرکزی	۳۸	بردار
۷۲ زاویه‌ی محاطی	۳۸	مختصات
تقسیم دایره به کمان‌های	۴۰	تساوی بردارها
۷۴ متساوی	۴۲	جمع بردارها
۷۵ چندضلعی‌های منتظم		ضرب یک عدد در یک
۷۸ رابطه‌ی فیثاغورس	۴۴	بردار
پیدا کردن رابطه‌ی	۴۷	بردارهای واحد مختصات
۷۸ فیثاغورس	۴۹	رسم ۲
استفاده از رابطه‌ی	۵۰	جبر
۸۰ فیثاغورس	۵۰	عبارت‌های جبری
۸۵ دوران		پیدا کردن مقدار یک
۸۵ نمادهای دوران	۵۳	عبارت جبری
مجموعه‌ی دوران‌های		ساده کردن یک عبارت
۸۷ یک شکل	۵۵	جبری

۱۲۲	دستگاه معادله‌های خطی	۸۹	رسم ۴
۱۲۲	حل دستگاه معادلات خطی	۹۰	تمرین دوره‌ای ۱
۱۲۴	راهبرد تشکیل معادله (دستگاه معادلات)	۹۵	اعداد حقیقی و آمار
۱۲۶	رسم ۵	۹۵	مجموعه‌ی عددهای حقیقی
۱۲۷	هندسه‌ی ۲	۹۵	نمایش عددهای حقیقی
		۹۷	محور عددهای حقیقی
۱۲۷	خطوط موازی و قضیه‌ی تالس	۱۰۰	آمار
	خط‌های متوازی با	۱۰۰	نمودار ستونی
۱۲۷	فاصله‌های متساوی	۱۰۲	میانگین
	تقسیم پاره‌خط به قطعات		
۱۲۹	متساوی	۱۰۵	معادله‌های خطی
۱۳۱	قضیه‌ی تالس		
۱۳۵	تشابه	۱۰۵	معادله‌ی خط
۱۳۵	شکل‌های متشابه	۱۰۵	رابطه‌ی طول و عرض نقاط
۱۴۰	تشابه دو مثلث		رسم خطی که معادله‌ی آن
۱۴۵	حجم	۱۰۸	داده شده است
۱۴۵	هرم		نمودار مجموعه‌ای از
۱۴۷	مخروط	۱۱۰	نقاط صفحه
۱۴۸	کره	۱۱۲	خط‌های غیرمبدأ گذر
۱۵۰	رسم ۶	۱۱۴	شیب خط
۱۵۱	تمرین دوره‌ای ۲	۱۱۸	صورت دیگر معادله‌ی خط
		۱۱۹	خط‌های موازی با محورها

پیشگفتار

دانش آموزان عزیز

درس ریاضی یکی از درس‌های مهم و بنیادی دوران تحصیل شماست. شما با آموختن این درس، روش درست اندیشیدن برای حل مسائل را فرا می‌گیرید، با محاسبه‌های عددی مورد نیاز در سایر درس‌ها آشنا می‌شوید و کاربرد ریاضی را در حل مسئله‌های روزمره می‌آموزید.

دانش آموزان عموماً به اهمیت ریاضی واقف‌اند و می‌دانند که داشتن پایه‌ای خوب در درس ریاضی، تا چه حد به پیشرفت آن‌ها در سایر درس‌ها کمک می‌کند اما اغلب نمی‌دانند که درس ریاضی را چگونه باید آموخت. درس ریاضی را فقط با گوش دادن به معلم نمی‌توان یاد گرفت. یکی از مهم‌ترین شرط‌های آموختن این درس، کار و فعالیت پی‌گیرانه‌ی شماست.

مؤلفان این کتاب با توجه به برنامه‌ی تنظیمی توسط شورای ریاضی، مطالب را طوری تدوین کرده‌اند که شما بتوانید با انجام دادن کارهایی در کلاس، به مفاهیم ریاضی پی‌ببرید، قاعده‌ها را کشف کنید و مطالب مطرح شده را به‌طور عملی فرا بگیرید. بر این اساس، کتاب حاضر بر مبنای فعالیت دانش‌آموز تنظیم شده است و کار و فعالیت شما دانش‌آموزان در کلاس، در آموزش آن نقش اساسی دارد.

برای آشنایی بیش‌تر شما با روش کار کتاب، ذکر نکاتی چند ضروری به نظر می‌رسد. کتاب درسی شما از چند قسمت تشکیل شده است.

قسمت اول: درس



این قسمت توسط معلم و با همکاری شما بیان می‌شود. معلم هنگام بیان این قسمت، از تخته سیاه استفاده می‌کند و شما باید کتابتان را ببندید، کاملاً به مطالب دقت کنید و بکشید که آن‌ها را خوب بفهمید. اگر مطلبی را متوجه نمی‌شوید، می‌توانید از معلم بپرسید.

قسمت دوم: فعالیت



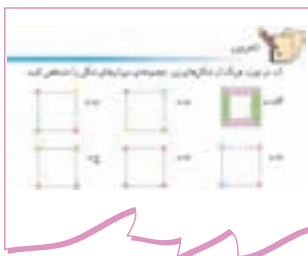
این قسمت را شما باید انجام بدهید. هدف از انجام دادن فعالیت‌ها این است که مفاهیم موردنظر هر درس را درک و کشف کنید. شما بعضی از این فعالیت‌ها را به‌طور فردی و بعضی را به‌طور گروهی در کلاس درس انجام می‌دهید.

قسمت سوم: کار در کلاس



مطالب بیان شده در درس و فعالیت، به صورت تمرین‌هایی با عنوان «کار در کلاس» تمرین می‌شوند. اگر توجه کنید، با حل کردن این تمرین‌ها کاملاً به مطلب پی می‌برید. هنگام انجام دادن تمرین‌های «کار در کلاس» اگر به اشکالی برخوردید، می‌توانید به متن درس و فعالیت‌های همان جلسه در کتاب مراجعه کنید و اگر باز هم متوجه نشدید، از معلمان بپرسید.

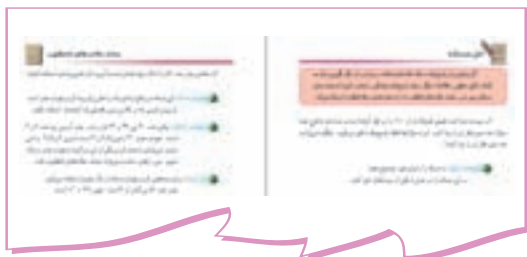
قسمت چهارم: تمرین



اگر به «درس» هر جلسه و تمرین‌های «کار در کلاس» خوب توجه کرده باشید، می‌توانید تمرین‌های پایان هر بخش را - که به عنوان تکلیف منزل در نظر گرفته شده‌اند - انجام دهید. برای

حل کردن این تمرین‌ها نباید از کسی کمک بگیرید. اگر در این زمینه با اشکالی مواجه شدید، می‌توانید مجدداً متن درس همان بخش را بخوانید و آنچه را در «فعالیت‌ها» و «کار در کلاس» مربوطه انجام داده‌اید، مرور کنید. اگر از بزرگ‌ترهای خود کمک می‌گیرید، از آن‌ها بخواهید که قسمت درس را مجدداً برایتان توضیح دهند اما تمرین‌ها را خودتان حل کنید.

قسمت پنجم: حل مسئله



در این قسمت، روش حل مسائل کتاب درسی توضیح داده شده است. هدف این بخش آشنا کردن شما با راهبردهای حل مسئله و راه‌های فکر کردن در مورد مسئله است؛ به طوری که پس از آشنایی با

راهبردها، می‌توانید از آن‌ها برای حل مسئله‌های بعدی استفاده کنید. در قسمت تمرین و تکالیف منزل، چند نمونه مسئله وجود دارد که آن‌ها را باید با استفاده از راهبردهایی که یاد گرفته‌اید، حل کنید.



قسمت ششم: رسم

در کتاب تعدادی رسم گنجانده شده است. رسم‌ها را با توجه به توضیحات کتاب به طور منظم – مثلاً هر ماه یک رسم – و با دقت در منزل تهیه کنید.

قسمت هفتم: سرگرمی و ریاضی



مطالب سرگرمی و ریاضی علاوه بر سرگرم کردن شما به پرورش هوش‌تان کمک می‌کند. پس آن‌ها را با دقت مطالعه کنید و کارهای خواسته شده را حتماً خودتان انجام دهید. مطالب انتخابی در ارتباط با مفاهیم درسی هستند و مطالعه‌ی آن‌ها به یادگیری ریاضی کمک می‌کند. علاوه بر این، شما را با نکات جالب، سرگرم کننده و شگفت‌انگیز ریاضی آشنا می‌سازند.

قسمت هشتم: تمرین‌های دوره‌ای



در پایان مطالب درسی هر نیم‌سال، چند صفحه تمرین دوره‌ای گنجانده شده است. در اواخر هر نیم‌سال، هنگام دوره کردن درس ریاضی می‌توانید از این تمرین‌ها، به عنوان تمرین تکمیلی استفاده کنید. البته حل کردن این تمرین‌ها در کلاس فقط

در صورتی امکان دارد که مطالب درسی به موقع تمام شده باشد و فرصت کافی برای این کار داشته باشید.

نظرات، پیشنهادها و انتقادهای سازندهی معلمان سراسر کشور، به ویژه مدرسان ریاضی که مسئولیت آموزش معلمان را به عهده دارند، همواره در شناسایی و اجرای روش‌های نوین آموزش ریاضی نقش اساسی داشته است. امیدواریم مشارکت این سرمایه‌های فرهنگی در جهت اعتلای سطح آموزش ریاضی و بهبود کتاب‌های درسی تداوم یابد.

مؤلفان

معلمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را در باره ی مطالب

این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۳۶۳ ۱۵۸۵۵ - کد پستی مربوط و یا پیام نگار (Email):

talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر نامه ی ریویزی و تأیید کتاب های درسی

حساب و مجموعه‌های اعداد



مجموعه‌ی عددهای طبیعی

عددهای طبیعی

عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ... اعداد طبیعی هستند. با این عددها در دوره‌ی ابتدایی آشنا شده‌اید و از آن‌ها برای شمردن استفاده می‌کنید.

مجموعه‌ی اعداد طبیعی را به صورت

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

نشان می‌دهند.

کار در کلاس

محور اعداد را رسم کرده و اعداد طبیعی را روی آن مشخص کنید؛ عبارت‌های زیر را با نوشتن \in یا \notin کامل کنید.

$$1 \circ \mathbb{N} \quad , \quad 135 \circ \mathbb{N} \quad , \quad 0 \circ \mathbb{N} \quad , \quad \frac{2}{5} \circ \mathbb{N} \quad , \quad -2 \circ \mathbb{N}$$

– کوچک‌ترین عدد طبیعی را بنویسید.

– آیا می‌توان بزرگترین عدد طبیعی را مشخص کرد؟ چرا؟

جمع و ضرب اعداد طبیعی را یاد گرفته‌اید و می‌دانید که

مجموع هر دو عدد طبیعی، عددی طبیعی است و حاصل ضرب هر دو عدد طبیعی نیز عددی

طبیعی است.





عدد ۶ را به صورت ضرب دو عدد طبیعی بنویسید (همه‌ی حالت‌های ممکن را بنویسید). آن‌گاه با استفاده از آن، مجموعه‌ی مقسوم‌علیه‌های عدد ۶ را بنویسید.

عدد اول



۱- عددهای زیر را در صورت امکان به ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک تبدیل کنید.

$$۱۴ = \quad ۴ = \quad ۵ = \quad ۸ = \quad ۱۵ = ۳ \times ۵$$

$$۵۱ = \quad ۴۹ = \quad ۱۰ = \quad ۹ = \quad ۷ =$$

۲- برای هر عدد، یک مقسوم‌علیه، غیر از عدد یک و خودِ عدد بنویسید.

$$۱۴ \rightarrow \quad ۴ \rightarrow \quad ۵ \rightarrow \quad ۸ \rightarrow \quad ۱۵ \rightarrow$$

$$۵۱ \rightarrow \quad ۴۹ \rightarrow \quad ۱۰ \rightarrow \quad ۹ \rightarrow \quad ۷ \rightarrow$$

اگر a و b اعدادی طبیعی باشند و $a \times b = c$ باشد، آن‌گاه c عددی طبیعی و هریک از a و b یک مقسوم‌علیه c است. عدد ۱۵ را نیز می‌توان به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی ۳ و ۵ نوشت. عددهایی مانند ۶ و ۱۵ را که می‌توان به صورت حاصل ضرب دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ نوشت، اعداد مرکب می‌نامیم. عددهای ۴، ۶، ۸، ۹، ۱۰، ۱۲ و ۱۴ اعداد مرکب‌اند.

عدد ۵ را نمی‌توان به صورت حاصل ضرب اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱ نوشت. می‌دانید که ۵ عددی اول است. هر عدد اول غیر از خودش و ۱، مقسوم‌علیه دیگری ندارد. عددهای ۲، ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳ و ... اعداد اول هستند.

عدد ۱ نه مرکب است و نه اول.



مجموعه‌ی مضرب‌های طبیعی عددهای زیر را بنویسید.

$$= \text{مجموعه‌ی مضرب‌های عدد } ۴ \quad = \text{مجموعه‌ی مضرب‌های عدد } ۳$$

آیا می‌توان گفت همه‌ی مضرب‌های یک عدد، مرکب‌اند؟ چرا؟





۱- دور هر عدد مرکب یک خط بکشید و توضیح دهید که چگونه مرکب بودن آن را تشخیص دادید. ۸۳، ۵۷، ۱۳، ۹، ۱۷، ۳۵، ۱، ۲۴، ۶، ۳، ۶۳
آیا اعدادی که دور آن‌ها خط نکشیده‌اید، اول‌اند؟ چرا؟

۲- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید. علت نادرستی گزاره‌ها را بنویسید.

- الف - ۴۹ عددی اول است.
- ب - غیر از ۲، هیچ مضرب ۲ اول نیست.
- پ - ۳ یک مقسوم علیه اول ۱۲ است.
- ت - هر عدد طبیعی بزرگ‌تر از ۱، حداقل یک مقسوم علیه اول دارد.
- ث - تنها مقسوم علیه اول ۵، خود ۵ است.
- ج - ۲۳ عددی اول است.
- چ - ۲۷ عددی اول است.
- ح - تنها مضرب اول ۳، خود ۳ است.
- ۳- پنج عدد مرکب بزرگ‌تر از ۲۰ بنویسید.
- ۴- مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های ۱۲ را بنویسید.
- مجموعه‌ی مقسوم علیه‌های ۱۳ را بنویسید.
- آیا می‌توان گفت که هر عدد اول دقیقاً دو مقسوم علیه دارد؟
- ۵- در جدول زیر، همه‌ی عددهای مرکب و عدد ۱ را خط بزنید.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰

آیا همه‌ی عددهای باقی‌مانده اول‌اند؟



تعیین عددهای اول



می‌خواهیم عددهای اول بین ۱ تا ۳۰ را تعیین کنیم. برای این کار، ابتدا عددهای ۱ تا ۳۰ را می‌نویسیم.

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰

کافی است عددهای غیراول را خط بزنیم تا عددهای اول (عددهایی که خط نمی‌خورند) باقی بمانند.

- ۱- آیا عدد یک اول است؟ چرا؟
- ۲- کدام یک از مضرب‌های عدد ۲ مرکب‌اند؟ آن‌ها را خط بزنید.
- ۳- کدام یک از مضرب‌های عدد ۳ مرکب‌اند؟ آن‌ها را خط بزنید.
- ۴- کدام یک از مضرب‌های مرکب عدد ۳ قبلاً خط خورده بودند؟
- ۵- اولین مضرب عدد ۳ که خط خورد، کدام عدد بود؟
- ۶- مضرب‌های مرکب عدد ۵ را نیز خط بزنید.
- ۷- کدام یک از مضرب‌های عدد ۵ قبلاً خط خورده بود؟
- ۸- اولین مضرب عدد ۵ که خط خورد، کدام عدد بود؟
- ۹- آیا مضربی از عددهای ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷ و ... باقی مانده است که باید آن را خط بزنید؟

- ۱۰- آیا لازم است مضارب عدد ۴ یا ۶ را خط بزنید؟ چرا؟
- ۱۱- خط زدن مضرب‌ها تا کجا ادامه می‌یابد؟

می‌توانید این کار را طی مراحل زیر انجام دهید:

- ۱- عدد ۱ را خط بزنید.
- ۲- مضرب‌های ۲ را، غیر از خود ۲، خط بزنید.
- ۳- مضرب‌های ۳ را، غیر از خود ۳، خط بزنید.



۴- اولین عدد خط نزده‌ی بعدی ۵ بوده که عددی اول است. مضرب‌های ۵ را غیر از خود ۵ خط بزنید.

۵- عدد بعدی که باید مضرب‌های آن را خط بزنید، ۷ است. برای حذف مضرب‌های ۷، غیر از خود ۷، اولین عددی که باید خط بزنید ۴۹ است. همان‌طور که می‌بینید، عدد ۴۹ در جدول نیست، پس، کار خط زدن مضرب‌ها به پایان رسیده است.

پس از انجام دادن مراحل گفته شده، جدولی مانند جدول زیر خواهید داشت که در آن، همه‌ی عددهای خط نزده اول‌اند. دور عددهای اول خط بکشید.

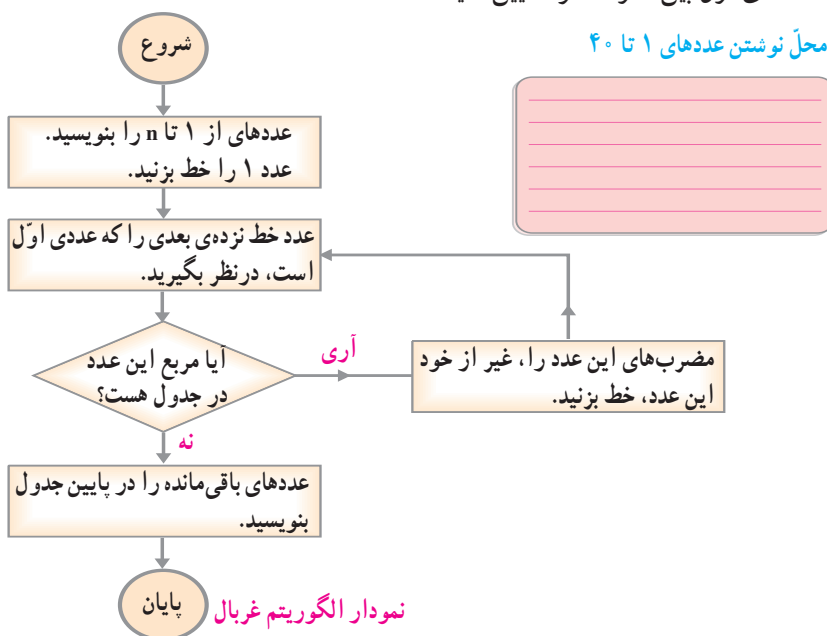
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
۱۱	۱۲	۱۳	۱۴	۱۵	۱۶	۱۷	۱۸	۱۹	۲۰
۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰

ما در اینجا از روش الگوریتم غربال برای تعیین اعداد اول ۱ تا ۳۰ استفاده کرده‌ایم.

کار در کلاس

۱- نمودار زیر، مراحل کار را در الگوریتم غربال اراتستن برای تعیین عددهای اول بین ۱ و عدد طبیعی n نشان می‌دهد. با انتخاب $n = 40$ و استفاده از نمودار زیر، عددهای اول بین ۱ و ۴۰ را تعیین کنید.

محل نوشتن عددهای ۱ تا ۴۰



نمودار الگوریتم غربال

۲- عددهای ۱ تا ۶۰ را در دفترتان بنویسید. اکنون با به کار بردن الگوریتم غربال، عددهای اول بین ۱ و ۶۰ را به دست آورید.



می خواهیم تعیین کنیم که آیا عدد ۴۳ اول است یا نه.
آیا ۴۳ مضرب ۲ است؟ با چه تقسیمی می توانید به این سؤال پاسخ دهید؟
آیا ۴۳ مضرب ۳ است؟ مضرب ۵ چه طور؟ مضرب ۷ چه طور؟
اگر عددهای ۱ تا ۴۳ را بنویسید و الگوریتم غربال را به کار ببرید، آیا ۴۳ خط می خورد؟ آیا ۴۳ عددی اول است؟
توضیح دهید که چگونه با تقسیم کردن، می توان اول بودن یک عدد را تعیین کرد.



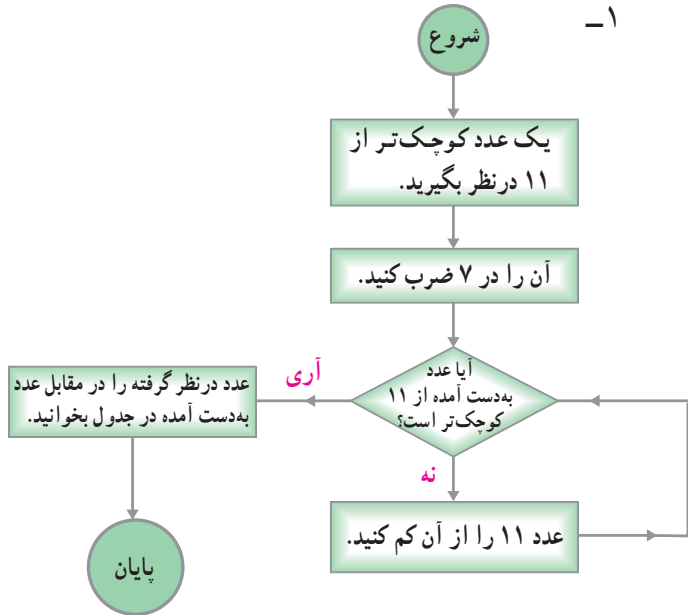
- ۱- مجموعه ی مقسوم علیه های ۲۴ را بنویسید.
- ۲- پنج تا از مضرب های ۶ را بنویسید.
- ۳- آیا ۷۷ عددی اول است؟ چرا؟
- ۴- الگوریتم غربال را برای تعیین عددهای اول بین ۱ و ۱۰۰ به کار ببرید.
- ۵- آیا عدد ۹۷ اول است؟ چرا؟
- ۶- الگوریتم غربال را برای تعیین اعداد اول بین ۸۰ و ۱۳۰ بکار ببرید.





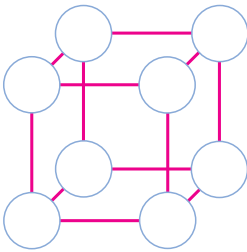
۱-

عدد در نظر گرفته	عدد به دست آمده
۸	۱
۵	۲
۲	۳
۱۰	۴
۷	۵
۴	۶
۱	۷
۹	۸
۶	۹
۳	۱۰



۲- بازی با اعداد اول

عدد ۱ و اعداد اول ۳، ۵، ۷، ۱۱، ۱۳، ۱۷، ۱۹ را در گوشه های مکعب طوری بنویسید که مجموع چهار عدد واقع در هر وجه، ۳۸ باشد.



حل مسئله

در برخی از مسئله ها، تغییرات دو مقدار طوری است که حاصل ضرب آن ها ثابت می ماند. با تشخیص این موضوع و توجه به آن، می توانیم این گونه مسئله ها را حل کنیم. به یک نمونه توجه کنید.



یک نجار با صرف ۶ ساعت کار در روز می تواند یک میز را ۴ روزه بسازد. اگر روزی ۸ ساعت کار کند، همان میز را چند روزه می سازد؟ در این مسئله حاصل ضرب تعداد ساعات کار در روز در تعداد

روزها، کلّ ساعات کار لازم برای ساختن میز است؛ بنابراین، عددی ثابت است. حالا اگر فرض کنیم او با ۸ ساعت کار در روز، میز را در a روز می‌سازد، می‌توانیم بنویسیم:

$$6 \times 4 = 8 \times a$$

بنابراین:

$$a = \frac{6 \times 4}{8} = 3 \text{ روز}$$

برای حل کردن این مسئله، از کدام راهبرد استفاده کرده‌اید؟

- رسم شکل
- جدول نظام‌دار
- الگویی
- حذف حالت‌های نامطلوب
- زیر مسئله
- حل مسئله‌ی ساده‌تر
- تشکیل معادله
- حدس و آزمایش



- ۱- یک کارگر در و پنجره‌ساز، با روزی ۸ ساعت کار می‌تواند یک در را ۶ روزه بسازد؛ ساختن در چند ساعت طول می‌کشد؟ اگر او بخواهد در را ۴ روزه بسازد، در هر روز باید بیشتر از ۸ ساعت کار کند یا کمتر؟ چرا؟
- ۲- برای نقاشی یک ساختمان، ۳ کارگر ۱۸ روز کار کردند. اگر می‌خواستند کار زودتر انجام شود، تعداد کارگران را باید بیشتر می‌کردند یا کمتر؟ اگر تعداد کارگرها ۶ نفر بود، این کار چند روزه انجام می‌شد؟
- ۳- زهره می‌خواهد یک رومیزی را گلدوزی کند. او حساب کرده است که اگر هر روز، پس از انجام دادن تکالیف مدرسه، روزی ۴۵ دقیقه کار کند، رومیزی را ۱۲ روزه تمام خواهد کرد. اگر بخواهد رومیزی را ۹ روزه گلدوزی کند، هر روز چند دقیقه باید کار کند؟



- ۴- معصومه و مادرش برای بافتن یک قالیچه‌ی کوچک ۷۸ روز کار کردند. اگر خواهر معصومه به آن‌ها کمک می‌کرد این قالیچه را چند روزه می‌بافتند؟

۵- احمد می‌خواهد یک کتاب را حروف‌چینی کند. اگر در هر صفحه ۲۴ سطر قرار دهد، متن کتاب ۱۴۰ صفحه خواهد شد. اگر در هر صفحه ۲۸ سطر قرار دهد، متن کتاب چند صفحه خواهد شد؟

۶- کاری با ۸ نفر کارگر، ۹ روزه تمام می‌شود. با $\frac{3}{4}$ این تعداد کارگر، کار چند روزه تمام می‌شود؟

۷- در هر ردیف، به ارتباط دو شکل سمت چپ توجه کنید. شکل a با کدام یک از شکل‌های b، c و d همان ارتباط را دارد؟ خانه‌ی مربوط به پاسخ درست را سیاه کنید.

								<div>b</div> <div>c</div> <div>d</div>
								<div>b</div> <div>c</div> <div>d</div>
								<div>b</div> <div>c</div> <div>d</div>
								<div>b</div> <div>c</div> <div>d</div>
								<div>b</div> <div>c</div> <div>d</div>
								<div>b</div> <div>c</div> <div>d</div>

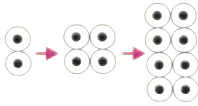
سرگرمی و ریاضی



یک بازی دو نفره

تعدادی چوب‌کبریت را در سه دسته قرار دهید.

حالا شما و دوستتان به نوبت از یک دسته، هر تعداد چوب‌کبریت که می‌خواهید بردارید. در هر نوبت نمی‌توانید از دو دسته، چوب‌کبریت بردارید. نقشه‌ی خوبی طراحی کنید تا آخرین چوب‌کبریت را شما بردارید.



توان

عددهای توان دار و قواعد محاسبه با آن‌ها را در سال گذشته یاد گرفته‌اید. می‌دانید که مثلاً

$$5^1 = 5$$

$$5^2 = 5 \times 5$$

$$5^3 = 5 \times 5 \times 5$$

اینک، قواعد محاسبه با عددهای توان دار را با چند مثال یادآوری می‌کنیم.

الف - اگر a عددی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی باشند،

$$a^5 \times a^3 = a^{5+3} = a^8$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}$$

$$a^5 \div a^3 = a^{5-3} = a^2$$

$$(a \neq 0) \quad a^m \div a^n = a^{m-n}$$

ب - اگر a و b اعدادی دلخواه و m و n دو عدد طبیعی باشند،

$$a^5 \times b^5 = (ab)^5$$

$$a^5 \div b^5 = \left(\frac{a}{b}\right)^5$$

$$a^m \times b^m = (ab)^m$$

$$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \quad (b \neq 0)$$



تساوی‌ها را کامل کنید.

$$(a^2)^3 = a^2 \times a^2 \times a^2 = a \times a \times \quad \times \quad = \dots$$

$$(b^3)^2 = b^3 \times b^3 = b \times b \times b \times \quad = \dots$$

با توجه به تساوی‌های بالا، برای ساده کردن این عبارت‌ها قاعده‌ای بیان کنید.

کار در کلاس

۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$5^7 \times 5^4 \quad (-2)^3 \times (-2)^5 \quad 7^3 \times 7$$

$$8^5 \div 8^2 \quad (-3)^7 \div (-3)^2 \quad 6^5 \div 6$$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان دار بنویسید.

$$2^4 \times 5^4 \quad (-3)^2 \times (-6)^2 \quad (5/3)^3 \times 4^3$$

$$24^7 \div 8^7 \quad 65^3 \div 13^3 \quad (8/5)^6 \div 5^6$$

۳- عبارت‌های زیر را کامل کنید.

$$3^{\square} = 9^4$$

$$8^5 = 2^{\square}$$

$$49^3 = \square^6$$





۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$5^7 \times 5^4$	$7^8 \times 7^2$	$8^7 \div 8^3$
$10^5 \div 10^3$	$(0/4)^3 \times (0/4)^2$	$(1/7)^2 \times (1/7)$
$(5/1)^4 \div (5/1)^3$	$(8/2)^3 \div (8/2)$	$(\frac{4}{5})^8 \div (\frac{4}{5})^2$
$(\frac{3}{5})^8 \times (\frac{3}{5})^2$	$(\frac{3}{4})^3 \times (\frac{3}{4})^6$	$(\frac{2}{7})^5 \div (\frac{2}{7})$

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$2^4 \times 5^4$	$4^3 \times 25^3$	$85^2 \div 17^2$
$(7/2)^3 \div (0/9)^3$	$(0/6)^3 \div 2^3$	$(0/12)^5 \div 4^5$
$(\frac{1}{15})^3 \times (\frac{5}{16})^3$	$(2/5)^5 \times (0/4)^5$	$(\frac{3}{5})^8 \div (\frac{1}{5})^8$

۳- حاصل کسرهای زیر را به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$\frac{25 \times 2^3}{2^4 \times 2}$	$\frac{65}{35}$	$\frac{21^4}{3^4}$
$\frac{35}{3^3}$	$\frac{3^3}{3^5}$	$\frac{4^3}{4^5}$

۴- کسرهای زیر را ساده کنید.

$\frac{3^2 \times 2^5}{3^4 \times 2^4}$	$\frac{5^6 \times 7^2}{5^4 \times 7^3}$	$\frac{4^5 \times 6^3}{4^3 \times 6^5}$
---	---	---

۵- عبارت‌های زیر را به صورت عبارت‌های توان‌دار بنویسید.

$(xy)^2 \times x^3 \times y^4 =$	$xy \times y^2 =$
$x \times x =$	$x \times x^3 =$

۶- عبارت‌های زیر را ساده کنید و به صورت یک عدد توان‌دار بنویسید.

$8^2 \times 2^4 =$	$9^5 \times 27 =$
--------------------	-------------------

۷- اگر $3^x = a$ باشد، مقدار 3^{x+1} را بر حسب a بنویسید.





۱- به رابطه‌ی بین دو شکل سمت چپ توجه کنید ؛ کدام یک از شکل‌های a, b, c و d همان رابطه را با شکل o دارد؟

پاسخ

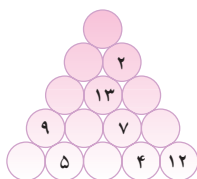
		<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
		<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
		<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
		<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d
		<input type="checkbox"/> a <input type="checkbox"/> b <input type="checkbox"/> c <input type="checkbox"/> d

۲- در افسانه‌ها می‌گویند وقتی پادشاه هند از بازی شطرنج خوشش آمد، مخترع شطرنج را به حضور طلبید و از او خواست تا جایزه‌ای به عنوان پاداش طلب کند. او درخواست خود را این‌طور مطرح کرد:



«در صفحه‌ی شطرنج و در خانه‌ی اوّل، برای من یک دانه گندم، در خانه‌ی دوم دو برابر خانه‌ی اوّل و در خانه‌ی سوم دو برابر خانه‌ی دوم گندم قرار دهید و به همین ترتیب، پیش بروید.» پادشاه از درخواست او تعجب کرد و دستور داد به او یک کیسه گندم بدهند. به نظر شما، آیا درخواست مخترع شطرنج به اندازه‌ی یک کیسه گندم بوده است؟

سرگرمی و ریاضی



عددهای ۱ تا ۱۵ را در دایره‌های مثلث مقابل طوری قرار دهید که مجموع عددهای روی هر ضلع مثلث، عدد ۳۴ شود. مجموع عددهای سه دایره‌ی وسط هم ۳۴ شود.



(ابوریحان محمد بن احمد)

ابوریحان بیرونی

(۳۵۲ ش - ۹۷۳ م)

جذر مُنطِق (گویا) و اَصَمّ (گنگ) کدام است؟

جذر منطق آن است که حقیقت او به زبان توان گفتن، همچون سه، نه را و چهار شانزده را. و اما جذر اصم آن است که هرگز حقیقت او به زبان در نیاید چون جذر ده، که هرگز عددی نتوان یافتن که او را اندر مثل خویش زنی، ده آید. و اصم گر بود زیرا که جواب ندهد جوینده را، تا نیابدش، مگر به تقریب و نزدیک شدن با او بس. (با تقریب نقصانی)

با وجود گذشت ایام، ابوریحان هنوز از لحاظ فکر جوان و تازه می‌نماید و چنین به نظر می‌رسد که از دانشمندان هم عصر ماست. او در وسعت فکر، انتقاد، ریشه‌یابی علت‌های حوادث و عشق عمیق به تحقیق، مقامی ممتاز دارد. ابوریحان در حکمت، ریاضیات، نجوم، جغرافیا و تاریخ استاد بوده و به چندین زبان تسلط داشته است. از جمله تألیفات مهم ابوریحان بیرونی کتاب «الفهم» در مقدمات علم هیئت، هندسه و نجوم است که آن را به صورت سؤال و جواب و به دو زبان عربی و فارسی نگاشته است. علاوه بر این علم مثلثات کروی برای اولین بار توسط ابوریحان در کتاب «مقالید علم الهيئة» تدوین و تنظیم شده است. محاسبه تقریبی $\frac{1}{\pi}$ ، تشکیل جدول جیب‌ها (سینوس‌ها) و بررسی مسئله تثلیث زاویه که آن را به دوازده مسئله هندسی معادل با آن تبدیل کرده؛ از دیگر آثار اوست.

تحقیقات وی در موضوعاتی از قبیل کروی بودن زمین، ستاره‌های دنباله‌دار و شهاب‌ها و همچنین تحقیق وی در چستی کهکشان راه شیری که در کتاب «الفهم» آمده است از اهمیتی بسزا برخوردار است.

ابوریحان معاصر ابن سیناست و بین این دو دانشمند مکاتباتی در موضوعات علمی و فلسفی انجام گرفته است.

جذر

یادآوری



نمودارهای مقابل، رابطه‌ی بین جذر و مجذور را نشان می‌دهند. عددی مثل ۴۹، ۱۶، ۴ و ... را که جذر دقیق دارند، مجذور یا مربع کامل می‌نامند.

در سال گذشته، روش محاسبه‌ی جذر تقریبی اعداد را یاد گرفته‌اید؛ مثلاً، جذر ۹۵ تا یک رقم اعشار به صورت زیر به دست می‌آید.

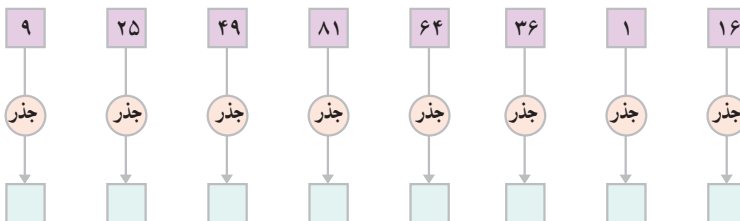
۹۵ بین دو مجذور کامل ۸۱ و ۱۰۰ است؛ پس، جذر ۹۵ بین ۹ و ۱۰ است. با توجه به این مطلب، جذر ۹۵ به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$95 = 81 + 14$$

$$\sqrt{95} \approx 9 + \frac{14}{2 \times 9} \rightarrow \sqrt{95} \approx 9.7$$

کار در کلاس

۱- نمودارهای زیر را کامل کنید.



۲- جذرهای زیر را تا یک رقم اعشار حساب کنید.

$$\sqrt{68} \approx 8 + \frac{\quad}{\quad} \approx \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{43} \approx \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{27} \approx \underline{\hspace{2cm}} \quad \sqrt{80} \approx \underline{\hspace{2cm}}$$



جذر تقریبی

اکنون برای محاسبه‌ی جذر یک عدد، روش دقیق‌تری بیان می‌کنیم. به کمک این روش می‌توانیم جذر یک عدد را تا هر تقریبی که بخواهیم، حساب کنیم.

$$\sqrt{1438}$$

می‌خواهیم جذر ۱۴۳۸ را با تقریب نقصانی کمتر از ۱ به دست آوریم. از سمت راست عدد، دو رقم دو رقم جدا می‌کنیم؛ در این جا پس از جدا کردن دو رقم اول، دو رقم ۴ و ۱ باقی می‌مانند.

$$\begin{array}{r} \sqrt{1438} \quad 3 \\ 9 \\ \hline 5 \end{array}$$

جذر تقریبی ۱۴ (یعنی ۳) را می‌نویسیم و مجذور آن را از ۱۴ کم می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} \sqrt{1438} \quad 3 \\ 9 \\ \hline 538 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \times 2 = 6 \\ 68 \times 8 = 544 \end{array}$$

دو رقم بعدی را پایین می‌آوریم؛ عدد ۳ را دو برابر می‌کنیم. حالا از رقم یکان عدد ۵۳۸ صرف‌نظر می‌کنیم و عدد ۵۳ را بر ۶ تقسیم می‌کنیم. خارج قسمت (یعنی ۸) را در سمت راست ۶ می‌نویسیم و حاصل ضرب 68×8 را با ۵۳۸ مقایسه می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} \sqrt{1438} \quad 37 \\ 9 \\ \hline 538 \\ 469 \\ \hline 69 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3 \times 2 = 6 \\ \cancel{68 \times 8 = 544} \\ 67 \times 7 = 469 \end{array}$$

در این جا، چون حاصل ضرب 68×8 از ۵۳۸ بیشتر است، به جای ۸، عدد ۷ را قرار می‌دهیم و حاصل ضرب 67×7 را از ۵۳۸ کم می‌کنیم؛ باقی‌مانده ۶۹ است. اکنون ۷ را در سمت راست ۳ می‌نویسیم و محاسبه تمام می‌شود.

جذر ۱۴۳۸ با تقریب نقصانی کمتر از ۱، برابر است با

۳۷.





جذر هریک از عددهای زیر را با تقریب نقصانی کمتر از ۱ حساب کنید.

۱۵۹۲

۲۴۱۷

۷۸۰۳

$$\sqrt{796}$$

اکنون با کامل کردن محاسبه‌های روبه‌رو، جذر ۷۹۶ را به‌دست آورید.

$$\sqrt{796}$$

دو رقم اول را جدا کنید؛ یک رقم ۷ باقی می‌ماند. جذر تقریبی ۷ را بنویسید و مجذور آن را از ۷ کم کنید.

$$\begin{array}{r} \sqrt{796} \quad 2 \\ 4 \quad 2 \times 2 = 4 \\ \hline 396 \quad 49 \times 9 = 441 \end{array}$$

دو رقم بعدی را پایین بیاورید؛ عدد ۳۹۶ به‌دست می‌آید. عدد ۲ را دو برابر کنید. از رقم یکان ۳۹۶ صرف‌نظر کنید و ۳۹ را بر دو برابر ۲ تقسیم کنید. خارج قسمت (یعنی ۹) را در سمت راست ۴ بنویسید و حاصل ضرب 49×9 را با ۳۹۶ مقایسه کنید.

$$\begin{array}{r} \sqrt{796} \quad 2 \\ 4 \quad 2 \times 2 = 4 \\ 396 \quad \cancel{49 \times 9 = 441} \\ 48 \times 8 = \end{array}$$

چون حاصل ضرب 49×9 از ۳۹۶ بیشتر است، به‌جای ۹، عدد ۸ قرار دهید؛ سپس، حاصل ضرب 48×8 را از ۳۹۶ کم کنید و باقی‌مانده را پیدا کنید.

حالا ۸ را در سمت راست ۲ بنویسید. و رابطه‌ی مقابل را کامل کنید. $\sqrt{796} \approx$



جذر هریک از عددهای زیر را با تقریب نقصانی کمتر از ۱ به‌دست آورید.

$$\sqrt{521}$$

$$\sqrt{201}$$

$$\sqrt{675}$$

جذر اعداد اعشاری



به مجذور هر یک از عددهای اعشاری زیر توجه کنید.

$$(0/6)^2 = 0/36 \quad (1/2)^2 = 1/44 \quad (2/15)^2 = 4/6225$$

بین تعداد رقم‌های اعشار در دو طرف تساوی، چه رابطه‌ای می‌بینید؟

مشاهده می‌کنید که اگر یک عدد اعشاری را مجذور کنیم، تعداد رقم‌های اعشاری مجذور زوج است؛ پس، برای یافتن جذر یک عدد اعشاری، ابتدا به تعداد رقم‌های اعشاری آن توجه می‌کنیم. در صورتی که تعداد ارقام اعشاری آن فرد باشد، یک صفر در سمت راست آن قرار می‌دهیم تا تعداد ارقام اعشاری زوج شود. اکنون بدون در نظر گرفتن ممیز، جذر را محاسبه می‌کنیم.

در آخر، ممیز جذر و باقی‌مانده را درج می‌کنیم؛ با توجه به

$\sqrt{5.42/0.80}$ -4 <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 2px 0;"/> 142 -129 <hr style="border: 0; border-top: 1px solid black; margin: 2px 0;"/>	$23/2$ $2 \times 2 = 4$ $43 \times 3 = 129$
--	---

این که همواره

۱- تعداد ارقام اعشاری جذر، نصف تعداد ارقام اعشاری

عدد اصلی است.

۲- تعداد ارقام اعشاری باقی‌مانده، مساوی تعداد ارقام

اعشاری عدد اصلی است. اکنون جذر مقابل را کامل کنید.

کار در کلاس



جذرهای زیر را تا یک رقم اعشار حساب کنید.

$$\sqrt{74/0.0} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{8/4} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\sqrt{42/7} \quad \underline{\hspace{2cm}}$$



امتحان جذر

- اگر یک جذر را درست انجام داده باشیم،
الف - دو برابر جذر به اضافه ی ۱ از باقی مانده ی جذر بزرگ تر است.
ب - مجذور جذر به اضافه ی باقی مانده، مساوی عدد داده شده است.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{14038} & 37 \\ 9 & 3 \times 2 = 6 \\ \hline 538 & \cancel{68 \times 8 = 544} \\ 469 & 67 \times 7 = 469 \\ \hline 69 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 2 \times 37 + 1 = 75, 75 > 69 \\ (37)^2 + 69 = 14038 \end{array}$$

اگر در محاسبه ی جذر پیشروی داشته باشیم یا بخواهیم جذر یک عدد اعشاری را بگیریم، در مورد قسمت الف قبل از درج ممیزها، امتحان جذر را انجام می دهیم.

کار در کلاس



در کدام یک از موارد زیر، جذر درست محاسبه شده است؟

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{15/30} & 3/9 \\ 9 & 2 \times 3 = 6 \\ \hline 630 & 69 \times 9 = 621 \\ 621 & \\ \hline 0/09 & \end{array} \quad \text{الف)}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{7/45} & 2/7 \\ -4 & 2 \times 2 = 4 \\ \hline 345 & \cancel{48 \times 8 = 384} \\ 329 & 47 \times 7 = 329 \\ \hline 0/16 & \end{array} \quad \text{ب)}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{9/50000} & 3/07 \\ 9 & 2 \times 3 = 6 \\ \hline 50 & 60 \times 0 \\ \hline 0 & 2 \times 30 = 60 \\ 5000 & 607 \times 7 = 4249 \\ 4249 & \\ \hline 0/0751 & \end{array} \quad \text{پ)}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{982/60} & 31/3 \\ 9 & 2 \times 3 = 6 \\ \hline 082 & 61 \times 1 = 61 \\ 61 & \\ \hline 2160 & 2 \times 31 = 62 \\ 1869 & 623 \times 3 = 1869 \\ \hline 2/91 & \end{array} \quad \text{ت)}$$



در هریک از تمرین‌های زیر پس از محاسبه‌ی جذر، آن را امتحان کنید.
۱- جذرهای زیر را حساب کنید.

$$\sqrt{5039} \quad \sqrt{947}$$

۲- جذر ۲ و جذر ۳ را تا دو رقم اعشار به دست آورید.

$$\begin{array}{r} \sqrt{2/0.0000} \quad 14 \\ -1 \\ \hline 1000 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \times 1 = 2 \\ 25 \times 5 = 125 \\ 24 \times 4 = 96 \end{array} \quad \sqrt{3}$$



۱- جذر هریک از عددهای زیر را حساب کنید و در هر مورد، جذر را امتحان کنید.

$$2601 \quad 7044 \quad 4356$$

۲- جذر هریک از اعداد زیر را تا دو رقم اعشار به دست آورید.

$$73/8 \quad 520 \quad 7 \quad 10$$

- رسم شکل
- جدول نظام‌دار
- الگویابی
- حذف حالت‌های نامطلوب
- زیر مسئله
- حل مسئله‌ی ساده‌تر
- تشکیل معادله
- حدس و آزمایش



۱- حجم یک مکعب مستطیل با قاعده‌ی مربع و ارتفاع ۷ سانتی متر، ۴۴۱ سانتی متر مکعب است. ضلع قاعده‌ی مربع را تا یک رقم اعشار به دست آورید.
۲- برای رنگ کردن سطح دیوار، با هریک کیلوگرم رنگ تقریباً ۸ متر مربع را می‌توان به طور کامل رنگ کرد. اگر ۴ کیلوگرم رنگ در اختیار داشته باشیم، ضلع بزرگ‌ترین مربعی که می‌توان رنگ کرد، تقریباً چند سانتی متر است؟

مجموعه‌ی عددهای صحیح

نمایش مجموعه‌ی عددهای صحیح

هریک از عددهای $\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ و \dots را یک عدد صحیح می‌نامیم.
مجموعه‌ی اعداد صحیح را به صورت

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

نشان می‌دهند.

کار در کلاس



محور اعداد را رسم کرده و اعداد صحیح را روی آن مشخص کنید و عبارت‌های زیر را با نوشتن \in یا \notin کامل کنید.

$$-25 \circ \mathbb{Z}$$

$$0 \circ \mathbb{Z}$$

$$+238 \circ \mathbb{Z}$$

$$-\frac{2}{3} \circ \mathbb{Z}$$

$$0/35 \circ \mathbb{Z}$$

$$\sqrt{2} \circ \mathbb{Z}$$

– آیا کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین عدد صحیح را می‌توان مشخص کرد؟ چرا؟
– کوچک‌ترین عدد صحیح مثبت و بزرگ‌ترین عدد صحیح منفی را مشخص کنید.



فعالیت

مجموعه‌ی عددهای صحیح بین -3 و 4 را نوشته و آن‌ها را روی محور مشخص کنید.



این مجموعه را با نمادهای ریاضی نیز می‌توان بیان کرد.

$$\{x \mid x \in \mathbb{Z} \text{ و } -3 < x < 4\}$$

$x \mid x \in \mathbb{Z}$ را می‌خوانیم؛ x به‌طوری که x عضو مجموعه‌ی \mathbb{Z} است.

مجموعه‌ی اعداد صحیح کوچک‌تر از ۲- را بنویسید و آنها را روی محور مشخص کنید.



این مجموعه را با نمادهای ریاضی نشان دهید.

کاردرکلاس



۱- هریک از مجموعه‌های زیر را با نمادهای ریاضی مشخص کنید.

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, \emptyset\} = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, \quad\quad\}$$

$$B = \{7, -8, -9, 0\} =$$

$$C = \{7, -6, -5, 0\} =$$

۲- مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

$$D = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, 0 < x < 5\} =$$

$$E = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x < 6\} =$$

$$F = \{x \mid x \in \mathbb{Z}, x > 2\} =$$

۳- درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را مشخص کنید. هر جا لازم است از مجموعه‌های بالا استفاده کنید.

$$5 \in \mathbb{Z} \quad \quad \quad 0 \in \mathbb{N} \quad \quad \quad -38 \in \mathbb{Z}$$

$$-5 \in \mathbb{N} \quad \quad \quad -20 \in \mathbb{B} \quad \quad \quad 12 \in \mathbb{C}$$

$$4 \in \mathbb{D} \quad \quad \quad 6 \in \mathbb{E} \quad \quad \quad 0 \in \mathbb{F}$$

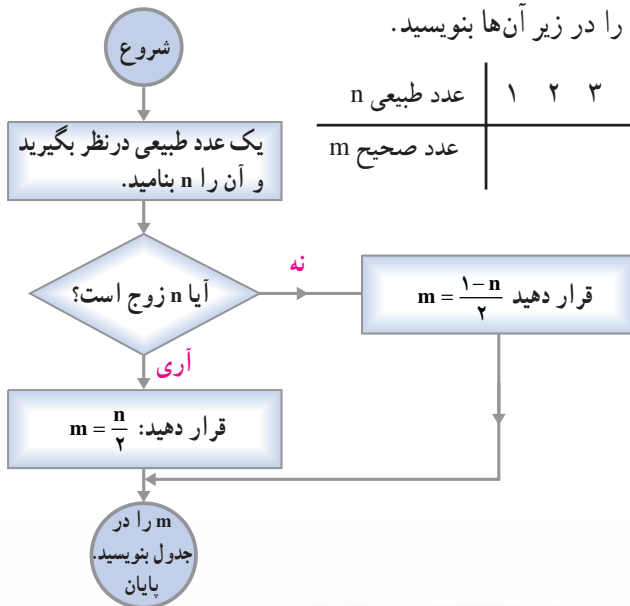
۴- گزینه‌های عددی زیر را به‌دست آورید.

عدد	-۱۲	-۸	۱۵	۰	-۳۵	۱۴
گزینه						





عددهای طبیعی جدول زیر را به ترتیب، در ورودی نمودار قرار دهید. عددهای صحیح به دست آمده را در زیر آنها بنویسید.



عدد طبیعی n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
عدد صحیح m									



۱- در هریک از عبارت‌های زیر، یکی از نمادهای \in یا \notin را که درست است، به جای \bigcirc

قرار دهید و یک عبارت درست بنویسید.

$\frac{3}{5} \in \mathbb{N}$	$0 \in \mathbb{N}$	$-2/3 \in \mathbb{Z}$	$\sqrt{4} \in \mathbb{N}$
$-\frac{6}{2} \in \mathbb{Z}$	$-(-2) \in \mathbb{N}$	$\frac{12}{-4} \in \mathbb{Z}$	$5^3 \in \mathbb{N}$
$5^{+3} \in \mathbb{Z}$	$-12 \in \mathbb{Z}$	$12 \sqcap 18 \in \mathbb{N}$	$\sqrt{2} \in \mathbb{N}$

۲- نمایش هر یک از مجموعه‌های زیر را با مشخص کردن اعضای آنها بنویسید.

– مجموعه‌ی A شامل عددهای طبیعی بین ۱ و ۱۰

– مجموعه‌ی B شامل عددهای زوج بین ۳ و ۱۵

– مجموعه‌ی C شامل قرینه‌های اعضای مجموعه‌ی A

$$D = \{x | -x \in \mathbb{B}\}$$

$$E = \{x | x \in \mathbb{N}, x < 0\}$$

$$F = \{x | x \in \mathbb{N}, x < \}$$

$$G = \{x | x \in \mathbb{N}, 53 < x\}$$

$$H = \{x | x \in \mathbb{Z}, x < \}$$

$$I = \{x | x \in \mathbb{Z}, -8 < x < \}$$

$$J = \{x | -x \in \}$$

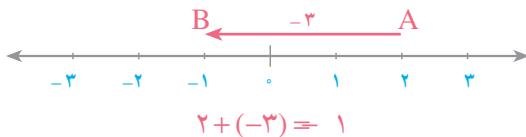


۳- در هر کدام از مجموعه‌های تمرین ۲، در صورتی که کوچک‌ترین عضو وجود دارد، آن را مشخص کنید.

۴- مجموعه‌های زیر را با نمادهای ریاضی بنویسید.

$\{-8, -7, -6, \dots, 4\}$	$\{-35, -36, -37, \dots\}$
$\{-4, -3, -2, \dots\}$	$\{15, 16, 17, \dots\}$
$\{15, 14, 13, \dots, 0\}$	$\{15, 14, 13, \dots\}$

جمع عددهای صحیح



جمع عددهای صحیح و گویا را سال گذشته یاد گرفته‌اید. برای نوشتن جمع عددهای علامت‌دار، مختصرنویسی می‌کنیم و فقط عددها را با علامتشان به دنبال یک‌دیگر می‌نویسیم. مانند نمونه‌ها، عبارت‌ها را مختصر کنید.

$(+12) + (-8) = 12 - 8$	$(+\frac{3}{5}) + (-\frac{1}{8}) = \frac{3}{5} - \frac{1}{8}$
$(-9) + (+5) =$	$(-\frac{2}{9}) + (+\frac{5}{12}) =$
$(-7) + (-11) =$	$(-7) + (-\frac{1}{3}) =$

کار در کلاس

۱- عبارت‌های زیر را با برداشتن پرانتز، مختصر کنید.

$(-8) + (+15) = -8 + 15$	$(+13) + (-10) =$
$(+\frac{2}{5}) + (+\frac{1}{5}) =$	$(+8) + (+5) =$
$(-\frac{3}{7}) + (-\frac{2}{9}) =$	$(-15) + (-6) =$
$(-\frac{3}{5}) + (+\frac{4}{5}) =$	$(+\frac{8}{13}) + (-\frac{3}{2}) =$



۲- با گذاشتن پرانتز، هر کدام از عبارت‌های زیر را به صورت مجموع دو عدد علامت‌دار بنویسید.

$$-۸+۱۴=(-۸)+(۱۴) \quad +۳-۱۲=$$

$$+۹-۵= \quad -۱۷-۱۵=$$

$$-\frac{۶}{۵}+\frac{۹}{۴}= \quad +\frac{۱}{۶}+\frac{۵}{۹}=$$

$$+\frac{۴}{۳}-\frac{۷}{۲}= \quad -\frac{۲}{۷}-\frac{۳}{۸}=$$

اینک، روش محاسبه‌ی حاصل جمع را یادآوری می‌کنیم. گاهی با برداشتن پرانتز و جابجایی، مجموع دو عدد صحیح به جمع یا تفریق عددهای طبیعی تبدیل می‌شود. در این موارد، محاسبه‌ی حاصل جمع به سادگی انجام می‌شود.

$$(+۱۲)+(+۷)=۱۲+۷=۱۹$$

$$(+۱۳)+(-۴)=۱۳-۴=۹$$

$$(-۵)+(+۷)=۵+۷=۷-۵=۲$$

هرگاه با برداشتن پرانتز، جمع یا تفریق عادی به دست نیاید، از قرینه‌یابی استفاده می‌کنیم. قرینه‌یابی، عبارت‌ها را به همان حالت‌های بالا تبدیل می‌کند.

$$(-۱۲)+(-۷)=۱۲-۷=(۱۲+۷)=۱۹$$

$$(-۱۳)+(+۴)=۱۳-۴=(۱۳-۴)=۹$$

$$(+۵)+(-۷)=۵-۷=(۷-۵)=۲$$

کار در کلاس



۱- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$۱۳-۹=$$

$$-۷+۱۰=$$

$$-۵-۷=$$

$$-۸+۷=$$

$$-۴+۹=$$

$$-۹+۴=$$

$$۴۵-۸۵=$$

$$-۶۷-۸۵=$$

$$۹۷-۱۱۵=$$

۲- حاصل جمع‌های زیر را حساب کنید. ابتدا با برداشتن پرانتز، آن‌ها را

مختصر کنید و سپس، مانند بالا حاصل جمع را به دست آورید.

$$(-۱۲)+(+۱۷)$$

$$(-۱۴)+(+۱۰)$$

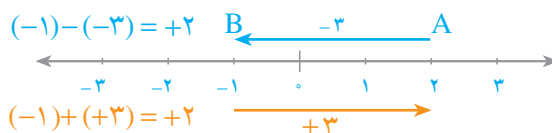
$$(-۹)+(-۷)$$

$$(+۹)+(-۱۵)$$

$$(-۴۵)+(+۴۵)$$

$$(-۶۲)+(-۳۸)$$

تفریق عددهای صحیح



در سال‌های قبل دیدید که برای تفریق کردن عدد b از عدد a ، می‌توانیم قرینه‌ی b را با a جمع

$$a - b = a + (-b)$$

کنیم:

به مثال‌های زیر توجه کنید:

$$(-1) - (-3) = (-1) + (+3) = -1 + 3 = 2$$

$$(-5) - (+4) = (-5) + (-4) = -5 - 4 = -9$$

بنابراین، برای محاسبه‌ی حاصل تفریق، ابتدا تفریق را به جمع تبدیل می‌کنیم و سپس، حاصل

جمع را به‌دست می‌آوریم.

کار در کلاس

۱- با تبدیل تفریق به جمع، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$(-5) - (+3) = (-5) + (-3)$$

$$(+3) - (+4) =$$

$$(-2) - (-8) =$$

$$(-6) - (-7) =$$

۲- تفریق‌های زیر را ابتدا به جمع تبدیل کنید و سپس با برداشتن پرانتز، حاصل

آنها را به‌دست آورید.

$$(+8) - (+5) =$$

$$(-5) - (+14) =$$

$$(-9) - (-3) =$$

$$(+12) - (-15) =$$



به تساوی‌های زیر توجه کنید.

$$(+8) - (+5) = (+8) + (-5) = 8 - 5$$

$$(-9) - (-3) = (-9) + (+3) = -9 + 3$$

با توجه به این دو تساوی، چگونگی مختصر کردن عبارت‌های تفریق را نتیجه بگیرید. با استفاده از نتیجه‌ای که گرفته‌اید، تساوی‌ها را کامل کنید.

$$(+8) - (+5) =$$

$$(-7) - (-4) =$$

$$(-9) - (-3) =$$

$$(+7) - (+4) =$$

کار در کلاس



۱- عبارت‌های زیر را با برداشتن پرانتز مختصر کنید.

$$(-6) - (-7) = -6 + 7$$

$$(-6) + (+7) =$$

$$(+8) - (+12) =$$

$$(+8) + (-12) =$$

$$(-5) - (+11) =$$

$$(-5) + (-11) =$$

۲- حاصل هریک از عبارت‌های زیر را حساب کنید. ابتدا با برداشتن پرانتز عبارت را مختصر کنید.

$$(-9) - (-3) =$$

$$(+25) + (-36) =$$

$$(-12) + (-18) =$$

$$(+4) - (+18) =$$

$$(-65) - (-145) =$$

$$(-42) - (+58) =$$



۱- هریک از عبارت‌های زیر را ابتدا با برداشتن پرانتز مختصر کنید و سپس، حاصل آن را حساب کنید.

$$(-8) - (+12)$$

$$(+13) + (-5)$$

$$(+8) - (+17)$$

$$(-35) - (-15)$$

$$(+47) - (-12)$$

$$(-9) + (-25)$$

۲- هریک از عبارت‌های زیر را تا می‌توانید ساده کنید.

$$((+1) - (-8)) + ((+4) - (+6))$$

$$((+3) + (-5)) - ((+7) + (-2))$$

۳- حاصل هریک از عبارت‌های زیر را حساب کنید.

$$+14 - 9$$

$$5 + 8$$

$$5 - 12$$

$$-8 + 17$$

$$-8 + 7$$

$$-5 - 12$$

$$-5 - 8$$

$$-9 + 17$$

۴- هریک از مجموعه‌های زیر را به صورت‌هایی که قبلاً دیده‌اید، بیان کنید. مشخص کنید که هر مجموعه کوچک‌ترین عضو یا بزرگ‌ترین عضو دارد یا نه.

الف - مجموعه‌ی اعداد صحیح بین ۵- و ۱ و

ب - مجموعه‌ی عددهای صحیح مثبت

پ - مجموعه‌ی عددهای صحیح منفی

۵- در جای خالی، علامت + یا - قرار دهید تا حاصل عبارت، بزرگ‌ترین عدد ممکن شود.

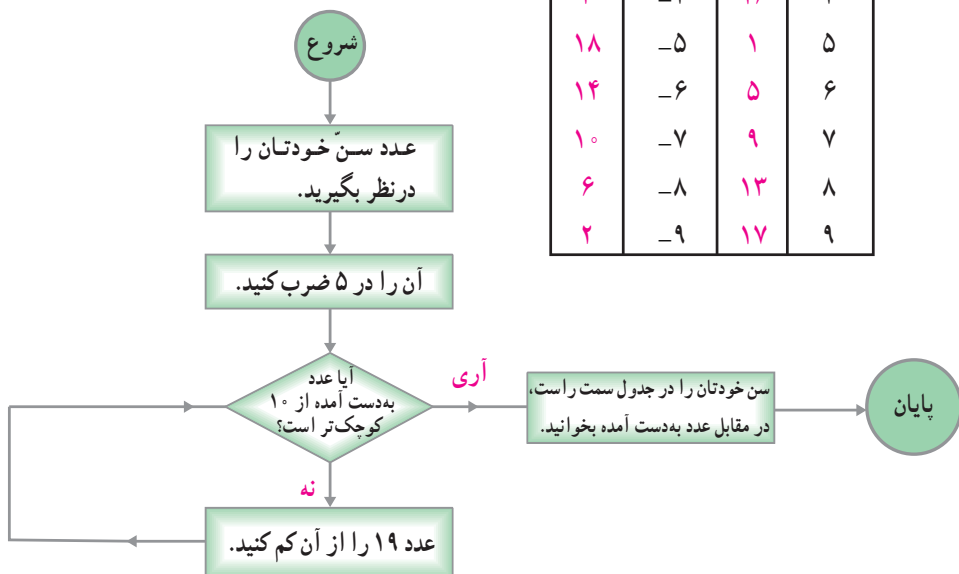
$$-5 \square (-6) \square (+3) \square (-9)$$

سرگرمی و ریاضی

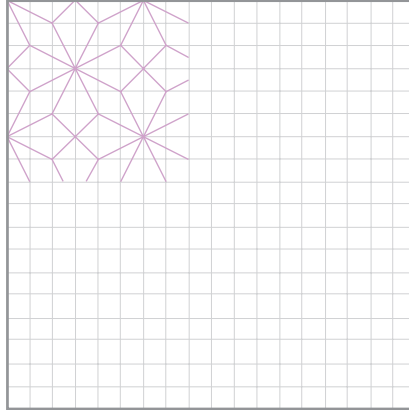


(برای سنین کمتر از ۱۹ سال)

سن شما	عدد به‌دست آمده	سن شما	عدد به‌دست آمده
۱۵	-۱	۴	۱
۱۱	-۲	۸	۲
۷	-۳	۱۲	۳
۳	-۴	۱۶	۴
۱۸	-۵	۱	۵
۱۴	-۶	۵	۶
۱۰	-۷	۹	۷
۶	-۸	۱۳	۸
۲	-۹	۱۷	۹



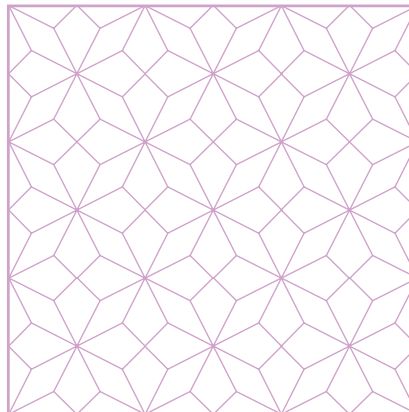
الف - با توجه به قسمت انجام شده در شکل زیر، بقیه‌ی شکل را کامل کنید.



ب -

- ۱- یک مربع 18×18 سانتی متری در وسط کاغذ رسم کنید. (کادربندی)
- ۲- هر ضلع مربع را به ۱۸ قسمت مساوی تقسیم کرده و یک صفحه‌ی شطرنجی درست کنید.
- ۳- مطابق شکل بالا و تمرینی که در قسمت الف انجام دادید، خط‌های مایل را رسم کنید.
- ۴- خطوط شطرنجی را پاک کنید تا شکل نهایی زیر به دست آید.

پ - شکل نهایی



ث - با توجه به این که تعداد زیادی از خطوط در پایان رسم پاک می‌شوند، برای تمیز ماندن رسم چاره‌ای بیندیشید. در این رسم، در امتداد هم بودن خطوط مایل و یک‌دست بودن همه‌ی خطوط، اهمیت زیادی دارد.

مجموعه‌ی عددهای گویا

معرفی اعداد گویا

در سال گذشته، با کسرهایی به صورت $\frac{2}{5}$ ، $\frac{-7}{3}$ ، $\frac{4}{-5}$ و نظایر آن‌ها آشنا شدید. به طور کلی، هر عدد به صورت $\frac{a}{b}$ که در آن a و b اعدادی صحیح باشند و $b \neq 0$ ، را عدد گویا می‌نامیم.

مجموعه‌ی عددهای گویا را به صورت $Q = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$ نمایش می‌دهیم. عبارت‌ها را با \in یا \notin کامل کنید.

$$5 \in Q, \quad -8 \in Q, \quad 0/3 \in Q, \quad -4/25 \in Q, \quad \sqrt{2} \in Q$$

کار در کلاس

۱- هریک از عددهای زیر را به صورت کسر علامت‌دار بنویسید و در صورت امکان، آن‌ها را ساده کنید.

$$-0/3 =$$

$$-4/25 =$$

$$-8 =$$

$$5 =$$

۲- می‌دانیم $\sqrt{2}$ عددی گویا نیست. کدام یک از عددهای زیر گویا هستند؟

$$\sqrt{4}$$

$$\sqrt{8}$$

$$\sqrt{50}$$

$$\sqrt{4/5}$$

$$\sqrt{2} + 1$$

۳- درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \text{ ————— } \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \text{ ————— } \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \text{ ————— } \mathbb{Z} \subset \mathbb{N} \text{ —————}$$

هر عدد صحیح یک عدد گویاست.

هر عدد گویا را می‌توان به صورت یک کسر متعارفی مثبت نوشت.

هر عدد گویای غیرصفر را می‌توان به صورت یک کسر متعارفی

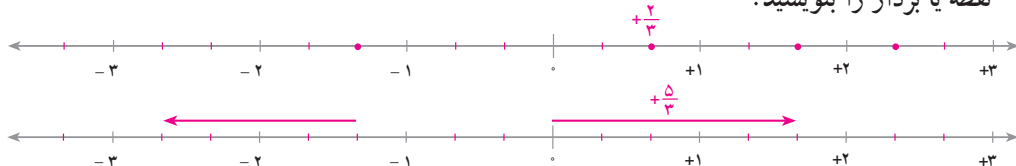
علامت‌دار نوشت.

غیر از اعداد گویا، عددی وجود ندارد.

نمایش اعداد گویا روی محور

هر عدد گویا را می‌توان با نقطه‌ای روی محور یا با یک بردار مشخص کرد. عدد متناظر با هر

نقطه یا بردار را بنویسید.



کار در کلاس

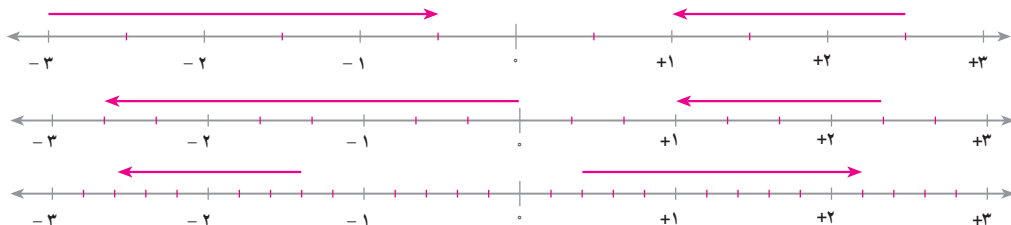
۱- عدد گویای متناظر با هریک از نقاط مشخص شده را بنویسید.



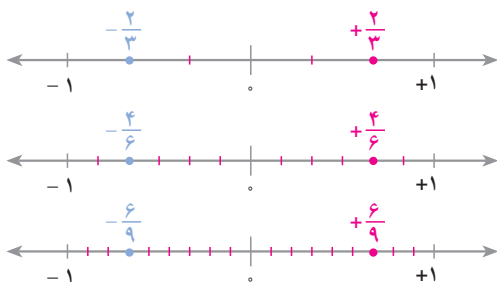
۲- نقطه‌ی نمایش هر عدد را روی محور کنار آن مشخص کنید.



۳- عدد متناظر با هر بردار را بنویسید.



تساوی کسرها و کسر علامت دار



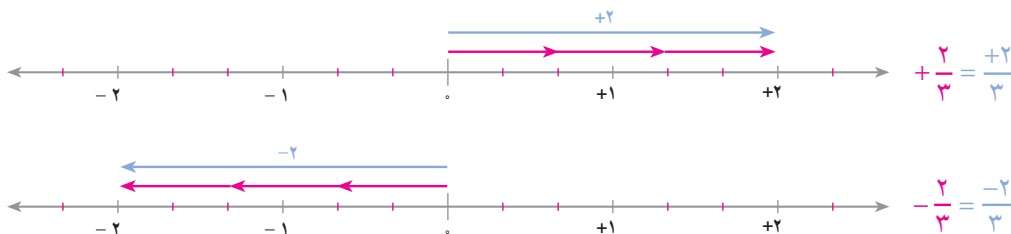
$$+\frac{2}{3} \equiv \frac{4}{6} \equiv \frac{6}{9} = \dots$$

$$-\frac{2}{3} \equiv -\frac{4}{6} \equiv -\frac{6}{9} = \dots$$

همان طور که ملاحظه می کنید، می توان صورت و مخرج یک کسر (مثبت یا منفی) را در یک عدد (غیر از صفر) ضرب یا در صورت امکان، بر یک عدد (غیر از صفر) تقسیم کرد.

$$-\frac{3}{5} \equiv \frac{12}{20} \quad +\frac{1}{2} \equiv \frac{6}{12}$$

اکنون با توجه به شکل های زیر، نوعی دیگر از علامت کسرها را می توان تعیین کرد.



کار در کلاس

۱- هریک از تساوی های زیر را با نوشتن سه کسر دیگر ادامه دهید.

$$-\frac{4}{7} \equiv \frac{8}{14} = \dots$$

$$+\frac{2}{5} \equiv \frac{4}{10} = \dots$$

$$+\frac{8}{3} \equiv \frac{16}{6} = \dots$$

$$-\frac{17}{11} \equiv \frac{34}{22} = \dots$$

۲- تساوی های زیر را کامل کنید.

$$-\frac{12}{15} \equiv \frac{\quad}{5}$$

$$-\frac{7}{21} \equiv \frac{1}{\quad}$$

$$-\frac{2}{3} = \frac{\quad}{3}$$

$$\frac{-4}{11} =$$

$$\frac{-35}{42} = \frac{\quad}{6}$$

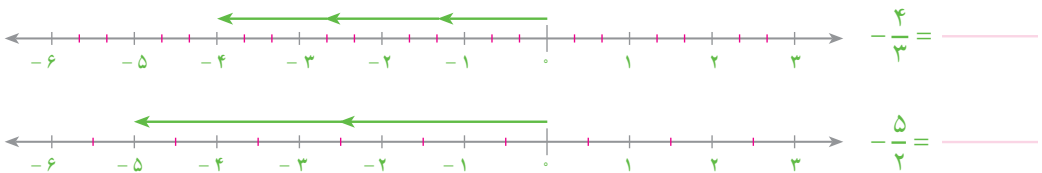
$$\frac{-6}{12} =$$



۱- یک محور رسم کرده و هر واحد آن را به ۵ قسمت مساوی تقسیم کنید. حالا نقطه‌ی نمایش هریک از عددهای زیر را روی آن مشخص و نام‌گذاری کنید.

$$-\frac{4}{5} \qquad +3\frac{1}{5} \qquad -2\frac{3}{5} \qquad -\frac{8}{5}$$

۲- عدد متناظر با هر بردار را روی آن بنویسید و تساوی مربوط را کامل کنید.

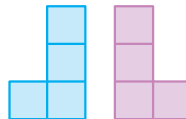
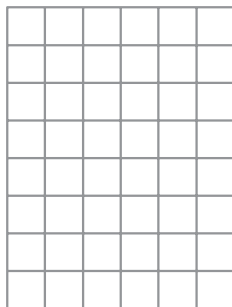


۳- تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$-\frac{4}{9} = \frac{\quad}{27} \qquad \frac{-8}{5} = \qquad -\frac{42}{56} = \frac{6}{\quad}$$

۴- کسرهای زیر را با استفاده از بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک صورت و مخرج ساده کنید.

$$-\frac{42}{56} \qquad -\frac{90}{126} \qquad \frac{85}{187}$$



بهرام می‌خواهد سطح مستطیل را با قطعات چوب به شکل‌های بالا بپوشاند.
روش کار را نشان دهید.



جمع و تفریق عددهای گویا

در جمع و تفریق کسره‌های علامت‌دار نیز مانند عددهای صحیح، ابتدا با برداشتن پرانتز عبارت را مختصر می‌کنیم. با توجه به نمونه، عبارت‌های زیر را مختصر کنید.

$$\left(+\frac{5}{8}\right) - \left(-\frac{7}{8}\right) = \frac{5}{8} + \frac{7}{8}$$

$$\left(+\frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{7}{8}\right) =$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right) + \left(-\frac{4}{5}\right) =$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right) =$$

سپس، حاصل عبارت مختصر شده را با توجه به آنچه در مورد عددهای صحیح دیدید، به‌دست می‌آوریم.

$$\frac{5}{8} + \frac{7}{8} = \frac{5+7}{8} = \frac{12}{8}$$

$$\frac{5}{8} - \frac{7}{8} = \frac{5-7}{8} =$$

$$-\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{-3+4}{5} =$$

در صورتی که مخرج‌ها مساوی نباشند، مانند جمع و تفریق کسره‌های متعارفی، ابتدا کسرها را هم‌مخرج می‌کنیم و سپس، حاصل عبارت به‌دست آمده را حساب می‌کنیم.

$$\frac{5}{7} - \frac{3}{4} = \frac{20}{28} - \frac{21}{28} = \frac{-1}{28} =$$

$$\frac{6}{5} + \frac{7}{8} = \frac{48}{40} + \frac{35}{40} = \frac{83}{40} =$$

جمع و تفریق عددهایی که به‌صورت اعشاری نوشته شده‌اند، مانند عددهای صحیح است.

$$0/5 - 0/85 = (0/85 - 0/5) = 0/35$$

$$-2/3 - 5/8 = (2/3 + 5/8) =$$

$$-12/3 + 7 = (\quad) =$$

$$25 - 18/4 =$$





۱- هریک از عبارت‌های زیر را با برداشتن پرانتز، مختصر کنید.

$$\left(+\frac{7}{9}\right) + \left(-\frac{4}{9}\right) =$$

$$\left(\frac{7}{9}\right) - \left(-\frac{4}{9}\right) =$$

$$\left(-\frac{6}{11}\right) + \left(+\frac{8}{11}\right) =$$

$$\left(-\frac{6}{11}\right) - \left(+\frac{8}{11}\right) =$$

$$\left(-\frac{4}{7}\right) - \left(-\frac{5}{9}\right) =$$

$$\left(-\frac{6}{5}\right) + \left(-\frac{12}{25}\right) =$$

۲- حاصل هریک از عبارت‌های زیر را حساب کنید. در صورت امکان، جواب

را ساده کنید.

$$\frac{7}{9} - \frac{4}{9}$$

$$-\frac{6}{11} - \frac{8}{11}$$

$$-\frac{4}{5} + \frac{4}{5}$$

$$-\frac{3}{8} - \frac{15}{8}$$

۳- حاصل هریک از عبارت‌های زیر را حساب کنید. از کوچک‌ترین منفرجه

مشترب استفاده کنید.

$$-\frac{4}{15} + \frac{4}{5}$$

$$-\frac{3}{8} - \frac{5}{12}$$

$$-2 - \frac{5}{3}$$

$$-2 + \frac{3}{5}$$

۴- حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید. در هر جا که لازم است، از قرینه‌یابی

استفاده کنید.

$$-0/25 + 0/75 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-0/9 + 0/3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$12/8 - 15/4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-25 + 7/2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

۵- در جاهای خالی، عددهای مناسب بگذارید. ابتدا الگویی را که در جدول

وجود دارد، تشخیص دهید.

	-۰/۵		۰/۲۱
-۰/۷	۰/۲	+۰/۳۱	-۰/۱

ضرب و تقسیم عددهای گویا

×	+	-
+	+	-
-	-	+

برای به دست آوردن حاصل ضرب دو عدد، ابتدا علامت حاصل ضرب را تعیین می‌کنیم. با توجه به نمونه‌ها، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$(+2) \times (-3) = -6$$

$$(-5) \times (-4) =$$

$$(+\frac{1}{2}) \times (-\frac{1}{8}) = -\frac{1}{16}$$

$$(-\frac{1}{5}) \times (-\frac{1}{4}) =$$

$$(+\frac{3}{5}) \times (-\frac{4}{7}) = -\frac{12}{35}$$

$$(-\frac{3}{4}) \times (-\frac{4}{5}) =$$

برای محاسبه‌ی حاصل تقسیم دو عدد، عدد اول را در معکوس عدد دوم ضرب می‌کنیم. البته می‌توانیم ابتدا علامت حاصل را تعیین کنیم.

$$(+\frac{2}{3}) \div (-\frac{5}{7}) = -\frac{2}{3} \times \frac{7}{5} = -\frac{14}{15}$$

$$(-\frac{6}{35}) \div (-\frac{8}{21}) = +\frac{6}{35} \times \frac{21}{8} =$$

$$(-9) \div (+5) =$$

$$(-\frac{1}{8}) \div (-\frac{1}{3}) =$$

اکنون با توجه به تقسیم، کسرهایی را که صورت یا مخرج آن‌ها منفی است، می‌توان به صورت

ساده‌تر نوشت :

$$\frac{-3}{5} = (-3) \div 5 = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{3}{-5} = 3 \div (-5) = -\frac{3}{5}$$

$$\frac{-4}{-7} = (-4) \div (-7) = \frac{4}{7}$$



$$\frac{-3}{5} = \frac{3}{-5} = -\frac{3}{5}$$



$$\frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$$





۱- حاصل ضرب‌های زیر را به‌دست آورید.

$$(+5) \times (-8)$$

$$(+12) \times (+6)$$

$$(-9) \times (-4)$$

$$(-7) \times (+3)$$

$$\left(-\frac{4}{7}\right) \times (+14)$$

$$\left(-\frac{3}{11}\right) \times \left(+\frac{11}{6}\right)$$

$$(+0/4) \times (-8)$$

$$(-0/25) \times (-4)$$

۲- حاصل تقسیم‌های زیر را حساب کنید.

$$\left(-\frac{8}{9}\right) \div (-8)$$

$$\left(-\frac{4}{7}\right) \div \left(-\frac{5}{7}\right)$$

$$\left(-\frac{3}{8}\right) \div \left(-\frac{3}{8}\right)$$

$$1 \div \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$(+0/4) \div (-5)$$

$$(-0/84) \div 4$$

۳- هریک از عددهای زیر را به‌صورت یک کسر علامت‌دار بنویسید.

$$\frac{-8}{5}$$

$$\frac{4}{-9}$$

$$-\left(\frac{-1}{-6}\right)$$

$$-\left(\frac{-2}{+11}\right)$$

۴- حاصل ضرب‌های زیر را به‌دست آورید و در صورت امکان ساده کنید.

$$(-2) \times (+15)$$

$$45 \times (-12)$$

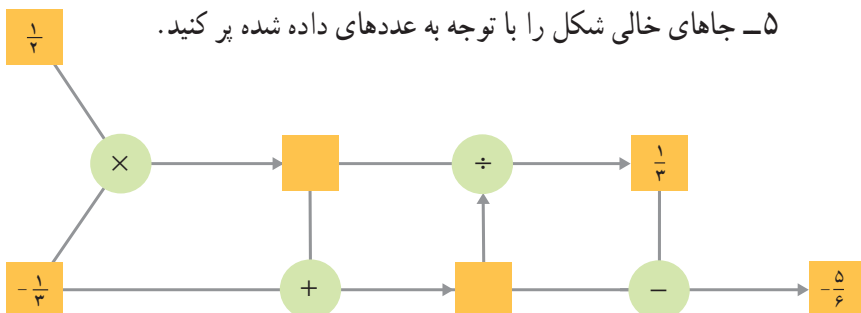
$$35 \times (-12)$$

$$\left(-\frac{12}{35}\right) \times \left(+\frac{5}{4}\right)$$

$$\left(-\frac{9}{7}\right) \times \left(+\frac{14}{3}\right)$$

$$(+8) \times \left(-\frac{1}{28}\right)$$

۵- جاهای خالی شکل را با توجه به عددهای داده شده پر کنید.





۱- حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید. ابتدا با برداشتن پرانتز، عبارت‌ها را

مختصر کنید.

$$\begin{array}{lll} (-\frac{6}{17}) + (-\frac{-8}{17}) & (+\frac{4}{13}) + (-\frac{9}{13}) & (-\frac{8}{15}) + (-\frac{7}{15}) \\ (-\frac{12}{35}) - (+\frac{11}{42}) & (-\frac{2}{63}) - (-\frac{5}{72}) & (+\frac{5}{77}) + (+\frac{7}{55}) \\ (-\frac{7}{12}) + (-3) & (-\frac{7}{12}) + (+3) & (+\frac{2}{5}) - (+4) \end{array}$$

۲- حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{ll} (-7) \times (-8) & (-4) \times (+6) \\ (+\frac{2}{11}) \times (-\frac{6}{9}) & (-\frac{1}{10}) \times (+\frac{8}{12}) \\ (-8) \div (+5) & (-12) \div (-28) \\ (-\frac{3}{5}) \div (+\frac{4}{5}) & (-\frac{7}{9}) \div (-\frac{28}{27}) \end{array}$$

۳- هریک از عددهای زیر را به صورت یک کسر علامت‌دار بنویسید.

$$-(\frac{5}{8}) \quad -(\frac{14}{-19}) \quad -(\frac{-5}{-13}) \quad -(\frac{3}{5})$$

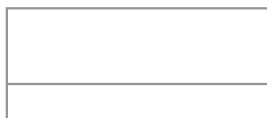
۴- حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

$$\begin{array}{ll} [(\frac{3}{5}) - (+\frac{2}{5})] \times \frac{5}{12} & (-\frac{3}{5}) \div (-\frac{2}{3} + \frac{5}{6}) \\ \frac{2}{5} - \frac{3}{5} - \frac{7}{5} + \frac{4}{5} & -\frac{3}{8} + \frac{1}{6} - \frac{8}{9} + 1 \end{array}$$



در شکل زیر، ۳ مستطیل می‌بینید.

خطی در این شکل رسم کنید که تعداد مستطیل‌ها ۶ تا شود.



مختصات و جبر

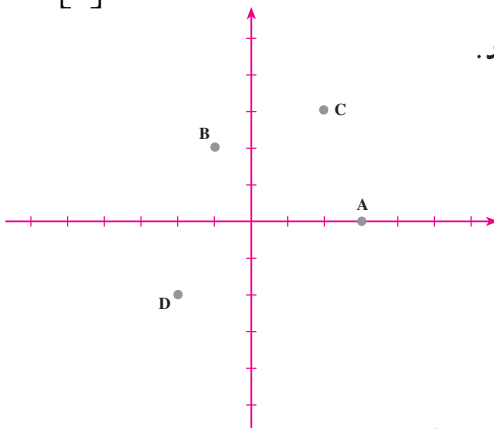


بردار

مختصات

در سال گذشته، دیدید که برای مشخص کردن نقاط صفحه، می‌توانیم دو محور عمود بر هم با مبدأ مشترک در صفحه رسم کنیم. این دو محور را دستگاه مختصات می‌نامیم. با وجود دستگاه مختصات،

هر نقطه با مختصاتش مشخص می‌شود. در شکل زیر، مختصات نقطه‌ی A به صورت زیر است: $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$



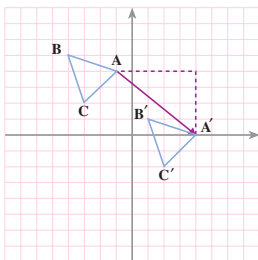
مختصات نقطه‌های B، C و D را بنویسید.

$$B = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

نقطه‌های $E = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ و $F = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ را در دستگاه مختصات بالا مشخص کنید.



در شکل روبه‌رو، مثلث ABC با بردار AA' انتقال داده شده است.

برای رسیدن از A به A' ، باید ۵ واحد در جهت مثبت محور

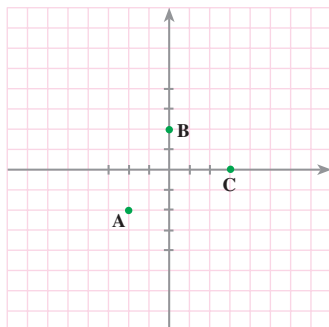
X ها و ۴ واحد در جهت منفی محور Y ها برویم؛ یعنی، طول نقطه‌ی A

را با (+۵) و عرض آن را با (-۴) جمع کنیم؛

پس، مختصات بردار AA' برابر است با: $\vec{AA'} = \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

جمع متناظر با آن بردار عبارت است از:



۱- با استفاده از شکل روبه‌رو

الف- مختصات نقاط A، B و C را پیدا

کنید.

$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

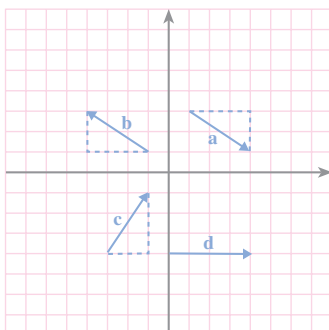
ب- نقاط با مختصات زیر را در شکل

مشخص کنید.

$$D = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

پ- بردارهای \vec{AB} ، \vec{BC} و \vec{AC} را رسم کرده و مختصات آن‌ها را پیدا کنید.

$$\vec{AB} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$



۲- مختصات هریک از بردارهای مقابل

را به‌دست آورید.

$$a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad d = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۳- مختصات ابتدا و انتهای هریک از بردارهای تمرین ۲ را پیدا کنید و متناظر

با هر بردار، یک جمع بنویسید.

۴- در هریک از قسمت‌های زیر، مختصات نوشته نشده را بنویسید.

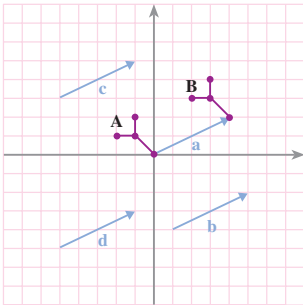
$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

تساوی بردارها



به شکل روبه‌رو توجه کنید. شکل A با بردار a انتقال داده شده و شکل B به دست آمده است. شکل A را با هر کدام از بردارهای b, c و d نیز انتقال دهید.

مختصات بردارهای a, b, c و d را بنویسید.

$$a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad d = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

در شکل بالا، بردارهای رسم شده موازی، هم‌اندازه و هم‌جهت هستند. این بردارها همه یک انتقال را نشان می‌دهند؛ پس، با هم مساوی‌اند.

$$a = b = c = d$$

کار در کلاس

۱- جمع متناظر با هریک از بردارهای بالا را بنویسید.

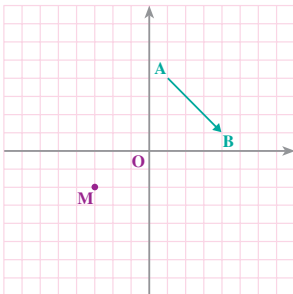
۲- مختصات بردار انتقال \vec{AB} را به دست آورید.

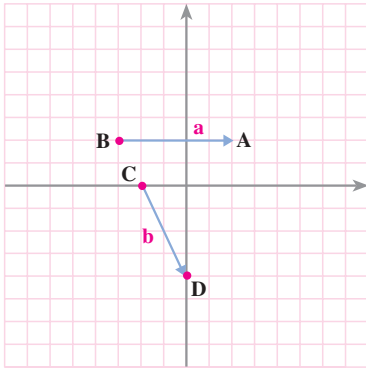
$$\vec{AB} =$$

۳- از نقطه‌ی O، بردار \vec{OC} را مساوی \vec{AB} رسم کرده و تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\vec{OC} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

۴- از نقطه‌ی M بردار \vec{MN} را مساوی \vec{AB} رسم کنید و با توجه به این بردار، یک تساوی جمع بنویسید.





۱- با استفاده از شکل روبه‌رو

الف - مختصات نقاط داده شده را بنویسید.

ب - مختصات بردارهای رسم شده را

بنویسید.

پ - متناظر با هر بردار و با استفاده از

مختصات ابتدا و انتهای آن، یک جمع بنویسید.

۲- محورهای مختصات را رسم کرده و نقاط زیر را روی آن مشخص کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -1 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

حالا بردارهای \vec{AB} و \vec{CD} را رسم کنید و مختصات آن‌ها را به دست آورید.

آیا این دو بردار مساوی‌اند؟ چهارضلعی ACDB چه نوع چهارضلعی‌ای است؟

۳- یک دستگاه محورهای مختصات رسم کرده و نقاط $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \end{bmatrix}$

را مشخص کنید؛ سپس، بردارهای \vec{AB} و \vec{BC} را رسم کنید و مختصاتشان را به دست آورید.

متناظر با هریک از بردارهای \vec{AB} و \vec{BC} ، یک جمع بنویسید.

۴- حاصل جمع‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

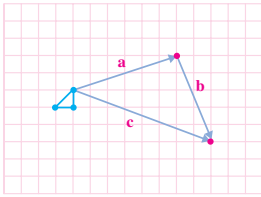
$$\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -6 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -7 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -3 \\ -3 \end{bmatrix} =$$



جمع بردارها



- ۱- در شکل مقابل، مثلث آبی رنگ را ابتدا با بردار a و سپس، با بردار b منتقل کنید.
- ۲- مثلث آبی رنگ را در یک مرحله با بردار c منتقل کنید.

۳- پاسخ های دو قسمت بالا را با هم مقایسه کنید.

۴- مختصات بردارهای a ، b و c را بنویسید. $a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$ $b = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$ $c = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$

۵- بین a ، b و c ، چه رابطه ای وجود دارد؟

۶- از این فعالیت، چه نتیجه ای برای جمع بردارها می گیرید؟

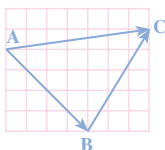
در شکل بالا، نتیجه ی دو انتقال a و b با انتقال بردار c یکی است؛ بنابراین:

$$a + b = c$$

کار در کلاس

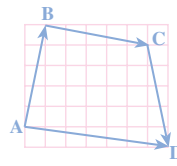
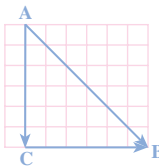


- ۱- با توجه به هریک از شکل های زیر، ابتدا یک تساوی جمع برداری بنویسید؛ سپس با به دست آوردن مختصات بردارها، تساوی متناظر را برای مختصاتشان بنویسید.



$$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$$

$$\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$



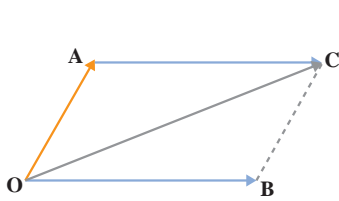
۲- حاصل جمع های زیر را به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 \\ -9 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix} =$$



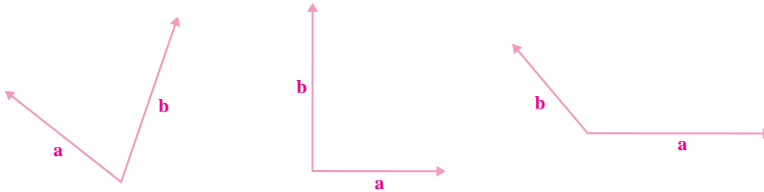
برای به دست آوردن حاصل جمع دو بردار \vec{OA} و \vec{OB} ، ابتدا از نقطه‌ی A برداری مساوی \vec{OB} رسم می‌کنیم و آن را \vec{AC} می‌نامیم. اینک حاصل جمع دو بردار \vec{OA} و \vec{OB} با حاصل جمع دو بردار \vec{OA} و \vec{AC} یکی است.

$$\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$$

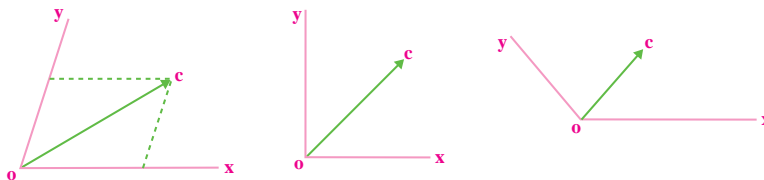
چهارضلعی OACB یک متوازی الاضلاع است (چرا؟)؛ بنابراین، برای به دست آوردن حاصل جمع دو بردار با ابتدای مشترک، می‌توانیم قطر متوازی الاضلعی را که دو بردار روی آن رسم می‌شود، به دست آوریم؛ این قاعده، **روش متوازی الاضلاع** نامیده می‌شود.

کار در کلاس

۱- در هر یک از حالت‌های زیر، بردار حاصل جمع دو بردار a و b را رسم کنید و یک تساوی جمع برداری بنویسید. بردار حاصل جمع را c بنامید.



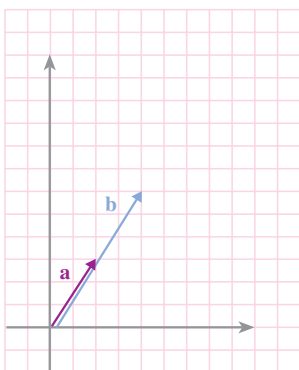
۲- در هر شکل، روی نیم خط‌های OX و OY دو بردار OA و OB را طوری مشخص کنید که حاصل جمع آن‌ها مساوی بردار OC شود.



۳- دو نفر برای کشیدن قایق در رودخانه از دو طناب استفاده کرده‌اند (به شکل روبه‌رو نگاه کنید). نیرویی که آن‌ها به قایق وارد می‌کنند، با دو بردار نشان داده شده است. با توجه به شکل، مسیر حرکت قایق را مشخص کنید.



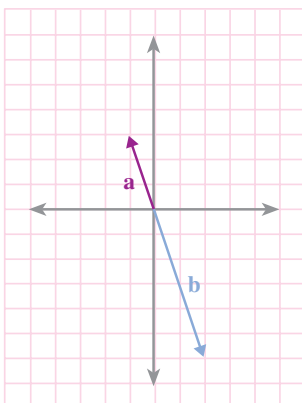
ضرب یک عدد در یک بردار



بردارهای a و b در یک امتداد و هم جهت اند.
مختصات آن‌ها را بنویسید.

$$a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

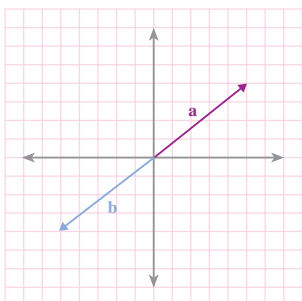
بین این دو بردار چه رابطه‌ای وجود دارد؟
رابطه‌ی بین مختصات آن‌ها را با یک تساوی
مختصاتی نشان دهید.



در شکل روبه‌رو، بردار b در امتداد بردار a
ولی در خلاف جهت آن است. با توجه به شکل،
مختصات آن‌ها را بنویسید.

$$a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

تساوی برداری و تساوی مختصاتی آن‌ها را
بنویسید.



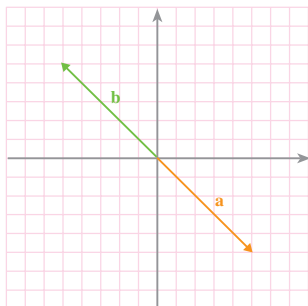
در شکل روبه‌رو، بردار b قرینه‌ی a است؛
یعنی:

$$b = -a$$

مختصات بردارها را بنویسید و تساوی
مختصاتی را نتیجه بگیرید.

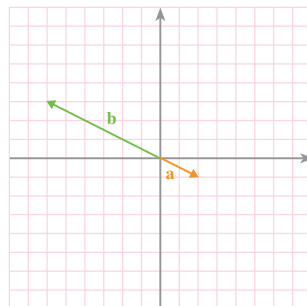
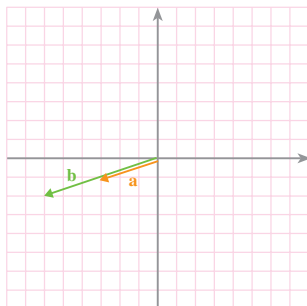
$$a = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad b = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

۱- با توجه به هر شکل، ابتدا یک تساوی برداری بنویسید؛ سپس، به جای هر بردار، مختصاتش را قرار دهید و تساوی متناظر مختصاتی را بنویسید.

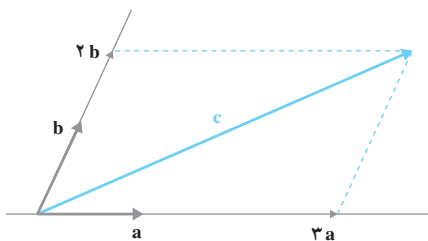


$$b = -a$$

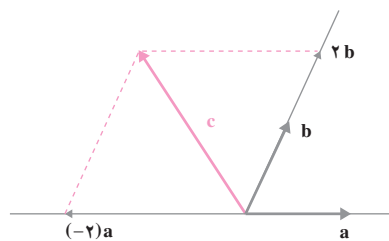
$$\begin{bmatrix} -5 \\ 5 \end{bmatrix} =$$



۲- در هر یک از شکل های زیر، بردار c را بر حسب بردارهای a و b بنویسید.

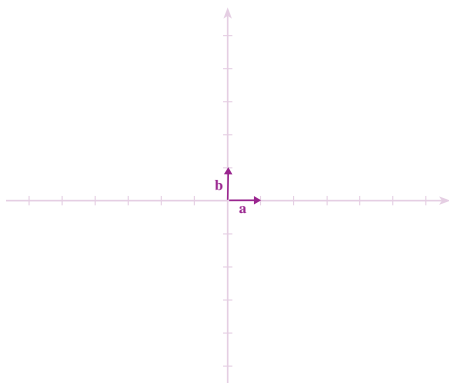


$$C =$$



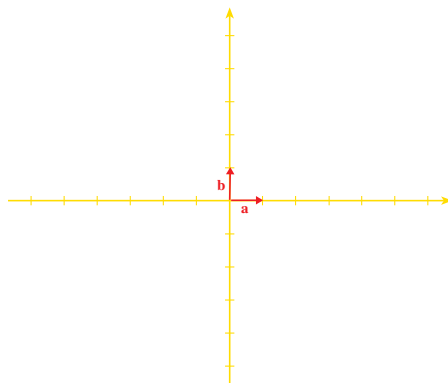
$$C =$$

۳- با توجه به تمرین ۲ در هر قسمت، بردارهای داده شده را رسم کنید.



$$c = 3a + 2b$$

$$d = (-2)a + 3b$$



$$c = 4a + (-2)b$$

$$d = (-4)a + b$$

۱- حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

$$(-1) \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (-2) \begin{bmatrix} -5 \\ 7 \end{bmatrix} \quad - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$(-2) \begin{bmatrix} 11 \\ -8 \end{bmatrix} + 6 \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

۲- در هریک از موارد زیر، مختصات بردار b و بردار a + b را حساب کنید.

الف - $a = \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \end{bmatrix}$, $b = 4a$ ب - $a = \begin{bmatrix} -5 \\ 6 \end{bmatrix}$, $b = (-4)a$

پ - $a = \begin{bmatrix} -\frac{3}{8} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $b = 8a$ ت - $a = \begin{bmatrix} -9 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b = a$

۳- در هریک از قسمت‌های زیر، بردارهای a, b, c و d را در یک دستگاه مختصات رسم کرده و مختصات بردار c را حساب کنید.

الف - $a = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $c = a + b$

ب - $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = 5d + 4e$

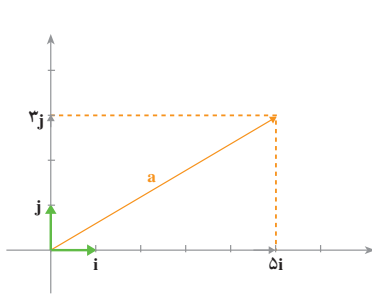
پ - $d = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $c = (-6)d + 2e$

۴- در هریک از معادله‌های زیر، مختصات بردار x را تعیین کنید.

الف - $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ب - $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} + x = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$

پ - $4x = \begin{bmatrix} 12 \\ -8 \end{bmatrix}$ ت - $(-3)x = \begin{bmatrix} 15 \\ -9 \end{bmatrix}$

بردارهای واحد مختصات



بردارهای $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ را بردارهای واحد

مختصات می‌نامیم.

هر برداری از صفحه را می‌توانیم برحسب این بردارها

به‌دست آوریم؛

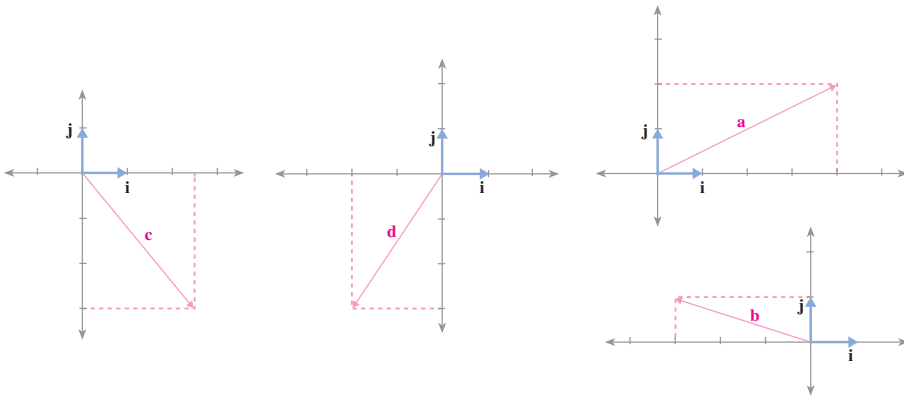
مثلاً در شکل روبه‌رو: $a = 5i + 3j$

با استفاده از مختصات نیز می‌توان این رابطه را به‌دست آورد.

$$a = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5i + 3j$$

کار در کلاس

۱- در هر قسمت، بردار داده شده را برحسب بردارهای واحد i و j بنویسید.



۲- بردارهای زیر را برحسب بردارهای واحد i و j بیان کنید.

$$a = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}}$$

$$b = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}}$$

$$c = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}}$$

$$d = \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} \underline{\hspace{2cm}}$$

۳- با مراجعه به سؤال ۱، مختصات هریک از بردارهای a, b, c و d را به دست آورید.

۴- مختصات هریک از بردارهای زیر را به دست آورید.

$$u = 5i + 2j = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$y = 3i - 2j = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$v = (-3i) + 4j = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$z = 8i - 9j = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$



۱- دو محور عمود بر هم رسم کرده و بردارهای واحد مختصات را روی آن‌ها مشخص کنید. اکنون، بردارهای زیر را رسم کرده و هر بردار را برحسب i و j بیان کنید.

$$a = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$c = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$d = \begin{bmatrix} -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

۲- مختصات بردارهای زیر را به دست آورید و آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$u = 3i + 2j$$

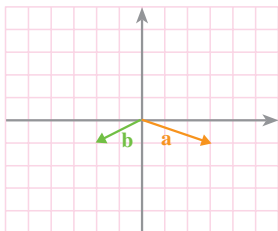
$$v = 7i - 2j$$

$$x = 3i + j$$

۳- فرض کنیم $a = 3i + (-2)j$ و $b = 2i + j$. ابتدا مختصات بردارهای a و b و سپس مختصات بردارهای x و y را حساب کنید.

$$x = 5a + 3b$$

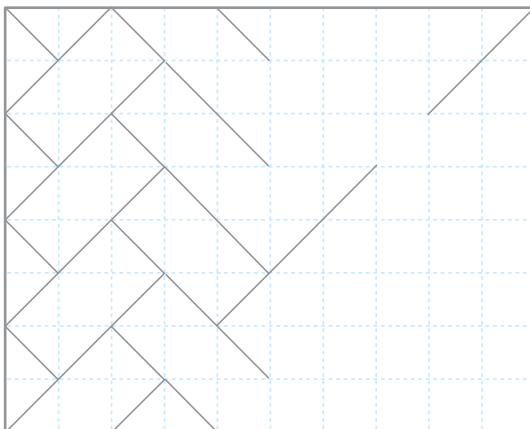
$$y = 3a + 5b$$



۴- با توجه به شکل روبه‌رو، بردار c را رسم کنید و مختصات آن را به دست آورید.

$$c = 2a + 3b$$

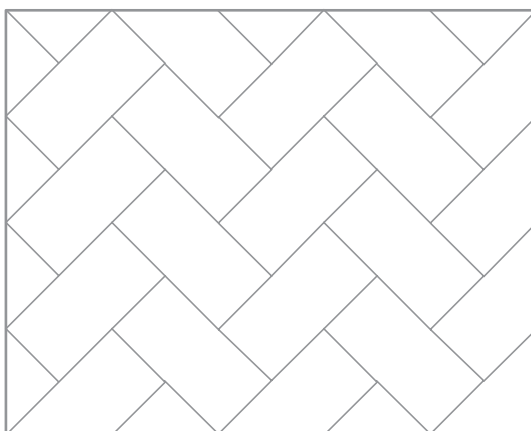
الف - شکل را مانند قسمت انجام شده کامل کنید.



ب -

- ۱- مستطیلی به طول 20 سانتی متر و عرض 16 سانتی متر بکشید (کادر رسم).
- ۲- مستطیل را با مربع هایی به ضلع 2 سانتی متر خانه بندی کنید (نقطه چین های شکل).
- ۳- با استفاده از شکل، ابتدا مستطیل های داخل کادر را بکشید.
- ۴- خط های اضافی را پاک کنید تا شکل نهایی به دست آید.

پ - شکل نهایی



ت - تمیز بودن رسم، یک دست بودن خطوط و در امتداد هم بودن خط های مایل، از نکات

مهم این رسم است.

عبارت‌های جبری



به شکل‌های زیر توجه کنید.



(۱)



(۲)



(۳)

اگر شکل‌ها به همین ترتیب ادامه پیدا کنند، در شکل شماره‌ی n چند مربع خواهیم داشت؟

تعداد چوب کبریت‌ها را در شکل n ام با یک عبارت جبری نشان دهید.

شما در کلاس دوم راهنمایی، با عبارت‌هایی مثل عبارت‌های زیر آشنا شده‌اید.

$$3a + 4a = (3 + 4)a = 7a$$

$$8a - 3a = (8 - 3)a = 5a$$

$$-4a - 7a = (-4 - 7)a = -11a$$

$$3a - 8a = (3 - 8)a = -5a$$

$$5(a + b) = 5a + 5b$$

کار در کلاس



۱- تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$3x + 4x = (3 + 4)x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$8b + b = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$9b - 8b = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5t - 8t = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-3t + 8t = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-5a + 5a = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-38a + 8a = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$-8a - 9a = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{4}{7}a + \frac{5}{7}a = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{8}{9}a - \frac{2}{9}a = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{3}{8}a - \frac{7}{8}a = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{2}{5}a - a = \underline{\hspace{2cm}}$$



۲- با توجه به این که $3a = 3 \times a$ ، می توان نوشت :

$$2 \times (3a) = 2 \times 3 \times a = 6a$$

$$2 \times (3a) = 6a$$

$$3 \times (-5b) = 3 \times (-5)b = -15b$$

$$3 \times (-5b) = -15b$$

اکنون، حاصل عبارت های زیر را بنویسید.

$$4 \times (-2a) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$5 \times (+3a) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-5) \times (2a) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(-3) \times (-4a) = \underline{\hspace{2cm}}$$

در عبارت جبری $2 + 4a + 3b - 5b$ ، هر کدام از $3a$ ، $-5b$ ، $+3b$ ، $+4a$ و 2 یک جمله است. دو جمله $3a$ و $4a$ و نیز دو جمله $3b$ و $-5b$ متشابه اند ولی جمله های $3a$ و $-5b$ و نیز جمله های $4a$ و 2 متشابه نیستند.

برای ساده کردن یک عبارت جبری، جمله های متشابه را با هم ساده می کنیم :

$$3a - 5b + 3b + 4a + 2 = 7a - 2b + 2$$

کار در کلاس

۱- عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$2a + 5b - a - 8b = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3x + 4y - 2x = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3a - 4a + 5b - 8a = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$15x - 9y + 12y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{2}{5}n - \frac{3}{7}m + \frac{3}{5}n - \frac{2}{7}m = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{5}{8}n - \frac{1}{2} + n - 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

۲- عبارت های جبری زیر را ساده کنید.

$$3 \times 2x$$

$$7 \times (-4x)$$

$$5 \times 3t + (-2) \times 7t$$

$$7 \times 4x + 8 \times (-3x)$$

$$5 \times 6u - 4 \times 7t$$

$$4 \times \frac{3}{5}u - 9 \times \frac{2}{5}u$$

۳- حاصل عبارت های زیر را حساب کنید.

$$4(2a + (-3)b)$$

$$(-5)(6a + (-7)b)$$

$$\frac{2}{5}(5a - 1 \cdot b)$$

$$\frac{4}{7}(3a + \frac{1}{5}b)$$

$$6(a - 2b) - 3(2a + 5b)$$

$$3(5x + 7y) - 7(2x + 3y)$$

۴- حاصل جمع‌ها و تفریق‌های زیر را حساب کنید.

$$\begin{aligned} &(3x + 5y + 7) \\ &+ (-4x + 3y - 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &(5x - 2y + 1) \\ &- (3x - 2y + 4) \end{aligned}$$



۱- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$\frac{2}{7}x - \frac{5}{7}x$$

$$a - \frac{9}{4}a \quad \text{الف -}$$

$$4a + 2 - a - 7$$

$$3b - 8b + 2a + 3a \quad \text{ب -}$$

$$3x + 2y - \frac{5}{9}y$$

$$\frac{3}{5}a + x - \frac{8}{5}a + \frac{2}{5}x$$

$$5 \times 3a$$

$$(-4) \times 3x \quad \text{پ -}$$

$$4 \times (-2a) + 7a$$

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \times (-m) + 7 \times (-2m)$$

$$3(2a + 3b) + 2(-3a + b)$$

$$(-7)(4a + (-2b)) \quad \text{ت -}$$

$$(-5)(3a - 2b)$$

$$(-8)(-3a + 7b)$$

$$4(-5a + 2b) + 3a - 8b$$

$$3(a + 4b) + 4(5a - 3b)$$

۲- حاصل جمع‌ها و تفریق‌های زیر را حساب کنید.

$$(3a - 2b + 5)$$

$$(-2a + 3b - 1)$$

$$(4a + 8b - 5)$$

$$+(2a + 4b - 1)$$

$$+(-5a - 8b + 9)$$

$$+(-4a + 2b - 5)$$

$$5(3a - 4b + 1)$$

$$4(2a + 3b - 3)$$

$$2(3a - 4b - 1)$$

$$-3(5a + 2b + 1)$$

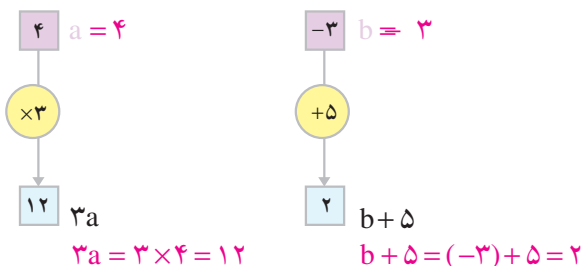
$$-(8a + 4b - 1)$$

$$-(6a + b - 5)$$



۳- در پارکی، دوچرخه کرایه می‌دهند. هزینه ثابت کرایه‌ی دوچرخه ۵۰۰ تومان است. برای هر ساعت هم ۲۰۰ تومان می‌گیرند. فرض کنید شخصی دوچرخه را برای n ساعت کرایه کرده است. هزینه‌ی او را با یک عبارت جبری نشان دهید. اگر او دوچرخه را برای ۳ ساعت کرایه کند، چه قدر باید بپردازد؟

پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری

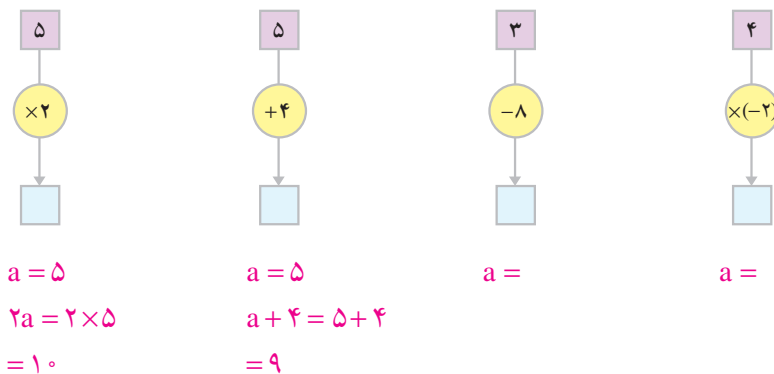


عبارت $3a$ را در نظر بگیرید. اگر به جای a عدد ۴ را قرار دهید، مقدار $3 \times 4 = 12$ به دست می‌آید. مقدار عددی $3a$ به ازای $a = 4$ برابر است با ۱۲.

همین‌طور، مقدار عددی $b + 5$ به ازای $b = 3$ برابر است با $(-3) + 5 = 2$.

کار در کلاس

۱- کامل کنید.



۲- مقدار عددی هر عبارت را به ازای مقدار داده شده حساب کنید.

$a = 2$ $x = 8$ $x = 7$
 $3a =$ $x + 2 =$ $6x =$

۳- مقدار عددی هر یک از عبارت‌های زیر را به ازای $x = 2$ حساب کنید.

$(-2)x =$ $x + 8 =$ $\frac{1}{2}x$

در صفحه‌های گذشته، با برخی عبارت‌های جبری و محاسبه با آن‌ها آشنا شدید. اکنون به مطالعه‌ی بعضی دیگر می‌پردازیم.

عبارت $ax + 5$ نیز یک عبارت جبری است و مقدار عددی آن به ازای $a = 6$ و $x = 3$ مساوی ۲۳ است.

همین‌طور $x^2 + 3x$ یک عبارت جبری است و مقدار عددی آن به ازای $x = 2$ مساوی با ۱۰ است.

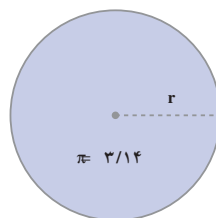
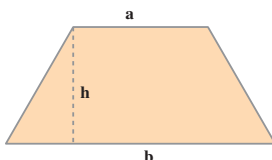
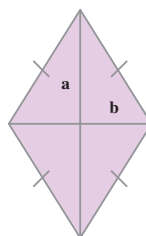
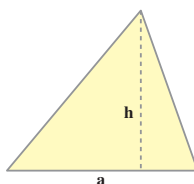
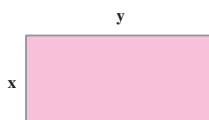
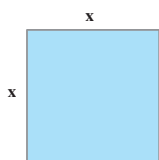
کار در کلاس



۱- مقدار عددی هر عبارت جبری را به ازای مقدارهای داده شده برای x و y حساب کنید.

$x = 0$,	$y = 1$:	$xy + y =$
$x = 8$,	$y = 1$:	$-2xy + 4y =$
$x = 2$,	$y = 3$:	$-x^2 + y^2 =$
$x = 2$,	$y = 0$:	$x^3 + xy =$

۲- مساحت هر یک از شکل‌های زیر را با یک عبارت جبری بیان کنید.



ساده کردن یک عبارت جبری

عبارت جبری $2xy - 5x^2y + 7$ یک چند جمله‌ای است. این چند جمله‌ای سه جمله دارد که عبارت‌اند از: $2xy$ ، $-5x^2y$ و 7 . عبارت $-5x^2y$ یک تک جمله‌ای است. x^2y قسمت حرفی این تک جمله و -5 ضریب عددی آن است.

دو تک جمله‌ای که قسمت حرفی آن‌ها عیناً مثل هم باشند، متشابه نامیده می‌شوند.
مثلاً دو تک جمله‌ای $3xy$ و $-xy$ متشابه‌اند. $5y^2$ و $-3y^2$ نیز متشابه‌اند، ولی x^2 و xy متشابه نیستند. برای ساده کردن یک عبارت جبری، جمله‌های متشابه را با هم جمع می‌کنیم.

$$3xy - y^2 + 4xy + 7 + x^2 + 5y^2 = 7xy + 4y^2 + 7 + x^2$$

کاردرکلاس

۱- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$4ax + a^2 + ax = \quad \quad \quad 3ab + b^2 - a^2 - 5ab = \quad \quad \quad$$

$$2a - 8xy + 2xy = \quad \quad \quad 9x^2 + 7x - 8x - 3 + 11x + 5 = \quad \quad \quad$$

۲- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$5(-2a) = \quad \quad \quad \frac{3}{2}(4b) = \quad \quad \quad$$

$$(-7)(-4x) = \quad \quad \quad \left(-\frac{4}{5}\right)(2y) = \quad \quad \quad$$

۳- برای ضرب دو تک جمله‌ای، ابتدا ضریب‌های عددی و سپس قسمت‌های حرفی را در هم ضرب می‌کنیم؛ مثلاً:

$$(4x)(-2y) = -8xy \quad \quad \quad (3a)(2a) = 6a^2$$

حالا حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید.

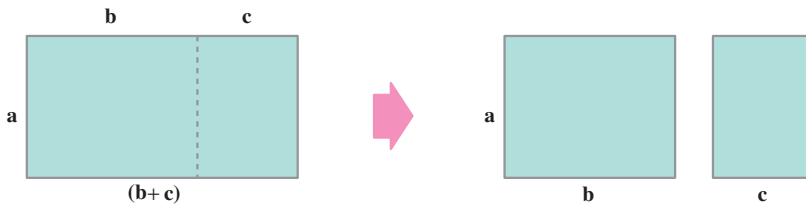
$$(3a)(-5a) = \quad \quad \quad \left(-\frac{1}{2}a\right)(3b) = \quad \quad \quad$$

$$(-a)(-a) = \quad \quad \quad (-a)(-b) = \quad \quad \quad$$

توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع و تفریق



به شکل های زیر توجه کنید؛ مساحت هر مستطیل را با نوشتن یک عبارت جبری در زیر آن نشان دهید.



با توجه به این که مستطیل سمت چپ به دو مستطیل سمت راست تقسیم شده است، برابر بودن مساحت ها را با یک تساوی جبری نشان دهید.

برای ضرب یک عدد در مجموع دو جمله، می توان آن عدد را در هر جمله ضرب و حاصل را جمع کرد؛ مثلاً:

$$\frac{3}{2}(b+c) = \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}c$$

$$5(b-c) = 5b - 5c$$

به طور کلی،

$$a(b+c) = ab + ac$$

$$a(b-c) = ab - ac$$

این تساوی ها توزیع پذیری ضرب را نسبت به جمع و تفریق نشان می دهند. با استفاده از این خاصیت، می توانیم عبارت های جبری زیر را ساده کنیم.

$$(4a)(2a-3b) = 8a^2 - 12ab \quad \text{و} \quad (2a)(-3b+7c) = -6ab + 14ac$$

کار در کلاس

۱- با استفاده از توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع و تفریق، عبارت های زیر را ساده کنید.

$$(2x)(3a-b) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$3y(2a-5y) = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$x(8a + \frac{1}{2}b) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (a + 5c)b = \underline{\hspace{2cm}}$$

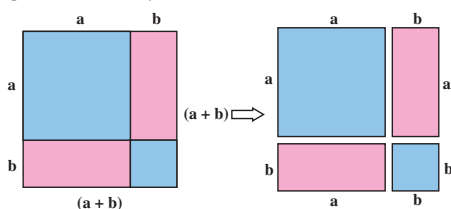
۲- هر عبارت را به صورت حاصل ضرب دو عبارت جبری بنویسید.

$$5ab + 8ac = a(\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}) \quad 3a + ab = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$4a^2 + 2ab = \underline{\hspace{2cm}} \quad 5ab + 3b = \underline{\hspace{2cm}}$$



۱- از مقایسه‌ی مساحت‌های شکل‌های زیر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



به چگونگی به دست آوردن حاصل ضرب زیر توجه کنید.

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

حاصل ضرب‌های زیر را به دست آورید و عبارت‌های حاصل را ساده کنید.

$$(x+5)(x+2) = \underline{\hspace{2cm}} \quad (x+3)(y-2) = \underline{\hspace{2cm}}$$

۲- مقدار عبارت‌های زیر را به ازای عددهای داده شده به دست آورید.

	$a=1$ $b=2$	$a=2$ $b=3$	$a=1$ $b=-1$
$(a+b)^2 =$			
$a^2 + b^2 =$			
$a^2 + b^2 + 2ab =$			

این کار را با چند عدد دیگر به جای a و b انجام دهید. از مقایسه‌ی پاسخ‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳- با توجه به این که $(a+b)^2 = (a+b) \times (a+b)$ است، عبارت $(a+b)^2$ را به صورت ضرب بنویسید و ساده کنید.

$$(a+b)^2 =$$





۱- مقدار عددی عبارت‌های جبری را به ازای مقادیر داده شده، حساب کنید.

$$\begin{array}{ll} x=1, y=4 & ; \quad xy-x^2 \quad x=0, a=2; xa-5a^2 \\ x=-4, y=2 & ; \quad x^2+y^2 \quad a=-1, b=-2; a^2+b^2 \end{array}$$

۲- عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$\begin{array}{ll} 4x+5ax+3ax+2, & 2a+5a^2+3a+6a^2, \\ 5ab+3a+8b-a+2b, & 4ab-8a^2b+2ab+4a^2b, \\ 9mn+3m^2+4n^2-7mn-n^2, & 7+4a+5as+2a-4as+2. \end{array}$$

۳- حاصل ضرب‌های زیر را حساب کنید.

$$\begin{array}{ll} -3(9x), & 8(-2a), \\ -6(-3x) & \end{array}$$

۴- ضرب‌های زیر را انجام دهید.

$$\begin{array}{ll} 3a(-2d+7b), & a(4x+y), \\ -8a(2a+b), & (4a+b)c. \end{array}$$

۵- هر عبارت را به صورت ضرب دو عبارت جبری بنویسید.

$$\begin{array}{ll} ab+ac, & ab-ac, \\ 5ab+3abc, & 6ab+3a^2. \end{array}$$

۶- حاصل هر ضرب را به دست آورید و عبارت حاصل را ساده کنید.

$$\begin{array}{ll} (a+b)(c+d), & (x+2)(x+1), \\ (x-3)(x+b), & (a+6)(a-6), \\ (a+3)^2, & (a-b)^2, \\ (a+3)(a-3), & (a+b)(a-b). \end{array}$$

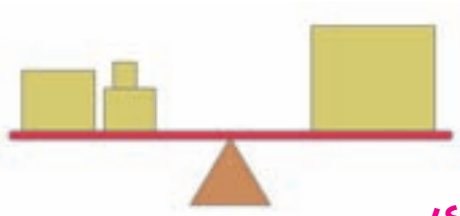
۷- به مجموعه‌ی عددهای زیر توجه کنید.

$$1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

در این دنباله‌ی عددی، عدد ششم و هفتم به ترتیب چه عددهایی هستند؟

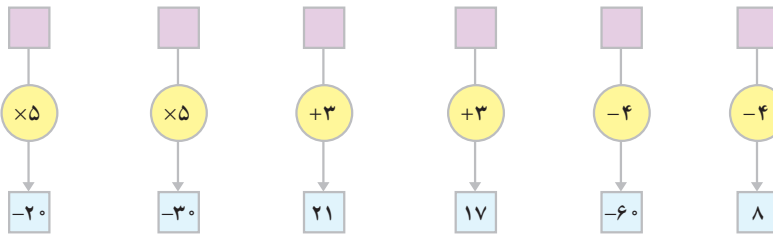
عدد n ام را با یک عبارت جبری نشان دهید.

معادله



یادآوری

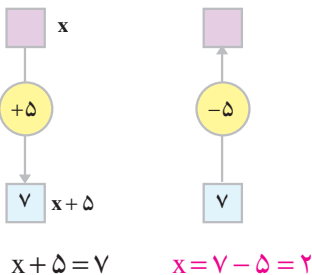
نمودارهای زیر را کامل کنید.



با توجه به نمودار، به ازای چه مقدار x ، مقدار عددی $x + 5$ مساوی ۷ می‌شود؟

$$x = \dots$$

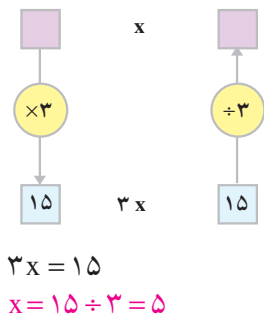
برای به دست آوردن $x = 2$ ، می‌توانیم حاصل تفریق $7 - 5$ را حساب کنیم.



با توجه به نمودار، به ازای چه مقدار x ، مقدار عددی $3x$ مساوی ۱۵ می‌شود؟

$$x = \dots$$

برای به دست آوردن $x = 5$ ، می‌توانیم ۱۵ را به ۳ تقسیم کنیم.

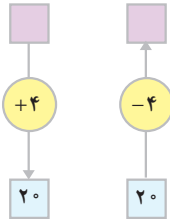


هر تساوی به صورت $3x = 15$ یا $x + 5 = 7$ یک معادله است. حل کردن یک معادله یعنی

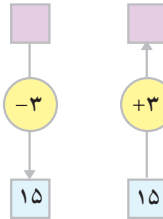
پیدا کردن مقدار x .



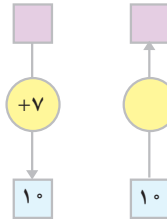
۱- کامل کنید.



$$\begin{aligned} x + 4 &= 20 \\ x &= 20 - 4 \\ &= 16 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x - 3 &= 15 \\ x &= \\ &= \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x + 7 &= 10 \\ x &= \\ &= \end{aligned}$$

۲- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$x + 5 = 8$$

$$x - 3 = 11$$

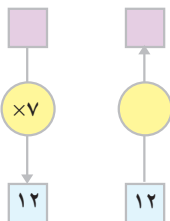
$$x + \frac{7}{5} = 6$$

$$x + 4 = \frac{5}{3}$$

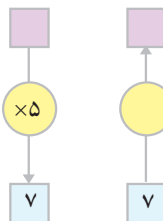
$$x - 9 = 2$$

$$x - \frac{3}{5} = 10$$

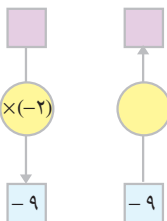
۳- کامل کنید.



$$\begin{aligned} 7x &= 12 \\ x &= \\ &= \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} 5x &= \\ x &= \\ &= \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} -2x &= -9 \\ x &= \\ &= \end{aligned}$$

۴- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$5x = 15$$

$$-3x = 8$$

$$7x = 1$$

$$-4x = 9$$

$$\frac{2}{5}x = 8$$

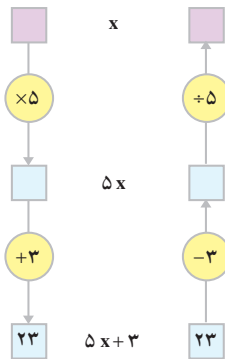
$$\frac{4}{7}x = \frac{1}{2}$$



روش حل معادله

اینک معادله‌ی $5x + 3 = 23$ را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم این معادله را حل کنیم؛ یعنی، ببینیم به ازای چه مقدار x ، مقدار عددی $5x + 3$ مساوی ۲۳ می‌شود.

با توجه به نمودار روبه‌رو، ابتدا حاصل تفریق $23 - 3$ را حساب می‌کنیم تا مقدار $5x$ به دست آید؛ سپس، 20 را بر ۵ تقسیم می‌کنیم تا مقدار x به دست آید. مراحل حل معادله را کامل کنید.



$$5x + 3 = 23$$

$$5x = 23 - 3 =$$

$$x =$$

به عنوان مثالی دیگر، معادله‌ی $4x - 7 = 8$ را در نظر بگیرید. همان‌طور که می‌بینید، برای حل کردن آن به صورت زیر عمل می‌کنیم.

$$4x - 7 = 8$$

جمله‌ی -7 را از طرف چپ معادله به طرف راست می‌بریم و علامت آن را عوض می‌کنیم.

$$4x = 8 + 7 = 15$$

مقدار معلوم (یعنی ۱۵) را بر ضریب مجهول (یعنی ۴) تقسیم می‌کنیم.

$$x = 15 \div 4 = \frac{15}{4}$$

اکنون معادله‌ی $5x + 12 = 2x$ را حل کنید.

جمله‌ی $5x$ را از طرف چپ معادله به طرف راست ببرید و علامت آن را عوض کنید.

برای به دست آوردن x ، مقدار معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم کنید.

کار در کلاس

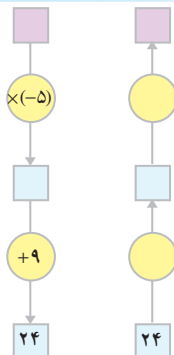
۱- پس از کامل کردن نمودار و با

استفاده از آن، معادله را حل کنید.

$$-5x + 9 = 24$$

$$-5x =$$

$$x =$$



۲- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$3x + 4 = 16$$

$$5x - 6 = 18$$

$$3x = 16 - 4$$

$$5x =$$

$$x =$$

$$x =$$

$$7x - 5 = 2x$$

$$8x = 25 - 2x$$

$$$$

$$$$

$$$$

$$$$



۱- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{2}{3}x =$$

$$x =$$

$$x =$$

ابتدا $-\frac{1}{2}$ را به طرف دیگر تساوی ببرید.

عدد معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم کنید.

با ساده کردن کسر، مقدار x را به دست آورید.

۲- می‌دانید که دو طرف یک تساوی را می‌توان در عددی غیر از صفر ضرب کرد. یک عدد مناسب انتخاب کنید؛ آن را در دو طرف تساوی زیر $\frac{2}{3}x - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$ ضرب کنید تا مخرج کسرها از بین برود. معادله‌ی به دست آمده را حل کنید.

$$\frac{3}{5}x - \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$20 \left(\frac{3}{5}x - \frac{1}{2} \right) = 20 \left(\frac{3}{4} \right)$$

$$12x - 10 = 15$$

$$12x = 15 + 10 = 25$$

$$x = \frac{25}{12}$$

برای حل کردن معادله‌ای مانند معادله‌ی

روبه‌رو، می‌توانیم طرفین تساوی را در مخرج

مشترک کسرها ضرب کنیم (در این جا مخرج

مشترک ۲۰ است).

معادله‌های زیر را حل کنید.

$$\frac{2}{3}x - \frac{5}{6} = \frac{7}{4}$$

$$-\frac{6}{25}x - \frac{4}{15} = \frac{8}{3}$$

$$-\frac{3}{8}x + 5 = \frac{1}{6}$$

$$\frac{5}{12}x - \frac{7}{18} = 2$$

$$4x + \frac{2}{7} = \frac{3}{2}x$$

$$2x - \frac{2}{3} = 5x + 3$$

راهبرد تشکیل معادله

همان‌طور که در کلاس دوم راهنمایی آموختید، گاهی برای حل کردن یک مسئله، با توجه به راهبرد تشکیل معادله می‌توانیم معادله‌ای بنویسیم و با حل کردن آن، پاسخ مسئله را به دست آوریم. به مثال زیر توجه کنید.

یک دانش‌آموز با پس‌انداز سه هفته‌ی خود کتابی به قیمت ۳۸۰ تومان خرید و ۴۰ تومان پراش باقی ماند. این دانش‌آموز به طور متوسط هر هفته چه قدر پس‌انداز داشته است؟
با توجه به این مسئله، می‌توانیم رابطه‌ی زیر را بنویسیم.

$$3 \times (\text{پس‌انداز هفتگی}) + (\text{قیمت کتاب}) = (\text{پول باقی‌مانده})$$

پس‌انداز هفتگی دانش‌آموز را x تومان در نظر بگیرید و معادله‌ی مربوط به آن را بنویسید.
این معادله را حل کنید.



با توجه به راهبرد تشکیل معادله، هر یک از مسئله‌های زیر را حل کنید.
۱- یکی از

کلاس‌های مدرسه‌ای، ۲۸ دانش‌آموز دارد. هر سه نفر از دانش‌آموزان روی یک نیمکت می‌نشینند و یک نفر هم روی یک صندلی می‌نشیند. چند نیمکت در این کلاس هست؟

$$3x + \text{تعداد نیمکت‌ها} = \text{تعداد دانش‌آموزان} \quad , \quad x = \text{تعداد نیمکت‌ها}$$

۲- از ۵ برابر عددی، ۳ تا کم کردیم؛ عدد ۱۷ به دست آمد. آن عدد چیست؟

$x = \underline{\hspace{2cm}}$ ، $5x = \underline{\hspace{2cm}}$ عدد مورد نظر $x =$

۳- شخصی برای ۵ دفتر و یک خودکار ۳۰ تومانی، ۳۸۰ تومان پرداخت.
قیمت هر دفتر چه قدر است؟

۴- محمود اگر روزی ۲ ساعت یک کتاب رمان بخواند، آن را ۶ روزه تمام می کند. او با روزی ۳ ساعت مطالعه، آن را چند روزه می خواند؟



هر یک از معادله های زیر را حل کنید.

$$8x - 1 = 0$$

$$x - 4 = 11$$

$$3x = 8$$

$$4x - 2 = 6 - 4x$$

$$9x - 19 = 8x$$

$$x + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}x + \frac{2}{3} = \frac{5}{6}x$$

$$3x - 2 = 5x$$

$$9x + 8 = 10x$$

$$2x - \frac{3}{2} = 4$$

$$4x - 1 = 1/2$$

$$\frac{2}{5}x + 2 = 3x$$

- رسم شکل
- جدول نظام دار
- الگویابی
- حذف حالت های نامطلوب
- زیر مسئله
- حل مسئله ی ساده تر
- تشکیل معادله
- حدس و آزمایش




۱- محیط دایره ای ۲۴/۵۰ سانتی متر است. شعاع این دایره چه قدر است؟

۲- عرض مستطیلی ۵ سانتی متر و محیط آن ۲۲ سانتی متر است. طول مستطیل چه قدر است؟

۳ - هفت برابر عددی به اضافه ی ۲ مساوی ۵۸ است. آن عدد چیست؟

۴- با توجه به رابطه‌ای که بین عددهای ستون a و b وجود دارد، جای خالی را کامل کنید. رابطه‌ی بین دو ستون را توضیح دهید.

a	۲	۷	-۲	۰	۵
b	۵	۲۰	-۷	-۱	○

سرگرمی و ریاضی 

ابوعلی سینا (ابوعلی حسین بن عبدالله بن حسن بن علی بن سینا - ۳۵۹ ش/ ۹۸۰ م)

فیلسوف، طبیب، ریاضی‌دان، ستاره‌شناس و از جمله معروف‌ترین دانشمندان مسلمان ایرانی است که آثارش خصوصاً در پزشکی حدود پنج قرن در دانشگاه‌های اروپا تدریس می‌شده و برخی دیگر از کتاب‌هایش در فلسفه و منطق هنوز هم در مراکز علمی مورد مطالعه و بحث دانشمندان است.

ابن سینا هم‌چنین در ریاضیات و ستاره‌شناسی نیز صاحب نظر بوده و در ساختن ابزارآلات رصد ستارگان تبحر بسیار داشته است. وی در کتاب «شفا» که یکی از آثار مهم او است، بخش بزرگی را به مباحث هندسه، حساب و ستاره‌شناسی اختصاص داده است. آنچه در ذیل آمده است یکی از نوشته‌های ابن سینا در حساب است.

الف) عددهای مثلی اعدادی هستند که از جمع کردن جمله‌های متوالی اعداد طبیعی به دست می‌آیند. مانند:

۱، ۳، ۶، ۱۰، ۱۵، ۲۱، ...

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{و دستور تشکیل آن برای } n \text{ امین عدد:}$$

ب) مجموع دو عدد مثلی و عدد مثلی ماقبل آن عبارت است از:

$$T_{n-1} + T_n = n^2$$

ج) عددهای مخمسی اعدادی هستند که از جمع کردن جمله‌های متوالی رشته اعداد زیر حاصل می‌شود.

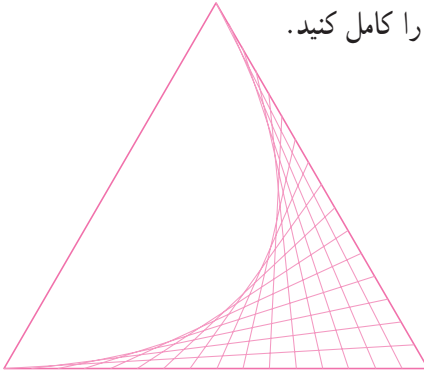
۱، ۴، ۷، ۱۰، ۱۳، ۱۶، ...

و دستور ساختن این اعداد در حالت کلی:

$$P_n = \frac{(3n-1)n}{2} \quad n=1, 2, \dots$$

از دیگر آثار ابوعلی سینا در ریاضیات می‌توان از: (۱) تلخیص هندسه اقلیدسی در کتاب شفا (۲) تعیین طول و عرض دایرة البروجی (جابه‌جایی ظاهری مکان خورشید در آسمان) از روی ارتفاع و سمت یک ستاره با استفاده از مثلثات کروی نام برد.

الف - با توجه به شکل، نیمه‌ی دیگر را کامل کنید.



ب -

۱- ابتدا وسط صفحه را پیدا کنید.

۲- با توجه به شکل روبه‌رو، قاعده‌ی مثلث را

رسم کنید.

کاغذ

۴/۵ سانتی متر		
۸ سانتی متر	۸	

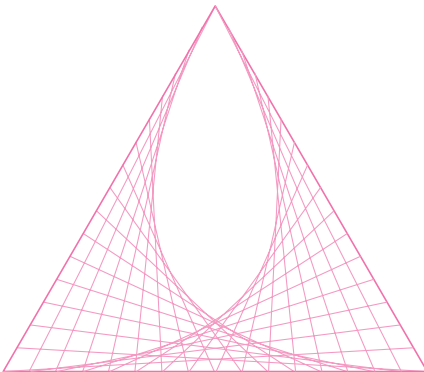
۳- دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی ۱۶ سانتی متر باز

کنید و از دو سر قاعده دو کمان بزنید. محل برخورد این دو کمان رأس مثلث است. مثلث را رسم کنید.

۴- هر ضلع مثلث را به ۱۶ قسمت مساوی تقسیم کرده و با توجه به قسمت «الف» نقاط را به هم

وصل کنید تا شکل زیر به دست آید.

پ - شکل نهایی



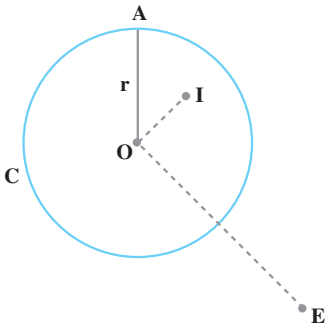
ت - مهم‌ترین قسمت این رسم، کادربندی آن و دقت در تقسیم ضلع‌های مثلث به قسمت‌های

مساوی است؛ پس، نقاط را طوری به هم وصل کنید که نقطه‌هایی که برای قسمت‌بندی اضلاع گذاشته‌اید، از بین بروند و دیده نشوند.



زاویه و دایره

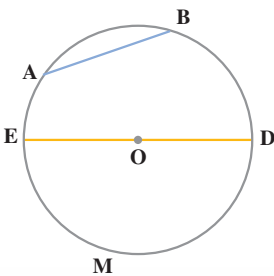
دایره



در دایره ی C نقطه ی O مرکز و پاره خط OA یک شعاع است.

نقطه ی A روی دایره ی C، نقطه ی I در داخل و نقطه ی E در خارج آن قرار دارد. اگر اندازه ی شعاع این دایره را با حرف r نشان دهیم، داریم:

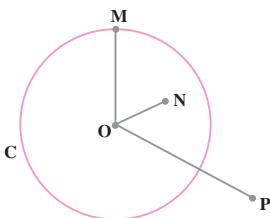
$$OA = r, \quad OI < r, \quad OE > r$$



در شکل روبه‌رو، دو نقطه ی A و B کمان‌های AB و \widehat{AMB} را روی دایره جدا کرده‌اند. پاره خط AB وتر نظیر هریک از این دو کمان است. وتر ED که از مرکز دایره گذشته است، یک قطر دایره و هریک از کمان‌های EMD و EAD یک نیم‌دایره است.

کار در کلاس

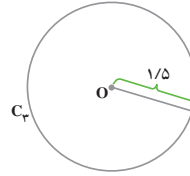
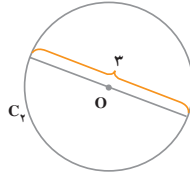
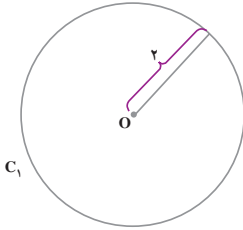
۱- شعاع دایره ی C برابر با ۲ است. در جای خالی، یکی از نمادهای $>$ ، $=$ ، $<$ را که مناسب است، بنویسید.



$$ON \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 2, \quad OP \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 2$$

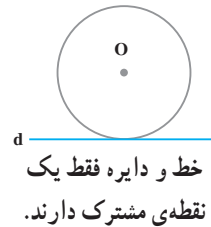
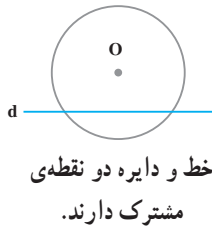
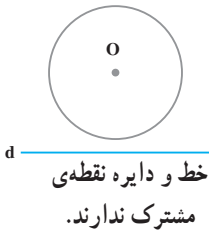
$$OM \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 2$$

۲- کدام دو دایره با هم مساوی‌اند؟ چرا؟



وضع یک خط و یک دایره نسبت به هم

شکل‌های زیر، وضعیت یک خط و یک دایره را در حالت‌های مختلف نشان می‌دهد.



در حالتی که خط و دایره یک نقطه‌ای مشترک دارند، خط بر دایره مماس است.

در شکل روبه‌رو خط d بر دایره‌ی C مماس است.

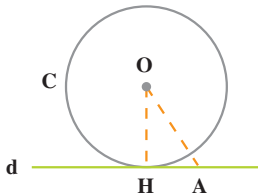
نقطه‌ی H نقطه‌ی تماس آن‌هاست. ۳ نقطه‌ی دیگر

مثل A را روی خط d در نظر بگیرید؛

فاصله‌ی نقطه‌ی O را تا هر یک از نقاط H ، A و

۳ نقطه‌ای که در نظر گرفته‌اید، اندازه بگیرید. شعاع

دایره را نیز اندازه‌گیری کنید. از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



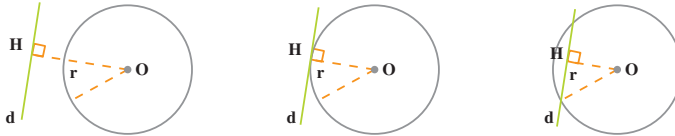
OH کوتاه‌ترین پاره‌خطی است که مرکز دایره‌ی C را به نقاط خط d وصل می‌کند؛ پس،

$OH \perp d$ و فاصله‌ی مرکز دایره‌ی C از خط d برابر با شعاع این دایره است؛ بنابراین، اگر خطی بر

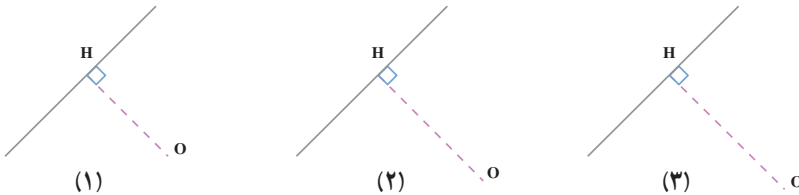
یک دایره مماس باشد، فاصله‌ی مرکز دایره از آن خط برابر با شعاع دایره است. همچنین، شعاع دایره

در نقطه‌ی تماس، بر خط مماس عمود است.

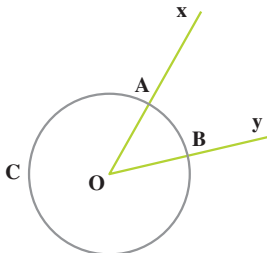
۱- در هر شکل، فاصله‌ی مرکز دایره از خط d را با شعاع دایره مقایسه کنید و رابطه‌ی مقایسه را بنویسید.



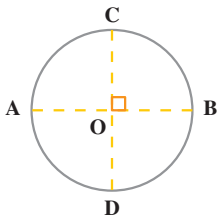
۲- در هر شکل، دایره‌ای به مرکز O و شعاع $۱/۵$ سانتی متر رسم کنید. در کدام شکل، خط و دایره بر هم مماس می‌شوند؟ نقطه‌ی تماس کدام است؟



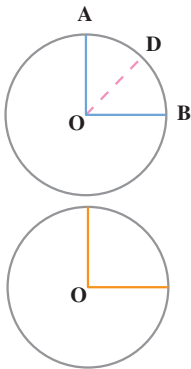
زاویه‌ی مرکزی



نقطه‌ی O مرکز دایره‌ی C و رأس زاویه‌ی xOy است. \hat{xOy} یا \hat{AOB} یک زاویه‌ی مرکزی و \widehat{AB} کمان مقابل به این زاویه است.



همان‌طور که می‌بینید، در شکل مقابل دو قطر AB و CD برهم عمودند؛ بنابراین، هر کدام از زاویه‌های مرکزی به‌دست آمده، یک زاویه‌ی ۹۰° درجه است. کمان روبه‌رو به هر یک از این زاویه‌ها را نیز کمان ۹۰° درجه می‌نامیم.



در شکل مقابل، زاویه‌ی مرکزی \widehat{AOB} برابر با 90° درجه و $\widehat{AOD} = \widehat{BOD} = 45^\circ$ پس، OD نیمساز آن است؛ بنابراین، هرکدام از کمان‌های AD و BD هم یک کمان 45° درجه است.

اگر در دایره‌ای یک زاویه‌ی مرکزی قائمه رسم کرده و آن را به 90° زاویه‌ی یک درجه تقسیم کنیم، کمان مقابل به آن نیز به 90° کمان متساوی یک درجه تقسیم می‌شود.

همان‌طور که ملاحظه کردید، اندازه‌ی یک زاویه‌ی مرکزی برحسب درجه با اندازه‌ی کمان مقابل آن برحسب درجه، با یک عدد بیان می‌شوند؛ بنابراین، مثلاً یک کمان 3° درجه، مقابل یک زاویه‌ی مرکزی 3° درجه قرار دارد.

کار در کلاس



۱- با توجه به شکل، اندازه‌ی کمان‌ها و زاویه‌های زیر را بنویسید.

$$\widehat{AB} = \dots\dots$$

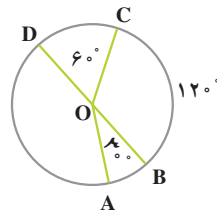
$$\widehat{DC} = \dots\dots$$

$$\widehat{BOC} = \dots\dots$$

$$\widehat{AOC} = \dots\dots$$

$$\widehat{AOD} = \dots\dots$$

$$\widehat{AD} = \dots\dots$$



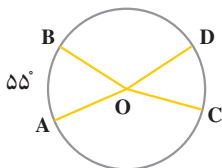
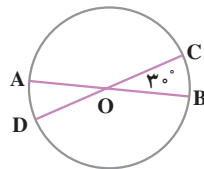
۲- AB و CD دو قطر دایره‌اند. اندازه‌ی هر یک از کمان‌های زیر را بنویسید.

$$\widehat{AD} = \dots\dots$$

$$\widehat{BC} = \dots\dots$$

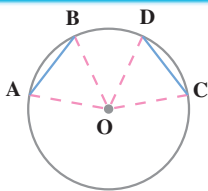
$$\widehat{AC} = \dots\dots$$

$$\widehat{BD} = \dots\dots$$



۳- دو زاویه‌ی مرکزی AOB و COD با هم مساوی‌اند و $\widehat{AB} = 55^\circ$ ؛ اندازه‌ی کمان CD چند درجه است؟

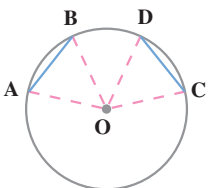




۱- کمان‌های AB و CD با هم مساوی‌اند.

الف - چرا مثلث‌های OAB و OCD متساوی‌اند؟

ب - آیا وترهای AB و CD متساوی‌اند؟

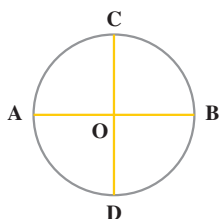


۲- وترهای AB و CD با هم مساوی‌اند.

الف - چرا مثلث‌های OAB و OCD متساوی‌اند؟

ب - آیا کمان‌های AB و CD متساوی‌اند؟

از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



۱- دو قطر AB و CD برهم عمودند. اندازه‌ی هریک از کمان‌های

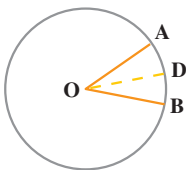
زیر را بنویسید.

$$\widehat{AC} = \dots\dots$$

$$\widehat{BC} = \dots\dots$$

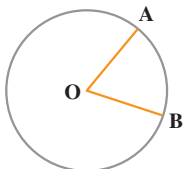
$$\widehat{BD} = \dots\dots$$

$$\widehat{AD} = \dots\dots$$



۲- OD نیمساز زاویه‌ی مرکزی AOB است و $\angle AOB = 36^\circ$.

اندازه‌ی هریک از کمان‌های AD و BD چند درجه است؟



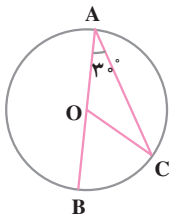
۳- در شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی AOB برابر با 60°

است.

الف - اندازه‌ی کمان AB چند درجه است؟

ب - از A به B وصل می‌کنیم؛ بگویید چرا مثلث OAB

متساوی‌الاضلاع است؟

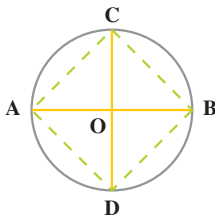


۴- با توجه به شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه‌ها و کمان‌های زیر را بنویسید.

$$\hat{C} = \dots\dots\dots, \widehat{COB} = \dots\dots\dots, \widehat{BC} = \dots\dots\dots$$

۵- هر قطر دایره، آن را به دو کمان متساوی تقسیم می‌کند. یک دایره و قطری از آن را رسم

کنید و با تا کردن کاغذ، درستی این مطلب را تحقیق کنید.



۶- قطرهای AB و CD برهم عمودند.

الف- چرا کمان‌های AC، CB، BD و DA با هم مساوی‌اند؟

ب- آیا وترهای AC، CB، BD و DA نیز با هم مساوی‌اند؟

پ- آیا زاویه‌های چهارضلعی ADBC با هم مساوی‌اند؟ چرا؟

۷- دو دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ سانتی متر رسم کنید. محیط هر دایره چند سانتی متر است؟

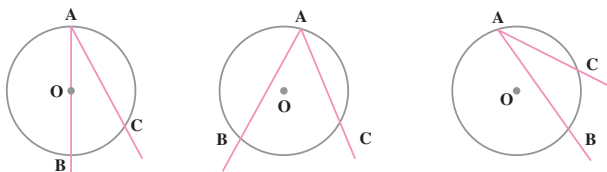
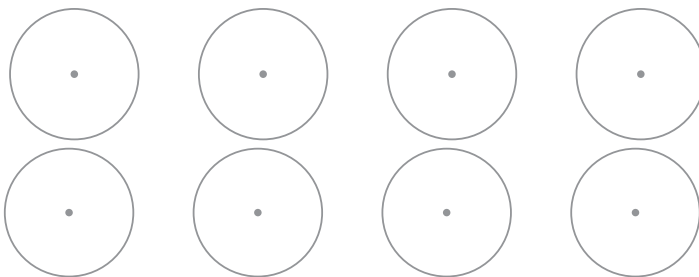
محیط هر دایره چند درجه است؟

زاویه‌ی محاطی



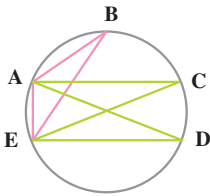
حالت‌های مختلفی را که یک زاویه و یک دایره می‌توانند داشته باشند، در

دایره‌های زیر نشان دهید.



در شکل‌های بالا، رأس زاویه‌ی BAC روی دایره قرار گرفته و دو ضلع آن، دایره را در دو

نقطه‌ی B و C قطع کرده است. این زاویه، یک زاویه‌ی محاطی است و \widehat{BC} کمان مقابل به آن است.



۱- با توجه به شکل مقابل،

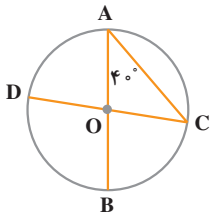
الف - زاویه‌های محاطی مقابل به \widehat{AE} را بنویسید.

ب - زاویه‌های محاطی مقابل به \widehat{BC} را بنویسید.

پ - کمان مقابل به زاویه‌ی محاطی DAB را بنویسید.

ت - دو زاویه‌ی دیگر رسم کنید که AE کمان مقابل

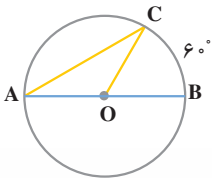
به آن‌ها نیز باشد.



۲- در شکل مقابل، اندازه‌های زاویه‌ی محاطی C،

زاویه‌ی مرکزی BOC و اندازه‌ی کمان BC را تعیین کنید.

۳- با توجه به شکل مقابل، تساوی‌های زیر را کامل کنید.



$\hat{A} = \dots\dots\dots$ درجه ، $\hat{BOC} = \dots\dots\dots$ درجه

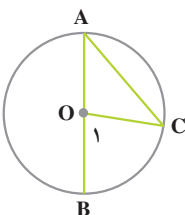
آیا تساوی $\hat{A} = \frac{BC}{2}$ درست است؟



۱- به شکل زیر توجه کنید؛ در این شکل، یک ضلع زاویه‌ی محاطی A، قطر

دایره و O زاویه‌ی مرکزی است.

$\left. \begin{array}{l} \hat{O}_1 = \dots\dots\dots \text{ چون } O_1 \text{ زاویه‌ی مرکزی است.} \\ \hat{O}_1 = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots \text{ چون } O_1 \text{ زاویه‌ی خارجی است.} \end{array} \right\} \Rightarrow \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$

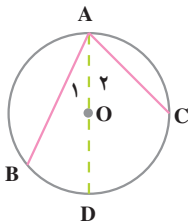


چرا مثلث OAC متساوی الساقین است؟

$\Rightarrow \hat{A} = \hat{C}$ مثلث OAC متساوی الساقین است.

در عبارت بالا به جای \hat{A} ، \hat{C} را قرار دهید.

$\dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \Rightarrow \hat{A} = \frac{\dots\dots\dots}{2}$

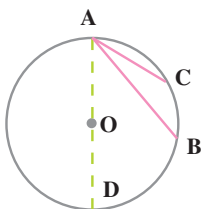


۲- در شکل مقابل، AD قطر دایره است. با توجه به آن، تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$\hat{A}_1 = \frac{\widehat{BD}}{2} \quad \hat{A}_2 = \dots\dots\dots$$

$$\widehat{BAC} = \hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \dots\dots\dots + \dots\dots\dots$$

$$\widehat{BAC} = \frac{\dots\dots\dots}{2}$$



۳- با توجه به شکل مقابل تساوی‌ها را کامل کنید.

$$\widehat{DAB} = \dots\dots\dots \quad \widehat{DAC} = \dots\dots\dots$$

$$\widehat{BAC} = \widehat{DAC} - \widehat{DAB} = \dots\dots\dots$$

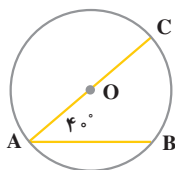
$$\widehat{BAC} = \frac{\dots\dots\dots}{2}$$

از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

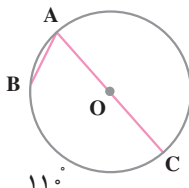
کار در کلاس



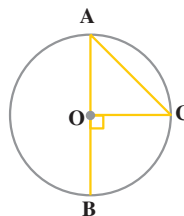
با توجه به هر شکل، اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی A یا اندازه‌ی کمان BC را بنویسید.



$$\widehat{BC} = \dots\dots\dots$$



$$\hat{A} = \dots\dots\dots$$



$$\hat{A} = \dots\dots\dots$$

تقسیم دایره به کمان‌های متساوی



الف - تقسیم دایره به چهار کمان متساوی

می‌دانید که در یک دایره، کمان‌های مقابل به زاویه‌های مرکزی متساوی با

هم مساوی‌اند. اکنون در دایره‌ی شکل مقابل، دو قطر عمود برهم رسم کنید تا

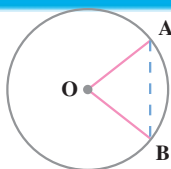
چهار زاویه‌ی مرکزی متساوی تشکیل شود؛ به این ترتیب، دایره به چهار کمان متساوی تقسیم می‌شود.



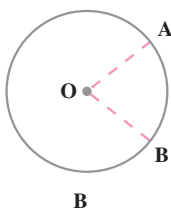
ب - تقسیم دایره به ۶ و ۳ کمان متساوی

دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی شعاع دایره باز کنید و با شروع از یک نقطه‌ی دایره، پی‌درپی کمان‌هایی بزنید. به این ترتیب، دایره به شش کمان متساوی تقسیم می‌شود. اگر هر دو کمان متوالی از این شش کمان را یک کمان بگیرید، دایره به سه کمان متساوی تقسیم خواهد شد.

کار در کلاس

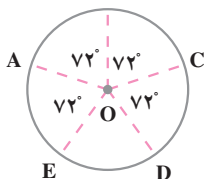


۱- اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی AOB ، 60° است. چرا وتر AB با شعاع دایره مساوی است؟



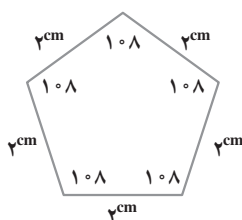
۲- در شکل مقابل، زاویه‌ی مرکزی AOB برابر با 72° است. اندازه‌ی کمان AB چند درجه است؟

دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی AB باز کنید و با شروع از نقطه‌ی B ، پی‌درپی کمان‌هایی بزنید؛ به این ترتیب، چند کمان متساوی روی دایره جدا می‌شود.

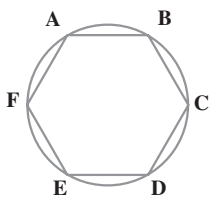


۳- اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی EOD چند درجه است؟ آیا کمان‌های AB ، BC ، CD ، DE و EA با هم مساوی‌اند؟

چندضلعی‌های منتظم



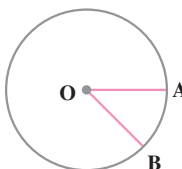
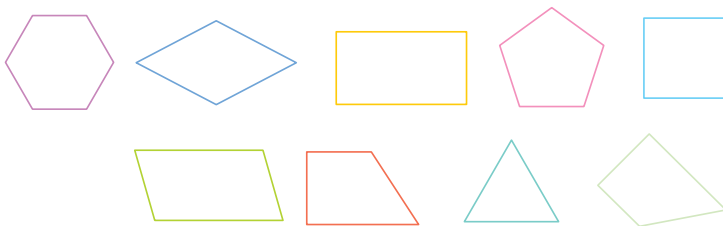
در پنج ضلعی شکل مقابل، همه‌ی ضلع‌ها با هم و همه‌ی زاویه‌ها با هم مساوی‌اند. این پنج ضلعی، **پنج ضلعی منتظم** نامیده می‌شود. در شکل مقابل، دایره به ۶ کمان متساوی تقسیم شده است. می‌دانید که وترهای نظیر این کمان‌ها با هم مساوی‌اند. اندازه‌ی هریک از کمان‌ها چند درجه است؟



زاویه محاطی A مقابل به چهار تا از این کمان‌هاست. اندازه‌ی این زاویه‌ی محاطی چند درجه است؟
آیا شش ضلعی ABCDEF یک شش ضلعی منتظم است؟ چرا؟

کار در کلاس

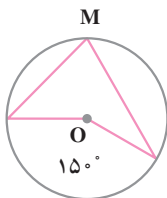
۱- در شکل‌های زیر، چند ضلعی‌های منتظم را مشخص کنید و نام آن‌ها را بنویسید.



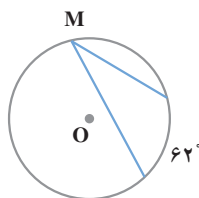
۲- زاویه‌ی مرکزی AOB مساوی با 45° است. به کمک این زاویه، دایره را به ۸ کمان متساوی تقسیم کنید. آیا نقاط تقسیم، رأس‌های یک ۸ ضلعی منتظم‌اند؟



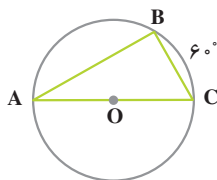
۱- در هر شکل، اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی M را تعیین کنید.



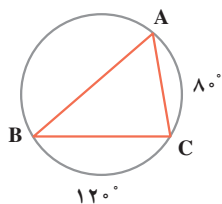
$\hat{M} = \dots\dots$



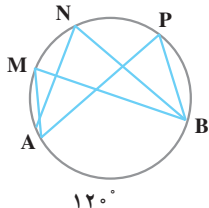
$\hat{M} = \dots\dots$



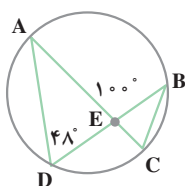
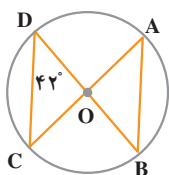
۲- AC قطر دایره و اندازه‌ی کمان BC 60° درجه است. اندازه‌ی هریک از زوایای مثلث ABC چند درجه است؟



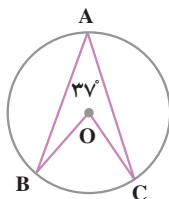
۳- در شکل مقابل، اندازه‌ی کمان‌های AC و BC داده شده است. اندازه‌ی هریک از زوایای مثلث ABC را تعیین کنید.



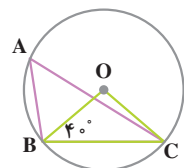
۴- اندازه‌ی کمان AB برابر با 120° است. اندازه‌ی هریک از زوایای M, N, P چند درجه است؟ آیا می‌توان گفت که در یک دایره، زوایای محاطی مقابل به یک کمان با هم مساوی‌اند؟



۵- در هر شکل، اندازه‌های زوایای B, A, C و را تعیین کنید.



۶- اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی BOC را تعیین کنید.



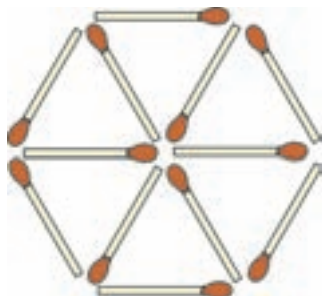
۷- در شکل مقابل، اندازه‌ی زاویه‌ی محاطی A را تعیین کنید.

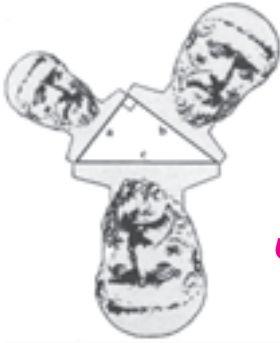
سرگرمی و ریاضی



الف - کدام سه چوب کبریت را برداریم تا سه مثلث باقی بماند؟

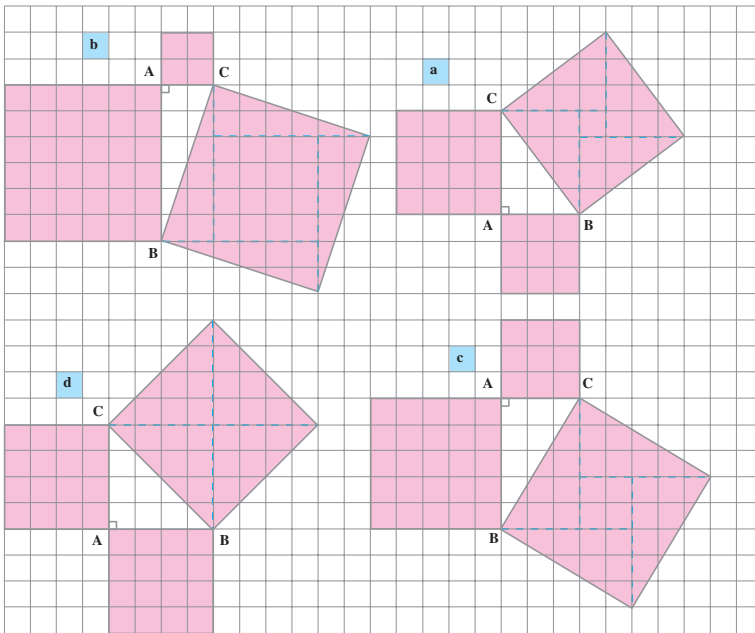
ب - سه لوزی باقی بماند؟





رابطه ی فیثاغورس

پیدا کردن رابطه ی فیثاغورس

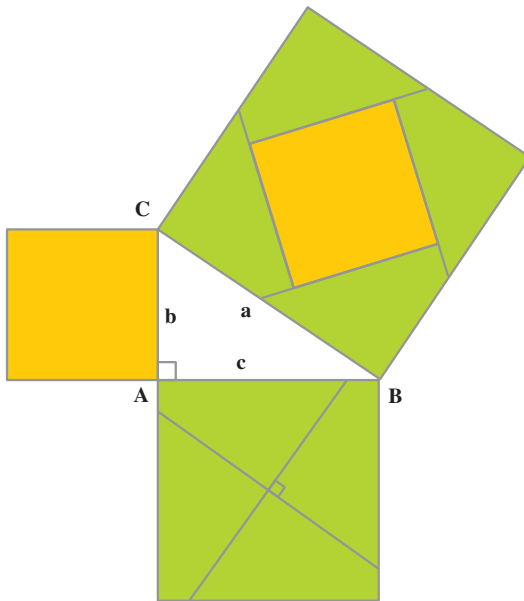


در هر یک از شکل های بالا، روی هر ضلع مثلث قائم الزاویه ی ABC یک مربع با همان ضلع ساخته ایم. اگر یک مربع شطرنجی را واحد سطح بگیریم، با توجه به این شکل ها جدول زیر را کامل کنید.

مساحت مربعی که روی ضلع AB ساخته شده است.	مساحت مربعی که روی ضلع AC ساخته شده است.	مجموع مساحت های دو مربعی که روی ضلع های AB و AC ساخته شده اند.	مساحت مربعی که روی وتر BC ساخته شده است.
a	۹	۲۵	۲۵
b			
c			
d			

از این فعالیت چه نتیجه ای می گیرید؟

در هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی صفحه‌ی قبل، مساحت مربعی که روی وتر ساخته شده است، با مجموع مساحت‌های دو مربعی که روی ضلع‌های زاویه‌ی قائمه ساخته شده‌اند، برابر است.



به شکل مقابل توجه کنید؛ از محل برخورد قطرهای مربع ایجاد شده روی ضلع AB، خطی موازی با وتر BC و نیز خطی عمود بر آن رسم کرده‌ایم؛ به این ترتیب، این مربع به چهار قسمت متساوی تقسیم شده است. با این چهار قسمت و مربع روی ضلع AC، می‌توانیم مربع روی وتر را پوشانیم. شما نیز روی یک مقوا، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید و مطابق شکل مقابل، سه مربع روی اضلاع آن بسازید؛ سپس، این خاصیت را با بریدن قطعات تحقیق کنید.

با توجه به شکل، اگر سه ضلع مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC را a ، b و c بنامیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$a^2 = \text{مساحت مربعی که روی وتر ساخته شده است.}$$

$$b^2 = \text{مساحت مربعی که روی ضلع AC ساخته شده است.}$$

$$c^2 = \text{مساحت مربعی که روی ضلع AB ساخته شده است.}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \text{(رابطه‌ی فیثاغورس)} \quad \text{و در نتیجه}$$

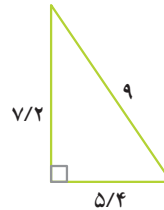
بنابراین، در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر.

عکس این مطلب نیز درست است؛ یعنی، اگر در مثلثی مجذور بزرگ‌ترین ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم‌الزاویه است.



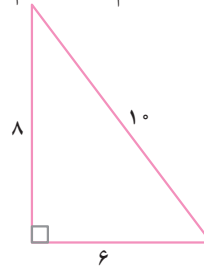
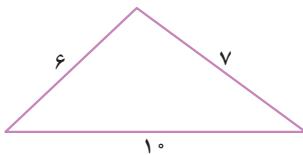
۱- درستی رابطه‌ی فیثاغورس را در هریک از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی زیر

تحقیق کنید.



۲- در کدام مثلث، مجذور بزرگ‌ترین ضلع با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر

مساوی است؟ کدام مثلث قائم‌الزاویه است؟

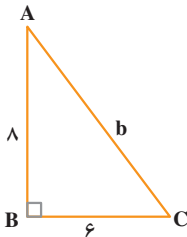


استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس

در صورت معلوم بودن اندازه‌های دو ضلع یک مثلث قائم‌الزاویه، می‌توانیم اندازه‌ی ضلع سوم

را حساب کنیم. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی BAC ، $AB = 8$ و $BC = 6$.



می‌خواهیم اندازه‌ی وتر AC را حساب کنیم.

$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$

$$b^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64$$

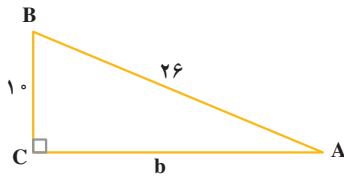
$$b^2 = 100 \Rightarrow b = \sqrt{100}$$

$$b = 10 \Rightarrow AC = 10$$

مثال ۲- در مثلث قائم‌الزاویه‌ی CAB ، اندازه‌های وتر و یک ضلع نوشته شده است. اندازه‌ی

ضلع سوم آن را به صورت زیر حساب می‌کنیم.





$$AB^2 = AC^2 + BC^2$$

$$26^2 = b^2 + 10^2$$

$$b^2 = 26^2 - 10^2 = 676 - 100$$

$$b^2 = 576 \Rightarrow b = \sqrt{576}$$

$$b = 24 \Rightarrow AC = 24$$

مشاهده کردید که در هر مثلث قائم الزاویه، مجذور وتر برابر است با مجموع مجذورهای دو ضلع دیگر؛ این حقیقت جالب را فیثاغورس کشف کرد؛ به همین سبب، رابطه‌ی $a^2 = b^2 + c^2$ به رابطه‌ی فیثاغورس معروف است. این رابطه برحسب این که رأس قائمه A یا B یا C باشد، به صورت‌های

$$\hat{A} = 90^\circ \text{ و } a^2 = b^2 + c^2 \text{ یا}$$

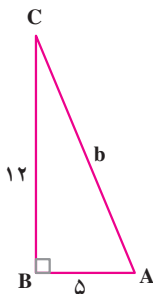
$$\hat{B} = 90^\circ \text{ و } b^2 = a^2 + c^2 \text{ یا}$$

$$\hat{C} = 90^\circ \text{ و } c^2 = a^2 + b^2$$

نوشته می شود.

کاردرکلاس

۱- در مثلث قائم الزاویه‌ی ABC، اندازه‌ی وتر را حساب کنید.



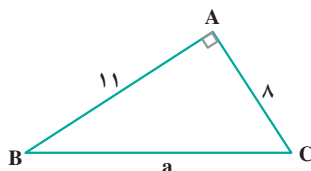
$$b^2 = a^2 + c^2$$

$$b^2 = \underline{\quad} + \underline{\quad} = \underline{\quad} + \underline{\quad}$$

$$b^2 = \underline{\quad} \Rightarrow b = \sqrt{\quad}$$

$$b = \underline{\quad}$$

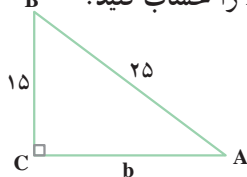
۲- اندازه‌ی وتر مثلث قائم الزاویه‌ی ABC را تا یک رقم اعشار حساب کنید.



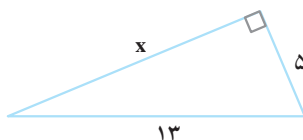
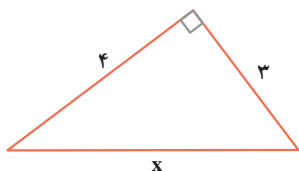
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 =$$

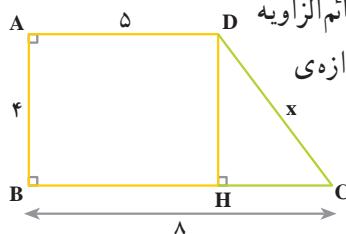
- ۳- در مثلث قائم الزاویه ABC ، اندازه‌ی ضلع AC را حساب کنید.
- $$c^2 = b^2 + a^2$$



- ۴- در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه‌ی ضلعی را که با یک حرف مشخص شده است، حساب کنید.



- ۵- چهار ضلعی $ABCD$ یک دوزنقه‌ی قائم الزاویه است و اندازه‌های سه ضلع آن داده شده است. اندازه‌ی ضلع DC را حساب کنید.

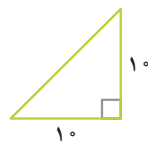
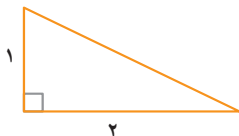


$$CH = 8 -$$

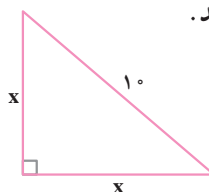
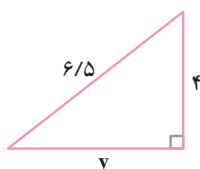
$$x^2 = CH^2 + DH^2 =$$

$$x =$$

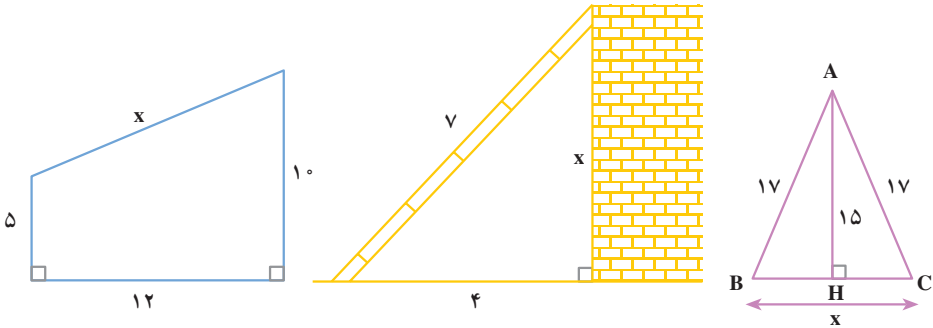
- ۶- در هریک از مثلث‌های قائم الزاویه‌ی زیر، اندازه‌ی وتر را تا یک رقم اعشار حساب کنید.



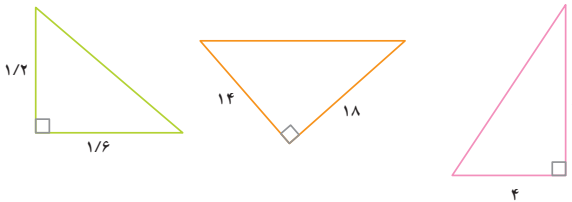
- ۷- در هر مثلث قائم الزاویه، اندازه‌ی ضلعی را که با یک حرف نشان داده شده است، حساب کنید.



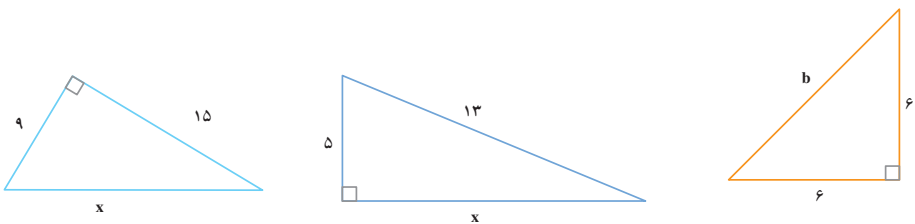
۸- در هر شکل، x را حساب کنید.



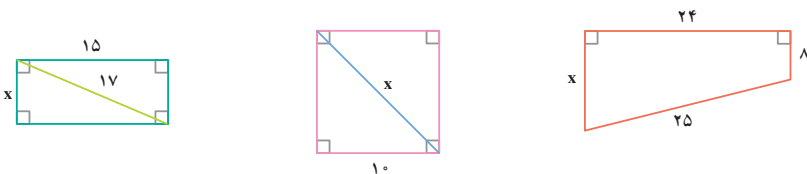
۱- طول وتر هر یک از مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ی زیر را با تقریب کمتر از 1° حساب کنید.



۲- در هر شکل، مقدار مجهول را حساب کنید.



۳- در هر شکل، x را حساب کنید.





- رسم شکل
- جدول نظام دار
- الگویابی
- حذف حالت های نامطلوب
- زیر مسئله
- حل مسئله ی ساده تر
- تشکیل معادله
- حدس و آزمایش

- ۱- اندازه ی هر ضلع یک مثلث متساوی الاضلاع، ۸ سانتی متر است. طول ارتفاع این مثلث را حساب کنید و مساحت آن را به دست آورید. (راهنمایی: ارتفاع نظیر هر ضلع مثلث متساوی الاضلاع، آن ضلع را نصف می کند.)
- ۲- مستطیلی است به ابعاد ۲۰ سانتی متر و ۱۵ سانتی متر؛ اندازه ی قطر آن چند سانتی متر است؟



- ۳- راننده ای با اتومبیل خود از شهر A حرکت کرد. پس از طی ۸۰ کیلومتر به طرف شرق، ۶۰ کیلومتر نیز به طرف شمال رانندگی کرد و به شهر B رسید. فاصله ی دو شهر A و B به صورت مستقیم چند کیلومتر است؟

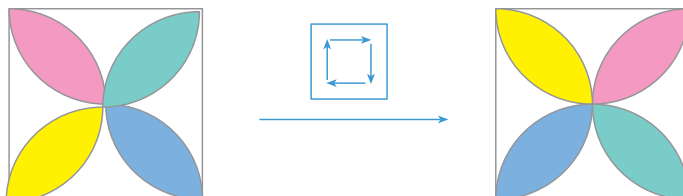
- ۴- اندازه ی قطرهای یک لوزی ۲۸ سانتی متر و ۲۱ سانتی متر است. اندازه ی هر ضلع آن چند سانتی متر است؟
- ۵- در یک دایره، وتر ی به طول ۵۶ سانتی متر رسم کرده ایم. اگر فاصله ی مرکز دایره تا وتر ۲۱ سانتی متر باشد، شعاع دایره را حساب کنید. (راهنمایی: در هر مثلث متساوی الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، قاعده را نصف می کند.)
- ۶- شکل بعدی کدام است؟





دوران

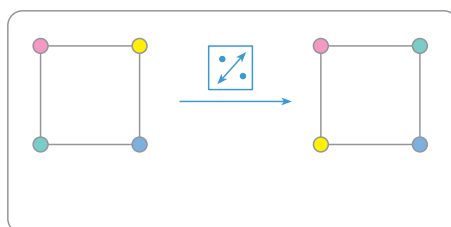
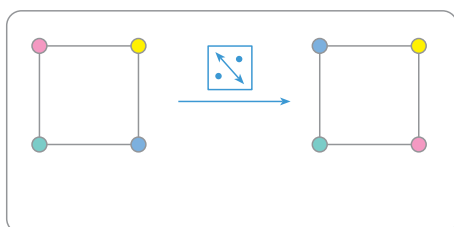
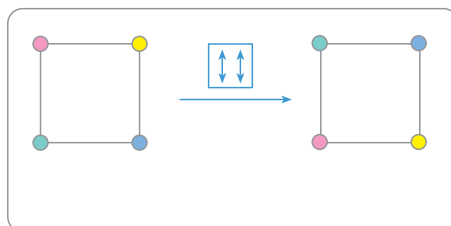
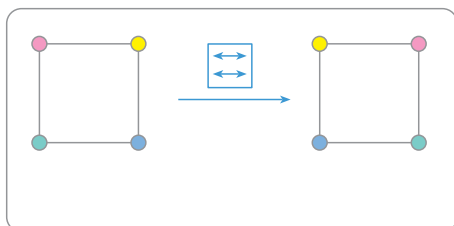
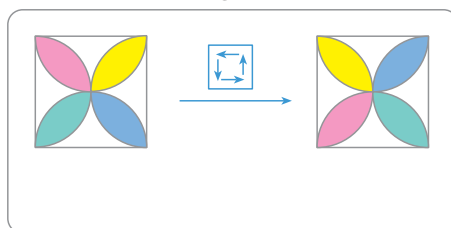
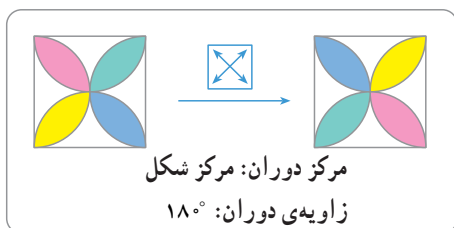
نمادهای دوران



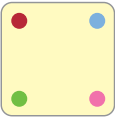

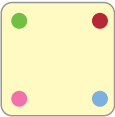



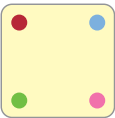

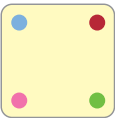


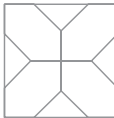
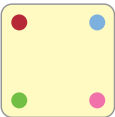

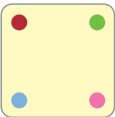


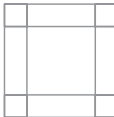
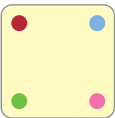

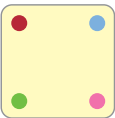


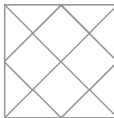
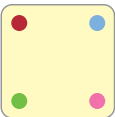

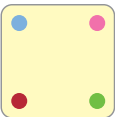


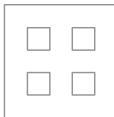
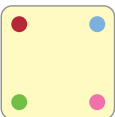

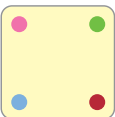
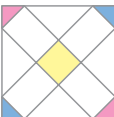

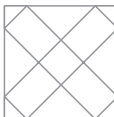
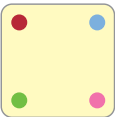




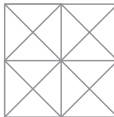
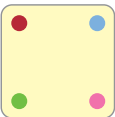

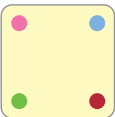
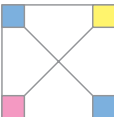

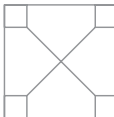
به شکل‌های بالا توجه کنید؛ اگر شکل سمت چپ در جهت حرکت عقربه‌های ساعت (ساعت‌وار) حول مرکز مربع به اندازه‌ی 90° دوران کند، شکل سمت راست به دست می‌آید.

نماد این دوران را نشان می‌دهد.

در هر یک از شکل‌های زیر، به دوران داده شده توجه کنید. مانند نمونه، مرکز (یا محور) دوران و زاویه‌ی آن را مشخص کنید.



با توجه به شکل های سمت چپ، شکل های سمت راست را رنگ کنید.

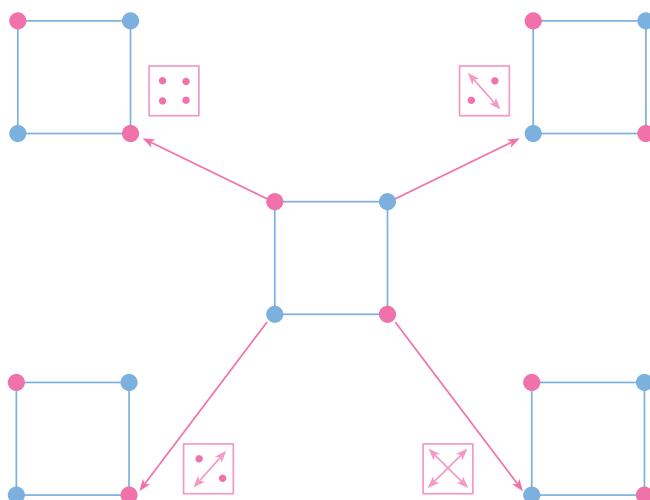
					
					
					
					
					
					
					
					

مجموعه‌ی دوران‌های یک شکل

در صفحه‌ی قبل، دیدید که هر کدام از نمادهای زیر، یک دوران را نشان می‌دهد.



اکنون به شکل زیر توجه کنید.



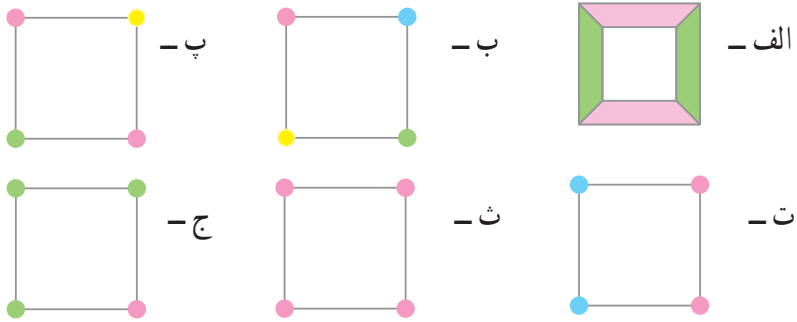
وسط صفحه با هر یک از دوران‌های $\begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \nearrow & \\ & \nwarrow \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \nwarrow & \\ & \nearrow \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \nwarrow & \nearrow \\ \nearrow & \nwarrow \end{bmatrix}$ ظاهراً تغییر

نمی‌کند؛ این دوران‌ها وضعیت شکل و رنگ‌های آن را حفظ می‌کنند.

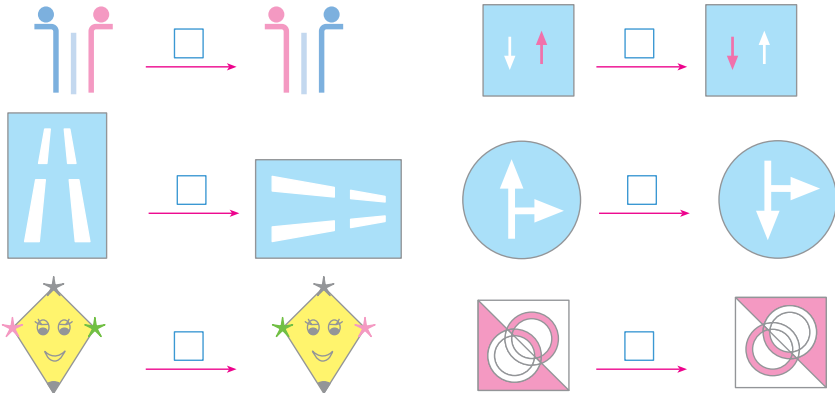
مجموعه‌ی $\left\{ \begin{bmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nwarrow & \nearrow \\ \nearrow & \nwarrow \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nwarrow & \\ & \nearrow \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \nearrow & \\ & \nwarrow \end{bmatrix} \right\}$ را مجموعه‌ی دوران‌های این

شکل می‌نامیم.

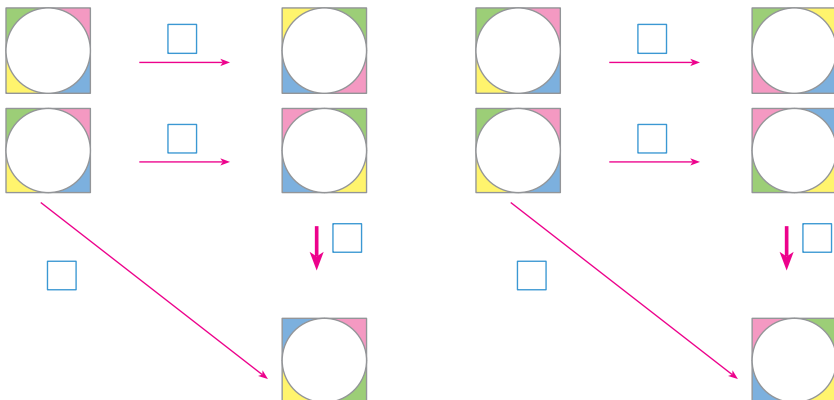
۱- در مورد هریک از شکل‌های زیر، مجموعه‌ی دوران‌های شکل را مشخص کنید.



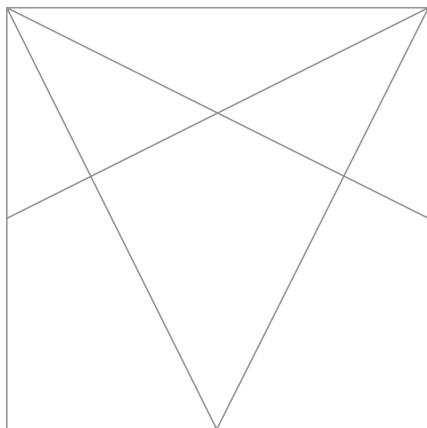
۲- در هریک از حالت‌های زیر، با رسم نماد مناسب نوع دوران را مشخص کنید.



۳- در هر مورد، نوع دوران را مشخص کنید.



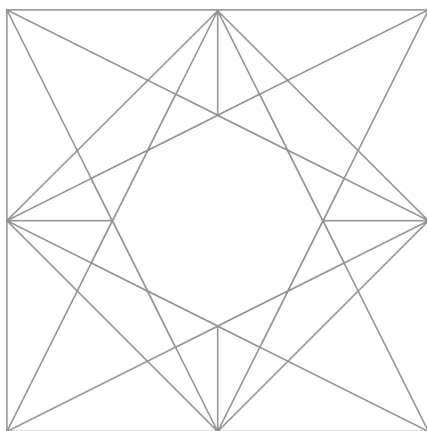
الف- با توجه به شکل نهایی، در قسمت زیر رسم را انجام دهید و شکل را کامل کنید.



ب-

- ۱- مربعی به ضلع ۱۶ سانتی متر در وسط کاغذ رسم کنید.
- ۲- وسط هریک از ضلع‌های مربع را به دست آورید.
- ۳- هر رأس مربع را به وسط‌های دو ضلعی که این رأس بر آن‌ها قرار ندارد، وصل کنید.
- ۴- وسط‌های اضلاع را نیز به یک‌دیگر وصل کنید.
- ۵- خطوط اضافی را پاک کنید.

ب- شکل نهایی



ت- به نظر شما نکات مهم این رسم چیست؟ در این مورد، قبل و بعد از کشیدن رسم در

کلاس، با دوستان خود گفت‌وگو کنید.

تمرین دوره‌ای ۱



۱- دور هر عدد مرکب خط بکشید.

۵ , ۶ , ۱۴ , ۱۵ , ۲۰ , ۲۳ , ۲۵ , ۳۹

۲- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عدد توان دار بنویسید.

$$۳^۴ \div ۵^۴$$

$$۸^۲ \div ۴^۲$$

$$۸^۳ \times ۸^۵$$

$$(۰/۲)^۳ \div (۰/۲)$$

$$۹^۷ \times ۱۰^۷$$

$$(۱/۴)^۷ \div (۱/۴)^۵$$

۳- جذر هر یک از عددهای زیر را به دست آورید.

۷۲۵۱

۴۰۱

۶۴۹۲

۴- جذر هریک از عددهای زیر را تا دو رقم اعشار به دست آورید.

۶۹/۵

۲۹۵/۱

۱۰۵

۵- حاصل جمع‌ها و تفریق‌های زیر را حساب کنید.

$$(+\frac{۲}{۵}) + (+\frac{۴}{۵})$$

$$(-\frac{۳}{۸}) + (-\frac{۹}{۱۰})$$

$$(-\frac{۵}{۶}) - (+\frac{۳}{۴})$$

$$\frac{۲}{۵} - (-\frac{۷}{۱۵})$$

$$(-\frac{۱}{۲}) - (-\frac{۳}{۵})$$

$$\frac{۷}{۱۰} + (-\frac{۹}{۸})$$

۶- حاصل ضرب‌ها و تقسیم‌های زیر را حساب کنید.

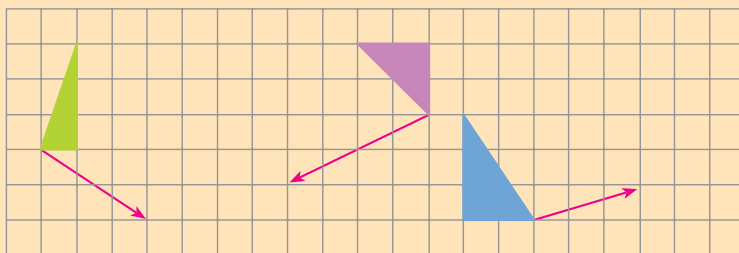
$$(+\frac{۴}{۵}) \div (-\frac{۱۲}{۱۱})$$

$$(-\frac{۶}{۷}) \times (-\frac{۷}{۹})$$

$$(-\frac{۵}{۹}) \div (+\frac{۳}{۲})$$

$$(+\frac{۳}{۴}) \div \left[(+\frac{۱}{۲}) - (-\frac{۳}{۴}) \right]$$

۷- هر شکل را با بردار داده شده انتقال دهید و انتقال یافته‌ی آن را رسم کنید.



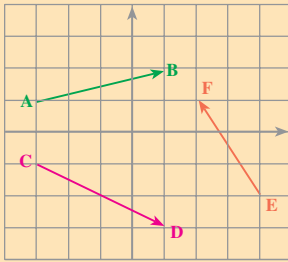
۸- حاصل جمع‌های زیر را پیدا کنید.

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ -۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۳ \\ ۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۲ \\ ۷ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$$





۹- با استفاده از شکل روبه‌رو،

الف - مختصات نقاط داده شده را بنویسید.

ب - مختصات بردارهای رسم شده را بنویسید.

پ - جمع متناظر با هر بردار را بنویسید.

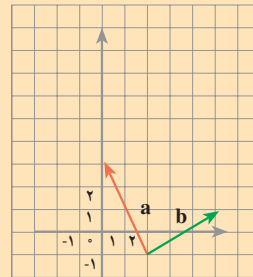
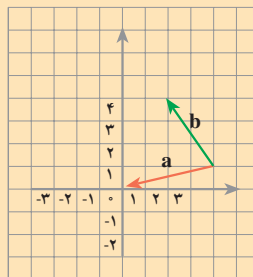
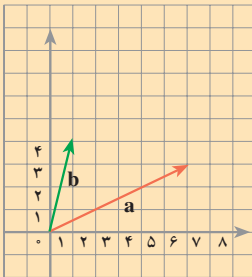
۱۰- بردارهای زیر را با ابتدای مشخص شده، در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

الف - $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ابتدا از $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ب - $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ابتدا از $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

پ - $\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ابتدا از $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ت - $\begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ ابتدا از $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

۱۱- در هریک از شکل‌های زیر، بردار حاصل جمع دو بردار a و b را رسم کنید. در هر

حالت، تساوی مربوط به جمع دو بردار a و b را بنویسید.



$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

۱۲- حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad -4 \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad (-5) \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{4}{5} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \frac{8}{5} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

۱۳- در جاهای خالی، عدد مناسب بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ - \end{bmatrix} = \text{---} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{---} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 8 \\ -4 \\ 3 \end{bmatrix} = \text{---} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \text{---} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} - \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ - \end{bmatrix} = \text{---} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \text{---} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

۱۴- با توجه به این که $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، مختصات هریک از بردارهای زیر را به دست

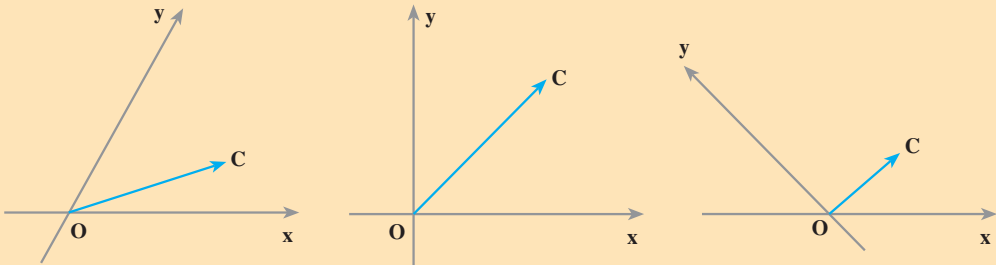
آورید؛ سپس، آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$a = 5i + 3j \quad b = \frac{3}{5}i - 3j \quad c = \frac{2}{3}i - j$$

۱۵- با توجه به این که $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، هریک از بردارهای زیر را بر حسب i و j بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 2i + 3j \quad \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

۱۶- در هر شکل، روی نیم خط‌های ox و oy دو بردار OA و OB را طوری مشخص کنید که حاصل جمع آن‌ها مساوی بردار OC شود.



۱۷- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$3a - 8b - 9a + 4b$$

$$\frac{3}{2}a - 4a + 2b + 6b$$

$$7 \times 3a - 2 \times 4a$$

$$3 \times \frac{2}{5}x - (-2) \times (4x)$$

$$2(3a - 2b) + 4(7a + b)$$

$$9(a - 2b) - 9a - b$$

۱۸- مقدار عددی هر عبارت جبری را به ازای مقدارهای داده شده برای x و y حساب کنید.

$$x = 1, y = 2, 2xy - y^2$$

$$x = 1, y = 1, 7x(x - y)$$

$$x = 2, y = 3, 4x^2 - yx$$

$$x = 3, y = 2, (x + y)(x - y)$$

۱۹- با استفاده از توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع و تفریق، عبارت‌های زیر را ساده کنید.

$$2x(3a - b) + 3x(2a + b)$$

$$4x(5a + 2b) + 2x(-7a - 8b)$$

۲۰- هر عبارت را به صورت حاصل ضرب دو عبارت جبری بنویسید.

$$ab + 2ac$$

$$9ax + 12a$$

$$4ax + 12ay$$



۲۱- حاصل هر ضرب را به دست آورید و عبارت حاصل را ساده کنید.

$$(a-b)^2 \quad (a-7)(b+8) \quad (x+y)(x-y)$$

$$(a+x)(a+y) \quad (x-a)(x-b) \quad (a-u)(a-v)$$

۲۲- معادله های زیر را حل کنید.

$$4x-7=3x+1$$

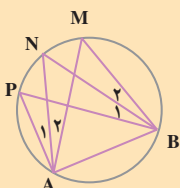
$$15x-4=5$$

$$\frac{5}{7}x-2=7$$

$$9x-1=x+17$$

$$\frac{4}{3}x-\frac{2}{4}=\frac{1}{4}x$$

$$\frac{2}{5}x-\frac{3}{5}=1$$

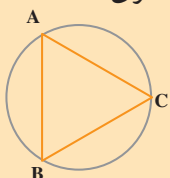


۲۳- در شکل روبه رو AN نیمساز زاویه ی PAM است.

الف - همه ی زاویه های مساوی با A_1 را مشخص کنید.

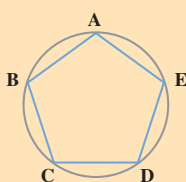
ب - همه ی زاویه های مساوی با M را مشخص کنید.

۲۴- در دایره ی شکل روبه رو، کمان های AB، BC و AC با هم مساوی اند.



الف - اندازه ی هر زاویه ی مثلث ABC چند درجه است؟

ب - چرا وترهای AB، BC و AC با هم مساوی اند؟



۲۵- دایره ی روبه رو، به پنج کمان متساوی تقسیم شده است.

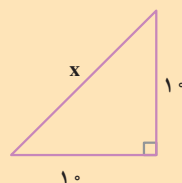
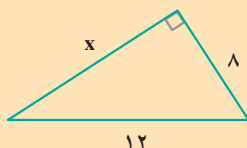
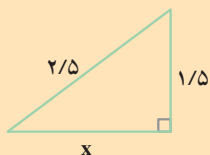
الف - اندازه ی هر کمان چند درجه است؟

ب - اندازه ی هریک از زاویه های پنج ضلعی چند درجه است؟

پ - آیا این پنج ضلعی منتظم است؟ چرا؟

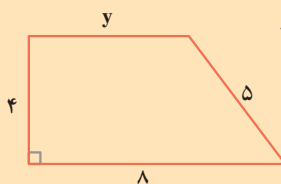
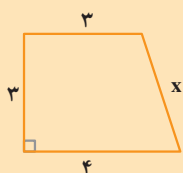
۲۶- در مثلث های قائم الزاویه ی زیر، اندازه ی یک ضلع با x نشان داده شده است. x را تا یک

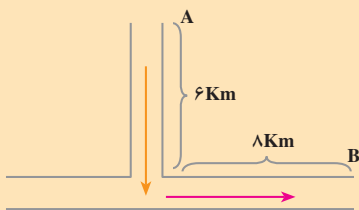
رقم اعشار حساب کنید.



۲۷- هریک از چهارضلعی های زیر، دوزنقه ی قائم الزاویه است. در هریک، اندازه ی ضلع

مجهول را حساب کنید.





۲۸- راه شوسه‌ی بین دو روستای A و B مانند شکل مقابل است؛ فاصله‌ی مستقیم این دو روستا چند کیلومتر است؟

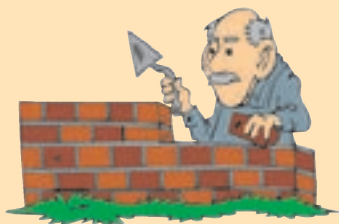
- رسم شکل
- جدول نظام‌دار
- الگویی
- حذف حالت‌های نامطلوب
- زیر مسئله
- حل مسئله‌ی ساده‌تر
- تشکیل معادله
- حدس و آزمایش

حل مسئله



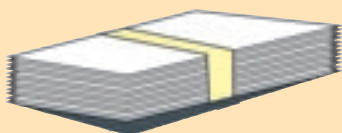
۱- ضخامت یک فرهنگ لغت ۱۶۰۰ صفحه‌ای، ۸ سانتی‌متر است؛ ضخامت یک برگ کاغذ این فرهنگ لغت چه قدر است؟

۲- برای موزاییک فرش یک اتاق به ۴۵۰ موزاییک به ابعاد ۲۰ سانتی‌متر در ۲۰ سانتی‌متر نیاز داریم. در صورتی که از موزاییک‌هایی به ابعاد ۲۰ سانتی‌متر در ۳۰ سانتی‌متر استفاده کنیم، چند موزاییک لازم است؟



۳- چهار بنا می‌توانند یک دیوار را ۹ روزه بسازند. برای این که دیوار ۶ روزه ساخته شود، چند بنا باید با هم کار کنند؟

۴- برای خریدن ۵ مداد، یک اسکناس ۱۰۰ تومانی به کتاب‌فروش دادیم و او ۱۵ تومان پس داد. قیمت یک مداد چه قدر است؟



۵- وزن یک بسته کاغذ ۵۰۰ برگی، یک کیلوگرم است. وزن هر برگ از این کاغذ چند گرم است؟

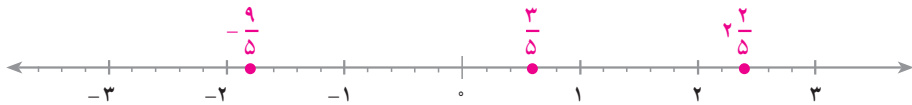
۶- محیط یک متوازی‌الاضلاع ۳۰ سانتی‌متر و طول یک ضلع آن ۵ سانتی‌متر است. طول یک ضلع مجاور به این ضلع چه قدر است؟

اعداد حقیقی و آمار



مجموعه‌ی عددهای حقیقی

نمایش عددهای حقیقی



تا این جا با عددهای گویا و نمایش آن‌ها روی محور آشنا شده‌اید. هر عدد گویا یک نقطه‌ی نمایش روی محور دارد؛ مثلاً $\frac{3}{5}$ ، $\frac{2}{5}$ و $-\frac{9}{5}$ عددهایی گویا هستند. نقاط نمایش این عددها، روی محور بالا مشخص شده است.

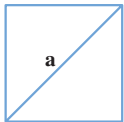
عددهایی چون 0 ، -2 ، $+3$ ، $-\frac{3}{2}$ ، $\frac{0}{25}$ هم از جمله اعداد گویا هستند. این عددها را می‌توانیم به ترتیب، به شکل کسرهای $\frac{0}{1}$ ، $\frac{-2}{1}$ ، $\frac{+3}{1}$ ، $\frac{-32}{10}$ ، $\frac{25}{100}$ بنویسیم.

اکنون این سؤال پیش می‌آید که

آیا غیر از عددهای گویا، اعدادی دیگر وجود دارند؟

برای پاسخ دادن به این سؤال، مربعی به ضلع 1 را در نظر بگیرید. با به کار بردن رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه، می‌توانید طول قطر این مربع را حساب کنید.

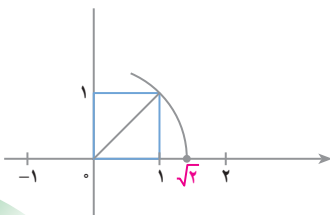
فرض کنید طول قطر مربع a باشد؛ در این صورت



$$a^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

$$a = \sqrt{2}$$

می‌توانیم روی محور اعداد، نقطه‌ای را به دست آوریم که طول آن $\sqrt{2}$ باشد.



شکل روبه‌رو، چگونگی این کار را نشان می‌دهد.

آیا $\sqrt{2}$ عددی گویاست؟

در دبیرستان برای شما ثابت خواهند کرد که $\sqrt{2}$ عددی گویا نیست؛ یعنی، کسری متعارفی را نمی‌توان یافت که مساوی $\sqrt{2}$ باشد. به‌طور کلی، ثابت می‌شود که اگر عدد طبیعی n مجذور کامل نباشد، \sqrt{n} عددی گویا نیست؛ مثلاً عددهای $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ و $\sqrt{6}$ گویا نیستند.

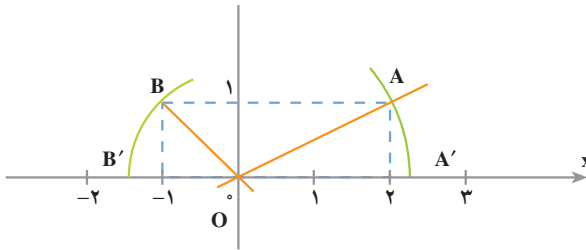
این مطلب نشان می‌دهد که روی محور نقاطی هست که طول آن‌ها عددی گویا نیست. این نقاط، عددهایی را نمایش می‌دهند که عددهای اصم یا گنگ نامیده می‌شوند. مجموعه‌ی تمام عددهای گویا و عددهای اصم را **مجموعه‌ی اعداد حقیقی** می‌نامیم.

کار در کلاس

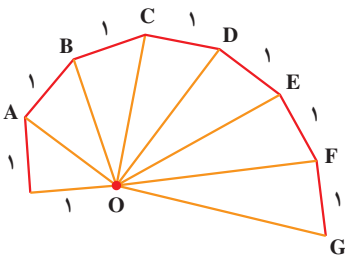


۱- به شکل زیر دقت کنید. طول پاره‌خط‌های OA و OB را حساب کنید.

OA = _____ OB = _____



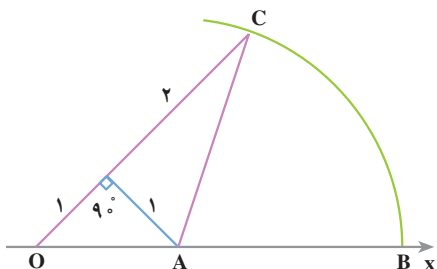
هر یک از نقاط A' و B' چه عددی را نمایش می‌دهند؟ _____



۲- در شکل سمت چپ، تعدادی مثلث

قائم‌الزاویه رسم شده است که در هر کدام یک ضلع زاویه‌ی قائمه به طول ۱ واحد است. طول پاره‌خط‌های OA، OB، OC، ... را حساب کنید و در کنار آن‌ها بنویسید.

(به تصویر روی جلد کتاب توجه کنید)



۳- در شکل سمت چپ، به مرکز A
و شعاع AC یک دایره زده‌ایم تا محور Ox
را در نقطه‌ی B قطع کند. نقطه‌ی B چه
عددی را نمایش می‌دهد؟

محور عددهای حقیقی

در صفحه‌ی قبل دیدید که هر نقطه از محور، یک عدد حقیقی را نشان می‌دهد. اعداد گویا هم از جمله عددهای حقیقی هستند. مجموعه‌ی اعداد حقیقی را با حرف \mathbb{R} نمایش می‌دهیم؛ بنابراین:

$$1 \in \mathbb{R} \quad -5 \in \mathbb{R} \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R} \quad -\frac{3}{5} \in \mathbb{R} \quad \pi \in \mathbb{R}$$

مجموعه‌ی اعداد حقیقی شامل همه‌ی عددهایی است که تاکنون با آن‌ها آشنا شده‌اید.
مجموعه‌ی اعداد حقیقی بزرگ‌تر از \mathbb{Q} را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم.

$$A = \{x | x \in \mathbb{R}, x > 0\}$$

یا به اختصار می‌توانیم به صورت $A = \{x | x > 0\}$ نشان دهیم.
نمودار زیر، نمایش این مجموعه را روی محور نشان می‌دهد.



هریک از عددهای ۶، $\frac{11}{3}$ ، $\frac{2}{5}$ به این مجموعه تعلق دارند. عدد ۲ و عددهای کوچک‌تر از

۲ عضو این مجموعه نیستند، به همین دلیل، روی عدد ۲ یک دایره‌ی توخالی می‌گذاریم.

$$B = \{x | -3 < x < 2\}$$

حالا فرض کنیم

این مجموعه شامل عددهای حقیقی بین -۳ و ۲ است؛ یعنی هر عددی که از ۲ کوچک‌تر و از -۳ بزرگ‌تر باشد، عضو این مجموعه است. نمودار این مجموعه به صورت زیر است. چرا در شروع و پایان نمودار، از دایره‌های توخالی استفاده کرده‌ایم؟



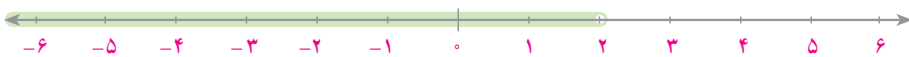
با توجه به تعریف این مجموعه، علامت \in یا \notin قرار دهید.

$$\begin{array}{ccccccc} -2 \in B & , & -4 \in B & , & \sqrt{2} \in B & , & 2 \in B \\ -3 \in B & , & \frac{1}{2} \in B & , & 0 \in B & , & 3/5 \in B \end{array}$$

کار در کلاس



۱- نمودار زیر، مجموعه‌ی $A = \{x | x < 2\}$ را نمایش می‌دهد.



درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

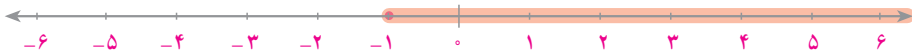
$$1 \in A \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 2 \in A \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 0 \in A \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad -2/3 \in A \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

$$4 \in A \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 0/385 \in A \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad \sqrt{2} - 1 \in A \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

۲- در شکل زیر، نمودار مجموعه‌ی $B = \{x | -1 \leq x\}$ داده شده است.

$-1 \leq x$ را بخوانید « x بزرگ‌تر از -1 یا مساوی با آن است».

چون عدد -1 نیز به این مجموعه تعلق دارد، دایره‌ی ابتدا را توپر در نظر می‌گیریم.



درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را مشخص کنید.

$$-1 \in B \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 2 \in B \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad -1/2 \in B \quad \underline{\hspace{1cm}} \quad 0/95 \in B \quad \underline{\hspace{1cm}}$$

۳- نمایش هر مجموعه را روی محور مقابل آن مشخص کنید.

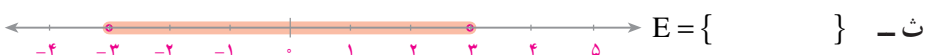
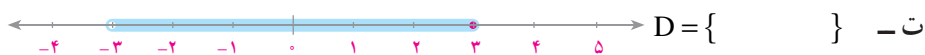
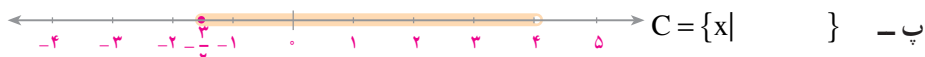
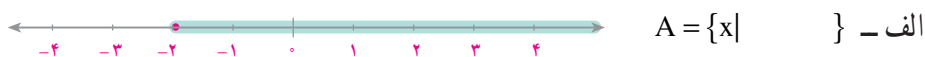


۴- نمایش هر مجموعه را روی محور مقابل آن مشخص کنید.





۵- مجموعه‌هایی را که مشخص شده‌اند، بیان کنید.

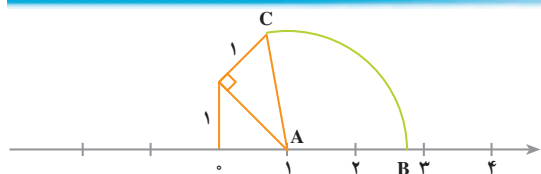


۶- با توجه به تمرین قبل، درستی یا نادرستی هریک از عبارت‌های زیر را

مشخص کنید.

$-2 \in A$ _____ $-3 \in B$ _____ $-\frac{3}{2} \in C$ _____ $4 \in C$ _____

$-3 \in D$ _____ $2 \in E$ _____ $-3 \in E$ _____ $3 \in E$ _____



۱- در شکل مقابل، طول AC را حساب کنید. به مرکز A و شعاع AC یک دایره زده‌ایم تا محور را در نقطه‌ی B قطع کند. نقطه‌ی B چه عددی را نمایش

می‌دهد؟ آیا این عدد به مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت تعلق دارد؟

۲- عدد $\sqrt{19}$ بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟ آیا این عدد به مجموعه‌ی

$\{x \mid x > 3\}$ تعلق دارد؟

۳- نمایش هریک از مجموعه‌های زیر را روی یک محور مشخص کنید.

$A = \{x \mid -2 < x < 3\}$

$B = \{x \mid -1 < x \leq 3\}$

$C = \{x \mid x \leq 3\}$

$D = \{x \mid 3 \leq x\}$

نمودار ستونی

نمره‌های درس ریاضی دانش آموزان کلاس سوم الف در یک مدرسه‌ی راهنمایی، در امتحان ماهانه به صورت زیر است :

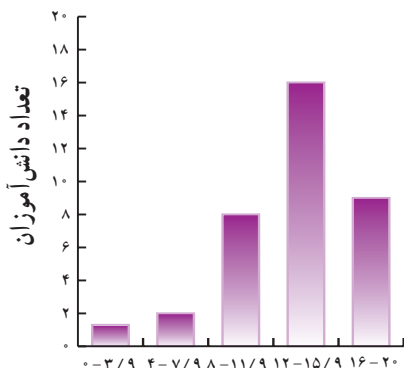
۱۲/۵ ۱۳ ۱۲ ۱۳/۵ ۱۴ ۱۱ ۱۳ ۹ ۸ ۱۵ ۱۴ ۱۹
۱۵ ۱۴ ۱۰/۵ ۱۱/۵ ۱۵ ۱۸ ۱۷ ۱۴ ۱۶ ۱۸ ۱۵ ۹/۵
۶ ۱۲/۵ ۲۰ ۱۸/۵ ۱۷ ۱۵/۵ ۱۶/۵ ۱۱ ۸/۵ ۷ ۳ ۱۳

ابتدا نمره‌ها را به ترتیب از بیشترین نمره تا کمترین نمره مرتب می‌کنیم؛ سپس، برای بررسی وضع کلاس، نمره‌ها را به ۵ دسته با فاصله‌های مساوی تقسیم می‌کنیم.

خیلی بد	۰ تا ۳/۹
بد	۴ تا ۷/۹
ضعیف	۸ تا ۱۱/۹
خوب	۱۲ تا ۱۵/۹
خیلی خوب	۱۶ تا ۲۰

اکنون، جدول داده‌ها را برای نمره‌های کلاس تهیه می‌کنیم. برای این کار، نمره‌ها را

یکی یکی می‌خوانیم و برای هر نمره، در قسمت مربوطه یک خط می‌کشیم. خط‌ها را در دسته‌های پنج تایی می‌کشیم تا شمردن آن‌ها راحت باشد. جدول را کامل کنید.
نمودار ستونی نمره‌های کلاس را در سمت چپ ملاحظه کنید.



دسته‌ها	خط نشان	فراوانی هر دسته
۰ تا ۳/۹	/	۱
۴ تا ۷/۹	//	۲
۸ تا ۱۱/۹	### ///	۸
۱۲ تا ۱۵/۹	### ### ### /	۱۶
۱۶ تا ۲۰		۹
جمع کل		



نمره‌های ریاضی کلاس سوم ب از همان مدرسه‌ی راهنمایی به صورت زیر است.

۱۵	۱۴	۸	۷	۳	۲	۳/۵	۱۸	۱۶	۱۵
۵	۱۴	۱۳/۵	۱۸/۵	۱۷	۱۵/۵	۱۴	۱۶	۲۰	۱۳
۱۱	۱۰	۸	۹	۱۷	۱	۱۶/۵	۱۷	۱۵/۵	۱۵
۱۴	۱۳	۱۹	۱۴/۵	۱۷/۵	۱۱	۱۰	۱۲		

جدول داده‌ها را برای نمره‌های این کلاس تهیه کنید و نمودار ستونی آن را

بکشید.



دسته‌ها	خط نشان	فراوانی
۰ تا ۳/۹		
۴ تا ۷/۹		
۸ تا ۱۱/۹		
۱۲ تا ۱۵/۹		
۱۶ تا ۲۰		
جمع کل	—	



۱- قد دانش‌آموزان یک کلاس، بر حسب سانتی‌متر به صورت زیر داده شده است. جدول

داده‌ها و نمودار ستونی آن را تهیه کنید.

۱۳۵	۱۳۸	۱۲۲	۱۳۶/۵	۱۳۵/۲	۱۳۰/۸	۱۲۸	۱۳۴/۵	۱۳۲	۱۳۵
۱۲۹/۵	۱۳۰/۵	۱۲۵/۶	۱۲۴/۵	۱۳۱/۳	۱۲۸/۵	۱۳۱/۵	۱۲۹/۵	۱۲۸	۱۳۲/۴
۱۳۴	۱۳۰/۵	۱۲۷/۲	۱۳۲/۷	۱۳۶/۵	۱۳۷/۲	۱۳۱	۱۳۰/۵	۱۲۳	۱۲۷
۱۲۳	۱۲۶	۱۳۳/۵	۱۳۴	۱۳۲/۶	۱۲۹/۵	۱۳۸	۱۳۷		

دسته‌ها را (۱۲۲ تا ۱۲۵/۹)؛؛ (۱۳۴ تا ۱۳۸) بگیرید.

۲- از ۳۵ دانش‌آموز مدرسه‌ی خود ماه تولدشان را بپرسید و یادداشت کنید؛ سپس، جدول

داده‌ها و نمودار ستونی اطلاعات به دست آمده را تهیه کنید.



میانگین

نمره‌های زهره و نرگس در امتحان‌های ماهانه‌ی ریاضی در سال گذشته به صورت زیر است.

زهره: ۱۴ , ۱۳ , $۱۲/۵$, ۱۷ , ۱۰ , ۱۶ , ۱۲ , $۱۷/۵$

نرگس: ۱۹ , $۱۱/۵$, $۱۷/۵$, ۱۳ , $۱۳/۵$, ۱۴ , ۱۳ , $۱۸/۵$

به نظر شما، نمره‌های کدام یک بهتر است؟

یک راه مقایسه، محاسبه‌ی میانگین نمره‌هاست. برای محاسبه‌ی میانگین، نمره‌های هریک را جمع می‌کنیم و به تعداد درس‌ها تقسیم می‌کنیم.

$$\text{میانگین نمره‌های زهره} = \frac{۱۱۲}{۸} = ۱۴$$

$$\text{میانگین نمره‌های نرگس} = \frac{۱۲۰}{۸} = ۱۵$$

بنابراین، به نظر می‌رسد که در مجموع، نرگس نمره‌های بهتری گرفته است.

کار در کلاس

محصول پنبه‌ی دو مزرعه در پنج سال گذشته به صورت زیر بوده است (عددها بر حسب تن است).

۱۲ , ۱۵ , ۱۳ , ۲۰ , ۸

مزرعه‌ی اول

۱۱ , ۱۷ , ۱۸ , ۷ , ۱۳

مزرعه‌ی دوم

میانگین محصول پنبه‌ی هر مزرعه را در پنج سال گذشته حساب کنید.

کدام مزرعه به طور متوسط تولید بیشتری دارد؟

برای مقایسه‌ی نمره‌های دو کلاس سوم الف و ب که در صفحه‌های قبل بیان شد، باید میانگین آن‌ها را حساب کنیم اما محاسبه‌ی میانگین نمره‌های یک کلاس، به صورتی که در صفحه‌ی قبل دیدیم، دشوار است. اگر تعداد داده‌ها زیاد باشد، محاسبه‌ی میانگین به روشی دیگر انجام می‌شود.



نمره‌های دانش‌آموزان کلاس الف را در نظر بگیرید. در جدول زیر، ابتدا متوسط هر دسته را پیدا کنید. متوسط دسته ۰ تا ۳/۹ عدد ۲ است. در این دسته به جای هر عددی که وجود دارد، عدد ۲ را در نظر می‌گیریم.

پس، در این کلاس به جای چه نمره‌ای، عدد ۲ را در نظر می‌گیریم؟ به همین ترتیب، در هر دسته به جای عددهای آن دسته، متوسط دسته را در نظر می‌گیریم.

حاصل ضرب فراوانی در متوسط هر دسته، مجموع داده‌های آن دسته را به طور تقریبی نشان می‌دهد.

جدول را کامل کنید و میانگین تقریبی داده‌ها را به دست آورید.

دسته‌ها	خط نشان	متوسط دسته‌ها	فراوانی	فراوانی \times متوسط
۰ تا ۳/۹	/	$\frac{0+3/9}{2} \approx 2$		
۴ تا ۷/۹	//			
۸ تا ۱۱/۹	### ///			
۱۲ تا ۱۵/۹	### ### ### /			
۱۶ تا ۲۰	### ////			
جمع کل	_____	_____		

$$= \frac{\text{مجموع نمره‌ها}}{\text{تعداد دانش‌آموزان}} = \text{میانگین نمره‌های دانش‌آموزان کلاس الف}$$

چرا میانگینی که به دست می‌آید، تقریبی است؟
با استفاده از ماشین حساب، مقدار میانگین را به طور دقیق محاسبه کنید و اختلاف آن را با میانگین تقریبی به دست آورید.



جدول زیر از کار در کلاس سه صفحه قبل را برای کلاس ب کامل کنید و میانگین نمره‌های دانش‌آموزان کلاس را حساب کنید.
نمره‌های دانش‌آموزان این کلاس بهتر است یا کلاس الف؟

دسته‌ها	خط نشان	متوسط دسته‌ها	فراوانی	فراوانی \times متوسط
۰ تا ۳/۹				
۴ تا ۷/۹				
۸ تا ۱۱/۹				
۱۲ تا ۱۵/۹				
۱۶ تا ۲۰				
جمع کل				

میانگین کلاس ب \approx _____



- ۱- میانگین قد دانش‌آموزان از تمرین ۱ سه صفحه قبل، را حساب کنید.
- ۲- یک کارخانه، دو کارگاه تهیه لامپ دارد. برای مقایسه‌ی کار دو کارگاه، از هر کدام ۳۰ لامپ به‌طور تصادفی انتخاب شده و طول عمر لامپ‌ها برحسب ساعت اندازه‌گیری شده است. نتیجه‌ی اندازه‌گیری به‌صورت زیر است.

کارگاه اول

۱۵۷	۱۵۴	۱۵۷	۱۶۸	۱۷۲	۱۶۳	۱۵۸	۱۵۷	۱۶۱	۱۷۱
۱۵۳	۱۶۹	۱۵۸	۱۶۵	۱۵۶	۱۵۶	۱۵۹	۱۶۵	۱۶۳	۱۶۱
۱۶۳	۱۶۸	۱۶۷	۱۵۹	۱۵۱	۱۵۳	۱۵۸	۱۶۷	۱۶۹	۱۷۰

کارگاه دوم

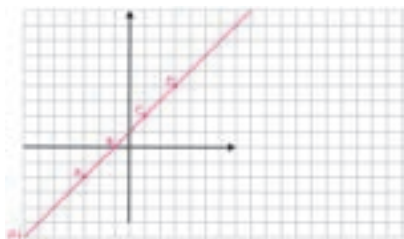
۱۶۰	۱۵۸	۱۵۳	۱۵۴	۱۶۵	۱۶۸	۱۶۹	۱۷۱	۱۷۲	۱۶۳
۱۶۱	۱۶۸	۱۵۶	۱۵۱	۱۵۹	۱۶۵	۱۶۳	۱۶۸	۱۶۱	۱۶۰
۱۵۴	۱۵۹	۱۶۳	۱۷۲	۱۷۰	۱۶۸	۱۶۳	۱۵۴	۱۵۸	۱۵۳

دسته‌ها را به‌صورت زیر انتخاب کنید. جدول داده‌ها را در هر دو مورد تهیه کرده و با محاسبه‌ی میانگین، دو کارگاه را با هم مقایسه کنید.

(۱۵۰ تا ۱۵۴/۹)، (۱۵۵ تا ۱۵۹/۹)، (۱۶۰ تا ۱۶۴/۹)، (۱۶۵ تا ۱۶۹/۹)، (۱۷۰ تا ۱۷۵)

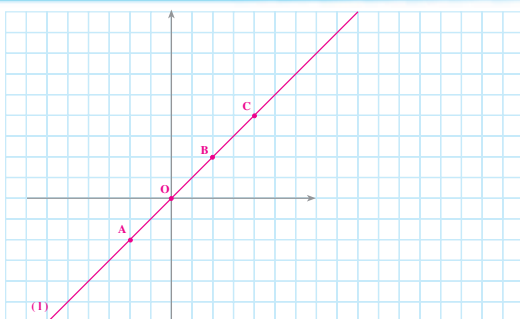


معادله‌های خطی



معادله‌ی خط

رابطه‌ی طول و عرض نقاط



به خط 1 توجه کنید. مختصات نقاط

$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad O = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

را بنویسید. بین طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای وجود دارد؟
اگر طول هر نقطه را با x و عرض آن را با y نشان دهیم، رابطه‌ی بین طول و عرض را با یک تساوی جبری نشان دهید.
نقطه‌ای را روی خط 1 انتخاب کنید؛ آن را D بنامید و مختصات آن را بنویسید.

$$D = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

آیا مختصات D هم در رابطه‌ی بالا صدق می‌کند؟

رابطه‌ی $y = x$ را **معادله‌ی خط 1** می‌نامیم. این تساوی، رابطه‌ی بین طول و عرض نقاط را

مشخص می‌کند.



مهرداد با دوچرخه با سرعت ثابت ۳ متر در ثانیه حرکت می کند؛ یعنی، در هر ثانیه ۳ متر به جلو می رود. اگر در خط شروع، زمان را صفر در نظر بگیریم، با کامل کردن جدول زیر، مسافتی را که او در زمان های مختلف طی کرده است، به دست آورید.

زمان (ثانیه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
مسافت (متر)	۰	۳	۶			

هریک از زوج عددهای به دست آمده را می توانیم به صورت مختصات نقطه ای در

صفحه در نظر بگیریم؛ مثل نقطه ی $(۱, ۳)$.

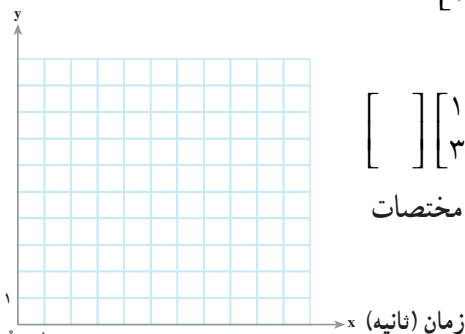
مختصات نقاط را بنویسید.

$[] [] [] [] [] [] [] [] [] []$

نقاط به دست آمده را در محور مختصات

زیر پیدا کرده و به هم وصل کنید.

سانت (متر)



یک معادله ی خطی بنویسید که نشان دهنده ی سرعت حرکت دوچرخه باشد.

با توجه به نمودار بالا، مشخص کنید که در ۷ ثانیه چه مسافتی طی شده است؟

روش کار خود را توضیح دهید.

سرگرمی و ریاضی

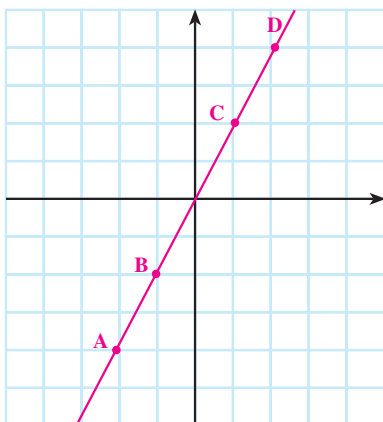


(رنه دکارت ۱۶۵۰-۱۵۹۶ م)

رنه دکارت فیلسوف و ریاضی دان بزرگ، در تفکر و استدلال، شیوه ی جدیدی را بنیان گذاری کرد و در آموزش علم، روشی نو به کار برد. او معتقد بود که انسان بر تحصیل علم به معنای درک حقیقت و معلوم ساختن مجهولات خود توانایی دارد. دکارت ریاضیات را نمونه ی کامل علم می دانست

و معتقد بود که در همه‌ی رشته‌ها باید از راه ریاضی به مطالعه پرداخت. او با به کار بردن جبر در هندسه و حل کردن مسائل هندسه با استفاده از روش‌های جبری، هندسه‌ی تحلیلی را به وجود آورد. مختصاتی که ما برای نقاط به کار می‌بریم، به نام این دانشمند بزرگ، مختصات دکارتی نامیده می‌شود.

کار در کلاس



۱- به نمودار مقابل توجه کنید؛

الف - مختصات نقاط زیر از خط را پیدا کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$$

ب - عرض هریک از این نقاط چند برابر طول آن است؟ _____

پ - یک نقطه روی خط انتخاب کنید و آن را M بنامید. مختصات M را بنویسید $M = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$ عرض این نقطه چند برابر طول آن است؟ _____

ت - اگر مختصات نقطه‌ای دلخواه از خط را $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ بگیریم، بین x و y چه رابطه‌ای برقرار است؟ _____

ث - معادله‌ی این خط چیست؟ _____

۲- جدول زیر را با توجه به نمونه‌ی داده شده کامل کنید.

x	$y = 2x$	$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
-۱	$-2 \times (-1) = 2$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$
-۲		$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$
۰		$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$
۲		$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

با توجه به جدول صفحه‌ی قبل، با تغییر دادن عدد x چند نقطه به صورت $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ می‌توان

پیدا کرد؟

اگر این نقاط را به هم وصل کنیم، چه شکلی به دست می‌آید؟

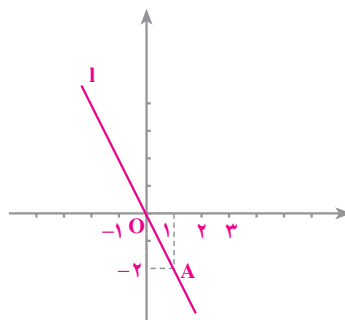
رسم خطی که معادله‌ی آن داده شده است

$$y = 2x$$

فرض کنیم معادله‌ی خط l به صورت

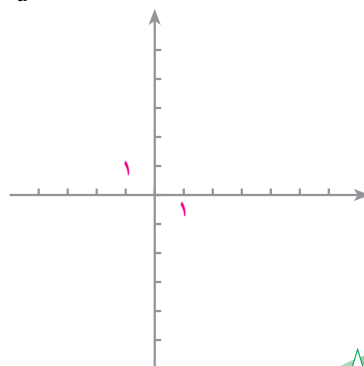
باشد؛ می‌خواهیم خط l را رسم کنیم. چون یک خط با دو نقطه‌اش مشخص می‌شود، پس، دو نقطه از این خط را به دست می‌آوریم. به‌طور کلی، اگر طول نقطه‌ای از این خط x باشد، عرض آن نقطه $-2x$ است؛ پس، مختصات هر نقطه از خط به صورت $\begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix}$ است. اگر x را 1 بگیریم، نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ به دست می‌آید و اگر x را 0 بگیریم، نقطه‌ی $O = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ به دست می‌آید.

x	0	1
$y = 2x$	0	-2
$\begin{bmatrix} x \\ -2x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$



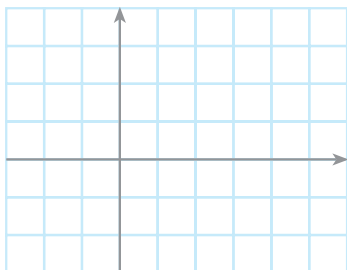
اکنون، خط d به معادله‌ی $y = \frac{2}{5}x$ را رسم کنید.

x	0	5
$y = \frac{2}{5}x$		
$\begin{bmatrix} x \\ \frac{2}{5}x \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

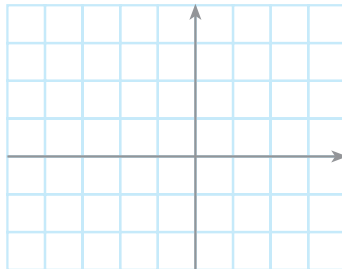




۱- خط‌های زیر را رسم کنید.



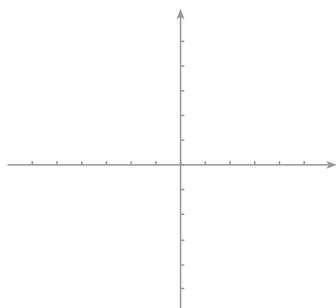
$$y = 3x$$



$$y = \frac{3}{2}x$$



۲- در شکل زیر، خط‌های زیر را رسم کنید.



$$y = 4x$$



$$y = \frac{1}{4}x$$



۳- مختصات نقطه‌ای از خط $y = 5x$ را که طول آن ۲ باشد، پیدا کنید.

آیا نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}$ روی این خط قرار دارد؟ چرا؟

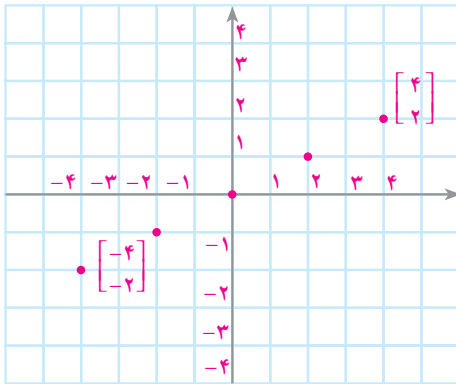
۴- یک دستگاه مختصات رسم کنید و نقاط $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}$ را روی آن

مشخص کنید. آیا نقاط O ، A و B در یک امتداد قرار دارند؟ معادله‌ی خطی که از این

نقاط می‌گذرد، چیست؟



نمودار مجموعه‌ای از نقاط صفحه



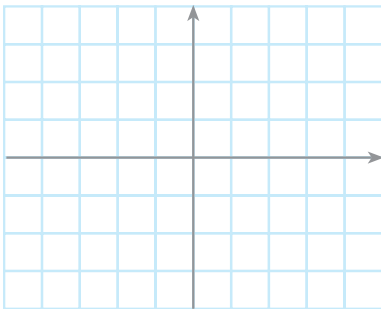
در شکل روبه‌رو، نمودار نقاط مجموعه‌ی

$$\text{رسم } A = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

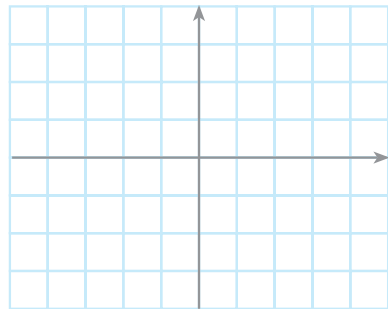
شده است. این نقاط را به هم وصل کنید تا یک پاره‌خط به دست آید.

کار در کلاس

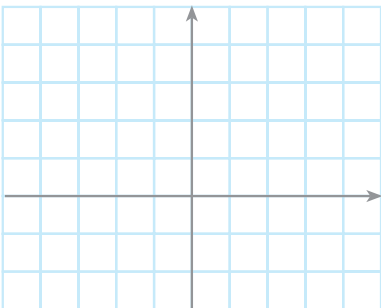
نمودار نقاط هر مجموعه را مشخص کنید.



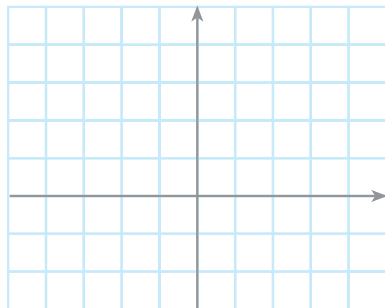
$$A = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right\}$$



$$B = \left\{ \begin{bmatrix} -5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$$

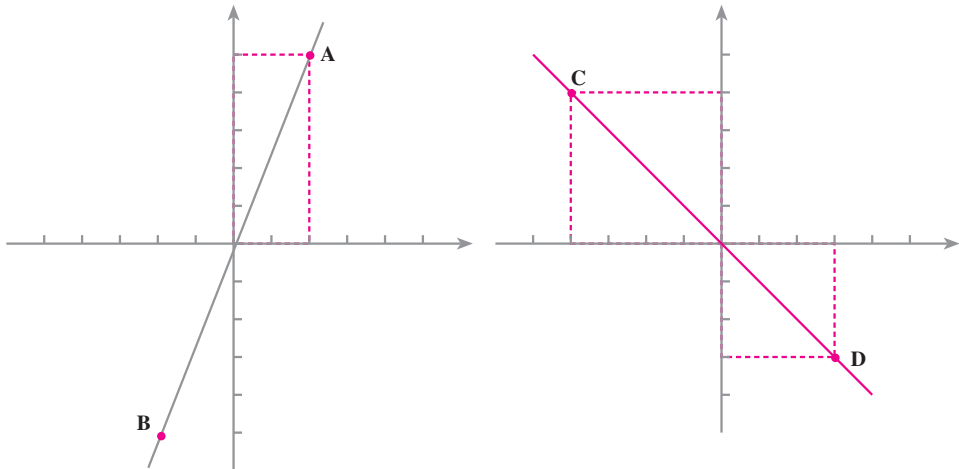


$$C = \left\{ \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$



$$D = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

- ۱- در مورد هریک از نمودارهای زیر،
الف - مختصات نقاط تعیین شده را بنویسید.
ب - رابطه‌ی طول و عرض نقاط خط را پیدا کنید.



- ۲- محورهای مختصات و خط‌های به معادله‌های زیر را رسم کنید.
 $y = x$, $y = \frac{3}{2}x$, $y = \frac{2}{3}x$

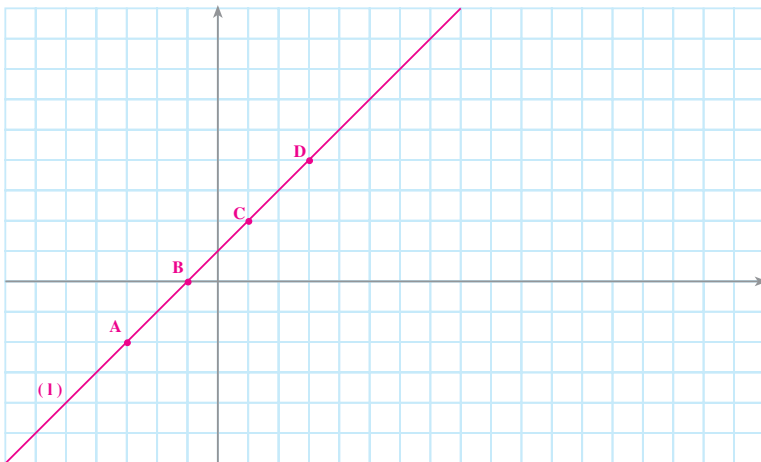
- ۳- معادله‌ی خطی که از مبدأ مختصات و نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \end{bmatrix}$ می‌گذرد، چیست؟

- ۴- از نقاط زیر، آن‌هایی را که روی خط $y = \frac{2}{3}x$ قرار دارند، نام ببرید.

$$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

- ۵- نمودار هریک از مجموعه‌های زیر را رسم کنید.

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \end{bmatrix} \right\} \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$



خط‌های غیرمبدأ گذر

به خط 1 توجه کنید. مختصات این نقاط

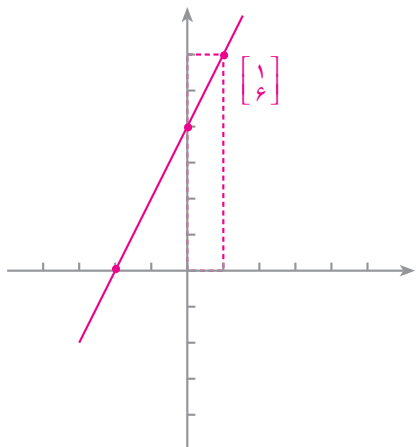
$$A = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

را بنویسید. با توجه به مختصات این نقاط، متوجه می‌شویم که عرض هر نقطه از طول آن، یکی بیشتر است. اگر طول نقاط را x و عرض آن‌ها را y بنامیم، طول و عرض این نقاط چه رابطه‌ای با هم دارند؟

معادله‌ی خط 1 عبارت است از $y = x + 1$.

اکنون، می‌خواهیم خط به معادله‌ی $y = 2x + 4$ را رسم کنیم.

با توجه به این که هر خط راست با دو نقطه‌اش مشخص می‌شود، کافی است مختصات دو نقطه از خط را به دست آوریم:

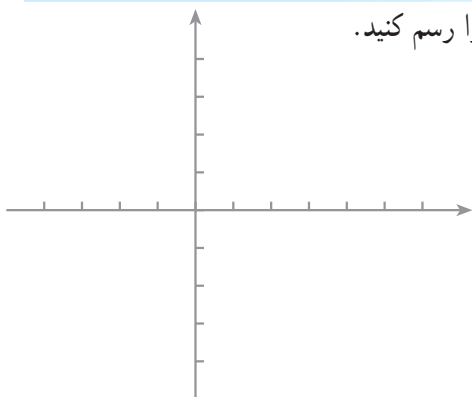


x	0	1
$y = 2x + 4$	$2(0) + 4 = 4$	$2(1) + 4 = 6$
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$

اگر در معادله‌ی خط به جای y صفر بگذاریم، مقدار x مساوی ۲- به دست می‌آید؛ بنابراین، نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ نیز یک نقطه از خط است.

کار در کلاس

۱- خط d به معادله‌ی $y = 2x + 1$ را رسم کنید.



x	۰	۱
y		
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$		

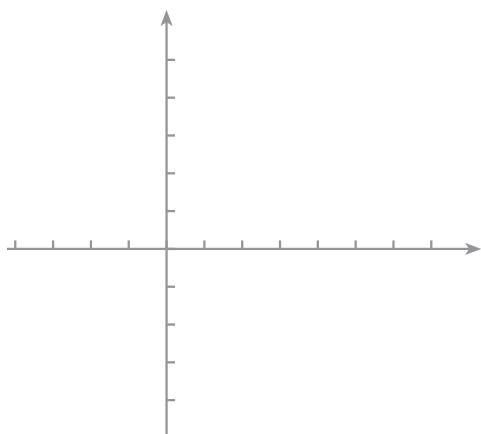
با توجه به معادله‌ی خط، مختصات نقاط زیر از خط را کامل کنید.

$$A = \begin{bmatrix} \\ 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 \\ \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} \\ -3 \end{bmatrix}$$

این نقاط را در دستگاه مختصات بالا مشخص کنید.

۲- خط‌های l به معادله‌ی $y = 3x - 3$ و l' به معادله‌ی $y = 3x$ را در یک

دستگاه مختصات رسم کنید.



x	۰	۱
y		
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$		

l

x	۰	۱
y		
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$		

l'

آیا این دو خط موازی‌اند؟



شیب خط

به شکل بالا توجه کنید. شیب کدام سرسره بیشتر است؟ کدام سرسره با سطح افق، زاویه بزرگتری می‌سازد؟

اینک به شکل مقابل توجه کنید؛ شیب خط $y = x$ از شیب خط $y = \frac{1}{4}x$ بیشتر است.

به‌طور کلی، اگر معادله‌ی خطی به‌صورت

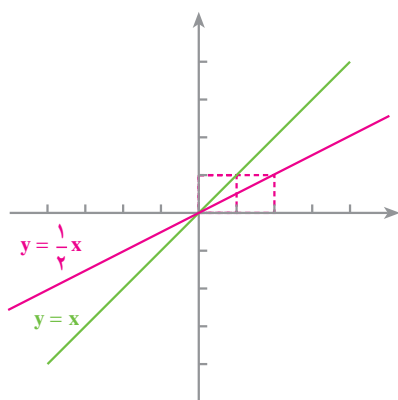
$$y = ax + b$$

نوشته شود، ضرب x - یعنی a - شیب آن خط نامیده

می‌شود؛ مثلاً شیب خط $y = x$ مساوی ۱ و شیب خط

$$y = \frac{1}{4}x$$

مساوی $\frac{1}{4}$ است.



خط‌های به‌معادله‌ی $y = 2x$ ،

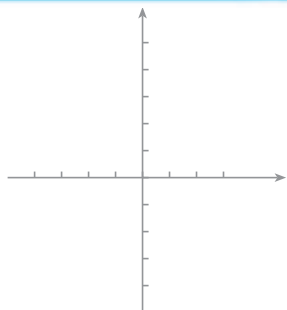
$$y = 2x + 3 \text{ و } y = 2x - 4$$

را روی محور

مختصات مقابل رسم کنید.

با توجه به شکل به‌دست آمده، از این فعالیت

چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



خط‌های رسم شده موازی و دارای شیب یکسان‌اند. ضریب x در هر سه معادله، یکی است. به‌طور کلی، هر دو خط که دارای شیب مساوی باشند، موازی‌اند.

کار در کلاس

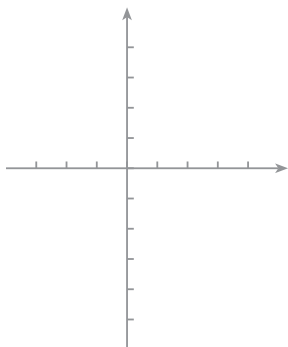
۱- خط $y = 8x - 5$ با کدام یک از خط‌های زیر موازی است؟

$$y = 8x + 5$$

$$y = 8x - 3$$

$$y = 3x - 5$$

۲- خط $y = 3x + 4$ را رسم کنید.



x	۰	۱
y		
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$		

شیب این خط چند است؟ _____

این خط، محور y را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟ _____

۳- معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۴ باشد و محور y را در نقطه‌ای به عرض ۲- قطع کند.

۴- معادله‌ی خطی را بنویسید که با خط $y = 3x + 4$ موازی باشد و محور y را در نقطه‌ای به عرض ۵- قطع کند.

در صفحه‌ی پیش دیدید که اگر معادله‌ی خطی را به صورت $y = ax + b$ بنویسیم، شیب این خط

مساوی a است و محور y را در نقطه‌ای به عرض b قطع می‌کند؛ یعنی، از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}$ می‌گذرد.

عدد b در معادله‌ی $y = ax + b$ را **عرض از مبدأ** این خط می‌نامیم.

کار در کلاس

۱- در کدام یک از قسمت‌های زیر، دو خط داده شده متوازی‌اند؟

$$y = 3x$$

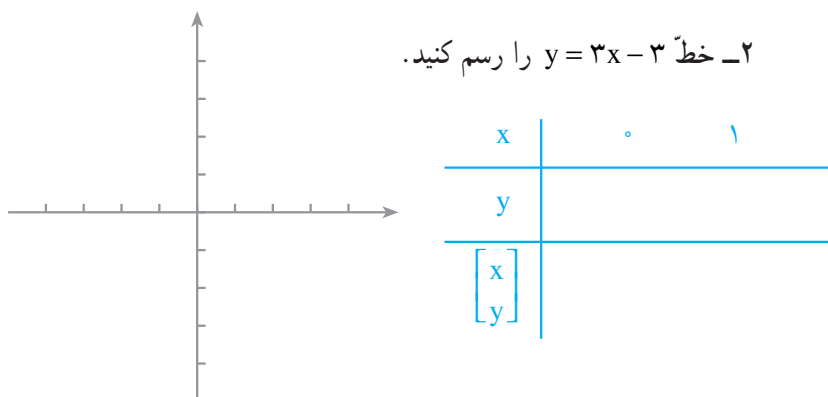
$$y = x + 5$$

$$y = 2x - 3$$

$$y = 3x - 3 \quad \text{پ-}$$

$$y = x - 1 \quad \text{ب-}$$

$$y = x - 3 \quad \text{الف-}$$



۲- خط $y = 3x - 3$ را رسم کنید.

شیب این خط چند است؟ _____

این خط، محورهای مختصات را در چه نقاطی قطع می‌کند؟

$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

۳- معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن $-\frac{3}{5}$ باشد و از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

بگذرد.

۴- معادله‌ی خطی را بنویسید که با خط $y = \frac{1}{3}x - 1$ موازی باشد و عرض از

مبدأ آن +۱ باشد.

۵- معادله‌ی خطی را بنویسید که با خط $y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}$ موازی باشد و از نقطه‌ی

$A = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ بگذرد. این دو خط را در دفترتان بکشید و نقطه‌ی A را مشخص کنید.



۱- خط l به معادله‌ی $y = 4x + 7$ را رسم کنید.

شیب این خط چند است؟ این خط، محور y را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۲- معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۳- باشد و محور y را در نقطه‌ای به عرض ۲ قطع

کند. معادله‌ی خطی را بنویسید که شیب آن ۳- باشد و از مبدأ مختصات بگذرد. هر دو خط را در

یک دستگاه مختصات رسم کنید. آیا این دو خط موازی‌اند؟

۳- معادله‌ی خطی را بنویسید که با خط $y = \frac{1}{2}x - 1$ موازی باشد و از نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

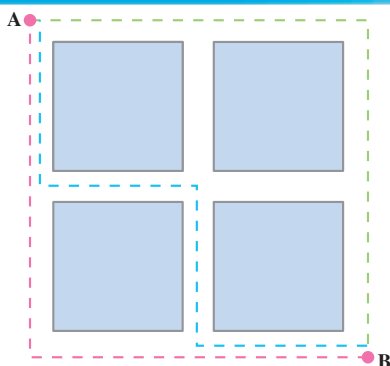
بگذرد. این دو خط را در یک دستگاه مختصات بکشید و نقطه‌ی A را مشخص کنید.

۴- از نقطه‌های زیر، کدام یک روی خط $y = 3x + 1$ قرار دارند؟

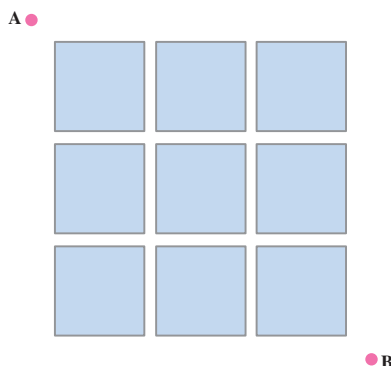
$$A = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

۵- عدد b را طوری تعیین کنید که نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ روی خط $y = \frac{3}{2}x + b$ واقع باشد.

سرگرمی ریاضی



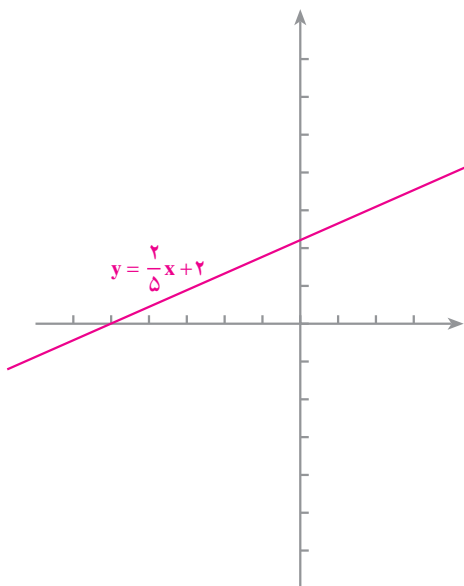
در قطعه‌زمینی چهار ساختمان مانند شکل روبه‌رو ساخته شده است. یک نفر می‌خواهد از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود. به چند طریق می‌تواند این کار را انجام دهد در صورتی که مسافت طی شده حداقل باشد؟



در شکل، سه تا از راه‌هایی که او می‌تواند انتخاب کند، نشان داده شده است. به راحتی می‌توان فهمید که برای رفتن از A به B ۶ راه مختلف را می‌توان طی کرد و همه‌ی این راه‌ها کوتاه‌ترین راه‌های ممکن هستند. حالا فکر کنید که اگر ساختمان‌ها

۹ عدد و مانند شکل روبه‌رو باشند، به چند طریق می‌توان با حداقل مسافت طی شده از نقطه‌ی A به B رفت. سعی کنید در این مورد یک قاعده به‌دست آورید.

صورت دیگر معادله ی خط



خط l به معادله ی $y = \frac{2}{5}x + 2$ را در نظر بگیرید؛ می دانید که معادله ی خط، رابطه ای است که بین طول و عرض نقاط خط برقرار است. معادله ی این خط را به صورتی دیگر هم می توان نوشت:

$$5y = 2x + 10$$

$$(1) \quad 5y - 2x = 10$$

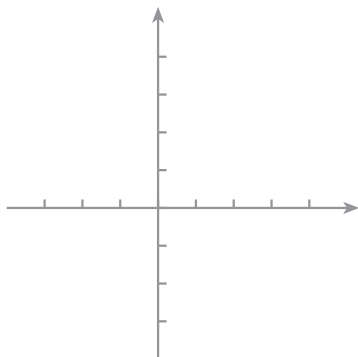
هر معادله ی به صورت (۱) معادله ی یک خط است. از این نظر، چنین معادله ای را یک معادله ی خطی می نامیم.

کار در کلاس

برای هر یک از معادله های خطی زیر، جدول را کامل کنید و خط مربوطه را

بکشید.

$$4x - 5y = 10$$



x	0
y	-2
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$

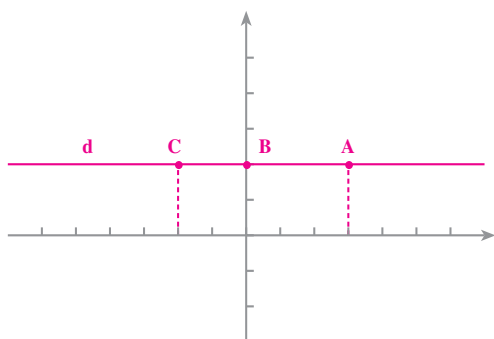
$$3x + 2y = 6$$

x	
y	
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	

خطهای موازی با محورها

در شکل زیر، به خط d توجه کنید؛ مختصات نقاط

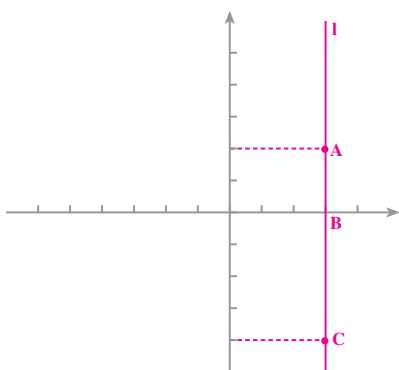
$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$



روی این خط را بنویسید. بین طول و عرض نقاط چه رابطه‌ای وجود دارد؟
عرض هر نقطه‌ی دیگری که روی این خط در نظر بگیریم، مساوی ۲ است.
مختصات این نقاط در معادله‌ی $y + x = 2$ یا $y = 2 - x$ صدق می‌کند.
معادله‌ی این خط $y = 2$ است.

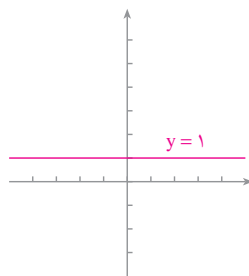
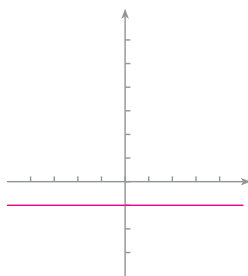
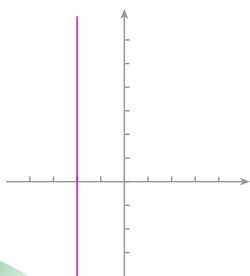
اینک به خط l توجه کنید؛ مختصات نقاط

$$A = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$



روی این خط را بنویسید. بین طول و عرض نقاط چه رابطه‌ای وجود دارد؟
هر نقطه‌ی دیگری روی این خط بگیریم، طول آن مساوی ۳ خواهد بود.
مختصات نقاط این خط در معادله‌ی $y + x = 3$ صدق می‌کند.
یا $x = 3 - y$ صدق می‌کند. معادله‌ی این خط $x = 3$ است.

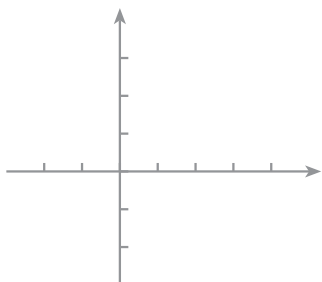
به خطهای زیر توجه کنید و معادله‌ی هریک از آنها را بنویسید.





۱- معادله‌ی خط d به صورت $4x - 2y = 8$ داده شده است. ابتدا جدول زیر

را کامل کنید؛

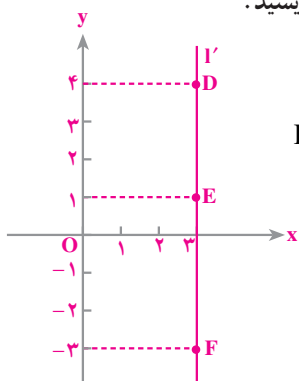


x	•
y	•
$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	

سپس، خط d را رسم کنید.

با نوشتن معادله‌ی خط به صورت $y = ax + b$ ، شیب خط را پیدا کنید.

۲- مختصات نقاط D ، E و F از خط l' را بنویسید.



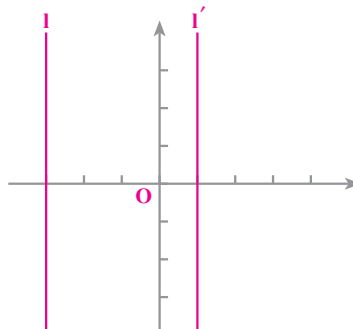
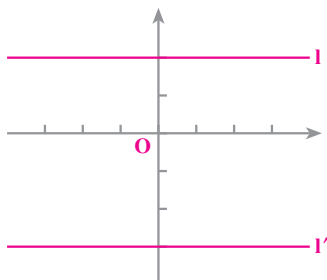
$$D = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$E = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

$$F = \begin{bmatrix} \quad \\ \quad \end{bmatrix}$$

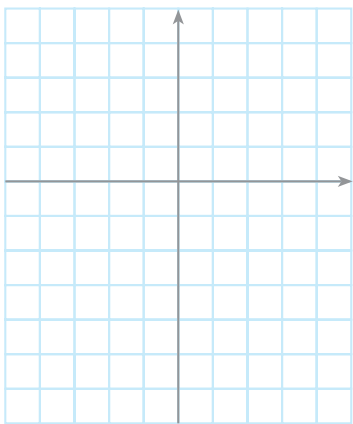
معادله‌ی خط l' را بنویسید.

۳- معادله‌ی هر یک از خط‌های زیر را روی آن‌ها بنویسید.



۴- نقاط $A = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$ را در دستگاه مختصات

روبه‌رو مشخص کنید. معادله‌ی خطی که از این نقاط می‌گذرد، چیست؟



۱- نقاط $A = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 0 \\ -5 \end{bmatrix}$ را در یک دستگاه مختصات مشخص کنید و خط AB را

رسم کنید. معادله‌ی خط AB را بنویسید (معادله‌ی خطی که از A و B می‌گذرد).

۲- نقاط $C = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $D = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}$ را در یک دستگاه مختصات مشخص کنید و خط CD را

رسم کنید. معادله‌ی این خط چیست؟ (معادله‌ی خطی که از C و D می‌گذرد)

۳- هریک از خط‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$3x - 4y = 12, \quad x = 5, \quad y = \frac{3}{2}$$

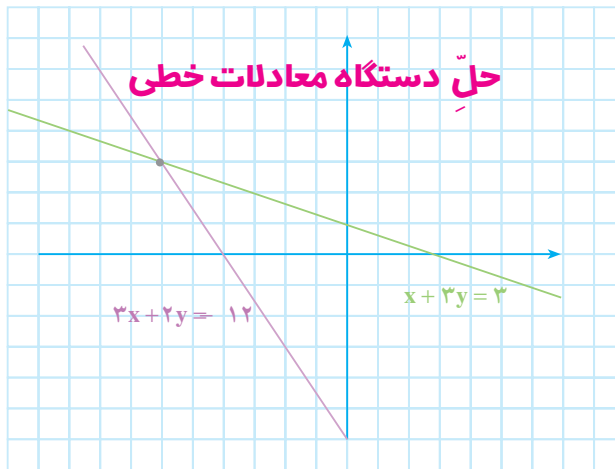
۴- هر دسته از خط‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 20 \\ -5x + 2y = 10 \end{cases} \quad \text{ب-}$$

$$\begin{cases} 4x - 5y = 20 \\ 4x - 5y = 0 \end{cases} \quad \text{الف-}$$



دستگاه معادله‌های خطی



$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \quad (1) \quad \text{دو معادله‌ی خطی}$$

یک دستگاه معادله‌های خطی را تشکیل می‌دهند. منظور از حل کردن چنین دستگاهی، پیدا کردن مقادیری برای x و y است که به ازای آن‌ها، این معادله‌ها برقرار باشند؛ مثلاً به ازای $x = 6$ و $y = 3$ هر دو معادله برقرارند.

$$\begin{cases} x = 6 \\ y = 3 \end{cases} \quad \text{جواب دستگاه (۱) است.}$$

برای حل کردن دستگاهی مانند (۱)، کافی است طرفین یکی از معادله‌ها یا هر دو را در عددهایی ضرب کنیم که ضرایب یکی از متغیرهای x و y در دو معادله قرینه شود.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ x + 3y = 3 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -3x - 2y = 12 \\ 3x + 9y = 9 \end{cases}$$

طرفین دو معادله‌ی جدید را با هم جمع می‌کنیم؛ $-3x$ با $3x$ حذف می‌شود و پس از خلاصه کردن، خواهیم داشت:

$$7y = 21 \quad \rightarrow \quad y = 3$$

با جایگزینی y در یکی از دو معادله – مثلاً معادله‌ی دوم از دستگاه (۱) – داریم:

$$x + 9 = 3 \quad \rightarrow \quad x = -6$$

هریک از معادله‌های بالا، معادله‌ی یک خط است. $x = -6$ و $y = 3$ در واقع طول و عرض

نقطه‌ی تقاطع این دو خط‌اند. از این نظر، گاهی جواب دستگاه (۱) را به صورت $\begin{bmatrix} -۶ \\ ۳ \end{bmatrix}$ نیز می‌نویسیم.

اکنون، دستگاه زیر را حل می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 4 \\ 3x + 7y = 5 \end{cases}$$

راه حل: طرفین معادله‌ی اول را در ۳ و طرفین معادله‌ی دوم را در (۲-) ضرب می‌کنیم.

$$\begin{cases} 2x + 5y = 4 \\ 3x + 7y = 5 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 6x + 15y = 12 \\ -6x - 14y = 10 \end{cases}$$

$$y = 2$$

$$2x + 5 \times 2 = 4, \quad 2x = 6, \quad x = 3$$

بنابراین $\begin{bmatrix} -۳ \\ ۲ \end{bmatrix}$ جواب دستگاه است.

کار در کلاس

۱- دستگاه‌های زیر را حل کنید.

الف - $\begin{cases} 3x + 8y = 2 \\ 5x - 2y = 12 \end{cases}$ ب - $\begin{cases} -2x - 7y = 1 \\ 3x + 10y = 2 \end{cases}$

پ - $\begin{cases} 7x + 9y = 10 \\ x - 5y = 8 \end{cases}$ ت - $\begin{cases} 4x - y = 7 \\ -3x + 2y = 11 \end{cases}$

۲- ابتدا، از طریق حل دستگاه، محل تقاطع خط‌های زیر را پیدا کنید؛

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$$

سپس، خط‌های مربوط را رسم کنید و مختصات نقطه‌ی تقاطع را به دست آورید.

نتیجه را با قسمت پیش مقایسه کنید.

راهبرد تشکیل معادله (دستگاه معادلات)

حسن و رضا به فروشگاه تعاونی مدرسه رفتند و تعدادی دفتر و مداد خریدند. حسن ۵ دفتر و ۳ مداد خرید و ۳۱۰ تومان پول داد. رضا ۲ دفتر و ۱ مداد خرید و ۱۲۰ تومان پول داد. قیمت هر دفتر و مداد چند تومان است؟

قیمت یک دفتر را x تومان و قیمت یک مداد را y تومان می‌گیریم؛ بنابراین،

$$\begin{cases} 5x + 3y = 310 \\ 2x + y = 120 \end{cases}$$

با توجه به خرید حسن،
و با توجه به خرید رضا،

این دستگاه معادله‌ها را حل می‌کنیم؛ جواب $x = 50$ و $y = 20$ به دست می‌آید؛ پس، قیمت هر دفتر ۵۰ تومان و قیمت هر مداد ۲۰ تومان است.

کار در کلاس

۱- علی تعدادی گلوله‌ی چوبی کوچک و بزرگ دارد. وزن ۴ گلوله‌ی کوچک و ۴ گلوله‌ی بزرگ ۶۰۰ گرم است. وزن ۵ گلوله‌ی کوچک و ۲ گلوله‌ی بزرگ ۴۲۰ گرم است. وزن هر گلوله را حساب کنید.



۲- سن خواهر مریم ۳ برابر سن اوست و اختلاف سن آن‌ها ۱۲ سال است. سن هریک را تعیین کنید.

سن مریم را x و سن خواهرش را y بگیرید. با توجه به صورت مسئله، دو معادله بنویسید و دستگاه حاصل را حل کنید.

۳- احمد یک روز ۱۲ صندلی و ۵ میز تحریر را رنگ کرد و ۲۶۰۰ گرم رنگ مصرف شد. روز دیگر، ۶ صندلی و ۴ میز از همان نوع را رنگ کرد و ۱۵۴۰ گرم رنگ مصرف شد. مقدار رنگ مصرفی برای هر صندلی و هر میز چند گرم است؟
مقدار رنگ مصرفی را برای یک صندلی x و برای یک میز y بگیرید و دو معادله بنویسید.



۱- دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ -7x + 5y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x - 9y = 5 \\ -3x + 7y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{1}{5}y = 3 \\ \frac{1}{5}x + \frac{2}{5}y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{5}x + y = 12 \\ \frac{3}{5}x + 4y = 13 \end{cases}$$

۲- ابتدا از طریق حل دستگاه‌ها، مختصات تقاطع خط‌های زیر را به دست آورید، سپس، خط‌ها را رسم کنید و مختصات به دست آمده را با شکل مقایسه کنید.

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 4y = 7 \end{cases}$$

- رسم شکل
- جدول نظام‌دار
- الگویابی
- حذف حالت‌های نامطلوب
- زیر مسئله
- حل مسئله‌ی ساده‌تر
- تشکیل معادله
- حدس و آزمایش



۱- دو پیمانه‌ی کوچک و بزرگ داریم
که گنجایش آن‌ها را نمی‌دانیم. ۲ پیمانه‌ی
کوچک و ۳ پیمانه‌ی بزرگ، یک ظرف ۲۱ لیتری
را پر می‌کنند. ۶ پیمانه‌ی کوچک و ۵ پیمانه‌ی

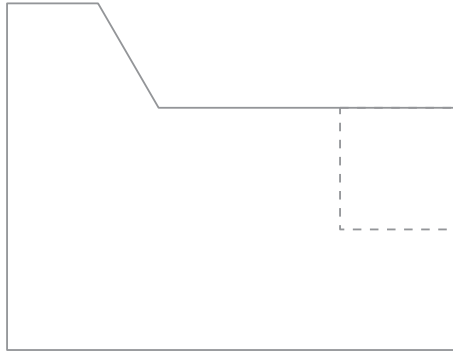
بزرگ، یک ظرف ۴۳ لیتری را پر می‌کنند. گنجایش هریک از پیمانه‌ها چند لیتر است؟

۲- لاله به دوستش گفت که سن پدرش هنگام تولد او ۲۴ سال بوده است (اختلاف
سن آن‌ها ۲۴ است) و حالا سن پدرش ۳ برابر سن اوست. لاله حالا چند سال دارد؟

۳- محیط یک مستطیل ۷۴ سانتی‌متر است و طول مستطیل ۱۵ سانتی‌متر از
عرض آن بیشتر است. طول و عرض مستطیل را حساب کنید.

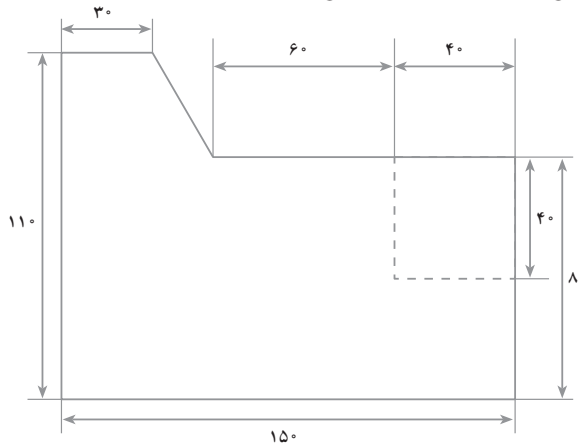
۴- دو زاویه مکمل‌اند و اندازه‌ی یکی ۴ برابر دیگری است. اندازه‌ی هریک از
این زاویه‌ها را پیدا کنید.

الف- شکل زیر را با توجه به شکل نهایی اندازه‌گذاری کنید. ابتدا خطوط مربوط به اندازه را رسم کنید و سپس، اندازه‌ها را بنویسید.



ب-

- ۱- یک مستطیل ۱۱×۱۵ سانتی‌متری در وسط کاغذ رسم کنید.
 - ۲- با توجه به اندازه‌های شکل، رسم را انجام دهید. (ابتدا اندازه‌ی ضلع‌های داده نشده را پیدا کنید)
 - ۳- خطوط مربوط به اندازه‌گذاری را رسم کنید.
 - ۴- اندازه‌ها را مطابق شکل نهایی روی آن بنویسید.
- پ-** شکل نهایی (اندازه‌ها برحسب میلی‌متر است)

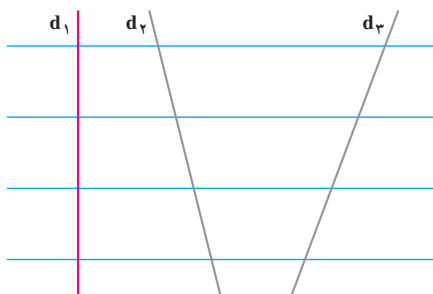


ت- دقیق بودن اندازه‌ها در این رسم بسیار اهمیت دارد. رعایت دقت در کشیدن خطوط مربوط به اندازه‌گذاری و تمیزی رسم نیز مهم است.



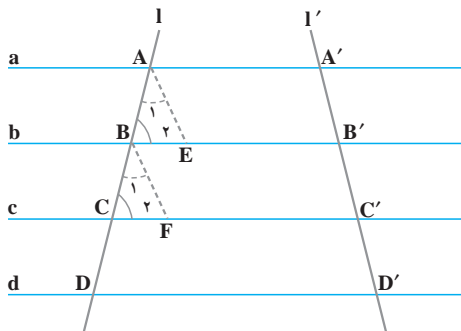
خطوط موازی و قضیه‌ی تالس

خط‌های متوازی با فاصله‌های متساوی



در شکل روبه‌رو، خط‌های متوازی با فاصله‌های مساوی، سه خط d_1 ، d_2 و d_3 را قطع کرده‌اند. پاره‌خط‌هایی را که روی هریک از آن‌ها به‌وجود آمده است، اندازه بگیرید و با هم مقایسه کنید و از این فعالیت چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

اگر چند خط متوازی خطی را قطع کنند و بر روی آن، پاره‌خط‌های متساوی به‌وجود آورند، این خط‌ها هر خط دیگری را قطع کنند، بر روی آن نیز پاره‌خط‌های متساوی جدا خواهند کرد.



خط‌های متوازی a ، b ، c و d بر روی خط l پاره‌خط‌های متساوی AB ، BC و CD را جدا کرده‌اند. این خط‌های متوازی خط l' را هم در A' ، B' ، C' و D' قطع کرده‌اند. ثابت می‌کنیم که پاره‌خط‌های $A'B'$ و $B'C'$ متساوی‌اند.

برای این کار، AE و BF را موازی با l'

رسم می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که این دو خط با هم موازی‌اند و l قطع‌کننده‌ی آن‌هاست.

پس، $\angle A_1 \cong \angle B_1$

همچنین خط‌های b و c متوازی‌اند و l قطع‌کننده‌ی آن‌هاست؛ پس،

$$\angle B_2 \cong \angle C_2$$

و می‌دانیم که: $AB = BC$

بنابراین، (ض.ز): $\triangle ABE \cong \triangle BCF$

در نتیجه: $AE = BF$ (۱)

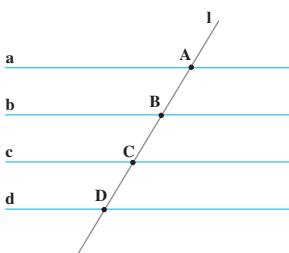
چون چهارضلعی‌های $AA'B'E$ و $BB'C'F$ متوازی‌الاضلاع‌اند؛ پس،

$$BF = B'C' \quad (۳) \quad \text{و} \quad AE = A'B' \quad (۲)$$

$$(۳)، (۲)، (۱) \Rightarrow A'B' = B'C'$$

به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که $B'C' = C'D'$ ؛ بنابراین، پاره‌خط‌هایی که روی l' جدا شده‌اند، متساوی‌اند.

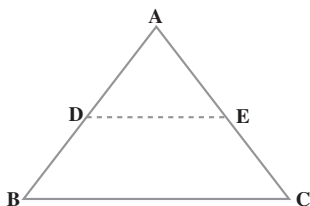
کار در کلاس



۱- خط‌های a, b, c, d متوازی و با فاصله‌های مساوی‌اند و $AB = 2\text{cm}$ است. تساوی‌های زیر را کامل کنید.

$$BC = \dots \text{ cm}, \quad CD = \dots \text{ cm}$$

$$AC = \dots \text{ cm}, \quad BD = \dots \text{ cm}$$



۲- نقطه‌ی D وسط ضلع AB و $DE \parallel BC$

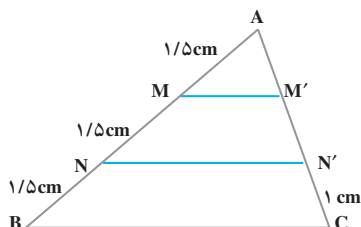
است. چرا E وسط ضلع AC است؟ _____

(راهنمایی: از A خطی موازی با BC رسم کنید).

کنید).

به‌طور کلی، خطی که از وسط یک ضلع مثلث موازی با ضلع دیگر رسم شود، از

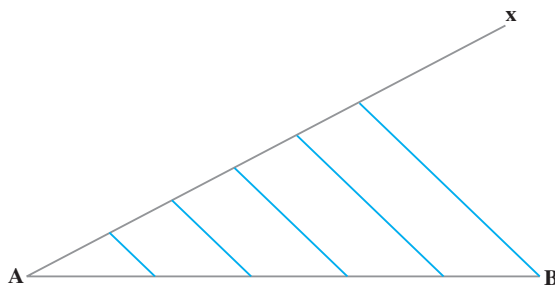
وسط ضلع سوم هم می‌گذرد.



۳- $MM' \parallel NN' \parallel BC$ ؛ اندازه‌های

AM' و $M'N'$ چه قدر است؟ _____

تقسیم پاره خط به قطعات متساوی

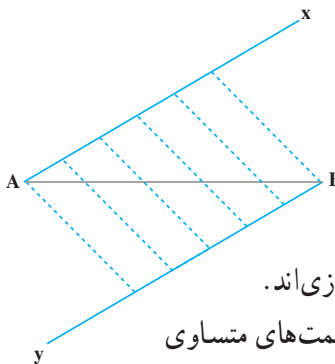


اگر بخواهیم پاره خط AB را به قسمت‌های متساوی — مثلاً به پنج قسمت متساوی — تقسیم کنیم، چنین عمل می‌کنیم؛ ابتدا نیم خط AX را رسم می‌کنیم و با شروع از نقطه A ، پنج پاره خط متساوی به دنبال هم روی

آن جدا می‌کنیم؛ سپس، آخرین نقطه را به B وصل می‌کنیم و از سایر نقاط، خطوطی موازی با آن رسم می‌کنیم. این پاره خط‌ها، AB را به پنج قسمت متساوی تقسیم می‌کنند.

کار در کلاس

۱- به روش دیگری هم می‌توان یک پاره خط را به قسمت‌های متساوی تقسیم کرد؛ مثلاً، برای تقسیم کردن پاره خط AB به پنج قسمت متساوی، به صورت زیر عمل می‌کنیم.

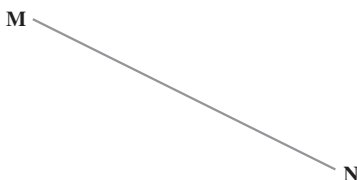


از A و B دو نیم خط متوازی رسم می‌کنیم و با شروع از A و B به دنبال هم، پنج پاره خط متساوی روی هریک از آن‌ها جدا می‌کنیم؛ سپس، نقاط به دست آمده روی دو نیم خط را به ترتیب وصل می‌کنیم. خط‌های رسم شده متوازی‌اند.

چرا این خط‌های متوازی، پاره خط AB را به قسمت‌های متساوی تقسیم می‌کنند؟



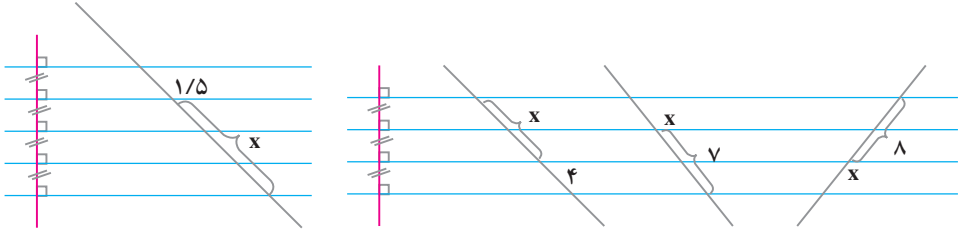
۲- AB را به سه قسمت متساوی تقسیم کنید.



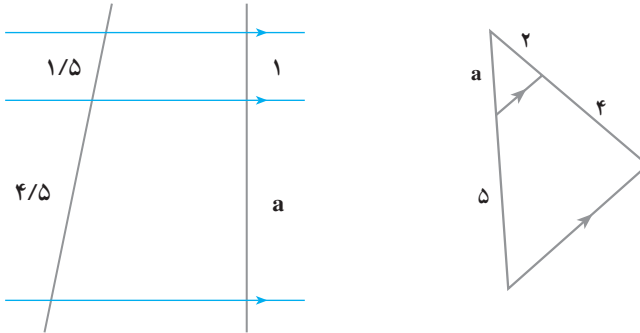
۳- پاره خط MN را به دو قسمت تقسیم کنید؛ طوری که یکی از قسمت‌ها دو برابر قسمت دیگر باشد.



۱- در هریک از شکل‌های زیر، x چه عددی است؟



۲- در هریک از شکل‌های زیر، a چه عددی است؟

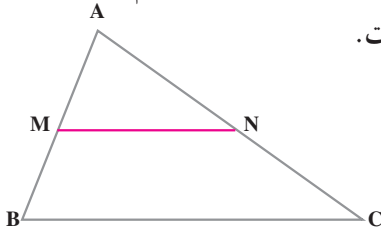


۳- دو پاره‌خط رسم کنید؛ سپس، یکی از آن‌ها را به دو قسمت و دیگری را به سه قسمت

متساوی تقسیم کنید.

۴- پاره‌خطی به طول ۷ سانتی‌متر رسم کنید و آن را به ۶ قسمت متساوی تقسیم کنید.

۵- در شکل مقابل، M وسط AB و $MN \parallel BC$ است.



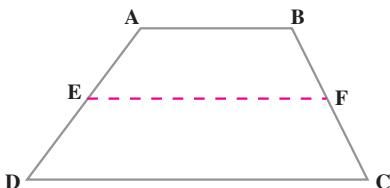
آیا نقطه‌ی N وسط AC است؟

نسبت $\frac{AN}{NC}$ چه قدر است؟

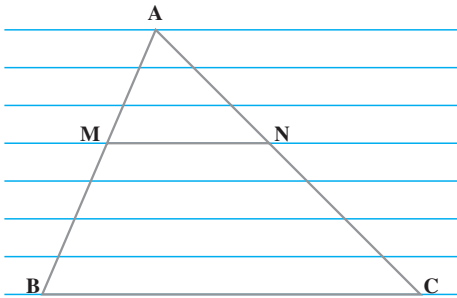
نسبت $\frac{AN}{AC}$ چه قدر است؟

۶- نقطه‌ی E وسط ساق AD و EF با دو قاعده‌ی

دورزنقه موازی است. چرا نقطه‌ی F وسط ساق BC است؟



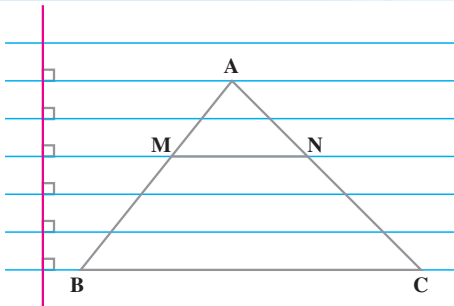
قضیه ی تالس



در شکل روبه‌رو، خط MN با ضلع BC موازی است و خط‌های آبی متوازی و با فاصله‌های مساوی‌اند. مشاهده می‌کنید که نسبت AM به MB برابر با $\frac{3}{4}$ و نسبت AN به NC هم برابر با $\frac{3}{4}$ است. از موازی بودن MN با BC ، تناسب مقابل حاصل می‌شود.

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

کار در کلاس



۱- به شکل روبه‌رو توجه کنید؛
اکنون، مقدار هریک از نسبت‌های زیر را بنویسید و با توجه به نتیجه‌ی به‌دست آمده، در هر سطر یک تساوی بنویسید.

$$\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AN}{NC} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\frac{AM}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{AN}{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$$

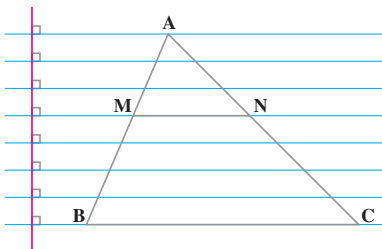
$$\underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{MB}{AB} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{NC}{AC} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\underline{\hspace{2cm}}$$

۲- با توجه به شکل، تساوی‌های زیر را کامل کنید.



$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

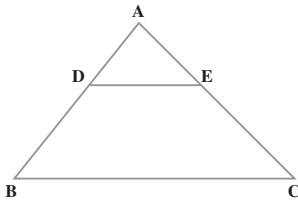
$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$$

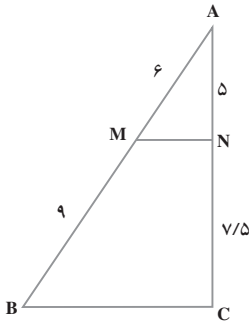
$$\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$$

$$\frac{MB}{AB} = \frac{NC}{AC}$$



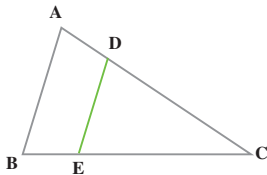
این خاصیت که اگر خطی به موازات یکی از ضلع‌های مثلث رسم شود و دو ضلع دیگر را قطع کند، روی آن‌ها پاره‌خط‌های متناسب جدا می‌کند، به **قضیه تالس** مشهور است. «تالس، ریاضی‌دان یونانی (۵۴۸-۶۲۴ ق.م) برای اولین بار به این خاصیت پی برده است.» در شکل مقابل، خط DE با ضلع BC موازی

است؛ در نتیجه:
$$\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$$



عکس قضیه تالس نیز درست است؛ یعنی، اگر خطی چنان رسم شود که دو ضلع مثلثی را قطع کرده و روی آن‌ها پاره‌خط‌های متناسب جدا کند، آن خط با ضلع سوم موازی است. مثلاً در شکل روبه‌رو می‌بینیم که $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{3}$ و $\frac{AN}{NC} = \frac{2}{3}$ ؛ پس، $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$ ، مثلاً در شکل از این تساوی نتیجه می‌گیریم که MN با BC موازی است.

کاردرکلاس

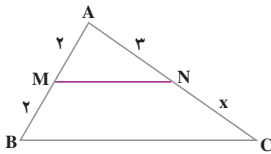


۱- $AB \parallel DE$ و $\frac{CD}{DA} = \frac{5}{4}$ ؛ نسبت $\frac{CE}{EB}$ برابر با چه

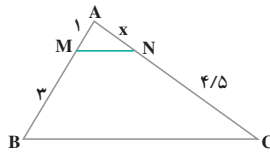
عددی است؟ _____

۲- در هر شکل، MN با BC موازی است. به کمک رابطه‌ی تالس تعیین کنید

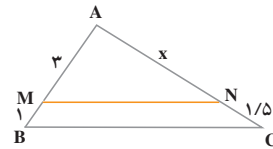
که x چه عددی است.



$x =$ _____

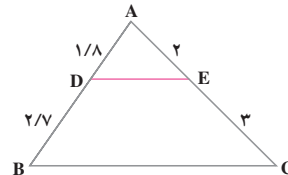
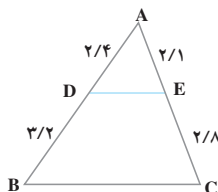
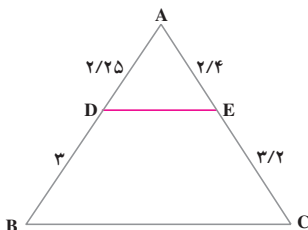


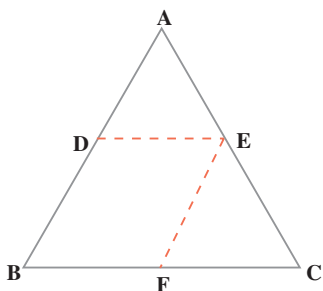
$x =$ _____



$x =$ _____

۳- در کدام شکل، DE با BC موازی است؟





در شکل روبه‌رو خط DE با ضلع BC موازی است؛

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} \quad (۱) \quad \text{در نتیجه،}$$

همچنین، خط EF با ضلع AB موازی است؛ پس، (۲)

$$\frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

$$\text{از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{BF}{BC}$$

و چون چهارضلعی DEFB متوازی‌الاضلاع است، پس، $DE = BF$ ؛ بنابراین:

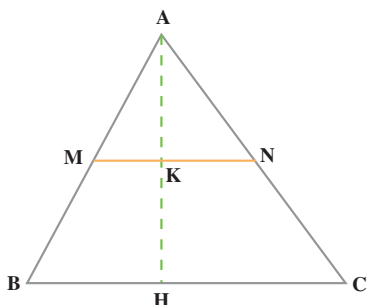
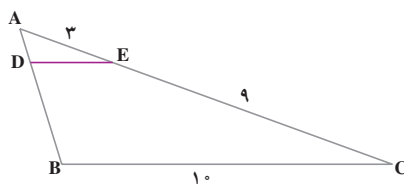
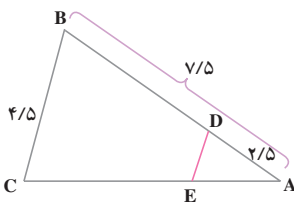
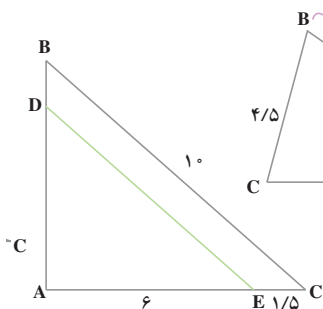
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

یعنی، اضلاع دو مثلث ADE و ABC نظیر به نظیر متناسب‌اند.

به‌طور کلی: اگر خطی موازی با یک ضلع مثلثی رسم شود و دو ضلع دیگر آن را قطع کند، با آن دو ضلع مثلثی می‌سازد که ضلع‌هایش با اضلاع مثلث اول متناسب است.

کاردرکلاس

۱- در هر شکل، DE با BC موازی است. اندازه‌ی DE را حساب کنید.



۲- M وسط ضلع AB و $MN \parallel BC$

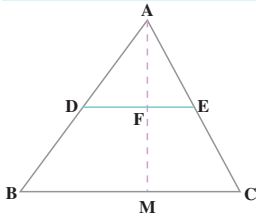
است. اگر اندازه‌ی BC برابر با ۱۰ سانتی‌متر

باشد، اندازه‌ی پاره‌ی خط MN چه قدر است؟

اگر اندازه‌ی ارتفاع AH برابر با ۸

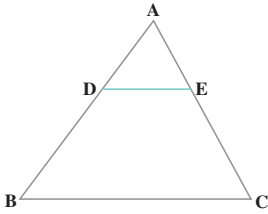
سانتی‌متر باشد، اندازه‌ی ارتفاع AK چه قدر

است؟



۱- D وسط AB و E وسط AC است. نسبت $\frac{AF}{FM}$ چه قدر

است؟ نسبت $\frac{AF}{AM}$ چه قدر است؟

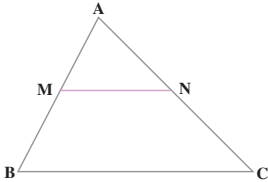


۲- DE با BC موازی است و $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$. مقدار هریک از

نسبت‌های زیر را تعیین کنید.

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

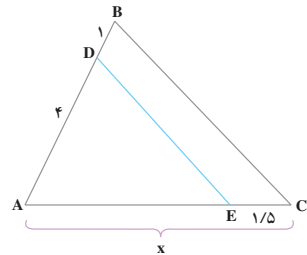
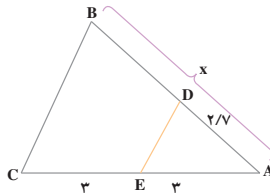
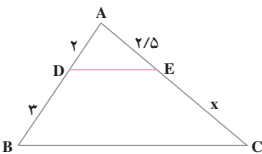
$$\frac{EC}{AE} = \frac{DB}{AB}$$



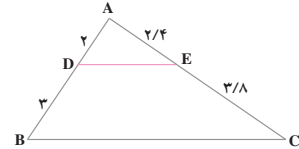
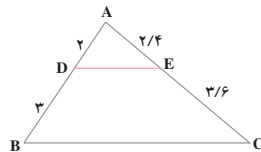
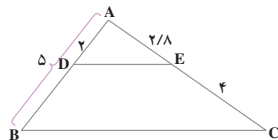
۳- MN با ضلع BC موازی است و M وسط AB است.

نسبت $\frac{AN}{NC}$ چه قدر است؟ نسبت $\frac{AM}{AB}$ چه قدر است؟

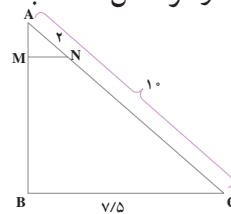
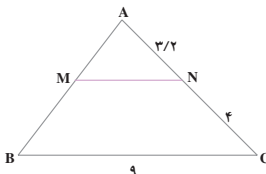
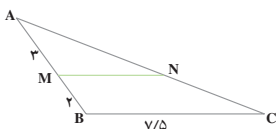
۴- در هر شکل، DE با BC موازی است. مقدار x را تعیین کنید.



۵- در کدام شکل، DE با BC موازی است؟



۶- در هر شکل، MN با BC موازی است. اندازه‌ی پاره خط MN را حساب کنید.

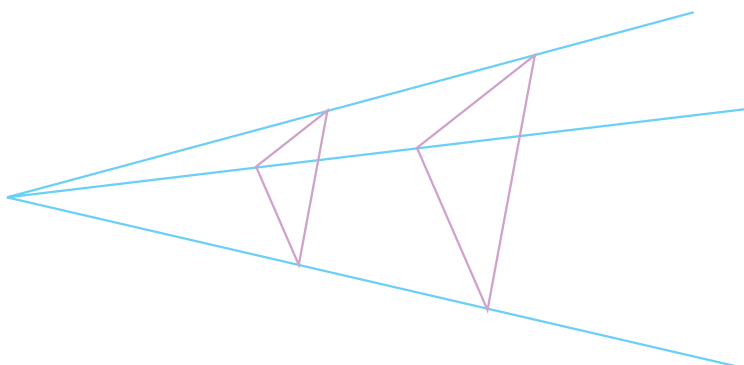


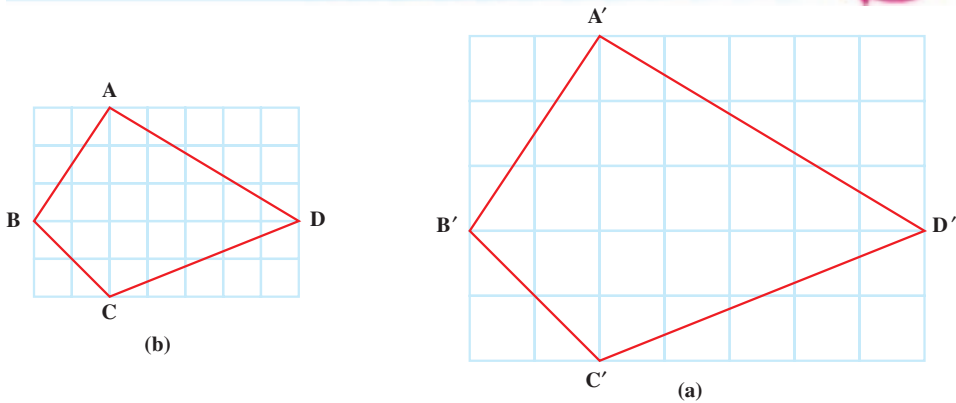
تشابه



شکل های متشابه

دو تصویر زیر که از یک منظره تهیه شده اند، فقط از لحاظ اندازه ها با هم تفاوت دارند. این دو تصویر متشابه اند.



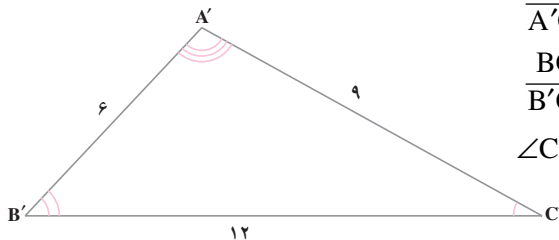
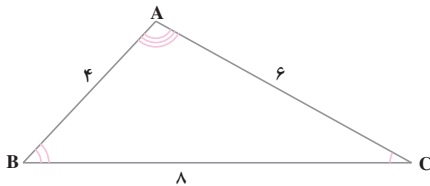


شکل a بزرگ شده‌ی شکل b است. همه‌ی ضلع‌ها و زاویه‌های هر دو شکل را اندازه بگیرید.

بین ضلع‌های متناظر در دو شکل چه رابطه‌ای وجود دارد؟
بین زاویه‌های متناظر در دو شکل چه رابطه‌ای وجود دارد؟

دو چند ضلعی، در صورتی متشابه‌اند که تعداد اضلاع آن‌ها مساوی، ضلع‌های متناظر آن‌ها متناسب و زاویه‌های متناظر آن‌ها متساوی باشند.

دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه‌اند؛ زیرا:



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BC}{B'C'} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

$$\angle C \cong \angle C', \angle B \cong \angle B', \angle A \cong \angle A'$$

یعنی، در این دو مثلث، اضلاع متناسب و زوایا متساوی‌اند؛ پس متشابه‌اند. عدد $\frac{2}{3}$ یا $\frac{3}{2}$ را

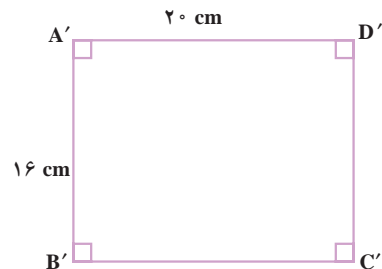
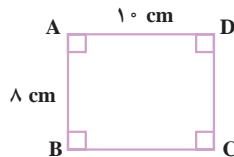
نسبت تشابه این دو مثلث می‌گوییم و متشابه بودن آن‌ها را به صورت زیر می‌نویسیم.

$$\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$$

مستطیل‌های $A'B'C'D'$ و $ABCD$ نیز متشابه‌اند؛ زیرا با توجه به اندازه‌های داده شده،

داریم:

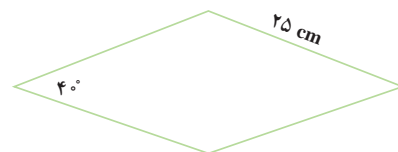
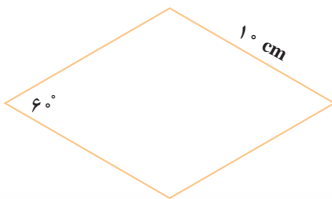
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AD}{A'D'} = \frac{DC}{D'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{1}{2}$$



بنابراین، اضلاع متناسب‌اند و زوایای آن‌ها نظیر به نظیر متساوی‌اند.

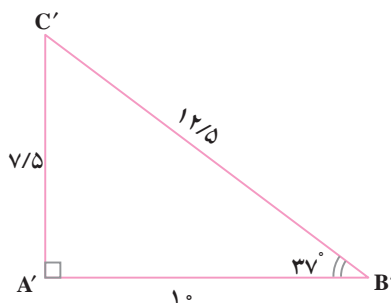
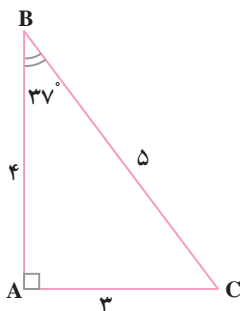
در این دو لوزی، ضلع‌ها متناسب‌اند ولی زاویه‌های متناظر آن‌ها متساوی نیستند؛ پس، این دو

لوزی متشابه نیستند.



کار در کلاس

۱- با توجه به شکل‌های زیر، هر تساوی را با یک عدد کامل کنید.



$$\frac{AB}{A'B'} = \dots$$

$$\frac{AC}{A'C'} = \dots$$

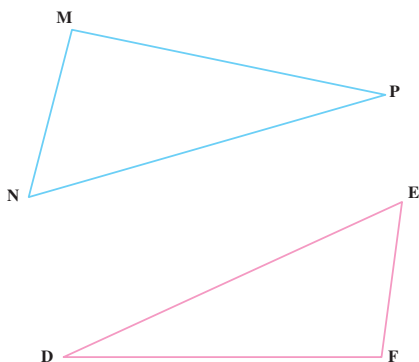
$$\frac{BC}{B'C'} = \dots$$

$$\hat{C} = \hat{C}' = \dots$$

$$\hat{B} = \hat{B}' = \dots$$

$$\hat{A} = \hat{A}' = \dots$$

آیا این دو مثلث متشابه‌اند؟ نسبت تشابه آن‌ها چیست؟



۲- دو مثلث DEF و MNP

متشابه‌اند و تناسب بین اضلاع آنها

به صورت $\frac{MN}{EF} = \frac{MP}{DF} = \frac{NP}{DE}$ است.

تساوی‌های زیر را کامل کنید.

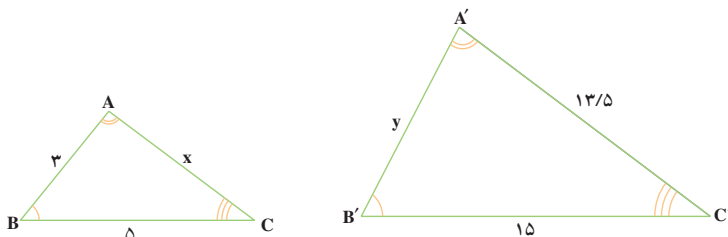
$$\hat{M} = \dots\dots$$

$$\hat{N} = \dots\dots$$

$$\hat{P} = \dots\dots$$

۳- دو مثلث ABC و A'B'C' متشابه‌اند و زاویه‌های متناظر آنها مشخص

شده است. تناسب بین ضلع‌های متناظر را بنویسید و سپس، مقادیر x و y را تعیین کنید.

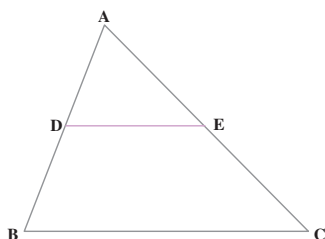


۴- DE با ضلع BC موازی است. آیا اضلاع دو مثلث ABC و ADE

متناسب‌اند؟

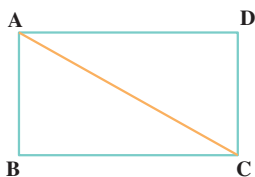
چرا زاویه‌های آنها متساوی‌اند؟

آیا این دو مثلث متشابه‌اند؟

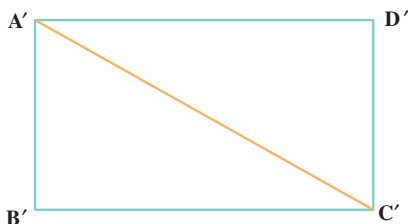


۱- چرا هر دو مربع دلخواه، متشابه‌اند؟

۲- دو مستطیل ABCD و A'B'C'D' متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{3}{4}$ است. با نوشتن یک عدد، هر تساوی را کامل کنید.



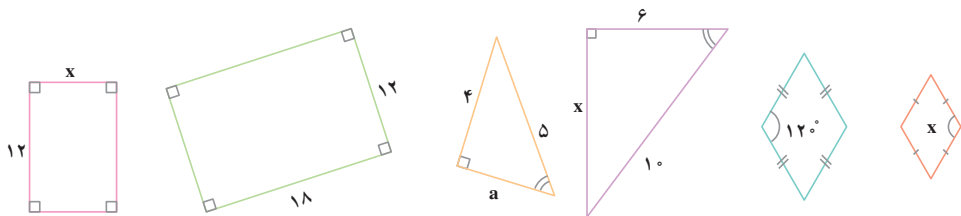
$$\frac{AB}{A'B'} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \frac{B'C'}{BC} = \underline{\hspace{2cm}}$$



$$\frac{AC}{A'C'} = \underline{\hspace{2cm}} \qquad \frac{CD}{C'D'} = \underline{\hspace{2cm}}$$

۳- دو لوزی متشابه‌اند و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{3}{5}$ است. اگر اندازه‌ی ضلع یکی از آن‌ها ۱۵ سانتی‌متر باشد، اندازه‌ی ضلع دیگری چه قدر است؟ (دو جواب)

۴- هر دو شکلی که در کنار هم رسم شده‌اند، متشابه‌اند؛ مقادیر مجهول را حساب کنید.



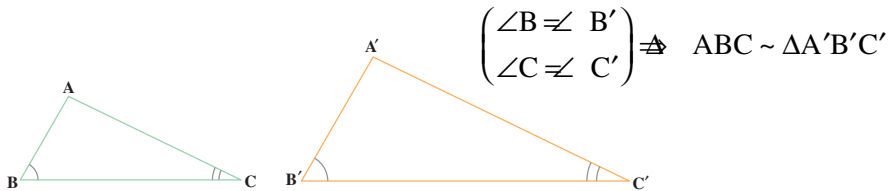
۵- نقشه‌ی هر مکان با آن مکان متشابه است و نسبت تشابه آن‌ها را مقیاس نقشه گویند. اگر مقیاس نقشه‌ای $\frac{1}{100000}$ و فاصله‌ی دو نقطه در نقشه ۴ سانتی‌متر باشد، فاصله‌ی نقاط متناظر آن‌ها در طبیعت چه قدر است؟

اگر زاویه‌ی بین دو خط، در نقشه 45° باشد، زاویه‌ی بین خط‌های متناظر آن‌ها در طبیعت چه قدر است؟

تشابه دو مثلث

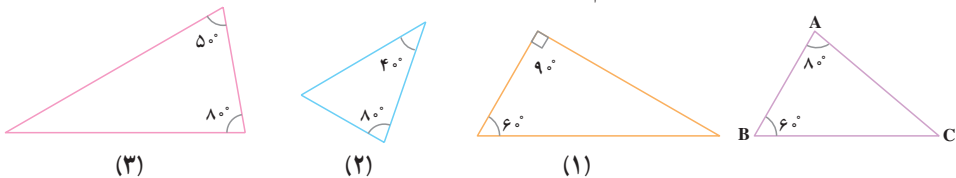
از آن چه درباره‌ی تشابه دو چندضلعی گفته شد، می‌توان نتیجه گرفت که اگر زاویه‌های دو مثلث، دویه دو متساوی و ضلع‌های روبه‌روی زاویه‌های متساوی، متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند. البته به سبب ویژگی‌هایی که مثلث دارد، با بعضی از شرایط مذکور می‌توان تشابه بودن دو مثلث را نتیجه گرفت.

الف - اگر دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر متساوی باشند، آن دو مثلث متشابه‌اند.



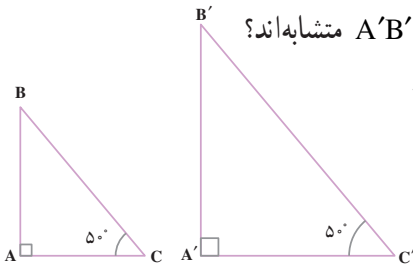
کار در کلاس

۱- مثلث ABC با کدام یک از سه مثلث دیگر متشابه است؟



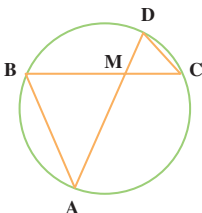
۲- چرا دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC و A'B'C' متشابه‌اند؟

تناسب بین اضلاع متناظر آن‌ها را بنویسید.



۳- چرا دو مثلث MAB و MCD متشابه‌اند؟

تناسب بین اضلاع آن‌ها را بنویسید.



۴- آیا دو مثلث متساوی الساقین که یک زاویه ی رأس مساوی داشته باشند،

متشابه اند؟ _____

۵- چرا هر دو مثلث متساوی الاضلاع متشابه اند؟ _____

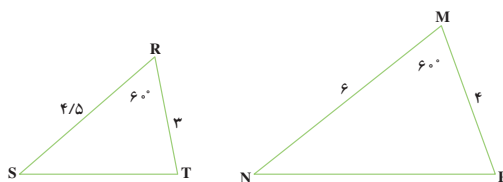
۶- چرا هر دو مثلث قائم الزاویه ی متساوی الساقین متشابه اند؟ _____

ب- اگر دو ضلع از مثلثی با دو ضلع از مثلث دیگر متناسب و زاویه های بین آن ها متساوی باشند، آن دو مثلث متشابه اند؛

مثلاً، در دو مثلث MNP و RST داریم:

$$\frac{MN}{RS} = \frac{MP}{RT} = \frac{4}{3}$$

$$\hat{R} = \hat{M} = 60^\circ$$



بنابراین $\Delta MNP \sim \Delta RST$

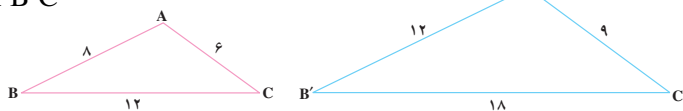
پ- اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، آن دو مثلث متشابه اند؛

مثلاً در دو مثلث ABC و A'B'C' داریم:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{2}{3}$$

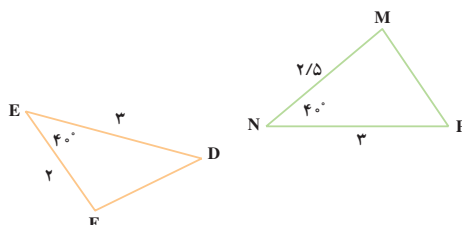
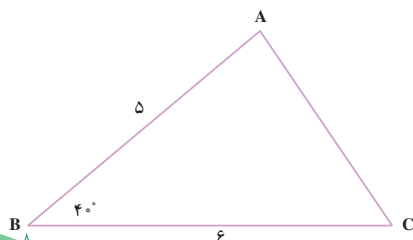
بنابراین

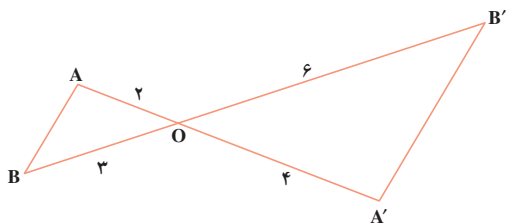
$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$



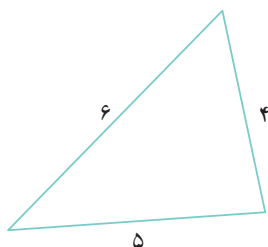
کار در کلاس

۱- کدام دو مثلث متشابه اند؟

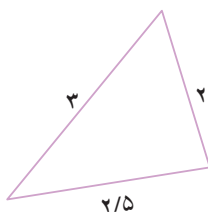




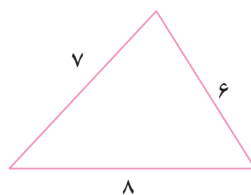
- ۲- چرا دو مثلث OAB و OA'B' متشابه‌اند؟ تناسب بین اضلاع آن‌ها را بنویسید و زاویه‌های متناظر را مشخص کنید.
- ۳- کدام دو مثلث متشابه‌اند؟



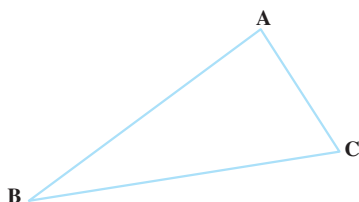
(۳)



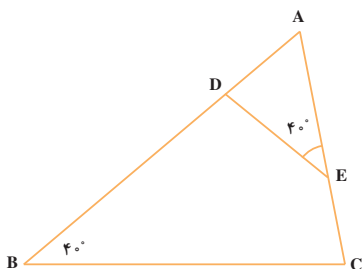
(۲)



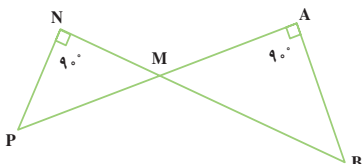
(۱)



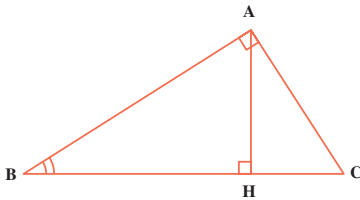
- ۴- مثلی رسم کنید که با مثلث ABC متشابه و نسبت تشابه آن‌ها $\frac{1}{3}$ و بزرگ‌تر از ABC باشد.



- ۱- چرا دو مثلث ABC و ADE متشابه‌اند؟ تناسب بین اضلاع آن‌ها را بنویسید و زاویه‌های متناظر را در دو مثلث مشخص کنید.

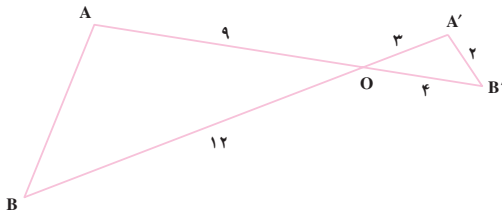


- ۲- ثابت کنید که دو مثلث MAB و MNP متشابه‌اند. تناسب بین ضلع‌های متناظر را بنویسید.

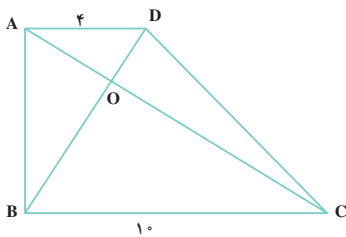


۳- AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه ABC است. ثابت کنید :

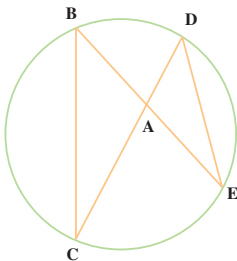
$$\triangle ABC \sim \triangle AHB$$



۴- ثابت کنید که دو مثلث OAB و OA'B' متشابه اند؛ سپس، اندازه ی AB را حساب کنید.

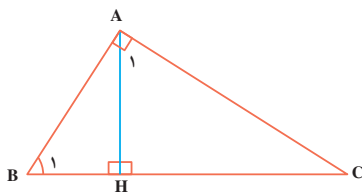


۵- چهارضلعی ABCD دوزنقه است. ثابت کنید که دو مثلث OBC و OAD متشابه اند. نسبت تشابه این دو مثلث چه قدر است؟



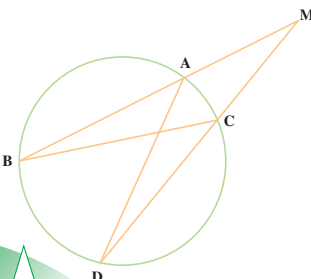
۶- ثابت کنید که دو مثلث ABC و ADE متشابه اند و از آنجا نتیجه بگیرید :

$$AB \times AE = AD \times AC$$



۷- AH ارتفاع وارد بر وتر مثلث قائم الزاویه ی ABC است. ثابت کنید که $\triangle AHB \sim \triangle AHC$ است؛ سپس، نسبت اضلاع متناظر آن ها را بنویسید و از آن نتیجه بگیرید.

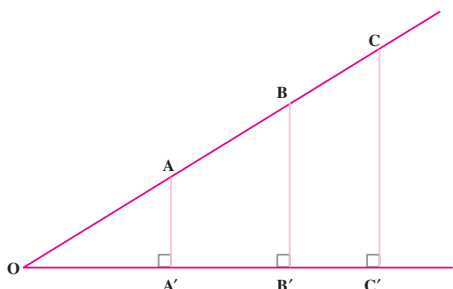
$$AH^2 = BH \cdot HC$$



(راهنمایی: زاویه های A_1 و B_1 متمم زاویه ی C هستند).

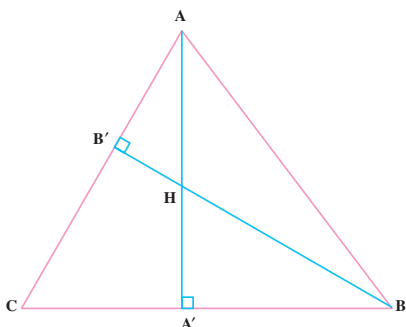
۸- چرا دو مثلث MAD و MBC متشابه اند؟ تناسب بین اضلاع متناظر آن ها را بنویسید و رابطه ی زیر را به دست آورید.

$$MA \times MB = MC \times MD$$



۹- در شکل مقابل، $\frac{AA'}{OA'} = \frac{3}{5}$ است.

هریک از نسبت‌های $\frac{BB'}{OB'}$ و $\frac{CC'}{OC'}$ را حساب کنید.

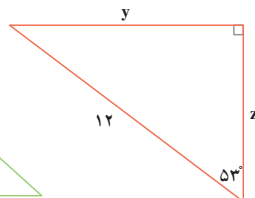
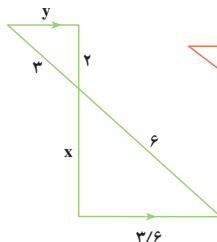
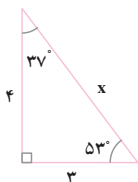
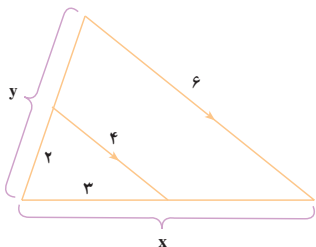


۱۰- دو ارتفاع مثلث ABC

هستند؛ ثابت کنید:

$$\triangle AHB' \sim \triangle BHA'$$

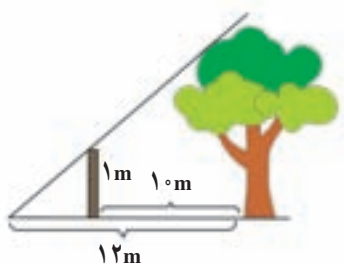
۱۱- در هر شکل، پاره‌خط‌های مجهول را حساب کنید.



سرگرمی و ریاضی



محسن و محمود در پارک قدم می‌زدند. محسن گفت: «آیا می‌توانی بگویی



ارتفاع این درخت چند متر است؟» محمود جواب داد: «اکنون بایک تکه چوب ارتفاع آن را حساب می‌کنم.» او بایک تکه چوب ۱ متری این کار را انجام داد. آیا شما نیز می‌توانید ارتفاع درخت را حساب کنید؟

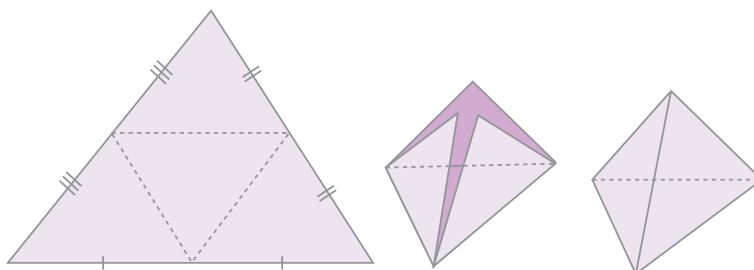
حجم



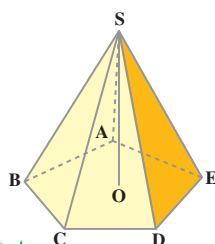
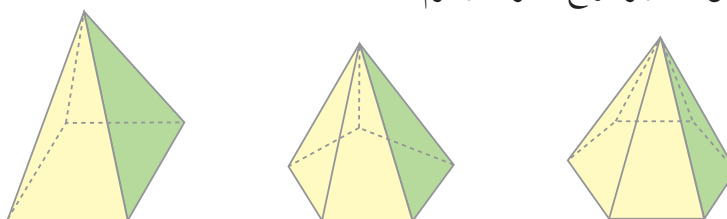
هرم



در شکل های زیر چگونگی ساختن جسمی را که هرم نامیده می شود، مشاهده می کنید.



در شکل های زیر انواع دیگری از هرم ها نشان داده شده است.



همان طور که می بینید، یک هرم از یک چندضلعی (که قاعده ی هرم نامیده می شود) و چند مثلث جانبی تشکیل می شود.

در شکل مقابل، چندضلعی قاعده و نقطه ی S رأس هرم است. ارتفاع این هرم، فاصله ی رأس S از قاعده ی آن است.

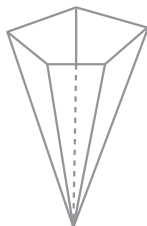
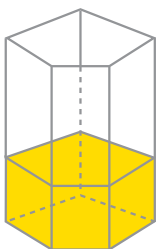


شکل‌های بالا نشان می‌دهند که با سه بُرش، می‌توان یک مکعب را به سه هرم مربع‌القاعده‌ی متساوی، تقسیم کرد؛ پس، حجم هریک از این هرم‌ها، یک سوم حجم مکعب است. مشاهده می‌کنید که قاعده‌ی هریک از سه هرم یکی از وجه‌ها و ارتفاع آن یکی از یال‌های مکعب است و می‌دانید که

$$\text{طول یال} \times \text{مساحت یک وجه} = \text{حجم مکعب}$$

بنابراین،

$$\text{ارتفاع هرم} \times \text{مساحت قاعده‌ی هرم} \times \frac{1}{3} = \text{حجم مکعب} \times \frac{1}{3} = \text{حجم هریک از هرم‌های بالا}$$



با انجام دادن آزمایش زیر، می‌توان نشان داد که این دستور برای هر نوع هرم درست است. دو ظرف به شکل‌های منشور و هرم که قاعده و ارتفاع مساوی داشته باشند، انتخاب می‌کنیم. ظرفی را که به شکل هرم است، از آب پُر می‌کنیم و در ظرف منشور شکل خالی می‌کنیم. مقدار آب، $\frac{1}{3}$ گنجایش منشور می‌شود.

$$\text{حجم منشور} \times \frac{1}{3} = \text{حجم هرم}$$

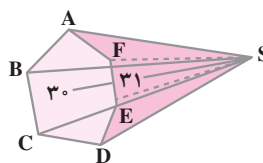
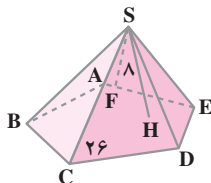
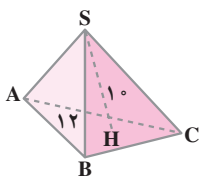
$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \times \frac{1}{3} = \text{حجم هرم} \quad \text{پس،}$$

به‌طور کلی، حجم یک هرم برابر است با یک سوم حاصل ضرب مساحت قاعده‌ی آن در ارتفاع آن.

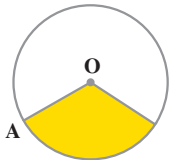
کار در کلاس



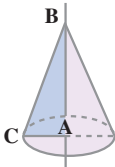
مساحت قاعده و ارتفاع هر هرم داده شده است. حجم آن‌ها را حساب کنید.



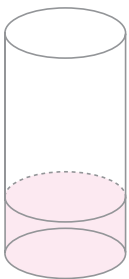
مخروط



در شکل روبه‌رو، روش ساختن جسمی را که **مخروط** نامیده می‌شود، مشاهده می‌کنید.



می‌توان تصور کرد که یک مخروط از دوران مثلثی قائم‌الزاویه، حول یک ضلع زاویه قائمه آن، پدید می‌آید.



دستور محاسبه‌ی حجم مخروط هم مانند حجم هرم است. درستی این مطلب را می‌توانیم با آزمایش روبه‌رو تحقیق کنیم؛ دو ظرف به شکل‌های استوانه و مخروط که قاعده و ارتفاع مساوی داشته باشند، انتخاب می‌کنیم. ظرف مخروط شکل را از آب پُر کرده و در ظرف استوانه‌ای شکل خالی می‌کنیم. مقدار آب، $\frac{1}{3}$ گنجایش

ظرف استوانه‌ای شکل است. $\text{حجم استوانه} \times \frac{1}{3} = \text{حجم مخروط}$

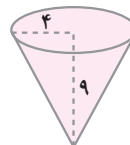
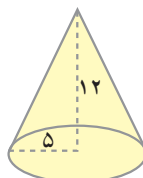
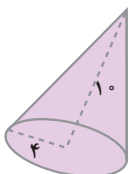
پس، $\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} \times \frac{1}{3} = \text{حجم مخروط}$

به‌طور کلی، حجم یک مخروط برابر است با یک سوم حاصل ضرب مساحت قاعده‌ی آن در ارتفاع آن.

کار در کلاس



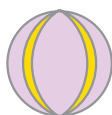
۱- شعاع قاعده و ارتفاع هر مخروط داده شده است. حجم هریک را حساب کنید.



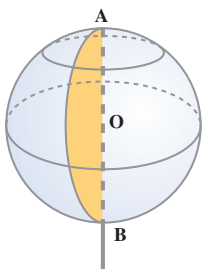
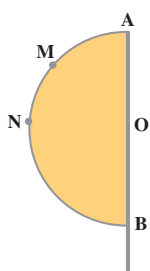
۲- یک مثلث قائم الزاویه با ضلع‌های قائم ۳ و ۴ سانتی متر، یک بار حول ضلع ۳ سانتی متری و یک بار حول ضلع ۴ سانتی متری دوران داده شده است. حجم مخروط حاصل از هر دوران را حساب کنید.



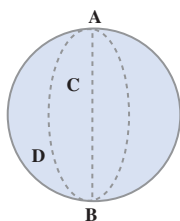
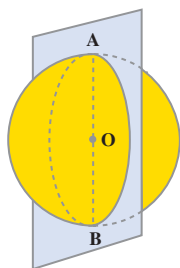
کره



توپ نمونه‌ای از اجسام کروی شکل (به شکل کره) است.



می‌توان تصور کرد که یک کره از دوران یک نیم دایره، حول قطر آن پدید می‌آید. در این دوران، هر نقطه‌ی نیم دایره، دایره‌ای را پدید می‌آورد که مرکز آن روی قطر AB (محور دوران) قرار دارد. هریک از این دایره‌ها، مدار نامیده می‌شود.



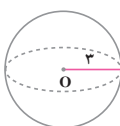
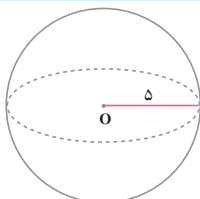
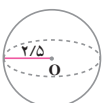
اگر کره را با صفحه‌ای که از محور دوران آن می‌گذرد، قطع کنیم، فصل مشترک، دایره‌ای است که نصف النهار نامیده می‌شود.

در دبیرستان خواهید دید که مساحت کره و حجم آن از قاعده‌های زیر به دست می‌آیند.

$$\text{مساحت کره} = 4\pi r^2 \quad \text{حجم کره} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

کار در کلاس

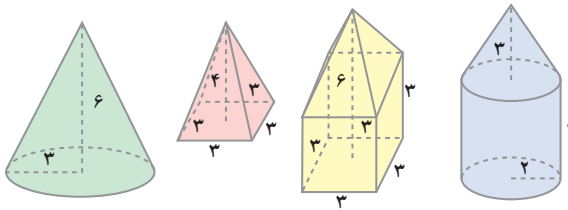
۱- حجم و مساحت هریک از کره‌های زیر را حساب کنید.



- ۲- نیم دایره‌ای به شعاع 10 سانتی متر حول قطر آن دوران داده شده است. حجم و مساحت کروی حاصل را حساب کنید.
- ۳- دایره‌ای به قطر 12 سانتی متر حول قطر آن دوران داده شده است. حجم و مساحت کروی حاصل را حساب کنید.



۱- شکل بعضی اجسام و اندازه‌های آن‌ها به صورت‌های زیر است؛ حجم هریک را حساب کنید.



- ۲- مثلث قائم الزاویه‌ای با ضلع‌های قائم 6 و 8 سانتی متر، حول ضلع 8 سانتی متری دوران داده شده است. حجم مخروط حاصل را حساب کنید.
- ۳- اندازه‌های اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی یک مثلث قائم الزاویه 5 و 12 است. حجم حاصل از دوران این مثلث حول هریک از ضلع‌های زاویه‌ی قائمه آن را حساب کنید. از مقایسه‌ی آن‌ها چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

- رسم شکل
- جدول نظام‌دار
- الگویابی
- حذف حالت‌های نامطلوب
- زیر مسئله
- حل مسئله‌ی ساده‌تر
- تشکیل معادله
- حدس و آزمایش



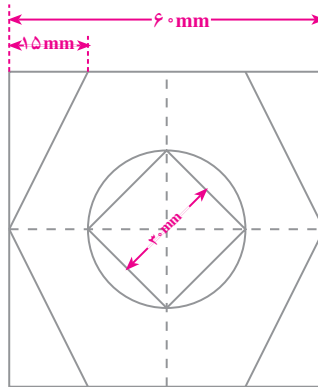
یک چاه استوانه‌ای شکل به قطر 2 متر و ارتفاع 10 متر حفر شده است. خاک



این چاه روی زمین به صورت یک مخروط با قاعده‌ی دایره‌ای به شعاع 2 متر ریخته شده است. ارتفاع این مخروط را پیدا کنید. (وقتی خاک حاصل از حفر کردن

زمین را بیرون می‌ریزند، حجم آن تقریباً $1/5$ برابر می‌شود.)

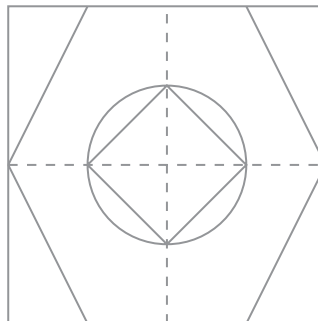
الف- ابتدا اندازه‌های داده شده در این قسمت را ۲ برابر کنید؛ سپس، دستورالعمل رسم را براساس آن کامل کنید. سایر اندازه‌های مورد نیاز را با توجه به عددهای داده شده پیدا کنید و بنویسید.



ب-

- ۱- مربعی به ضلع — سانتی متر در وسط کاغذ رسم کنید.
- ۲- وسط ضلع‌های مربع را با خط چین به هم وصل کنید.
- ۳- به مرکز وسط مربع و به شعاع — سانتی متر، یک دایره رسم کنید.
- ۴- روی ضلع‌های بالا و پایین مربع از هر طرف به اندازه‌ی — سانتی متر جدا کرده و آن را به وسط ضلع‌های دیگر وصل کنید.
- ۵- مربع داخل دایره را رسم کنید.

پ- شکل نهایی



ت- تا این جا با کشیدن رسم در مقیاس مورد نظر و اجرای دستورالعمل آن آشنا شدید. آیا شما هم می‌توانید دستورالعمل دیگری برای کشیدن رسم، بنویسید؟ در این مورد با دوستان خود گفت و گو کنید و یک دستورالعمل مثل قسمت ب بنویسید.

تمرین دوره‌ای ۲

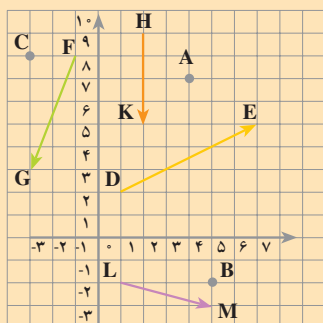


۱- حاصل عبارت‌های زیر را به صورت عدد توانی بنویسید.

$$\begin{array}{lll} 5^2 \times 5^9 & 7^8 \div 7^5 & (-4)^2 \times (-4)^7 \\ 4^6 \times 9^6 & 9^5 \div 4^5 & 7^4 \times 8^4 \end{array}$$

۲- جذر هریک از عددهای زیر را تا دو رقم اعشار حساب کنید.

$$\begin{array}{lll} 42/5 & 3021 & 38/7 \end{array}$$



۳- به شکل روبه‌رو توجه کنید؛ مختصات هریک از نقاط و بردارهای زیر را پیدا کنید.

$$\vec{FG}, \vec{DE}, C, B, A, \vec{HK}, \vec{LM}.$$

۴- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

$$\begin{array}{lll} 3 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} & 5 \begin{bmatrix} -1 \\ -4 \end{bmatrix} & (-2) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\ 2 \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix} + (-2) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} & 4 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ -4 \end{bmatrix} \end{array}$$

۵- با توجه به مختصات بردارهای واحد، $i = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ، $j = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، هریک از بردارهای زیر را برحسب بردارهای واحد بنویسید.

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = 5 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 5i + 7j, \quad \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

۶- عبارت‌های جبری زیر را ساده کنید.

$$\begin{array}{ll} 6(x - 3y) + 9(3x + 2y) & 5(2x - 7y) - 2(5x + 2y) \\ 3(4x + 5y) & 7(2x + 3y) \\ \underline{-2(6x - 4y)} & \underline{-(3x + 21y)} \end{array}$$

۷- معادله‌های زیر را حل کنید.

$$2x - 5 = 7 \qquad 3x - 4 = 4 \qquad 7x - \frac{5}{3} = 3x$$

۸- نمودار هریک از مجموعه‌های زیر را روی یک محور مشخص کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف - } \{x | 2 < x < 5\} & \text{ب - } \{x | 0 < x \leq 1\} \\ \text{پ - } \{x | -4 \leq x\} & \text{ت - } \{x | x < 2\} \end{array}$$

۹- نمودار هریک از مجموعه‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف - } \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\} & \text{ب - } \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{پ - } \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} x=0 \text{ یا } 5 \\ y=1 \end{array} \right\} & \text{ت - } \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid \begin{array}{l} x=2 \\ y=2 \text{ یا } 3 \end{array} \right\} \end{array}$$

۱۰- هریک از خط‌های به معادله‌های زیر را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$\begin{array}{ll} y = 3x + 1 & y = 4x \\ x = 4 & 3y + 5x = 1 \end{array}$$

۱۱- شیب هریک از خط‌های زیر را پیدا کنید؛ سپس، مشخص کنید که در یک دستگاه مختصات، کدام خط‌ها با هم موازی‌اند.

$$\begin{array}{lll} \text{الف - } y = 2x & \text{ب - } 8x - 4y = 1 & \text{پ - } 3x - y = 1 \\ \text{ت - } y = 3x + 4 & \text{ث - } 5y = x - 5 & \text{ج - } 3y = 6x + 1 \end{array}$$

۱۲- مختصات نقطه‌ای از خط $5y - 2x = 7$ را که طول آن ۳ است، پیدا کنید. آیا نقطه‌ی

$$A = \left[\begin{array}{c} 0 \\ +\frac{7}{5} \end{array} \right] \text{ روی این خط است؟}$$

۱۳- معادله‌ی خط a را که از مبدأ بگذرد و شیب آن ۲ باشد، بنویسید؛ سپس، این خط را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۴- معادله‌ی خط b را که از مبدأ بگذرد و با خط $x + y = 1$ موازی باشد، بنویسید. این خط را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۱۵- معادله‌ی خطی را که از $\begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$ بگذرد و با $y = 2x - 3$ موازی باشد، بنویسید.

۱۶- عدد a را تعیین کنید؛ طوری که خط $y = ax - 1$ از نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ بگذرد.



۱۷- عدد b را تعیین کنید؛ طوری که خط $y = 2x + b$ از نقطه‌ی $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۱۸- عدد a را تعیین کنید؛ طوری که خط $2y - ax = 1$ از نقطه‌ی $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ بگذرد.

۱۹- نمودار مجموعه‌ی $\{x | -2 < x \leq 3\}$ را روی محور مشخص کنید.

۲۰- هریک از خط‌های $y = 2x + 7$ و $3x - 5y = 6$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۲۱- دستگاه‌های زیر را حل کنید.

$$\begin{array}{ll} \text{الف -} & \begin{cases} 3x - 4y = 29 \\ x - y = 8 \end{cases} \quad \text{ب -} & \begin{cases} 4x - y = 10 \\ 2x + 3y = 2 \end{cases} \quad \text{پ -} & \begin{cases} 5x - 7y = 1 \\ -3x + 7y = 11 \end{cases} \end{array}$$

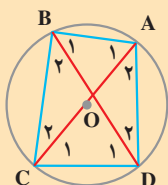
۲۲- نمره‌های علوم یک کلاس ۳۰ نفره به صورت زیر است.

۷	۸	۸	۱۰	۱۱	۱۱	۱۱	۱۱/۵	۱۲	۱۲
۱۲/۵	۱۳	۱۳	۱۴	۱۵	۱۵	۱۵/۵	۱۵/۵	۱۶	۱۶/۵
۱۷	۱۷/۵	۱۷/۵	۱۸	۱۸/۵	۱۸/۵	۱۹	۱۹	۱۹/۵	۲۰

پس از کامل کردن جدول زیر برای این کلاس، میانگین کلاس را حساب کنید.

دسته	فراوانی	متوسط هر دسته	فراوانی \times متوسط
۹ تا ۹/۹			
۱۰ تا ۱۱/۹			
۱۲ تا ۱۴/۹			
۱۵ تا ۱۶/۹			
۱۷ تا ۲۰			
جمع کل			

$$\text{میانگین کلاس} = \frac{\text{جمع کل}}{\text{تعداد دانش‌آموزان}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

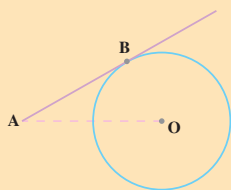


۲۳- در شکل مقابل، AC قطر دایره است.

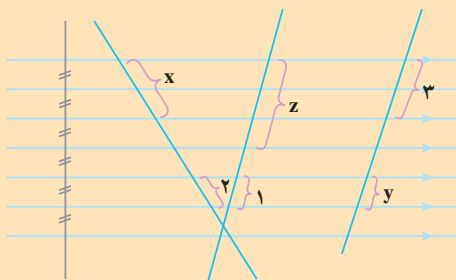
الف - چرا $\hat{ADC} = \hat{ABC}$ است؟

ب - A_1 با کدام زاویه مساوی است؟



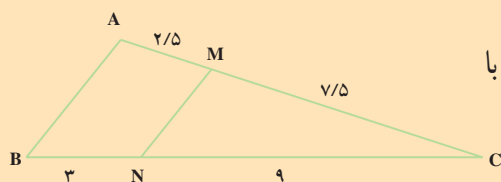


۲۴- نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۱۰ سانتی متر از مرکز دایره‌ی C قرار دارد. شعاع دایره برابر با ۶ سانتی متر است و AB بر این دایره مماس است. طول پاره خط AB را حساب کنید.

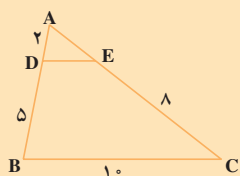


۲۵- در شکل روبه‌رو، اندازه‌های مجهول را حساب کنید.

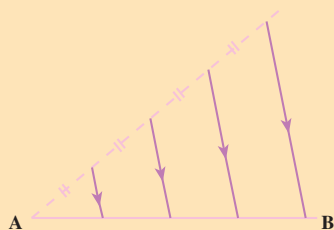
۲۶- پاره خطی به طول ۹ سانتی متر رسم کنید؛ سپس، آن را به دو قسمت تقسیم کنید؛ طوری که یکی از قسمت‌ها ۳ برابر دیگری باشد.



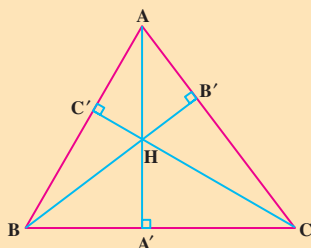
۲۷- در شکل روبه‌رو، چرا MN موازی با AB است؟



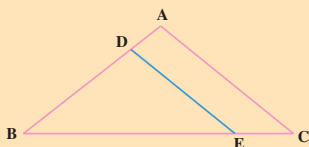
۲۸- در شکل روبه‌رو $DE \parallel BC$ است. اندازه‌های AE و DE را حساب کنید.



۲۹- اگر AB برابر ۶ سانتی متر باشد، اندازه‌های هر یک از پاره خط‌هایی که روی AB جدا شده است، چند سانتی متر است؟



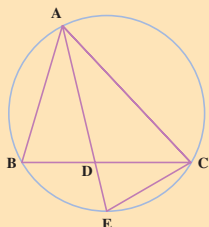
۳۰- در شکل روبه‌رو، AA' ، BB' و CC' ارتفاعات مثلث ABC هستند. مثلث $A'BH$ با کدام مثلث متشابه است؟ چرا؟



۳۱- در شکل روبه‌رو، $DE \parallel AC$ است. چرا دو مثلث

ABC و DBE متشابه‌اند؟

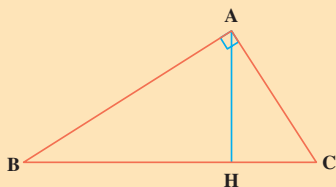
نسبت اضلاع متناظر آن‌ها را بنویسید.



۳۲- AE نیمساز زاویه A است؛ چرا دو مثلث ABD و AEC

متشابه‌اند؟

تناسب بین اضلاع متناظر آن‌ها را بنویسید.



۳۳- در مثلث ABC ، $\hat{A} = 90^\circ$ و AH ارتفاع وارد بر

وتر BC است. چرا دو مثلث ABC و AHC متشابه‌اند؟ تناسب

بین اضلاع متناظر این دو مثلث را بنویسید.

- رسم شکل
- جدول نظام‌دار
- الگویابی
- حذف حالت‌های نامطلوب
- زیر مسئله
- حل مسئله‌ی ساده‌تر
- تشکیل معادله
- حدس و آزمایش

حل مسئله



۱- گنجایش یک پارچ، پنج برابر گنجایش یک

لیوان است.

مجموع گنجایش پارچ و لیوان ۲ لیتر است. گنجایش پارچ و گنجایش لیوان

چه قدر است؟

۲- اگر حسن ۳ دفتر و ۵ خودکار بخرد، ۱۰۰ تومان از پولش باقی می‌ماند. اگر

او ۲ دفتر و ۸ خودکار بخرد، برایش پولی باقی نمی‌ماند. قیمت ۲ دفتر با قیمت ۵ خودکار

مساوی است. الف - قیمت یک دفتر و قیمت یک خودکار را حساب کنید. ب- حسن

چه قدر پول دارد؟

۳- دو کارگر یکی باتجربه و یکی کم تجربه است. کارگر باتجربه برای رنگ کردن

یک دیوار، ۱۰ ساعت زمان لازم دارد. کارگر کم تجربه همان دیوار را در ۱۵ ساعت

رنگ می‌کند. برای این که دیوار در کوتاه‌ترین زمان رنگ شود، باید چه کسری از آن را

به کارگر باتجربه و چه کسری را به کارگر کم تجربه بسپریم تا هم زمان رنگ زدن را آغاز

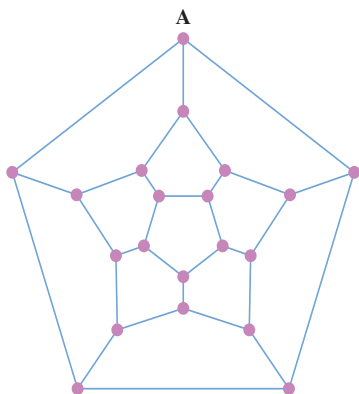
کنند؟ در این صورت، رنگ‌آمیزی دیوار چه قدر طول می‌کشد؟

۴- نمره‌ی ریاضی دانش‌آموزان کلاستان را در نیم سال اول و میان نیم سال دوم

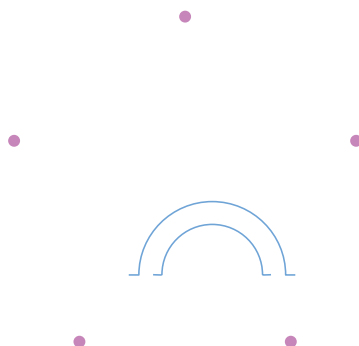
تهیه کنید. آن‌گاه میانگین نمره‌ی ریاضی کلاس خود را در هریک از دو نوبت حساب کنید.



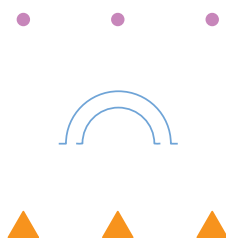
فروشندگی دوره گرد



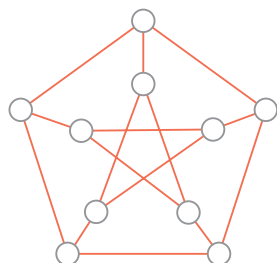
شکل روبه‌رو، نقشه‌ی ۲۰ خانه‌ی روستایی و راه‌های بین آن‌ها را نشان می‌دهد. یک فروشندگی دوره گرد می‌خواهد هر روز از خانه‌ی A شروع کند و مسیری را طی کند که از هر خانه، فقط یک بار بگذرد و سرانجام، به نقطه‌ی A بازگردد. مسیر او را مشخص کنید. هر ● یک خانه‌ی روستایی را نشان می‌دهد.



در شکل روبه‌رو، هر ● یک شهرک است. می‌خواهیم بین هر دو شهرک یک جاده بکشیم؛ طوری که هیچ دو جاده‌ای تقاطع نداشته باشند. با استفاده از پل، نقشه‌ی راه‌ها را رسم کنید.



هر ● نماینده‌ی یک معدن و هر ▲ نماینده‌ی یک کارخانه است. می‌خواهیم از هر معدن، جاده‌ای به هریک از کارخانه‌ها بکشیم؛ طوری که هیچ‌یک از جاده‌ها دیگری را قطع نکند. نقشه‌ی جاده‌ها را تهیه کنید.



در شکل روبه‌رو، هر ○ یک رأس نامیده می‌شود. دو رأس را در صورتی که با یک پاره‌خط به هم وصل شده باشند، مجاور می‌نامیم. با به کار بردن ۳ رنگ، رأس‌ها را طوری رنگ کنید که رأس‌های مجاور هم‌رنگ نباشند.

