بسم الله الرحمن الرحیم

حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲)

دورهٔ پیش‌دانشگاهی
رشتهٔ علوم ریاضی

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

برنامه ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی**

نام کتاب : **حساب دیفرانسیل و انتگرال (۱) و (۲) ـ ۲۹۵/۱**

شورای برنامه‌ریزی : **دکتر یحیی تابش، دکتر محمّدحسن بیژن‌زاده، دکتر امیر نادری، حمیده داریوش همدانی و جواد حاجی بابائی**

مؤلفان : **محمود تلگینی، فروزان خردپژوه، علی رجالی و احمد قیاسیان**

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ چاپ و توزیع کتاب‌های درسی**

تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کدپستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب‌سایت: www.chap.sch.ir

صفحه‌آرا : **شهرزاد قنبری**

طراح جلد : **طاهره حسن‌زاده**

ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادّهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**

تلفن: ۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۴۴۵/۶۸۴

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»**

سال انتشار و نوبت‌چاپ : **چاپ هفدهم ۱۳۹۰**

شابک ۴-۲۷۷-۰۵-۹۶۴ ISBN 964-05-0277-4

۱۳۹۰

جوان‌ها و کودکان ما در سرتاسر کشور، در هر مرکزی که اشتغال به تحصیل دارند باید توجّه داشته باشند تحصیل همراهِ تهذیب و همراهِ تعهد و همراهِ اخلاق فاضله‌ی انسانی است که می‌تواند ما را به حیات انسانی برساند و می‌توانَد ما را از وابستگی‌ها نجات بدهد.

امام‌خمینی

فهرست مطالب

پیشگفتار

حساب دیفرانسیل و انتگرال یکی از بزرگ‌ترین دستاوردها و حاصل نبوغ و تفکر خلاق انسان است. جهانِ درحال تغییر و تحوّل دائمی، از اجسامی در حال حرکت و پدیده‌های رشد و زوال انباشته است. شناختِ پدیده‌های مربوط به تغییر و حرکت به کمک مدل‌سازی ریاضی و استفاده از حساب دیفرانسیل و انتگرال میسر است که حاصل کوشش‌های ریاضی‌دانانی چون ایزاک نیوتن (۱۷۲۷ــ۱۶۴۲) و گوتفریدویلهم لایبنیتس (۱۷۱۶ــ۱۶۴۶) است. توان خارق‌العاده‌ی این رشته از دانش بشری، در تبدیل مسایل پیچیده به قوانین و روش‌های ساده، باعث شده است تا در عرصه‌ی علوم ریاضی از موقعیت ویژه‌ای برخوردار شود.

اگرچه این درس می‌تواند با دیدگاه‌های متفاوت و کاربردهای مختلفی ارائه شود اما نباید تنها به‌عنوان معرفی مجموعه‌ای از قوانین و روش‌ها مطرح شود و ضروری است به ارزش‌های ریاضی و زیبایی‌ها و لطایفی که در اصول آن‌ها نهفته به قدر کافی توجه شود. در تدریس این کتاب توصیه می‌کنیم که دو اصل مدّنظر همکاران محترم باشد :

۱ــ هر مطلبی باید تا حد امکان با استفاده از روش‌های تجسمیِ هندسی، محاسبات عددی، و خواص جبری تدریس گردد.

۲ــ اساس بیان تعاریف و قوانین و روش‌ها در این درس، کاربردهای عملی و واقعی است و باید از آن‌ها برای انتقال مفاهیم کمک گرفته شود.

بر این اساس و برای ایجاد فکر منطقی و اصولی در دانش‌آموزان، سعی کرده‌ایم مطالب را تا حد امکان از طرح مسایل شهودی آغاز کرده و آن‌گاه به‌وسیله‌ی بیان اصول و قضیه‌های ریاضی آن‌ها را به کاربردها پیوند بزنیم. هم‌چنین از ذکر اثبات بعضی قضایای پیچیده صرف‌نظر شده و تنها به بیان صورت آن‌ها و چگونگی کاربردشان اکتفا شده است.

در این کتاب همانند سایر کتاب‌های ریاضی، نیاز به تدریس صحیح و به‌کارگیری موضوعات کاربردی برای یادگیری مطالب آن محسوس است. تعداد زیادی تمرین نیز برای دانش‌آموزان مطرح شده‌اند. همکاران عزیز از طرح موارد تکراری در کلاس و حل تمام مسایل خودداری کنند و به دانش‌آموزان اجازه دهند که خود در یادگیری سهیم و با اتکاء به خود و تحت راهنمایی به حل تمرین‌ها بپردازند. تمرین‌هایی نیز در انتهای کتاب وجود دارد که در پایان ترم یا در صورت فرصت کافی در کلاس طرح گردند ولی در هر حال از نتایج آن می‌توان در حل مسایل دیگر استفاده نمود. به‌علاوه برای تمرین و درک بهتر مسایل کاربردی، استفاده از ماشین حساب و کامپیوتر هم در این درس توصیه می‌شود.

گروه مؤلفان سعی کرده‌اند قبل از چاپ کتاب از نظریات اعضاء هیأت علمی دانشکده ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان و دبیران ریاضی و برخی اساتید دانشگاه از جمله جناب آقای دکتر منوچهر وصال استفاده کنند. دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی از همه آنان سپاسگزاری می‌کند.

از دبیران محترم، دانش‌آموزان عزیز و سایر خوانندگان کتاب درخواست می‌کنیم موارد و نکات آموزشی، پیشنهادها و نظرات خود را به این دفتر ارسال فرمایند تا در چاپ‌های بعدی از این نظرات استفاده شود.

دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتب درسی

فصل اول

دستگاه اعداد

از قدیم اعداد طبیعی برای شمارش و اعداد حقیقی برای اندازه‌گیری فاصله‌ها یا تعیین مکان نسبی نقاطِ روی یک خط، شناخته شده‌اند. در این فصل با اعداد حقیقی بیشتر آشنا می‌شویم.

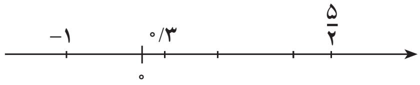
۱ــ۱ــ اعداد حقیقی

حساب دیفرانسیل و انتگرال بر ویژگی‌های اعداد حقیقی مبتنی است، در این بخش می‌خواهیم این ویژگی‌ها را مورد بررسی قرار دهیم.

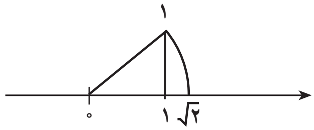
اعداد حقیقی از طریق بسط اعشاری نمایش داده می‌شوند. مثلاً، بسط‌های اعشاری پایان‌پذیر، نظیر $۰/۳۷۵ = \frac{۳}{۸}$ یا بسط‌های اعشاری متناوب، مثل $\frac{۷}{۲۲} = ۰/۳۱۸۱۸۱۸...$

در هر دو حالت بالا این اعداد به‌صورت خارج قسمت دو عدد صحیح بیان می‌شوند. به عبارت دیگر این اعداد، **اعدادی گویا** هستند. اما مجموعه اعداد حقیقی فقط شامل این نوع اعداد نیست.

اعداد حقیقی از طریق هندسی به‌وسیله نقاط یک محور مشخص می‌شوند. پس از انتخاب نقطه صفر هر عدد را با نقطه‌ای به طول قدرمطلق آن عدد مشخص می‌کنیم که اگر مثبت باشد سمت راست صفر و اگر عدد منفی باشد، آن را در سمت چپ صفر درنظر می‌گیریم :



هر عدد حقیقی با یک نقطه از محور مشخص می‌شود و برعکس هر نقطه از محور یک عدد حقیقی را مشخص می‌کند. حال می‌بینیم که نقاطی روی محور وجود دارند که طول آن‌ها با یک عدد گویا قابل بیان نیست، مثلاً :



مثلث قائم‌الزاویه‌ای که اضلاع زاویه قائمه آن هر دو ۱ واحد هستند را درنظر می‌گیریم. طول وتر آن $\sqrt{۲}$ است. نقطه‌ای به طول $\sqrt{۲}$ روی محور نمایش عدد $\sqrt{۲}$ است، ولی $\sqrt{۲}$ همان‌طور که قبلاً دیده‌اید گویا نیست. (چرا؟) در واقع $\sqrt{۲}$ یک بسط اعشاری بی‌پایان غیرمتناوب دارد.

$\sqrt{۲} = ۱/۴۱۴۲۳۵۶۲...$

هر عدد حقیقی که بسط اعشاری بی‌پایان غیرمتناوب دارد به‌صورت خارج‌قسمت دو عدد صحیح قابل بیان نیست و آن را عدد اصم می‌نامیم، نظیر $\sqrt{۲}$ یا $\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳...$. بنابراین مجموعه اعداد حقیقی که با $\mathbb{R}$ نشان داده می‌شود از اعداد با بسط اعشاری با پایان، یا بی‌پایان تناوبی یعنی اعداد گویا و بی‌پایان غیرتناوبی، یعنی اعداد اصم تشکیل شده است، و داریم :

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

حال ویژگی‌های[1] اعداد حقیقی را از لحاظ ساختمان جبری، و مقایسه‌پذیر بودن آن‌ها، بیان می‌کنیم :

فرض کنیم $x, y, z \in \mathbb{R}$ ،

الف) $x + y \in \mathbb{R}$.

ب) $x \times y \in \mathbb{R}$. ($x \times y$ را با xy نیز نمایش می‌دهند.)

ج) $x + (y + z) = (x + y) + z$.

د) $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$.

هـ) $x + y = y + x$.

و) $x \times y = y \times x$.

۱ــ نیازی به اثبات این ویژگی‌ها در کلاس نیست و دانش‌آموزان فقط باید بتوانند از آن‌ها در محاسبات خود استفاده کنند.

ز) $x+0=x$.

ح) $x\times 1=x$.

ط) اگر $x\in\mathbb{R}$ ، آن‌گاه $(-x)\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $x+(-x)=0$ ($-x$ را قرینه‌ی x می‌نامند).

ی) اگر $0\neq x\in\mathbb{R}$ ، آن‌گاه $x^{-1}=\frac{1}{x}\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $x\times\frac{1}{x}=1$ (x^{-1} را وارون x می‌نامند).

ک) $x\times(y+z)=(x\times y)+(x\times z)$.

تعریف: فرض کنیم $x,y\in\mathbb{R}$ ، **تفاضل** y از x عبارت است از :

$$x-y=x+(-y)$$

به‌ازای $y\neq 0$ ، تقسیم x بر y چنین است :

$$x/y=\frac{x}{y}=x\times y^{-1}$$

روی $\mathbb{R}$ رابطه‌ی $<$ (بخوانید : **رابطه‌ی کوچک‌تری**) وجود دارد که دارای ویژگی‌های زیر است :

فرض کنیم $x,y,z\in\mathbb{R}$

الف) یکی و فقط یکی از سه رابطه‌ی زیر برقرار است :

$$x<y \text{ یا } x=y \text{ یا } y<x$$

ب) اگر $x<y$ و $y<z$ ، آن‌گاه $x<z$.

ج) اگر $x<y$ ، آن‌گاه $x+z<y+z$.

د) اگر $x>0$ و $y>0$ ، آن‌گاه $x\times y>0$.

رابطه‌ی $\leq$ (بخوانید : رابطه‌ی کوچک‌تر از یا مساوی) روی $\mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$x\leq y \text{ یعنی } x<y \text{ یا } x=y$$

مفاهیم مجموعه‌های کراندار و ماکسیمم و مینیمم آن در موارد متعددی مورد استفاده قرار می‌گیرند که به تعریف دقیق آن‌ها می‌پردازیم.

تعریف: مجموعه‌ی $A\subset\mathbb{R}$ را از **بالا کراندار** گویند هرگاه $x\in\mathbb{R}$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $a\in A$ ، $a\leq x$. در این حالت x را یک **کران بالای** A در $\mathbb{R}$ می‌نامند.

تعریف: مجموعه‌ی $A \subset \mathbb{R}$ را از **پایین کراندار** گویند هرگاه $x \in \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که برای هر $a \in A$ ، $x \leq a$. در این **حالت** x را یک **کران پایین** A در $\mathbb{R}$ **می‌نامند.**

تعریف: مجموعه‌ی $A \subset \mathbb{R}$ را **کراندار** گویند هرگاه هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد. در غیر این صورت آن را **بی‌کران می‌نامند.**

در این رابطه دو مفهوم دیگر را که قبلاً دیده‌ایم یادآوری می‌کنیم :

تعریف: فرض کنیم $A \subset \mathbb{R}$ از بالا کراندار باشد. اگر عدد M عضو A وجود داشته باشد که برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a \leq M$ ، آن‌گاه M را **ماکسیمم مجموعه‌ی** A می‌نامند و آن را با $\max A$ نشان می‌دهند.[1] (در حقیقت M یک کران بالای A و عضو آن نیز است.)

تعریف: فرض کنیم $A \subset \mathbb{R}$ از پایین کراندار باشد. اگر عدد m عضو A وجود داشته باشد، که برای هر $a \in A$ داشته باشیم $m \leq a$ ، آن‌گاه m را مینیمم مجموعه‌ی A می‌نامند و آن را با $\min A$ نشان می‌دهند.[2] (در حقیقت m کرانِ پایینِ A و عضو آن نیز است.)

ویژگی‌های[3] دیگر اعداد حقیقی

با پذیرش ویژگی‌های فوق در مورد مجموعه‌ی اعداد حقیقی، خواص دیگری از این مجموعه را می‌توان ثابت کرد، در این‌جا برخی از آن‌ها را یادآوری می‌کنیم :

فرض کنیم $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ،

ـ $a + b = a + c$ ، اگر و تنها اگر $b = c$.

ـ $-(-a) = a$.

ـ $(-a)b = -(ab)$ و $-(a+b) = -a - b$.

ـ $a(b-c) = ab - ac$.

ـ $a \times ۰ = ۰$.

ـ اگر $ab = ac$ و $a \neq ۰$ ، آن‌گاه $b = c$.

ـ اگر $a \neq ۰$ و $b \neq ۰$ ، آن‌گاه $(ab)^{-۱} = a^{-۱}b^{-۱}$ و اگر $a \neq ۰$ ، آن‌گاه $(a^{-۱})^{-۱} = a$.

ـ اگر $ab = ۰$ ، آن‌گاه $a = ۰$ یا $b = ۰$.

۱ــ M را عضو انتهای A هم می‌نامند.

۲ــ m را عضو ابتدای A هم می‌نامند.

۳ــ نیاز به اثبات هیچ‌یک از این ویژگی‌ها در کلاس نیست. بیان آن‌ها در کتاب جهت یادآوری است.

ــ $(-a)(-b) = ab$.

ــ اگر $b \neq ۰$ و $d \neq ۰$، آن‌گاه :

۱ــ $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$

۲ــ $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$

۳ــ $(\dfrac{d}{b})^{-۱} = \dfrac{b}{d}$.

اگر علاوه بر آن $c \neq ۰$، آن‌گاه :

۴ــ $(\dfrac{a}{b}) \Big/ (\dfrac{c}{d}) = \dfrac{ad}{bc}$.

تعریف: چون عدد ۰ یک عدد حقیقی است برای هر عدد حقیقی دیگر a داریم : $a > ۰$ یا $a < ۰$. در حالت اول a را عدد **مثبت** و در حالت دوم آن را **منفی** می‌نامند. $\mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} : a > \}$ مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است. اگر برای عدد حقیقیِ a داشته باشیم $a \geq ۰$ ، a را **غیرمنفی** یا **نامنفی** و اگر $a \leq ۰$ ، a را **غیرمثبت** یا **نامثبت** می‌نامند.

حال اگر $a \neq ۰$ ، آن‌گاه $a \in \mathbb{R}^+$ یا $(-a) \in \mathbb{R}^+$. این مطلب و برخی دیگر از خواص رابطه‌ی ترتیب در زیر خلاصه شده‌اند که آن‌ها را بدون اثبات بیان می‌کنیم :

ــ فرض کنیم $a, b, c \in \mathbb{R}$ ،

الف) اگر $a < b$ و $c > ۰$ ، آن‌گاه $ac < bc$.

ب) اگر $a < b$ ، آن‌گاه $-a > -b$. در حالت خاص، اگر $a < ۰$ ، آن‌گاه $-a > ۰$.

ج) اگر $a \neq ۰$ ، آن‌گاه $a^۲ > ۰$ $(a^۲ = a \times a)$ و درنتیجه $۱ > ۰$.

د) اگر $a < b$ و $c < ۰$ ، آن‌گاه $ac > bc$.

هـ) اگر $ab > ۰$ ، آن‌گاه اعداد a و b هر دو مثبت یا هر دو منفی‌اند.

و) اگر $a < b$ و $c < d$ ، آن‌گاه $a + c < b + d$.

ز) اگر $۰ < a < b$ و $۰ < c < d$ ، آن‌گاه $ac < bd$.

ویژگی دیگر

ویژگی مهم دیگر اعداد حقیقی به ویژگی ارشمیدسی موسوم است و به‌صورت زیر بیان

می‌شود :

برای هر عدد حقیقی y، و هر عدد حقیقی $x > 0$ ، عدد طبیعی n وجود دارد که $nx > y$

از ویژگی مهم فوق، در مورد اعداد حقیقی نتایج مفیدی حاصل می‌شود، این نتیجه‌ها عبارتند از :

نتیجه ۱: برای هر عدد حقیقی a، یک عدد طبیعی n وجود دارد که $n > a$.

اثبات: در اصل ارشمیدس $y = a$ و $x = 1$ فرض می‌کنیم، نتیجه حاصل می‌شود.

نتیجه ۲: برای هر عدد حقیقی $a > 0$ ، عدد طبیعی n وجود دارد که $\frac{1}{n} < a$.

اثبات: در اصل ارشمیدس $x = a$ و $y = 1$ فرض می‌شود.

نتیجه ۳: هیچ عدد حقیقی rای وجود ندارد که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $n < r$.

اثبات: اگر چنین rای وجود داشته باشد، آن‌گاه در اصل ارشمیدس فرض می‌کنیم $y = r$ و $x = 1$. آن‌گاه چون بنا بر فرض r از همه اعداد طبیعی n بزرگ‌تر است لذا هیچ nای وجود ندارد که $n \times 1 > r$. که این نتیجه با اصل ارشمیدس در تناقض است. لذا چنین rای وجود ندارد.

نتیجه ۴: بین هر دو عدد حقیقی x و y لااقل یک عدد گویا وجود دارد، یعنی اگر $x < y$ ، آن‌گاه یک عدد گویای $\frac{m}{n}$ وجود دارد که $x < \frac{m}{n} < y$.

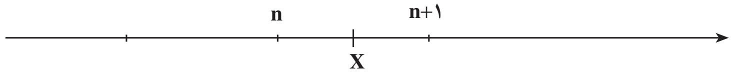
اثبات: بدون از دست دادن عمومیت مسئله فرض می‌کنیم $0 < x < y$ ، پس $y - x > 0$ ، لذا بنابر نتیجه ۲، عدد طبیعی n وجود دارد که $\frac{1}{n} < y - x$ به عبارت دیگر $ny - nx > 1$ ، ولی چون فاصله دو عدد ny و nx از ۱ بیشتر است پس لزوماً یک عدد صحیح m وجود دارد که $nx < m < ny$ ، پس $x < \frac{m}{n} < y$ و اثبات کامل می‌شود.

نتیجه ۵: بین هر دو عدد حقیقی x و y یک عدد اصم وجود دارد، که بین آن‌ها است.

اثبات: فرض می‌کنیم $x < y$ ، پس $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{y}{\sqrt{2}}$ ؛ حال بنا بر نتیجه ۴ بین $x/\sqrt{2}$ و $y/\sqrt{2}$ یک عدد گویای $\frac{m}{n}$ وجود دارد یعنی $\frac{x}{\sqrt{2}} < \frac{m}{n} < \frac{y}{\sqrt{2}}$ پس $x < \sqrt{2}\frac{m}{n} < y$ ولی $\sqrt{2}\frac{m}{n}$ یک عدد اصم است (چرا؟) و اثبات کامل است.

جزء صحیح

با بررسی شهودی و هندسی نتیجه می‌گیریم که هر عدد حقیقی بین دو عدد صحیح متوالی قرار دارد :



به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی x، یک عدد صحیح n وجود دارد که $n \le x < n+۱$ ، و این عدد n یکتا است. عدد n را با $[x]$ (براکت x) نشان می‌دهیم و آن را **جزء صحیح عدد** x می‌نامیم، پس داریم

$$[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} | n \le x\}$$

مثلاً $[۲/۷] = ۲$ و $[-۴/۳] = -۵$.

برای هر x حقیقی، نامساوی زیر برقرار است و یک ویژگی مهمی برای تابع جزء صحیح است :

$$[x] \le x < [x] + ۱$$

توان و ریشه‌ی اعداد حقیقی

توان‌های عدد حقیقی a به‌ازای اعداد طبیعی ۱ و $n > ۱$ به‌صورتِ زیر تعریف می‌شوند :

$$a^{۱} = a$$

$$a^{n} = a^{n-۱} \times a$$

این تعریفی استقرایی برای توانِ طبیعی یک عددِ حقیقی است.

حال به تعریف توانِ صحیح برای یک عددِ حقیقیِ ناصفر می‌پردازیم. فرض کنیم a یک عدد حقیقی ناصفر باشد. بنا بر تعریف، $a^{۰} = ۱$. برای n، که n یک عدد صحیح مثبت (طبیعی) است، a^{n} را در بالا تعریف کرده‌ایم. حال اگر n یک عدد صحیح منفی باشد (یعنی $(-n) \in \mathbb{N}$)، تعریف می‌کنیم :

$$a^{n} = (\frac{۱}{a})^{-n}$$

برای تعریف ریشه‌ی طبیعی اعداد حقیقی مثبت، می‌دانیم که :

اگر $a \ge ۰$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آن‌گاه عدد یکتای $b \ge ۰$ وجود دارد که $b^{n} = a$.

مقدار b را با $\sqrt[n]{a}$ نمایش می‌دهند و آن را **ریشه‌ی** nام عددِ a می‌نامند.

اگر n فرد باشد، برای هر عدد $a \in \mathbb{R}$ ، ریشه‌ی nام a وجود دارد ولی اگر n زوج باشد، اعداد منفی ریشه‌ی nام ندارند ؛ چون حاصل‌ضرب n عددِ منفی (وقتی n زوج است) مثبت می‌شود و لذا $\sqrt[n]{a}$ برای عدد منفیِ a و عدد زوجِ n وجود ندارد.

در کتاب‌های دانشگاهی ثابت می‌کنند که عدد حقیقی $\sqrt{۲}$ کوچک‌ترین کران بالای مجموعه‌ی $A=\{q \in Q : q>۰ ,\ q^۲<۲\}$ در $\mathbb{R}$ است.

همین‌طور برای $r=\frac{m}{n} \in Q$ ، $(n \in \mathbb{N})$ و $a \geq ۰$ تعریف می‌کنیم :

$$a^r=(\sqrt[n]{a})^m$$

۱ــ۲ــ آشنایی با چند نماد

اگر به عبارتی مانند $x \geq ۲$ برخورد کنیم و x را یک عدد حقیقی دلخواه بگیریم، آن‌گاه این عبارت برای برخی از xها درست و برای برخی از xها نادرست است. ولی عبارتِ $x^۲ \geq ۰$ ، برای هر عدد حقیقی درست است. برای بیان مطلب اخیر از نماد $\forall$ (بخوانید «برای هر») می‌توانیم استفاده کنیم :

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^۲ \geq ۰$$

یعنی برای هر عدد حقیقی x داریم $x^۲ \geq ۰$.

حال اگر عبارتِ $x^۲=۲$ را درنظر بگیریم، دو عدد حقیقی $(\pm\sqrt{۲})$ وجود دارند که در این عبارت صدق می‌کنند. برای بیان وجود دارد از نماد $\exists$ استفاده می‌کنیم :

$$\exists x \in \mathbb{R}, x^۲=۲$$

یعنی حداقل یک عدد حقیقیِ x$(x=\sqrt{۲})$ وجود دارد که $x^۲=۲$. برای **وجود نداشتن** نیز از نماد$\nexists$ استفاده می‌کنیم ؛ مثلاً عبارتِ

$$\nexists x \in \mathbb{R}, x^۲=-۲$$

خوانده می‌شود هیچ عددی مانند x در $\mathbb{R}$ وجود ندارد که توان دومِ آن عددِ ۲– باشد.

عبارت «اگر $x,y \in \mathbb{R}^+$ ، آن‌گاه $x+y \in \mathbb{R}^+$» نیز گاهی به‌صورتِ

$$x,y \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow x+y \in \mathbb{R}^+$$

نوشته می‌شود و معنی آن عبارت است از این‌که اگر اعدادِ حقیقیِ مثبتِ x و y را با هم جمع کنیم حاصل آن نیز یک عدد حقیقی مثبت است. این عبارت موقعی به‌کار می‌رود که قسمت اولِ عبارت، قسمت دوم آن را نتیجه دهد.

علاوه بر آن عبارت «$a+b=a+c$ اگر و تنها اگر $b=c$» نیز گاهی به‌صورتِ

$$a+b=a+c \Leftrightarrow b=c$$

نوشته می‌شود و معنی آن این است که این دو عبارت **با هم معادل یا هم‌ارزند**. یعنی از هریک دیگری را می‌توان نتیجه گرفت.

۱ــ۳ــ قدرمطلق

در نمایش هندسی اعداد حقیقی، فاصله‌ی نقطه‌ی متناظر با عدد a روی محور تا مبدأ مختصات اهمیت فراوان دارد، این مقدار را **قدرمطلق** a می‌نامند.

تعریف: برای هر عدد حقیقی a، قدرمطلق a را چنین تعریف می‌کنیم :

$$|a|=\begin{cases} a & a \geq ۰ \\ -a & a < ۰ \end{cases}$$

برای مثال، $|۲/۳| = ۲/۳$ و $|-۱/۴| = ۱/۴$ است. می‌توان ثابت کرد که $|a| = \max\{a,-a\}$.

واضح است که برای هر عدد حقیقی a، $-|a| \leq a \leq |a|$. به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که اگر $a \geq ۰$ ، آن‌گاه $|x| \leq a$ ، اگر و تنها اگر $-a \leq x \leq a$.

به‌ازای $a > ۰$ ، نمایش هندسی مجموعه‌ی نقاط x، که $|x| \leq a$ عبارت است از :

تعریف: اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، منظور از **فاصله‌ی** a تا b، عدد $|a-b|$ است.

برخی از ویژگی‌های قدرمطلق (نامساوی مثلث)

۱ــ برای اعداد حقیقی a و b، داریم $|a+b| \leq |a|+|b|$.

۲ــ $|a| = ۰$ اگر و تنها اگر $a = ۰$.

۳ــ $|a-b| = |b-a|$.

۴ـ $|ab| = |a||b|$.

۵ـ اگر $b \neq ۰$ ، آن‌گاه $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$.

۶ـ $|a-b| \leq |a|+|b|$.

۷ـ $|a|^۲ = a^۲$.

۸ـ $|a| = \sqrt{a^۲}$.

۹ـ $\left||a|-|b|\right| \leq |a-b|$.

در پایان این فصل، برخی از زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$ را که اهمیت خاص دارند تعریف می‌کنیم.

تعریف: الف) اگر $a,b \in \mathbb{R}$ و $a \leq b$ ، مجموعه‌ی

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a < x < b\}$$

(یعنی مجموعه‌ی نقاط حقیقی بین a و b) را **فاصله‌ی باز** یا **بازه‌ی باز** می‌نامند و آن را با $]a,b[$ هم نمایش می‌دهند.

نمایش هندسی آن به‌صورت زیر است :

دقت کنید که اگر $a=b$ ، آن‌گاه $(a,b)=\varnothing$.

ب) اگر $a,b \in \mathbb{R}$ و $a \leq b$ ، مجموعه‌ی

$$\begin{aligned}[a,b] &= \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x \leq b\} \\ &= \{a\} \cup (a,b) \cup \{b\}\end{aligned}$$

(یعنی مجموعه‌ی نقاط حقیقی بین a و b به اضافه‌ی خود a و b) را **فاصله‌ی بسته** یا **بازه‌ی بسته** $[a,b]$ می‌نامند. نمایش هندسی آن عبارت است از :

دقت کنید که اگر $a=b$ ، آن‌گاه $[a,b]=\{a\}$.

بازه‌های دیگری مانند

$$[a,b[\ = [a,b) = \{x \in \mathbb{R} \ : \ a \leq x < b\}$$

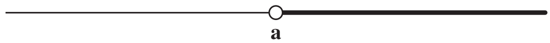
و

$$]a,b] = (a,b] = \{x \in \mathbb{R} \; : \; a < x \le b\}$$

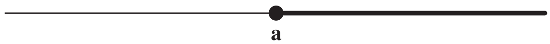
هم قابل تعریف‌اند. این نوع بازه‌ها را نیم‌باز می‌خوانیم.

بازه‌های بی‌کران زیر نیز در مباحث مختلف حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌کار می‌روند. تعریف این بازه‌ها همراه با نمایش‌های هندسی آن‌ها به شرح زیرند : برای $a \in \mathbb{R}$ [1]،

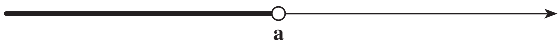
$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x > a\}$$



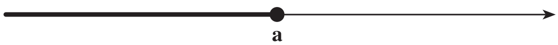
$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x \ge a\}$$



$$(-\infty,a) = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x < a\}$$



$$(-\infty,a] = \{x \in \mathbb{R} \; : \; x \le a\}$$



$$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$$

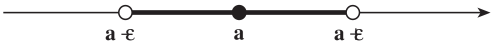
تعریف : همسایگیِ بازِ عدد حقیقی a عبارت است از بازه‌ی بازی که شامل عدد a باشد. به عبارت دیگر، بازه‌ی بازِ (c,d) را همسایگی a می‌نامند هرگاه $a \in (c,d)$.

تعریف : همسایگی متقارن عدد حقیقی a عبارت است از بازه‌ی بازِ

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$$

۱ــ گاهی به‌جای نماد $+\infty$ ، از نماد ∞ استفاده می‌شود.

که در آن $\varepsilon > ۰$. این بازه را همسایگی متقارن a به شعاع ε و گاهی ε همسایگیِ a می‌نامند.



بازه‌های به‌صورت $(a, a+\varepsilon)$ را همسایگی راست a و بازه‌های به صورت $(a-\varepsilon, a)$ را همسایگی چپ a می‌نامند.

مثلاً $(۰, ۳)$ یک همسایگی باز عدد ۲ است، هم‌چنین $(۱, ۳)$ و $\left(\frac{۳}{۲}, \frac{۵}{۲}\right)$ همسایگی‌های متقارن ۲ اند، ولی $(۲, ۳)$ یک همسایگی برای ۲ نیست.

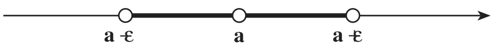
همسایگی متقارن a به شعاع ε را به شکل زیر هم می‌توان نوشت :

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \varepsilon\}$$

حال اگر عدد a را از این مجموعه برداریم، یک همسایگی محذوف متقارن برای a به‌دست می‌آید :

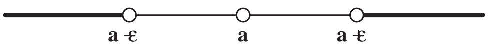
$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) - \{a\} = \{x \in \mathbb{R} : ۰ < |x-a| < \varepsilon\}$$

که آن را همسایگی محذوف متقارن a به شعاع ε نیز می‌نامند.



(دقت کنید که همسایگی محذوف یک نقطه، یک بازه نیست، بلکه اجتماع دو بازه است.)

نمایش مجموعه‌ی $\mathbb{R} - \{x : |x-a| \le \varepsilon\} = \{x \in \mathbb{R} : |x-a| > \varepsilon\}$ نیز به شکل زیر است :



تمرین‌ها

۱ــ ثابت کنید که معکوس یک عدد مثبت، عددی مثبت و معکوس یک عدد منفی، عددی منفی است.

۲ــ اگر $۰ < a < b$ ، ثابت کنید که $۰ < b^{-۱} < a^{-۱}$.

۳ــ اگر $a \le b$ ، $b \le c$ و $a = c$ ، ثابت کنید که $b = c$.

۴ــ به‌ازای $a > ۰$ ، ثابت کنید که $-a < x < a$ اگر و تنها اگر $x^۲ < a^۲$.

۵ــ اگر $0 < a < 1$، ثابت کنید که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $0 < a^n \le a$.

۶ــ اگر برای هر عدد حقیقیِ $\varepsilon > 0$ داشته باشیم $0 \le x < \varepsilon$، ثابت کنید که $x = 0$.

۷ــ کدام‌یک از مجموعه‌های زیر یک بازه است :

الف) $\{x : 0 < |x-1| < 2\}$

ب) $\{x : 3 < |x-2|\}$

ج) $\{x : |x-2| < 3\}$

د) $\{x : x \notin \mathbb{Z}\}$

۸ــ نامساوی‌های زیر را به‌صورت $|x-\alpha| < \beta$ بنویسید :

الف) $2 < x < 4$.

ب) $-5 < x < -3$.

ج) $-3 < x < 2$.

۹ــ ثابت کنید که $A \subset \mathbb{R}$ کراندار است اگر و فقط اگر عدد حقیقی مثبت K موجود باشد که به‌ازای هر $x \in A$ داشته باشیم $|x| \le K$.

۱۰ــ ثابت کنید :

الف) اشتراک دو همسایگی یک عدد، یک همسایگی آن عدد است.

ب) اشتراک دو همسایگی متقارن یک عدد، یک همسایگی متقارنِ آن عدد است.

۱۱ــ فرض کنیم a و b دو عدد حقیقی باشند که $a < b$. ثابت کنید که بازه‌های (a,b) ، $[a,b)$ ، $(a,b]$ و $[a,b]$ کراندارند.

تابع

مفهوم تابع در ادامه‌ی توسعه‌ی ریاضیات به‌دست آمد. ریاضی‌دانان از عهد باستان تا قرون وسطی ایده‌های مبهمی از مفهوم تابع داشته‌اند اما از زمانی که حساب دیفرانسیل و انتگرال در اواخر قرن هفدهم توسعه یافت، نیاز به بیان دقیق تعریف تابع احساس شد. «تابع» از لغت لاتین Perform به مفهوم «عمل» گرفته شده و ابتدا توسط لایبنیتس به‌کار رفته است. اویلر ریاضی‌دان سوئیسیِ اوایل قرن هجدهم، علامت $f(x)$ را به‌عنوان مقدار تابع در نقطه‌ی x اختیار کرد و سرانجام در اواسط قرن نوزدهم تعریف دقیق آن ظاهر شد. تعریف زیر از تابع توسط دیریکله ارائه گردیده است :

تعریف: تابع f عبارت است از یک دامنه یا حوزه‌ی تعریف D_f و یک دستورالعمل یا ضابطه، به‌طوری که برای هر عضو دامنه، یکی و فقط یک مقدار ارائه شود.

اگر حوزه‌ی مقادیر یا برد تابع را با R_f نمایش دهیم، داریم :

$$R_f = \{f(x) : x \in D_f\}$$

باید دقت نمود که گاهی تابع را با $f(x)$ هم نمایش می‌دهند ولی در حقیقت $f(x)$، مقدار تابع در نقطه‌ی x است. مثلاً اگر می‌گوییم تابع $x^2 + 1$، بدون آن‌که دامنه‌اش را تعیین کنیم، یعنی

$$D_f = \mathbb{R}$$

و برای هر $x \in \mathbb{R}$ ، $f(x) = x^2 + 1$. می‌توان تابع را به‌عنوان یک رابطه نیز درنظر گرفت و به این صورت نمایش داد :

$$f = \{(x, f(x)) : x \in A\}$$

که در آن اگر $x_1 = x_2$ ، آن‌گاه $f(x_1) = f(x_2)$ و $D_f = A$.

فصل دوم

دنباله‌ها و سری‌ها

در این فصل ابتدا دنباله‌های حقیقی و حدّ آن‌ها را معرفی کرده و در مورد قضیه‌های مربوطه بحث می‌کنیم. سپس سری‌های اعداد حقیقی را تعریف و در انتها چند نکته و قضیه‌ی مقدماتی در مورد سری‌ها را بیان می‌کنیم.

۲ـ۱ـ دنباله‌ها

به مجموعه‌ی

$$S=\left\{۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\cdots\right\}$$

$$=\left\{\frac{۱}{n}:n\in\mathbb{N}\right\}$$

از اعداد گویا توجه کنید، این مجموعه را می‌توان برد تابعی با دامنه‌ی اعداد طبیعی درنظر گرفت که تصویر عدد طبیعی n، عدد گویای $\frac{۱}{n}$ است.

یا مجموعه‌ی

$$T=\left\{\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\cdots\right\}$$

$$=\left\{\frac{۱}{۲^n}:n\in\mathbb{N}\right\}$$

برد تابع دیگری با دامنه‌ی اعداد طبیعی را مشخص می‌کند. مجموعه‌های S و T را به‌صورت جدول‌های

زیر می‌توان نمایش داد :

n	۱	۲	۳	۴	...
$\frac{۱}{n}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$	...

و

n	۱	۲	۳	۴	...
$\frac{۱}{۲^n}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۱۶}$	...

در هر دو مثال بالا، به هر عدد طبیعی، یک عدد حقیقی نسبت داده‌ایم، در حقیقت توابعی را تعریف کرده‌ایم که دامنه‌ی آن‌ها اعداد طبیعی و برد آن‌ها زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی است که دنباله نامیده می‌شوند. به‌طور کلی تعریف می‌کنیم :

تعریف: هر تابع a که دامنه‌اش مجموعه‌ی اعداد طبیعی و برد آن زیرمجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد $(a:\mathbb{N}\to\mathbb{R})$، یک **دنباله‌ی نامتناهی** از اعداد حقیقی نامیده می‌شود.

معمولاً $a(n)$ را با a_n نمایش داده و آن را **جمله‌ی عمومی** دنباله می‌نامند. دنباله را معمولاً با جمله‌ی عمومی‌اش و به‌صورت $\{a_n\}$ یا مقادیرش

$$a_۱,a_۲,a_۳,\ldots,a_n,\ldots$$

نمایش می‌دهند.

مثال ۱: چند دنباله دیگر را در زیر مشاهده می‌کنید :

الف) $\frac{۱}{۲},\frac{۲}{۳},\frac{۳}{۴},\frac{۴}{۵},\ldots,\frac{n}{n+۱},\ldots$

ب) $۱,۱,۱,۱,۱,\ldots,۱,\ldots$

ج) $-۱,۱,-۱,۱,-۱,\ldots,(-۱)^n,\ldots$

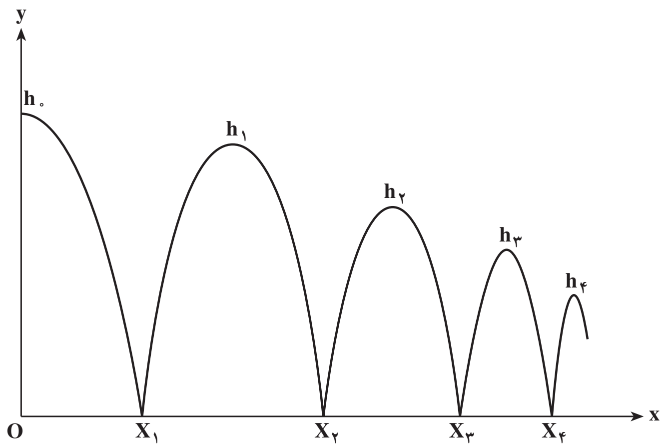
د) $۱,۰/۱,۰/۰۱,۰/۰۰۱,\ldots,(۰/۱)^{n-۱},\ldots$

هـ) $۱,-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},-\frac{۱}{۴},\ldots,\frac{(-۱)^{n+۱}}{n},\ldots$

مثال ۲: اگر گلوله‌ای فلزی را در فاصله‌ی h، از یک صفحه‌ی افقی، با سرعت اولیه‌ی افقی

v_0 پرتاب کنیم، بر اثر نیروی جاذبه، این گلوله از امتداد افقی منحرف شده پس از طی قسمتی از یک مسیر سهمی‌گون به صفحه برخورد می‌کند. مسیر گلوله زاویه‌ای با خط قائم دارد، و از این‌رو پس از برخورد با صفحه، با زاویه‌ای نسبت به خط قائم (شبیه یک حرکت پرتابی جدید) به بالا برمی‌گردد و با طی یک مسیر سهمی‌گون دیگر مجدداً به صفحه برخورد می‌کند و باز به بالا برمی‌گردد. گرچه این عمل باید بی‌نهایت بار تکرار شود، لیکن عملاً بر اثر انرژی‌ای که گلوله هنگام برخورد به صفحه از دست می‌دهد، سرعت اولیه‌ی آن پس از هر برخورد کمتر می‌شود و درنتیجه نقاط برخورد به‌تدریج به یکدیگر نزدیک می‌شوند.

اگر خطِ افقیِ گذرنده بر نقاط برخورد گلوله با صفحه را محور x و خط قائم گذرنده بر نقطه‌ی پرتاب را محور y بگیریم، محل تلاقی خط قائم با صفحه، مبدأ مختصات خواهد بود. اگر از پهلو به این صحنه نگاه کنیم مسیر گلوله مطابق شکل زیر است :



در این‌جا دو دنباله‌ی $\{x_n\}$، که x_n طول nامین نقطه‌ی برخورد گلوله با صفحه است و $\{h_n\}$، که h_n بیشترین ارتفاع گلوله در nامین بازگشت است، به‌دست می‌آید.

نکته: مفهوم دنباله از آن‌چه در تعریف بیان شد، کلی‌تر است. برای مثال اگر دامنه‌ی تابع a زیرمجموعه‌ای متناهی از $\mathbb{N}$ باشد، دنباله را متناهی می‌نامند، مانند دنباله‌های

$$a_1, a_2, \ldots, a_{10}$$

$$2, \frac{3}{4}, \frac{9}{10}$$

یا دامنه‌ی تابع a می‌تواند هر زیرمجموعه‌ی نامتناهی از $\mathbb{Z}$ باشد، مانند دنباله‌های

$$a_{-۲}, a_{-۱}, a_{۰}, a_{۱}, a_{۲}, \ldots$$

و

$$a_{۱}, a_{۳}, a_{۵}, a_{۷}, \ldots$$

البته در این‌جا می‌توان با یک تغییر در نام‌گذاری به تعریف اصلی رسید.

هم‌چنین برد دنباله می‌تواند زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ای دلخواه باشد، مانند دنباله‌ی $\{I_n\}$ که I_n بازه‌ی بسته‌ی $\left[۲-\frac{۱}{n}, ۳\right]$ است و آن را دنباله‌ای از بازه‌ها می‌نامند و یا دنباله‌ی $\{A_n\}$ که A_n یک پیشامد است و آن را دنباله‌ای از پیشامدها می‌نامند.

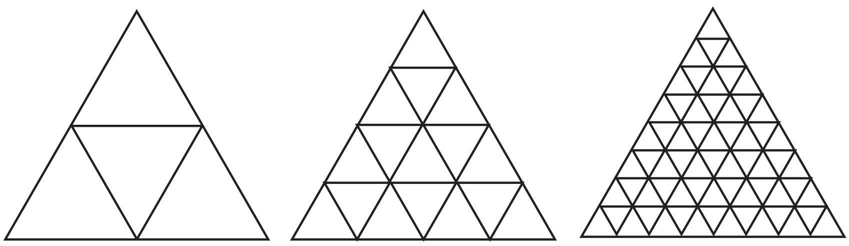
در این کتاب منظور از دنباله، همان دنباله‌ی نامتناهی از اعداد حقیقی است.

نمایش دنباله

جمله‌های دنباله را می‌توان روی یک محور و به شکل زیر نمایش داد :

۲ــ۲ــ همگرایی

مثال ۳: اگر در یک مثلث متساوی‌الاضلاع که طول ضلع آن ۲ است، در اولین مرحله وسط هر ضلع را به وسط سایر اضلاع وصل کنیم، ۴ مثلث متساوی‌الاضلاع جدید ساخته می‌شود که طول ضلع هریک نصف طول ضلع مثلث اولیه، یعنی ۱، است. در دومین مرحله نیز همین کار را انجام می‌دهیم ؛ ۱۶ مثلث با طول ضلع $\frac{۱}{۲}$ به‌وجود می‌آیند و این کار را ادامه می‌دهیم.



مشاهده می‌شود که محیط این مثلث‌ها یک دنباله به‌صورت

$$۳,\frac{۳}{۲},\frac{۳}{۴},\frac{۳}{۸},\frac{۳}{۱۶},\ldots,\frac{۳}{۲^{n-۱}},\ldots$$

و مساحت این مثلث‌ها دنباله‌ای به‌صورت

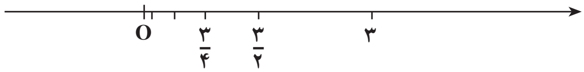
$$\frac{\sqrt{۳}}{۴},\frac{\sqrt{۳}}{۱۶},\frac{\sqrt{۳}}{۶۴},\ldots,\frac{\sqrt{۳}}{۴^n},\ldots$$

و تعداد مثلث‌ها نیز دنباله‌ی

$$۴,۱۶,۶۴,\ldots,۴^n,\ldots$$

را ایجاد می‌کند.

نمایش دنباله‌ی اول را روی محور مشاهده می‌کنید :

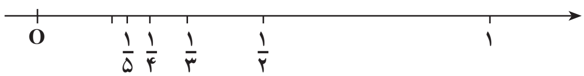


همان‌گونه که مشاهده می‌کنید، با افزایش n، محیط مثلث‌ها به سمت صفر میل می‌کنند. آیا هریک از دنباله‌های مثال ۱، به سمت عدد معینی میل می‌کنند؟

حال مجدداً دنباله‌ی

$$۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\ldots,\frac{۱}{n},\ldots,$$

را درنظر بگیرید، نمایش این دنباله روی محور به شکل زیر است :



هر اندازه که n را بزرگ اختیار کنیم، مقدار $\frac{۱}{n}$ کوچک‌تر می‌شود و درواقع به سمت صفر میل می‌کند. اصطلاحاً می‌گوییم دنباله به صفر همگراست و می‌نویسیم :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}=۰$$

مقصود از نوشتن حد این است که «هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم $\frac{۱}{n}$ را به صفر نزدیک

کنیم ؛ برای این کار کافی است که n را به اندازه‌ی کافی بزرگ اختیار کنیم».

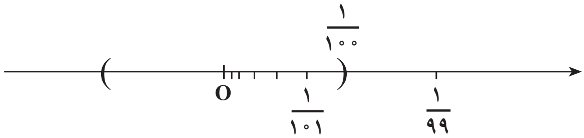
عبارت فوق را قدری بیشتر مورد بررسی قرار می‌دهیم و آن را به زبان ریاضی بیان می‌کنیم :

برای این‌که «هر اندازه که بخواهیم بتوانیم $\frac{۱}{n}$ را به صفر نزدیک کنیم» کافی است فاصله‌ی $\frac{۱}{n}$ از ۰ از هر عدد دلخواهی کوچک‌تر شود، «به این وسیله که n را به اندازه‌ی کافی بزرگ انتخاب کنیم» ؛ یعنی این‌که n را از یک عدد طبیعی M که به‌طور مناسب انتخاب شده است بزرگ‌تر بگیریم.

مثلاً اگر بخواهیم $\frac{۱}{n}$ به اندازه‌ی ۰/۰۱ به صفر نزدیک شود، یعنی

$$\frac{۱}{n} < ۰/۰۱$$

کافی است $n > ۱۰۰$ اختیار شود. از روی شکل



نتیجه می‌شود که فاصله‌ی هر جمله‌ی بعد از جمله‌ی صدم تا ۰، کمتر از ۰/۰۱ است. حال اگر به‌جای ۰/۰۱ هر عدد دلخواه دیگری درنظر بگیریم، این کار به‌طور مشابه میسر است. به تعریف زیر توجه کنید :

تعریف: فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله و L یک عدد حقیقی باشد، اگر برای هر عدد حقیقی و مثبت ε ، عدد طبیعی M وجود داشته باشد که برای هر n :

$$n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$$

به عبارت دیگر

$$\forall \varepsilon > ۰, \exists M \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N} (n \geq M \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon)$$

در این صورت می‌گوییم $\{a_n\}$ به عدد L همگراست و L **حدّ** $\{a_n\}$ است و می‌نویسیم

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

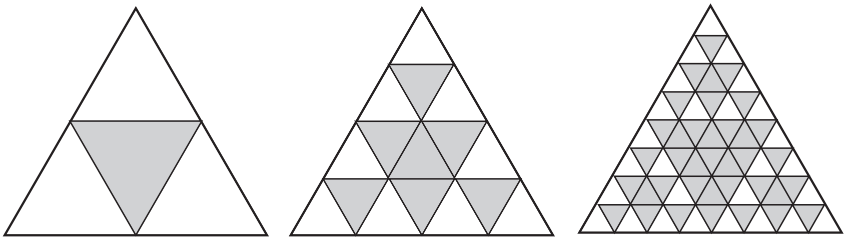
توجه کنید که در این تعریف، M معمولاً به ε بستگی دارد. اگر دنباله حد داشته باشد، آن را **همگرا** و در غیر این‌صورت آن را **واگرا** می‌نامند.

در ضمن، لزومی ندارد حدّ دنباله، یعنی L، یکی از جملات دنباله باشد.

مثال ۴: مثال ۳ را به طریق زیر تغییر می‌دهیم :

در مرحله‌ی اول یکی از ۴ مثلث حاصل را رنگ می‌کنیم، مطابق شکل صفحه‌ی بعد، در مرحله‌ی دوم یکی از ۴ مثلث تولید شده از هریک از مثلث‌های رنگ نشده را رنگ می‌کنیم و این کار

را ادامه می‌دهیم. در نهایت چه سطحی از مثلث رنگ شده است؟



اگر مجموع مساحت مثلث‌های رنگ شده را در هر مرحله به‌ترتیب با $S_۱$ ، $S_۲$ ، ... نمایش دهیم، داریم :

$$S_۱ = \frac{\sqrt{۳}}{۴}$$

$$S_۲ = \frac{۷\sqrt{۳}}{۱۶}$$

$$S_۳ = \frac{۳۷\sqrt{۳}}{۶۴}$$

$$S_۴ = \frac{۱۷۵}{۲۵۶}\sqrt{۳}$$

$$S_۵ = \frac{۷۸۱}{۱۰۲۴}\sqrt{۳}$$

$$\vdots$$

آیا می‌توانید بگویید دنباله‌ی فوق همگراست یا نه؟ و اگر همگراست حدّ آن چه‌قدر است؟ بعداً پاسخ را خواهید دید. اکنون به چند مثال دیگر توجه کنید :

مثال ۵: برای دنباله‌ی $\left\{\frac{(-۱)^n}{n}\right\}$ مقدار حد برابر صفر است، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(-۱)^n}{n} = ۰$$

زیرا برای هر $\varepsilon > ۰$ کافیست $M > \frac{۱}{\varepsilon}$ اختیار شود، آن‌گاه برای $n \geq M$ ،

$$\left|\frac{(-۱)^n}{n} - ۰\right| = \frac{۱}{n} \leq \frac{۱}{M} < \varepsilon$$

مثال ۶: به‌طور طبیعی، ارزش پول (قدرت خرید واحد پول) هر کشور پس از گذشت یک سال به‌دلیل تورم کاهش می‌یابد. اگر در پایان هر سال ارزش پول، ۹۰ درصد ارزش آن در ابتدای همان سال باشد، ارزش یک تومان در مدت زمان طولانی چه‌قدر خواهد بود؟

اگر a_n ارزش یک تومان در پایان سال nاُم باشد، $a_n = (۰/۹)^n$. می‌توان برای nهای مختلف جدولی به شکل زیر ساخت :

n	۱	۲	۵	۱۰	۲۰	۵۰
a_n	۰/۹	۰/۸۱	۰/۵۹۰۵	۰/۳۴۸۷	۰/۱۲۱۶	۰/۰۰۵۲

از جدول فوق حدس می‌زنیم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$$

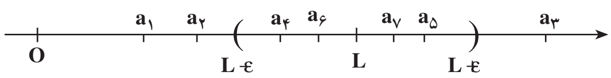
که می‌توان آن را اثبات کرد : به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ ، برای آن‌که

$$\left|(۰/۹)^n - ۰\right| = (۰/۹)^n < \varepsilon$$

کافیست $n \geq M > \dfrac{\log \varepsilon}{\log ۰/۹}$. (log در هر مبنایی می‌تواند باشد.)

نمایش همگرایی

همگرایی دنباله‌ی $\{a_n\}$ به عدد L را می‌توان در شکل زیر مشاهده کرد :



و می‌توان این‌گونه بیان کرد که جملات دنباله‌ی $\{a_n\}$ از M به بعد همگی داخل همسایگی متقارن L به شعاع ε قرار دارند.

قضیه‌ی ۱: اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ همگرا باشد، آن‌گاه حدّ آن یکتا است.

اثبات: فرض کنید دنباله دارای دو حدّ $L_۱$ و $L_۲$ باشد. فرض می‌کنیم $\varepsilon > ۰$ داده شده باشد، چون $\lim_{n\to\infty} a_n = L_۱$ ، عدد طبیعی $M_۱$ وجود دارد که برای هر n

$$n \geq M_۱ \Rightarrow |a_n - L_۱| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

و چون $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L_۲$ ، عدد طبیعی $M_۲$ وجود دارد که برای هر n

$$n \geq M_۲ \Rightarrow |a_n - L_۲| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

پس برای هر $n \geq M$ که $M = \max\{M_۱, M_۲\}$ داریم :

$$|L_۱ - L_۲| = |L_۱ - a_n + a_n - L_۲| \leq |a_n - L_۱| + |a_n - L_۲|$$

$$< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

یعنی $\varepsilon > |L_۱ - L_۲| \geq ۰$، چون ε دلخواه است، پس $|L_۱ - L_۲| = ۰$ و $L_۲ = L_۱$. بنابراین دنباله همگرا تنها یک حد دارد.

قضیه‌ی ۲: اگر در دنباله $\{a_n\}$ ، $a_n \geq ۰$ و $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ ، آن‌گاه $L \geq ۰$.

مثال ۷: دنباله‌ی $\{n^۲\}$ واگراست، زیرا جمله‌های $\{n^۲\}$ مرتباً افزایش می‌یابند و نمی‌توانند در ε همسایگی هیچ عدد حقیقی قرار گیرند. زیرا اگر فرض کنیم دنباله همگرا و حد آن L باشد، برای $\varepsilon = ۱$ ، باید بتوانیم عدد طبیعی M را بیابیم که برای هر n

$$n \geq M \Rightarrow |n^۲ - L| < ۱$$

در نتیجه

$$n \geq M \Rightarrow L - ۱ < n^۲ < L + ۱$$

و این غیرممکن است، چون مجموعه‌ی اعداد طبیعی کراندار نیست.

مثال ۸: نشان می‌دهیم دنباله $\{(-۱)^n\}$ نیز واگراست. گرچه رفتار این دنباله با دنباله‌ی مثال قبل متفاوت است ولی در این‌جا نیز جملات دنباله نمی‌توانند در ε همسایگی هیچ عدد حقیقی قرار گیرند. اگر فرض کنیم که دنباله همگرا و حدّ آن برابر L باشد، برای $\varepsilon = \frac{۱}{۴}$ باید عدد طبیعی M را بیابیم که برای هر n

$$n \geq M \Rightarrow |(-۱)^n - L| < \frac{۱}{۴}$$

ولی اگر $n \geq M$ و زوج باشد، داریم :

$$|۱ - L| < \frac{۱}{۴}$$

و اگر $n \geq M$ و فرد باشد، داریم

$$|-۱ - L| < \frac{۱}{۴}$$

ولی با توجه به نامساوی مثلث هیچ عدد حقیقی L همزمان نمی‌تواند در دو رابطه‌ی فوق صدق کند (چرا؟)

تمرین‌ها

۱ــ با استفاده از تعریف حدّ دنباله‌ها ثابت کنید :

الف) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱}{n^۲} = ۰$

ب) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۴n+۱}{۲n-۱} = ۲$

ج) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۲n^۲}{n^۲+۱} = ۲$

د) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۲^{n-۱}+(-۱)^n}{۲^n} = \frac{۱}{۲}$

هـ) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{۱+(-۱)^n}{n^۲} = ۰$

۲ــ در دنباله‌ی $\left\{\frac{۴n+۱}{۲n-۵}\right\}$ برای چه مقادیر n، $۱/۹۹۹ < \frac{۴n+۱}{۲n-۵} < ۲/۰۰۱$؟

۳ــ نشان دهید دنباله $\left\{\frac{۲+۳n}{۲+n}\right\}$ به ۲ همگرا نیست.

۴ــ ثابت کنید دنباله‌های زیر واگرا هستند.

الف) $\{n\}$

ب) $\{\sqrt{n}-۱\}$

۵ــ دنباله‌ای که همه‌ی جملات آن ثابت و برابر c باشد را دنباله‌ی ثابت $\{c\}$ می‌نامند. نشان دهید که این دنباله همگرا و حدّ آن c است.

۶ــ ثابت کنید دنباله‌ی $\{c^n\}$ همگراست اگر $|c|<۱$ و واگراست اگر $|c|>۱$. برای $|c|=۱$ چه می‌توان گفت؟

۷ــ چند جمله‌ی اول هریک از دنباله‌های زیر را نوشته و ثابت کنید که این دنباله‌ها واگرا هستند.

الف) $\{۱+(-۱)^n\}$

ب) $\{n^۲\}$

۸ــ ثابت کنید اگر p عددی گویا و مثبت باشد، آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^p} = ۰$$

۹ــ اگر برای دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و $\{c_n\}$، داشته باشیم :

$$a_n \le c_n \le b_n$$

و $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ ، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.

۱۰ــ ثابت کنید :

الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin n}{n} = ۰$ ب) $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n^۲ + ۴} = ۰$

ج) $\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+۱} - \sqrt{n}) = ۰$ د) $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{n!} = ۰$

۱۱ــ اگر جملات دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ برای $n \ge M$ ، مساوی بوده و دنباله $\{a_n\}$ به L همگرا باشد، آن‌گاه دنباله $\{b_n\}$ نیز به L همگراست.

۱۲ــ می‌دانیم حذف (یا اضافه) کردن تعداد متناهی جمله تغییری در وضعیت همگرایی و یا حدّ دنباله ایجاد نمی‌کند. با یک مثال نشان دهید شرط متناهی بودن الزامی است.

۲ــ۳ــ اعمال اصلی روی دنباله‌ها

می‌توان با استفاده از دو دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و چهار عمل اصلی دنباله‌های جدیدی ساخت که عبارتند از :

$$\{a_n b_n\} ,\{a_n - b_n\} ,\{a_n + b_n\}$$

و $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ درصورتی که $b_n \neq ۰$.

مثال ۹: دنباله‌ی ثابت $\{۲\}$ و نیز دنباله $\left\{\frac{۱}{n}\right\}$ را درنظر بگیرید. با توجه به نکات فوق دنباله‌های زیر ساخته می‌شوند :

$$\{۲n\} ,\left\{\frac{۲}{n}\right\},\left\{۲-\frac{۱}{n}\right\},\left\{۲+\frac{۱}{n}\right\}$$

سؤال طبیعی در این مرحله این است که چه ارتباطی بین همگرایی دنباله‌ی $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ و

دنباله‌های فوق وجود دارد؟ در این مورد می‌توان قضیه‌های زیر را بیان کرد :

قضیه‌ی ۳: اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = L_۱$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = L_۲$ ، آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L_۱ + L_۲$$

اثبات: برای هر $\varepsilon > ۰$ داریم :

$$\exists M_۱ \in \mathbb{N} \ni n \geq M_۱ \Rightarrow |a_n - L_۱| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

$$\exists M_۲ \in \mathbb{N} \ni n \geq M_۲ \Rightarrow |b_n - L_۲| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

پس اگر $M = \max\{M_۱, M_۲\}$ ، به‌ازای $n \geq M$ دو نامساوی اخیر برقرار است و

$$|(a_n + b_n) - (L_۱ + L_۲)| \leq |a_n - L_۱| + |b_n - L_۲|$$

$$< \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

در این‌جا چند قضیه دیگر در مورد حد دنباله‌ها را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ۴: اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = L_۱$ و $\lim_{n\to\infty} b_n = L_۲$ ، آن‌گاه

الف) $\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = L_۱ - L_۲$

ب) $\lim_{n\to\infty} (a_n b_n) = L_۱ L_۲$

قضیه‌ی ۵: اگر $\lim_{n\to\infty} a_n = L_۱$ ، $\lim_{n\to\infty} b_n = L_۲$ ، و برای هر n، $b_n \neq ۰$ و $L_۲ \neq ۰$ باشد، آن‌گاه

الف) $\lim_{n\to\infty} \frac{۱}{b_n} = \frac{۱}{L_۲}$

ب) $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_۱}{L_۲}$

به کمک دنباله‌ها می‌توانیم یکی از ویژگی‌های اعداد حقیقی را که در رابطه با پیوستگی توابع کاربرد فراوان دارد، اثبات کنیم :

قضیه‌ی ۶: هر عدد حقیقی r، حد یک دنباله از اعداد گویا و حد یک دنباله از اعداد اصم است. یعنی یک دنباله $\{x_n\}$ وجود دارد که $x_n \in Q$ و $\lim_{n\to\infty} x_n = r$ و همین‌طور یک دنباله $\{y_n\}$ وجود دارد که $y_n \in \mathbb{R} - Q$ و $\lim_{n\to\infty} y_n = r$.

اثبات: بنابر فرض $r \in \mathbb{R}$ و برای هر $n \in \mathbb{N}$، اعداد حقیقی r و $r - \frac{1}{n}$ را درنظر می‌گیریم. بنابر ویژگی اعداد حقیقی که بین هر دو عدد حقیقی یک عدد گویا وجود دارد پس به‌ازای هر n، یک عدد گویای x_n وجود دارد که $r - \frac{1}{n} < x_n < r$.

حال اگر $n \to \infty$ چون طرفین نامساوی فوق هر دو به r میل می‌کنند، پس $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = r$. به طریق مشابه می‌دانیم بین هر دو عدد حقیقی یک عدد اصم نیز وجود دارد، پس برای هر n یک عدد اصم y_n وجو دارد که $r - \frac{1}{n} < y_n < r$، مجدداً نتیجه می‌شود که $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = r$.

۲ــ۴ــ دنباله‌های کراندار و یکنوا

تعریف: اگر برای دنباله‌ی $\{a_n\}$، عدد حقیقی $K > 0$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n| \leq K$$

دنباله را **کراندار**، و در غیر این‌صورت آن را **بی‌کران** می‌نامند[1].

مثال ۱۰: دنباله‌های $\left\{\frac{1}{n}\right\}$، $\left\{1 + \frac{1}{n^2}\right\}$، $\{2\}$ و $\{(-1)^n\}$ کراندار و دنباله‌های $\{n\}$، $\{1+n^2\}$ و $\{(-1)^n n\}$ بی‌کران هستند.

از نظر هندسی، دنباله‌ی کراندار دنباله‌ای است که برای یک $K > 0$ مناسب کلیه‌ی جملات آن در یک همسایگی صفر به شعاع K قرار گیرند.

تعریف: درصورتی که در دنباله‌ی $\{a_n\}$، برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n \leq a_{n+1}$ دنباله را **صعودی** و اگر برای هر $n \in \mathbb{N}$، $a_n \geq a_{n+1}$ دنباله را نزولی می‌نامند. دنباله‌ی صعودی و یا دنباله‌ی نزولی را **یکنوا** هم می‌نامند.

۱ــ ملاحظه می‌شود که یک دنباله کراندار است اگر و فقط اگر مجموعه‌ی جملات (برد) آن زیر مجموعه‌ی کرانداری از $\mathbb{R}$ باشد.

مثال ۱۱: دنباله‌های $\left\{1-\frac{1}{n}\right\}$ و $\{n^{2}\}$ صعودی، دنباله‌های $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ و $\{-n^{2}\}$ نزولی و دنباله‌های $\{(-1)^{n}\}$ و $\left\{1+\frac{(-1)^{n}}{n}\right\}$ نه صعودی و نه نزولی‌اند. کدام‌یک از دنباله‌های فوق همگراست؟

می‌توان نشان داد در صورتی که دنباله‌ای هم یکنوا و هم کراندار باشد، همگراست. به قضیه زیر که بدون اثبات بیان می‌شود توجه کنید.

قضیه‌ی ۷: هر دنباله‌ی یکنوا و کراندار همگراست.

نکته: معمولاً هنگامی از قضیه‌ی ۶ استفاده می‌شود که هدف تنها نشان دادن همگرایی دنباله است، بدون آن که محاسبه‌ی مقدار حد موردنظر باشد.

مثال ۱۲: نشان می‌دهیم که دنباله‌ی $\left\{\frac{n^{2}}{2^{n}}\right\}$ همگراست.

به چند جمله‌ی اول این دنباله توجه کنید :

$$\frac{1}{2},1,\frac{9}{8},1,\frac{25}{32},\frac{36}{64},\frac{49}{128},\dots$$

برای $n \ge 3$ به‌نظر می‌رسد که $a_n \ge a_{n+1}$، زیرا نامساوی‌های زیر با یکدیگر معادلند :

$$\frac{n^{2}}{2^{n}} \ge \frac{(n+1)^{2}}{2^{n+1}}$$

$$n^{2} \ge \frac{(n+1)^{2}}{2}$$

$$2n^{2} \ge (n+1)^{2}$$

$$n^{2}-2n \ge 1$$

$$n(n-2) \ge 1$$

و آخرین نامساوی نیز به روشنی برای $n \ge 3$ برقرار است. پس دنباله‌ی

$$\frac{9}{8},1,\frac{25}{32},\frac{36}{64},\frac{49}{128},\dots$$

(که از حذف دو جمله‌ی اول دنباله به‌دست می‌آید) نزولی است و چون همه‌ی جملات آن مثبت هستند،

پس بنا بر قضیه‌ی ۷ همگراست. درنتیجه دنباله‌ی اولیه نیز همگراست (چرا؟)

تمرین‌ها

۱ــ حدّ دنباله‌های زیر را با استفاده از قضایای حدّ دنباله‌ها حساب کنید :

الف) $\left\{\frac{1}{n^2}+\frac{2n+1}{n}\right\}$ ب) $\left\{\frac{2n-4}{3-4n}\right\}$

ج) $\left\{(2+\frac{1}{10^n})^2\right\}$ د) $\left\{(\frac{2n-1}{n+2})^3\right\}$

هـ) $\left\{\frac{2+7^n}{5+7^{n-1}}\right\}$

۲ــ دو دنباله با جملات عمومی $a_n=(-1)^n$ و $b_n=(-1)^{n+1}$ مفروض‌اند، تعیین کنید کدام‌یک از دنباله‌های زیر همگرا و کدام‌یک واگراست :

الف) $\{a_n b_n\}$

ب) $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$

ج) $\{a_n-b_n\}$

۳ــ جملات عمومی سه دنباله عبارتند از $a_n=\frac{1}{n^2}$ ، $b_n=2n$ و $c_n=\frac{1-2n^2}{n}$. تعیین کنید کدام‌یک از دنباله‌های زیر همگرا و کدام‌یک واگراست :

الف) $\{a_n+b_n\}$ ب) $\{b_n+c_n\}$

ج) $\{b_n-c_n\}$ د) $\{a_n b_n\}$

هـ) $\{b_n c_n\}$ و) $\{a_n c_n\}$

۴ــ مقدار $\lim_{n\to\infty}(1-(\frac{3}{4})^n)$ را یافته و ارتباط آن را با مثال ۴ بیان کنید.

۵ــ ثابت کنید :

الف) دنباله کراندار هم کران بالا دارد و هم کران پایین.

ب) اگر دنباله‌ی کرانداری همگرا باشد، مقدار حدّ آن بین کران بالا و کران پایین قرار دارد.
۶ــ نشان دهید که هر دنباله‌ی همگرا کراندار است. (و درنتیجه هر دنباله بی‌کران واگراست.)
۷ــ با یک مثال نشان دهید که دنباله‌ی کراندار ممکن است همگرا نباشد.
۸ــ ثابت کنید دنباله‌ی $\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ غیریکنوا، کراندار و همگراست.
۹ــ در مورد کراندار بودن و یکنوا بودن هریک از دنباله‌های زیر بحث کنید :
الف) $\{\sqrt{n}\}$
ب) $\{(-1)^n\sqrt{n}\}$
ج) $\left\{\frac{1}{\sqrt{n}}\right\}$
د) $\left\{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right\}$
کدام‌یک از دنباله‌های فوق همگرایند؟
۱۰ــ فرض می‌کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند که به‌ترتیب به L_1 و L_2 همگرا هستند و به‌ازای هر n، $a_n \le b_n$ ، در این‌صورت $L_1 \le L_2$. (حتی اگر به‌ازای هر n، $a_n < b_n$ ، در این‌صورت $L_1 \le L_2$.)
۱۱ــ اگر در دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ برای هر عدد طبیعی n، $0 \le a_n \le b_n$ و $\{a_n\}$ یکنوا باشد ثابت کنید :
الف) اگر $\{b_n\}$ همگرا باشد، آن‌گاه $\{a_n\}$ نیز همگراست.
ب) اگر $\{a_n\}$ واگرا باشد، آن‌گاه $\{b_n\}$ نیز واگراست.
۱۲ــ نشان دهید اگر برای هر n، $a_n \ge \sqrt{n}$ ، آن‌گاه دنباله $\{a_n\}$ واگراست.
۱۳ــ الف) نشان دهید دنباله‌ی $\{a_n\}$ به L همگراست اگر و فقط اگر دنباله‌ی $\{a_n - L\}$ به صفر همگرا باشد.
ب) اگر دنباله‌ی $\{a_n\}$ کراندار و دنباله‌ی $\{b_n\}$ به صفر همگرا باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_n b_n\}$ نیز به صفر همگراست.

۲ـ۵ـ سری‌ها

در این قسمت ابتدا نماد Σ (بخوانید : سیگما) را معرفی می‌کنیم :

برای نمایش مجموع n عدد $a_۱, a_۲, \cdots, a_n$ ، (یعنی $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$) می‌توان نماد زیر را به‌کار برد :

$$\sum_{k=۱}^{n} a_k$$

«می‌خوانیم مجموع a_k ، k از ۱ تا n». مثلاً

$$\sum_{k=۱}^{۵} ۱۰^{-k} = ۱۰^{-۱} + ۱۰^{-۲} + ۱۰^{-۳} + ۱۰^{-۴} + ۱۰^{-۵}$$
$$= ۰/۱۱۱۱۱$$

و یا

$$\sum_{k=۰}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$= \binom{n}{۰} a^n + \binom{n}{۱} a^{n-۱} b + \cdots + \binom{n}{n-۱} ab^{n-۱} + \binom{n}{n} b^n$$

$$= (a+b)^n$$

با توجه به ویژگی‌های اعداد حقیقی می‌توان به سادگی نشان داد که روابط زیر برقرار است :

$$\sum_{k=۱}^{n} a_k + \sum_{k=۱}^{n} b_k = \sum_{k=۱}^{n} (a_k + b_k)$$

$$\sum_{k=۱}^{n} ca_k = c \sum_{k=۱}^{n} a_k$$

$$\sum_{k=۱}^{n} (a_{k+۱} - a_k) = a_{n+۱} - a_۱$$

و برای $n < m$ ،

$$\sum_{k=۱}^{n} a_k + \sum_{k=n+۱}^{m} a_k = \sum_{k=۱}^{m} a_k$$

توجه کنید که اندیس جمع‌بندی k را می‌توان با هر حرف دیگر نیز نشان داد :

$$\sum_{k=۱}^{n} a_k = \sum_{i=۱}^{n} a_i = \sum_{j=۱}^{n} a_j$$

اکنون می‌خواهیم ببینیم آیا می‌توانیم مفهوم جمع را از تعداد متناهی به تعداد نامتناهی گسترش دهیم. ابتدا به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱۳: برای پیدا کردن نمایش اعشاری کسر $\frac{۱۰}{۹}$ به این صورت می‌توان عمل کرد :

ابتدا ۱۰ را بر ۹ تقسیم می‌کنیم و خارج‌قسمت یعنی ۱ را به‌دست می‌آوریم :

درنظر بگیرید :

$$S_۱ = ۱$$

در مرحله‌ی دوم عمل تقسیم را ادامه می‌دهیم تا به ۱/۱ برسیم.

درنظر بگیرید :

$$S_۲ = ۱/۱$$

این عمل را n بار ادامه می‌دهیم تا به $۱/\underbrace{۱۱۱...۱}_{\text{بار } n-۱}$ برسیم.

$S_n = ۱/\underbrace{۱۱۱...۱}_{\text{بار } n-۱}$ را درنظر داشته باشید.

در هر مرحله داریم :

$$S_n = S_{n-۱} + ۱۰^{-(n-۱)}$$

پس هر جمله‌ی دنباله‌ی $\{S_n\}$ مجموع جمله‌ی قبلی و مقدار جدیدی است. می‌توان این دنباله را به‌صورت زیر نمایش داد : $S_۱ = a_۱$ و برای هر $n \geq ۲$ ،

$$S_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k = \sum_{k=۱}^{n-۱} a_k + a_n$$

وقتی که برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، $a_n = ۱۰^{-(n-۱)}$.

حد این دنباله برابر $\frac{۱۰}{۹}$ است (چرا)؟

تعریف: برای دنباله‌ی $\{a_n\}$ ، دنباله‌ی $\{S_n\}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنند :

$$S_۱ = a_۱$$

$$S_۲ = a_۱ + a_۲$$

$$\vdots$$

$$S_n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k$$

$$\vdots$$

دنباله $\{S_n\}$ را سری می‌نامند و S_n را مجموع جزیی و a_k را جمله‌ی عمومی سری می‌نامند. اگر دنباله $\{S_n\}$ همگرا باشد، می‌گویند سری همگراست و S حد دنباله $\{S_n\}$ را مجموع سری می‌نامند و می‌نویسند $S=\sum_{k=۱}^{\infty} a_k$ (بخوانید: مجموع a_k، k از ۱ تا بی‌نهایت)،

$S=a_۱+a_۲+a_۳+\cdots$ یا

اگر دنباله $\{S_n\}$ واگرا باشد می‌گویند سری واگراست.

سؤال اصلی درباره یک سری، همگرایی یا واگرایی آن است که در این قسمت به بررسی بیشتر آن می‌پردازیم و در صورتی که امکان داشته باشد، مجموع آن یعنی $\lim_{n\to\infty} S_n$ را می‌یابیم.

نکته ۱: عمل جمع را ابتدا تنها برای دو عدد و سپس به کمک استقرا برای n عدد، (تعداد متناهی) دیده‌ایم. با استفاده از مفهوم سری و همگرایی آن می‌توان چنین تصوّر کرد که این مفهوم به جمع تعداد نامتناهی عدد هم قابل گسترش است، با این تفاوت که در حالت با تعداد متناهی، مجموع همواره یک عدد (حقیقی) است، درحالی که برای تعداد نامتناهی (سری) مجموع ممکن است یک عدد (حقیقی) باشد (وقتی که دنباله‌ی مجموع‌های جزئی همگرا است)، که آن را مجموع نامتناهی نیز می‌نامند، و یا ممکن است موجود نباشد (دنباله‌ی مجموع‌های جزئی واگرا باشد).

نکته ۲: سری را با $\lim_{n\to\infty} S_n$ یا $\sum_{k=۱}^{\infty} a_k$ یا $a_۱+a_۲+a_۳+\cdots$ و یا $a_۱+a_۲+\cdots+a_n+\cdots$ هم نمایش می‌دهند (حتی اگر دنباله‌ی S_n همگرا نباشد.) یعنی برای سری و مجموع سری یک نماد را به‌کار می‌برند. در این کتاب این نماد هم به‌کار می‌رود.

علاوه بر آن در جمع نامتناهی مفهوم همگرایی دنباله‌ها علاوه بر عمل جمع هم لازم است.

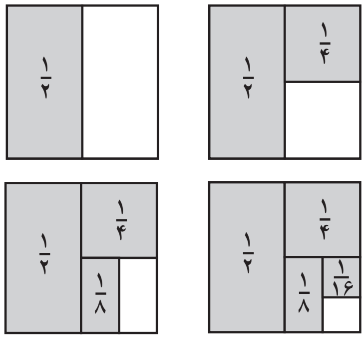
مثال ۱۴: دنباله‌ی مجموع‌های جزئی سری $\sum_{k=۱}^{\infty}\frac{۱}{۲^k}$ عبارت است از:

$$S_۱=\frac{۱}{۲}$$
$$S_۲=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}=\frac{۲+۱}{۲^۲}=\frac{۲^۲-۱}{۲^۲}$$
$$S_۳=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\frac{۱}{۲^۳}=\frac{۲^۲+۲+۱}{۲^۳}=\frac{۲^۳-۱}{۲^۳}$$
$$\vdots$$
$$S_n=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^n}=\frac{۲^n-۱}{۲^n}=۱-۲^{-n}$$
$$\vdots$$

پس $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = ۱$ ، و می‌توان نوشت

$$\sum_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{۲^k} = ۱$$

مثال ۱۵: یک مربع به طول اضلاع ۱ را درنظر بگیرید. اگر در مرحله‌ی اول نصف مساحت آن را رنگ کنیم و در مرحله‌ی دوم نصف مساحت باقی‌مانده و در مرحله‌ی سوم نصف مساحت باقی‌مانده را رنگ کنیم و این عمل را بدون وقفه ادامه دهیم، چه بخشی از مربع رنگ می‌شود؟



مساحت بخشی که در هر مرحله رنگ می‌شود به‌ترتیب برابر با $\frac{۱}{۲}$ ، $\frac{۱}{۴}$ ، $\frac{۱}{۸}$ ،... است. مساحت بخش‌های رنگ شده تا مرحله nاُم برابر

$$S_n = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \cdots + \frac{۱}{۲^n}$$

است و بنا بر مثال قبل، در تعداد دفعات نامحدود همه‌ی سطح مربع رنگ می‌شود.

قضیه‌ی ۸: اگر سری $\sum\limits_{k=۱}^{\infty} a_k$ همگرا باشد، آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} a_n = ۰$$

اثبات: $S_{n-۱}$ و S_n را درنظر بگیرید

$$S_{n-۱} = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{n-۱}$$
$$S_n = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_{n-۱} + a_n$$

داریم

$$a_n = S_n - S_{n-۱}$$

از آن‌جایی که دنباله‌ی $\{S_n\}$ همگراست، اگر حدّ آن را S بنامیم داریم

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$$

بنابراین، شرط لازم همگرایی سری این است که حدّ جمله‌ی عمومی آن صفر باشد. توجه کنید که شرط کافی نیست بدین معنی که ممکن است $\lim_{n\to\infty} a_n$ برابر صفر باشد بدون این‌که سری همگرا باشد. البته از این قضیه برای نشان دادن واگرایی برخی از سری‌ها می‌توان استفاده کرد.

مثال ۱۶: سری $\sum_{k=1}^{\infty}(1+\frac{1}{k})$ و نیز سری $\sum_{k=1}^{\infty}2^k$ هر دو به‌دلیل عدم برقراری شرط لازم همگرایی، واگرایند.

مثال ۱۷: سری

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

سری همساز (هارمونیک) نامیده می‌شود. نشان می‌دهیم که این سری گرچه شرط لازم همگرایی را داراست ولی واگراست.

برای اثبات واگرایی سری همساز می‌توان بدین‌ترتیب عمل کرد که جملات سری را به‌صورت زیر دسته‌بندی کنیم:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}}+\frac{1}{17}+\cdots$$

مجموع جملات در هر گروه بزرگ‌تر از $\frac{1}{2}$ است و چون تعداد گروه‌هایی که مجموع جمله‌های هریک از $\frac{1}{2}$ بزرگ‌تر است نامتناهی است (چرا؟) مجموع‌های جزئی سری از هر عدد دلخواه بزرگ‌تر می‌شود.

۲ـ۶ـ سری هندسی

سری

$$a+ar+ar^2+\cdots+ar^n+\cdots$$

که در آن $a\neq 0$ و r عدد دلخواهی است **یک سری هندسی با قدر نسبت** r نامیده می‌شود. این سری

به‌صورت‌های زیر نیز نوشته می‌شود :

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} \quad \text{و} \quad a\sum_{k=1}^{\infty} r^{k-1}$$

مجموع جزئی سری هندسی برابر است با :

$$S_n = a + ar + \cdots + ar^{n-1}$$

برای یافتن فرمول ساده‌تری برای S_n می‌توان نوشت :

$$S_n(1-r) = S_n - rS_n = (a + ar + \cdots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \cdots + ar^n)$$

$$= a - ar^n$$

پس داریم $S_n(1-r) = a(1-r^n)$. و اگر $r \neq 1$ ، خواهیم داشت :

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

قضیه‌ی ۹: سری هندسی

$$a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots$$

برای $|r|<1$ همگرا و برای $|r|\geq 1$ واگراست. در حالتی که سری همگرا باشد، مقدار آن برابر است با

$$\frac{a}{1-r}$$

اثبات: مشاهده کردیم که $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$. اگر $|r|<1$ ، $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$ که نتیجه می‌دهد

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a}{1-r}$$

و اگر $|r|\geq 1$ ، حدّ جمله‌ی عمومی صفر نخواهد بود و بنابر قضیه‌ی ۸ سری واگراست.

مثال ۱۸: می‌خواهیم عدد با بسط اعشاری زیر را به صورت کسر متعارفی بنویسیم :

$$0/012012012012\ldots$$

عدد موردنظر در واقع مجموع سری زیر است :

$$\frac{12}{1000} + \frac{12}{(1000)^2} + \frac{12}{(1000)^3} + \cdots + \frac{12}{(1000)^n} + \cdots$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید یک سری هندسی با $a = \frac{12}{1000}$ و $r = \frac{1}{1000}$ داریم، و بنابر

قضیه‌ی قبل :

$$S=\frac{\frac{۱۲}{۱۰۰۰}}{۱-\frac{۱}{۱۰۰۰}}=\frac{۱۲}{۹۹۹}$$

مثال ۱۹: نشان می‌دهیم سری $\sum_{k=۰}^{\infty}\frac{۱}{k!}$ همگراست.

$$S_n=۱+۱+\frac{۱}{۱\times۲}+\frac{۱}{۱\times۲\times۳}+\cdots+\frac{۱}{۱\times۲\times\cdots\times n}$$

$$<۱+۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲^۲}+\cdots+\frac{۱}{۲^{n-۱}}<۳$$

دنباله $\{S_n\}$ صعودی و کراندار است، پس سری همگراست. مقدار سری را با e نمایش می‌دهند. می‌توان ثابت کرد e عددی است گنگ بین ۲ و ۳ و مقدار تقریبی آن ۲/۷۱۸۳ است. در حقیقت اثبات می‌کنند :

$$e=\lim_{n\to\infty}(۱+\frac{۱}{n})^n$$

قضیه‌ی ۱۰: اگر $\sum_{k=۱}^{\infty}a_k$ و $\sum_{k=۱}^{\infty}b_k$ دو سری همگرا و c عدد ثابتی باشد، آن‌گاه سری‌های $\sum_{k=۱}^{\infty}ca_k$ و $\sum_{k=۱}^{\infty}(a_k+b_k)$ و $\sum_{k=۱}^{\infty}(a_k-b_k)$ نیز همگرایند و داریم :

$$\sum_{k=۱}^{\infty}ca_k=c\sum_{k=۱}^{\infty}a_k$$

$$\sum_{k=۱}^{\infty}(a_k\pm b_k)=\sum_{k=۱}^{\infty}a_k\pm\sum_{k=۱}^{\infty}b_k$$

اثبات: اگر $S_n=\sum_{k=۱}^{n}a_k$ و $T_n=\sum_{k=۱}^{n}ca_k$ ،

$$T_n=cS_n$$

و چون $\{S_n\}$ همگراست، $\{T_n\}$ نیز همگراست و در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty}T_n=c\lim_{n\to\infty}S_n$$

و این یعنی

$$\sum_{k=۱}^{\infty}ca_k=c\sum_{k=۱}^{\infty}a_k$$

اثبات حالت‌های دیگر به عنوان تمرین برعهده‌ی دانش‌آموزان است.

این بخش را با ارائه‌ی چند مثال دیگر به پایان می‌رسانیم.

مثال ۲۰: می‌خواهیم نشان دهیم سری $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ همگراست.

توجه کنید که

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

پس

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1})$$

$$= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \cdots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

در نتیجه

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} (1-\frac{1}{n+1}) = \lim_{n\to\infty} 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 1$$

و سری به عدد ۱ همگراست.

مثال ۲۱: سری

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k+1}{(k^2+1)(k^2+2k+2)}$$

همگراست. از

$$2k+1 = (k+1)^2 - k^2 = (k+1)^2 + 1 - (k^2+1)$$

داریم :

$$\frac{2k+1}{(k^2+1)(k^2+2k+2)} = \frac{2k+1}{(k^2+1)((k+1)^2+1)}$$

$$= \frac{1}{k^2+1} - \frac{1}{(k+1)^2+1}$$

پس می‌توان نوشت

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{1}{k^2+1} - \frac{1}{(k+1)^2+1})$$

$$=(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})+(\frac{1}{5}-\frac{1}{10})+\cdots+(\frac{1}{n^2+1}-\frac{1}{(n+1)^2+1})$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{(n+1)^2+1}$$

و بالاخره $\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{1}{2}$. پس سری به عدد $\frac{1}{2}$ همگراست.

مثال ۲۲: در مورد همگرایی یا واگرایی سری $\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{k}{k+1}$ چه می‌توان گفت؟

چون

$$\log\frac{k}{k+1}=\log k-\log(k+1)$$

داریم

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\log\frac{k}{k+1}=\sum_{k=1}^{n}(\log k-\log(k+1))$$

$$=(\log 1-\log 2)+(\log 2-\log 3)+\cdots+(\log n-\log(n+1))$$

$$=\log 1-\log(n+1)=-\log(n+1)$$

و می‌توان n را چنان بزرگ اختیار کرد که $|S_n|$ از هر عدد دلخواه بزرگ‌تر باشد، پس دنباله‌ی $\{S_n\}$ و در نتیجه سری $\sum_{k=1}^{\infty}\log\frac{k}{k+1}$ واگراست.

تمرین‌ها

۱ــ نشان دهید سری‌های زیر واگرایند.

الف) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{2k}$ ب) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}$ ج) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{k}}$

۲ــ الف) a و b را چنان تعیین کنید که برای هر $k\in\mathbb{N}$

$$\frac{1}{4k^2-1}=\frac{a}{2k-1}+\frac{b}{2k+1}$$

ب) مجموع سری $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$ را به‌دست آورید.

۳ــ ثابت کنید که سری‌های زیر همگرایند و مقدار آن‌ها را حساب کنید.

الف) $\sum\limits_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{(۳k-۱)(۳k+۲)}$ ب) $\sum\limits_{k=۱}^{\infty} (-۱)^{k+۱} \frac{۲k+۱}{k(k+۱)}$

ج) $\sum\limits_{k=۱}^{\infty} \frac{۳^k+۴^k}{۶^k}$ د) $\sum\limits_{k=۱}^{\infty} \frac{۱}{k(k+۱)(k+۲)}$

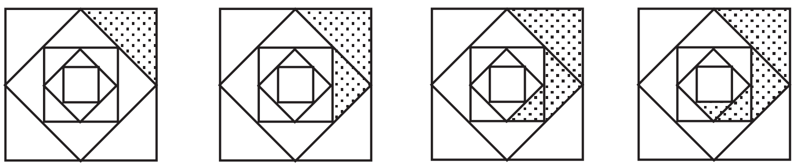
هـ) $\sum\limits_{k=۱}^{\infty} \log \frac{k(k+۲)}{(k+۱)^۲}$

۴ــ اعداد با بسط اعشاری داده شده در زیر را به شکل یک سری نوشته و مقدار هریک را به‌دست آورید :

الف) ۰/۲۲۲۲۲۰۰۰ ب) ۰/۴۹۹۹۹۹۰۰۰

ج) ۰/۲۱۲۱۲۱۰۰۰ د) ۰/۳۶۷۱۷۱۷۱۰۰۰

۵ــ فرض کنید که در مربعی به طول اضلاع ۱ نقاط میانی اضلاع آن را به هم وصل و بخشی از آن را رنگ کنیم، مطابق شکل زیر. اگر این روند را برای رنگ کردن سطح آن ادامه دهیم، در نهایت چه سطحی از مربع رنگ می‌شود؟



فصل سوم

حد و پیوستگی

۳ــ۱ــ مفهوم حد

در سال‌های قبل با مفهوم حد و نحوه‌ی حدس زدن آن در یک نقطه و حدّ چپ و راست، آشنا شده‌اید. در این فصل پس از بیان مسائل شهودی حد، تعریف دقیق آن را مطرح کرده قضایای مهم مربوط به حد را بیان و برخی از آن‌ها را اثبات می‌کنیم.

مثال ۱: تابع‌های حقیقی زیر و دو دنباله‌ی $\left\{1-(0/1)^{n}\right\}$ و $\left\{1+(0/1)^{n}\right\}$ را درنظر بگیرید:

$$f(x)=2x+1$$

$$g(x)=\frac{2x^2-x-1}{x-1} \quad (x\neq 1)$$

$$h(x)=\begin{cases} 6-3x & x<1 \\ 2x+1 & x\geq 1 \end{cases}$$

$$i(x)=\begin{cases} 6-3x & x<1 \\ 0 & x=1 \\ 2x+1 & x>1 \end{cases}$$

$$j(x)=\begin{cases} 2x & x<1 \\ 2x+1 & x\geq 1 \end{cases}$$

$$k(x)=\begin{cases} 2x & x\leq 1 \\ 2x+1 & x>1 \end{cases}$$

دنباله‌ی اوّل از چپ و دنباله‌ی دوّم از راست به ۱ میل می‌کنند. در دو جدول زیر مقادیر تابع‌ها به‌ازای پنج جمله‌ی اوّل این دو دنباله و به ازای $x = ۱$ نمایش داده شده‌اند :

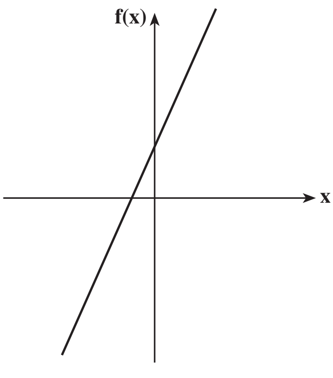
x	۰	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	۰/۹۹۹۹	...	۱
f	۱	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	۲/۹۹۹۸		۳
g	۱	۲/۸	۲/۹۸	۲/۹۹۸	۲/۹۹۹۸		تعریف نشده
h	۶	۳/۳	۳/۰۳	۳/۰۰۳	۳/۰۰۰۳		۳
i	۶	۳/۳	۳/۰۳	۳/۰۰۳	۳/۰۰۰۳		۰
j	۰	۱/۸	۱/۹۸	۱/۹۹۸	۱/۹۹۹۸		۳
k	۰	۱/۸	۱/۹۸	۱/۹۹۸	۱/۹۹۹۸		۲

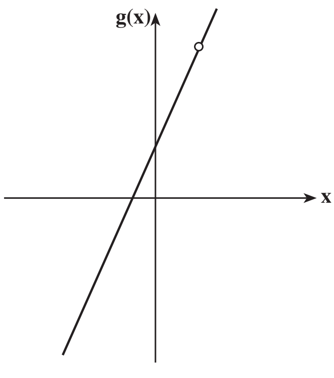
x	۲	۱/۱	۱/۰۱	۱/۰۰۱	۱/۰۰۰۱	...	۱
f	۵	۳/۲	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲		۳
g	۵	۳/۲	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲		تعریف نشده
h	۵	۳/۲	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲		۳
i	۵	۳/۲	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲		۰
j	۵	۳/۲	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲		۳
k	۵	۳/۲	۳/۰۲	۳/۰۰۲	۳/۰۰۰۲		۲

اکنون رفتار تابع‌های فوق را بررسی می‌کنیم :

مقدار تابع f در نقطه‌ی ۱، برابر ۳ است ولی تابع g در نقطه‌ی ۱ تعریف نشده است، هر دو تابع در اطراف نقطه‌ی ۱ وضعیت یکسانی دارند. مشاهده می‌شود که مقادیر هر دو تابع، نزدیک ۳ هستند و میزان نزدیک بودن آن‌ها به ۳، بستگی به میزان نزدیک بودن x به ۱ دارد. (توجه داشته باشید که وقتی گفته می‌شود x به ۱ میل می‌کند یا نزدیک می‌شود، x برابر با ۱ نیست.)

به نمودارهای زیر توجه کنید.





برای مثال، اگر بخواهیم حداکثر فاصله‌ی مقدار تابع (برای هر دو تابع فوق) از عدد ۳ به اندازه ۰/۰۰۲ باشد، مقدار x باید به اندازه ۰/۰۰۱ یا کمتر نزدیک ۱ باشد. در حالی که اگر بخواهیم حداکثر فاصله‌ی مقدار f(x) یا g(x) از ۳ به اندازه ۰/۰۰۰۲ باشد، باید x به اندازه‌ی ۰/۰۰۰۱ یا کمتر، از عدد ۱ فاصله داشته باشد. مفاهیم فوق را می‌توان به این صورت هم نوشت. برای ۰/۰۰۲ عدد ۰/۰۰۱ وجود دارد که اگر $0<|x-1|<0/001$، آن‌گاه $|f(x)-3|<0/002$ و $|g(x)-3|<0/002$. همچنین برای ۰/۰۰۰۲ عدد ۰/۰۰۰۱ وجود دارد که اگر $0<|x-1|<0/0001$، آن‌گاه $|f(x)-3|<0/0002$ و $|g(x)-3|<0/0002$ و به همین ترتیب هر چه بخواهیم می‌توانیم مقادیر این دو تابع را به عدد ۳ نزدیک کنیم و وسیله‌ی کار نزدیک بودن به ۱ است. در این صورت همان‌طور که می‌دانید، می‌گوییم حدّ تابع در نقطه‌ی ۱ برابر ۳ است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=3 \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1} g(x)=3$$

به دو تابع h و i هم دقت کنید، چه تفاوتی می‌بینید؟ آیا نتایج فوق برای این دو تابع هم صادق‌اند؟ (یعنی آیا $\lim_{x\to 1} h(x)=3$ و $\lim_{x\to 1} i(x)=3$؟)

حال می‌خواهیم ببینیم در حالت کلی مقصود از $\lim_{x\to a} f(x)=L$ چیست؟ مقصود این است که : «به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم f(x) را به L نزدیک کنیم. ابزار لازم برای این کار نزدیک کردن x به a است.» عبارت اخیر را به زبان ریاضی بیان می‌کنیم : فاصله‌ی f(x) تا L را با $|f(x)-L|$ و فاصله‌ی x تا a را با $|x-a|$ نشان می‌دهیم. پس باید $|f(x)-L|$ از هر عدد دلخواهی کوچک‌تر شود و برای رسیدن به این هدف کافی است $|x-a|$ به اندازه‌ی کافی کوچک باشد. لذا تعریف دقیق را به صورت زیر بیان می‌کنیم :

تعریف: فرض می‌کنیم f تابعی باشد که دامنه آن شامل یک همسایگی چپ یا راست a باشد، می‌گویند تابع f در نقطه‌ی a، حدّی برابر L دارد و می‌نویسند $\lim_{x\to a} f(x)=L$ هرگاه برای هر $\varepsilon>0$، عدد $\delta>0$ [1] وجود داشته باشد که برای هر x از دامنه f اگر $0<|x-a|<\delta$، آن‌گاه $|f(x)-L|<\varepsilon$.
به‌عبارت دیگر،

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall x\in D_f\ ,0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

۱ــ می‌توان هر عدد مثبت کوچک‌تر از δ هم در نظر گرفت، زیرا اگر $\delta_1\leq\delta$ و $0<|x-a|<\delta_1$، آن‌گاه $0<|x-a|<\delta$.

با استفاده از تعریف در مثال ۱ می‌توان ثابت کرد :

$$\lim_{x\to ۱} f(x) = ۳ \quad , \quad \lim_{x\to ۱} g(x) = ۳$$

$$\lim_{x\to ۱} h(x) = ۳ \quad , \quad \lim_{x\to ۱} (x) = ۳$$

مثلاً برای تابع g می‌خواهیم $|g(x)-۳|$ کمتر از ε باشد، یا $|۲x+۱-۳| < \varepsilon$ (چون همواره همسایگی محذوف موردنظر است مقدار $g(۱)$ در حد نقشی ندارد.) یا $|۲x-۲| = ۲|x-۱| < \varepsilon$ و لذا کافی است $\delta = \frac{\varepsilon}{۲}$ (یا عددی کمتر از آن) درنظر گرفته شود. پس برای هر $\varepsilon > ۰$، عدد $\delta = \frac{\varepsilon}{۲} > ۰$ وجود دارد که برای هر x در دامنه g

$$۰ < |x-۱| < \delta = \frac{\varepsilon}{۲} \Rightarrow |g(x)-۳| < \varepsilon$$

و برای تابع h می‌خواهیم $|h(x)-۳|$ کمتر از ε باشد. برای هر نقطه در یک همسایگی محذوف ۱، یکی از دو حالت زیر اتفاق می‌افتد :

الف) $x > ۱$. در این صورت $|h(x)-۳| = |۲x+۱-۳| = ۲|x-۱|$ که برای رسیدن به هدف، کافی است $\delta = \frac{\varepsilon}{۲}$ انتخاب شود.

ب) $x < ۱$. در این‌صورت $|h(x)-۳| = |۶-۳x-۳| = ۳|x-۱|$ که برای رسیدن به هدف، کافی است $\delta = \frac{\varepsilon}{۳}$ انتخاب شود.

پس برای هر $\varepsilon > ۰$، و برای هر x در دامنه h

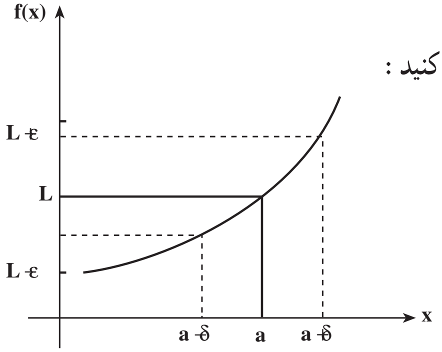
$$۰ < |x-۱| < \delta = \frac{\varepsilon}{۳} \Rightarrow |h(x)-۳| < \varepsilon$$

(دقت کنید که این‌جا حتی برای نقطه‌ی $x = ۱$ شرط برقرار است، ولی از نظر مفهوم حد اهمیتی ندارد ولی همان‌طور که بعداً می‌بینیم این یک شرط اساسی برای پیوستگی است.)

بررسی هندسی تعریف حد

$\lim_{x\to a} f(x) = L$ از نظر هندسی یعنی این‌که برای هر ε همسایگی L یک δ همسایگی محذوف a وجود دارد که تصویر هر نقطه‌ی این δ همسایگی محذوف در داخل ε همسایگی L قرار

گیرد. به شکل زیر توجه کنید :



مثال ۲: به‌راحتی می‌توان دید که تابع

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & x>1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

در نقطه ۰ حد ندارد. (چرا؟)

گاهی برای پیدا کردن حد، ساده‌تر است با انتقال، متغیر دیگری را انتخاب کنیم. اساس این عمل نکته زیر است :

نکته: به راحتی دیده می‌شود که به‌جای بررسی رفتار تابع f در اطراف نقطه a، می‌توان رفتار تابع g، $g(t)=f(a+t)$، در اطراف نقطه صفر را مطالعه کرد و در نتیجه با استفاده از تعریف داریم :

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{t\to 0} f(a+t)=L$

مثلاً، $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)^2=\lim\limits_{t\to 0}t^2=0$

۳ــ۲ــ حدّ چپ و راست

در مثال ۱، به مقادیر مختلف تابع‌های j و k در دو طرف نقطه‌ی ۱ دقت کنید، مشاهده می‌شود که در طرف راست، هر دو تابع به سمت ۳ ولی در طرف چپ، به سمت ۲ میل می‌کنند.

تعریف: فرض کنیم تابع f در یک همسایگی نقطه a تعریف شده باشد. می‌گویند تابع f در نقطه‌ی a، حدّ راست برابر L دارد و می‌نویسند :

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

هرگاه برای هر $\varepsilon>0$، عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد که برای هر x از دامنه f، اگر $0<x-a<\delta$، آن‌گاه

$$|f(x)-L|<\varepsilon$$

(می‌دانیم که $0<x-a<\delta$ با $a<x<a+\delta$ معادل است).

و می‌گویند تابع f در نقطه‌ی a، حدّ چپ برابر L دارد و می‌نویسند : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = L$

هرگاه برای هر $\varepsilon > 0$، عدد $\delta > 0$ وجود داشته باشد که برای هر x از دامنه f، اگر $0 < a - x < \delta$، آن‌گاه $|f(x) - L| < \varepsilon$.

با استفاده از تعریف‌های فوق برای مثال ۱، می‌توان ثابت کرد :

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} g(x) = \lim_{x\to 1^+} h(x) = \lim_{x\to 1^+} i(x)$$
$$= \lim_{x\to 1^+} j(x) = \lim_{x\to 1^+} k(x) = 3$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} g(x) = \lim_{x\to 1^-} h(x) = \lim_{x\to 1^-} i(x) = 3$$

ولی

$$\lim_{x\to 1^-} j(x) = \lim_{x\to 1^-} k(x) = 2$$

چون حدّ چپ و راست برای توابع j و k در نقطه‌ی ۱ برابر نیستند، به‌راحتی می‌توان ثابت کرد که این دو تابع در نقطه‌ی ۱ حد ندارند. به‌طور کلی می‌توان ثابت کرد :

نکته ۱ــ تابع f که در یک همسایگی محذوف نقطهٔ a تعریف شده است، در نقطه‌ی a حد دارد اگر و تنها اگر حدّ چپ و حدّ راست f در نقطه‌ی a موجود و با هم برابر باشند. به عبارت دیگر،

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = L$

نکته ۲ــ اگر تابع f فقط در همسایگی راست (همسایگی چپ) a تعریف شده باشد، حد راست (حد چپ) f در a همان حد f در a خواهد بود.

تمرین‌ها

۱ــ حد تابع‌های زیر را در نقطه دلخواه $a \in \mathbb{R}$ حدس زده و ادعای خود را ثابت کنید.

الف) $f(x) = c$ (c یک عدد حقیقی است).

ب) $f(x) = x$.

ج) $f(x) = bx + c$ که در آن c و b دو عدد حقیقی ثابت‌اند.

۲ــ با استفاده از تعریف حد ثابت کنید :

الف) $\lim\limits_{x\to 3}(x^2 - 6x) = -9$. ب) $\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{x-1} = 0$. ج) $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{4x^2-4}{x-1} = 8$.

۳ــ۳ــ دنباله‌ها و حد

همان‌طور که در تعریف دیدیم، لازمه‌ی وجود حد در نقطه‌ی a این است که دامنه‌ی تابع f شامل یک همسایگی چپ یا راست a باشد. بنابراین اگر تابع در یک همسایگی چپ a یا در یک همسایگی راست a تعریف نشده باشد، در آن نقطه حد ندارد. یکی دیگر از راه‌های تشخیص عدم وجود حد در یک نقطه درونی، عدم وجود حدّ چپ یا راست و یا نامساوی بودن حدّ چپ و راست در آن نقطه است (مانند توابع j و k در مثال ۱). اما روش‌های دیگری نیز وجود دارند. قضیه‌ی زیر با استفاده از مفهوم حدّ دنباله‌ها، راه دیگری را پیشنهاد می‌کند.

قضیه‌ی ۱: فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ، در این صورت برای هر دنباله از عضوهای دامنه f مانند $\{a_n\}$ که به a همگرا باشد، و برای هر n، $a_n \neq a$ ، آن‌گاه دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ نیز به L همگراست[1].

اثبات: نشان می‌دهیم اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ و $\{a_n\}$ دنباله‌ای همگرا به a با شرط مذکور باشد آن‌گاه $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=L$. برای این کار باید ثابت کنیم برای هر $\varepsilon>0$ ، عدد طبیعی M یافت می‌شود که برای هر $n\geq M$ نتیجه بگیریم $|f(a_n)-L|<\varepsilon$. اما داریم :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists \delta>0,\ \forall x\in D_f\ (0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon)$$

و چون دنباله‌ی $\{a_n\}$ به a همگراست، برای $\delta>0$ ، عدد طبیعی M وجود دارد که اگر $n\geq M$ ، آن‌گاه $0<|a_n-a|<\delta$ پس $|f(a_n)-L|<\varepsilon$ یعنی :

$$\forall \varepsilon>0,\ \exists M\in\mathbb{N}, \forall n\in\mathbb{N} (n\geq M \Rightarrow |f(a_n)-L|<\varepsilon)$$

یا $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=L$.

نتیجه‌ی ۱: اگر $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله از عضوهای دامنه f باشند که هر دو به a همگرا بوده و برای هر n، $a_n \neq a$ و $b_n \neq a$ ، ولی دنباله‌های $\{f(a_n)\}$ و $\{f(b_n)\}$ به ترتیب به L_1 و L_2 همگرا شوند و $L_1 \neq L_2$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود ندارد.

۱ــ حتی اگر حداکثر برای تعدادی متناهی n، $a_n = a$ ، قضیه‌ی ۱ درست است و یا اگر مقدار حدّ تابع در نقطه‌ی a، برابر f(a) باشد، به ازای همه‌ی دنباله‌های $\{a_n\}$ به شرط آن که $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ قضیه برقرار است.

نتیجه‌ی ۲: اگر دنباله $\{c_n\}$ از عضوهای دامنه f همگرا به a باشد و برای هر n، $c_n \neq a$ ، و $\{f(c_n)\}$ واگرا باشد، آن‌گاه $\lim_{x\to a} f(x)$ وجود ندارد.

برای نمایش نحوه‌ی به کارگیری نتایج فوق به مثال‌های زیر توجه کنید :

مثال۳: تابع حقیقی

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & \text{گویا } x \\ ۰ & \text{اصم } x \end{cases}$$

را در نظر گرفته، فرض می‌کنیم a عددی گویا باشد. ثابت می‌کنیم که f در a حد ندارد.

اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد گویا باشد که به سمت عدد گویای a میل کند (مثلاً $a_n = a+\frac{۱}{n}$)، در این صورت $\lim_{n\to\infty} f(a_n)=۱$. در حالی که اگر b_n دنباله‌ای از اعداد اصم باشد که به سمت همان عدد گویای a میل کند (مثلاً $b_n = a+\frac{\sqrt{۲}}{n}$)، در این صورت $\lim_{n\to\infty} f(b_n)=۰$. لذا تابع در نقطه a نمی‌تواند حد داشته باشد (چرا؟).

مثال ۴: $f(x)=\sin\frac{۱}{x}$ در نقطه ۰ حد ندارد.

دو دنباله‌ی $\left\{\frac{۱}{۲n\pi}\right\}$ و $\left\{\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}}\right\}$ از دامنه f را در نظر می‌گیریم که هر دو به صفر همگرایند.

ولی برای هر n، $f(\frac{۱}{۲n\pi})=۰$ و $f(\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}})=۱$. لذا دو دنباله‌ی ثابت $\left\{f(\frac{۱}{۲n\pi})\right\}$ و $\left\{f(\frac{۱}{۲n\pi+\frac{\pi}{۲}})\right\}$ به ترتیب به دو مقدار ۰ و ۱ همگرایند. پس $\lim_{x\to ۰}\sin\frac{۱}{x}$ وجود ندارد.

یکی دیگر از کاربردهای قضیه ۱، اثبات یکتایی حد است، که برای نمونه قضیه زیر را بیان و اثبات می‌کنیم :

قضیه‌ی ۲: مقدار حد تابع f در نقطه‌ی a، در صورت وجود، یکتا است (یعنی اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_۱$ و $\lim_{x\to a} f(x)=L_۲$ ، آن‌گاه $L_۱=L_۲$).

اثبات: دیدیم که حدّ دنباله‌ها در صورت وجود یکتاست. پس برای دنباله $\{a_n\}$ با عضوهای

دامنه f همگرا به a، $a_n \neq a$ (مثلاً $a_n = a + \frac{1}{n}$ برای هر $n \in \mathbb{N}$)، $\{f(a_n)\}$ نمی‌تواند به L_1 و L_2 همگرا باشد مگر این که $L_1 = L_2$. پس حد f یکتاست.

*** ***

نکته: عکس قضیه‌ی ۱ هم برقرار است، یعنی اگر برای هر دنباله‌ی $\{a_n\}$ از عضوهای دامنه f که به a همگرا باشد و برای هر n، $a_n \neq a$ دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به L همگرا شد، آن‌گاه $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

مثال ۵: با استفاده از نکته‌ی فوق نشان می‌دهیم :

الف) برای $f(x) = x^2$ ، $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 4$. زیرا اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به ۲ باشد به طوری که برای هر n، $a_n \neq 2$ ، آن‌گاه $f(a_n) = a_n^2$. امّا برای دنباله $\{a_n^2\}$ داریم :

$$\lim_{n \to \infty} a_n^2 = \lim_{n \to \infty} a_n . \lim_{n \to \infty} a_n = 2 \times 2 = 4$$

ب) برای $g(x) = \frac{1}{x^2}$ ، $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \frac{1}{4}$. زیرا اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای دلخواه و همگرا به ۲ باشد، به طوری که برای هر n، $a_n \neq 2$ ، آن‌گاه $g(a_n) = \frac{1}{a_n^2}$. امّا برای دنباله $\left\{\frac{1}{a_n^2}\right\}$ داریم :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{a_n^2} = \frac{1}{\lim\limits_{n \to \infty} a_n^2} = \frac{1}{4}$$

(توجه کنید که شرایط قضیه‌های ۴ و ۵ فصل ۲ برقرار است.)

نکته: اگر بخواهیم حد راست و چپ را با استفاده از دنباله‌ها بررسی کنیم. کافی است دنباله‌ی دلخواه $\{a_n\}$ همگرا به a در شرط $a_n > a$ (برای حد راست) و $a_n < a$ (برای حد چپ)، برای هر n صدق کند.

تمرین‌ها

۱ــ ثابت کنید توابع زیر در نقطه‌ی ۰ حد ندارند.

الف) $f(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$

ب) $f(x)=\cos\frac{۱}{x}$ با $D_f=\mathbb{R}-\{\}$

ج) $f(x)=\frac{۱}{x}$ با $D_f=\mathbb{R}-\{\}$

۲ــ ثابت کنید اگر تابع f در نقطه‌ی a حدّ راست داشته باشد، آن‌گاه دنباله‌ی $\left\{f(a+\frac{۱}{n})\right\}$ حد دارد.

۳ــ نشان دهید توابع زیر در نقاط داده شده حد ندارند.

الف) $\frac{|x|}{x}$ در نقطه‌ی ۰

ب) $x[x]$ در نقطه‌ی ۱

۴ــ ثابت کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x^۳+۹}{x^۲}=۴$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲x+۱}{۲x-۱}=۳$

۳ــ۴ــ قضیه‌های حد

ثابت کردیم که برای هر عدد حقیقی a، $\lim\limits_{x\to a}x^۲=a^۲$. از طرف دیگر، تابع فوق را می‌توان به صورت حاصل ضرب تابع $g(x)=x$ در خودش نیز در نظر گرفت، که برای آن $\lim\limits_{x\to a}g(x)=a$ (چرا؟). پس به نظر می‌آید که

$$\lim_{x\to a}g(x)\lim_{x\to a}g(x)=\lim_{x\to a}x^۲$$

در قضایای زیر که بدون اثبات بیان می‌شوند، مسائلی از این قبیل که درباره‌ی جمع، ضرب، تفریق، و تقسیم توابع‌اند مورد بررسی قرار می‌گیرند. اما قبل از آن می‌توان نشان داد که

مثال ۶: اگر تابع حقیقی f ثابت باشد، یعنی برای هر x، $f(x)=c$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}f(x)=c$ (چرا؟).

قضیه‌ی ۳: اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ ، آن‌گاه برای عدد حقیقی ثابت c داریم

$$\lim_{x\to a}cf(x)=cL.$$

قضیه‌ی ۴: توابع f و g روی یک همسایگی چپ یا راست یا هر دو نقطه a تعریف شده‌اند، اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L_۱$ و $\lim_{x\to a} g(x)=L_۲$ ، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=L_۱\pm L_۲$$

نکته: باید دقت کرد که شرط استفاده از این قضیه این است که $\lim_{x\to a} f(x)$ و $\lim_{x\to a} g(x)$ هر دو موجود باشند، در غیر این صورت نمی‌توان از این قضیه استفاده کرد. به طور مثال برای

$$f(x)=\sin\frac{۱}{x} \quad \text{و} \quad g(x)=۱-\sin\frac{۱}{x}$$

داریم

$$h(x)=f(x)+g(x)=۱$$

h همواره حد دارد. در صورتی که توابع f و g هیچ کدام در نقطه صفر حد ندارند (چرا؟).

مثال ۷: می‌توان ثابت کرد که

$$\lim_{x\to ۱}(۴x^۲-۳x+۱)=۲$$

چون

$$\lim_{x\to ۱}۴x^۲=۴\lim_{x\to ۱}x^۲=۴$$

و $\lim_{x\to ۱}(-۳x)=(-۳)\lim_{x\to ۱}x=-۳$. پس

$$\lim_{x\to ۱}(-۳x+۱)=\lim_{x\to ۱}(-۳x)+\lim_{x\to ۱}۱ = -۳+۱=-۲$$

بنابراین

$$\lim_{x\to ۱}(۴x^۲-۳x+۱)=\lim_{x\to ۱}۴x^۲+\lim_{x\to ۱}(-۳x+۱) = ۴-۲=۲$$

قضیه‌ی ۵: اگر تابع f در نقطه‌ی a حد داشته باشد، آن‌گاه در یک همسایگی a کراندار است.

یعنی اعداد $M>۰$ و $\delta>۰$ وجود دارند که برای هر x از دامنه f که $۰<|x-a|<\delta$ داریم

$$|f(x)|<M$$

یادآوری می‌کنیم که تابع f روی مجموعه‌ی A کراندار است هرگاه

$$f(A)=\{f(x):x\in A\}$$

به عنوان یک زیر مجموعه از اعداد حقیقی کراندار باشد. در این صورت عدد حقیقی مثبت M وجود دارد که برای هر $x\in A$ ، $|f(x)|<M$.

قضیه‌ی ۶: اگر حدّ تابع f در نقطه‌ی a، صفر و تابع g در یک همسایگی (محذوف) a کراندار باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x)=۰$.

نکته: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=۰$.

قضیه‌ی ۷: اگر تابع‌های f و g روی یک همسایگی چپ یا راست یا هر دو نقطه a تعریف شده باشند و

$$\lim_{x\to a} f(x)=L_۲ \;,\; \lim_{x\to a} f(x)=L_۱$$

آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=L_۱L_۲$$

مثال ۸: برای اعداد حقیقی ثابت $c_۰$ ، $c_۱$ ، $c_۲$ ، ... و c_n ، عبارت

$$P_n(x)=c_۰+c_۱x+c_۲x^۲+\cdots+c_nx^n$$

را یک چند جمله‌ای از درجه n می‌نامیم (به شرط این که $c_n\neq ۰$).

با استفاده از قضایای فوق می‌توان ثابت کرد که

$$\lim_{x\to a} P_n(x)=c_۰+c_۱a+c_۱a^۲+\cdots+c_na^n=P_n(a)$$

(چرا؟).[۱]

قضیه‌ی ۸: اگر $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_۲\neq ۰$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_۱$ ، آن‌گاه

الف) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{۱}{g(x)}=\dfrac{۱}{L_۲}$.

ب) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L_۱}{L_۲}$

قضیه‌ی ۹: اگر n یک عدد طبیعی باشد و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ، آن‌گاه

الف)

$$\lim_{x\to a} f^n(x)=\lim_{x\to a}(f(x))^n=L^n$$

ب) اگر علاوه بر آن $L>۰$ ، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{L}$$

۱ــ می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی n، $\lim\limits_{n\to a} x^n=a^n$ و پس از آن برای چند جمله‌ای‌های ساده $c_۰$ و $c_۰+c_۱x$ و $c_۰+c_۱x+c_۲x^۲$ ، $\cdots$ ، $P_n(x)$ مثال را به اثبات رساند، تا روش کلی را بهتر درک کرد.

مثال ۹: بنا به قضیه‌های فوق داریم

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}(۴x^۲-۳x+۱)(۲x+۱)=۶$

ب) $\lim\limits_{x\to ۱}(۴x^۲-۳x+۱)^۴=۲^۴=۱۶$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{۲x+۱}{۴x^۲-۳x+۱}=\frac{۳}{۲}$

د) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{\frac{۲x+۱}{۴x^۲-۳x+۱}}=\sqrt{\frac{۳}{۲}}$

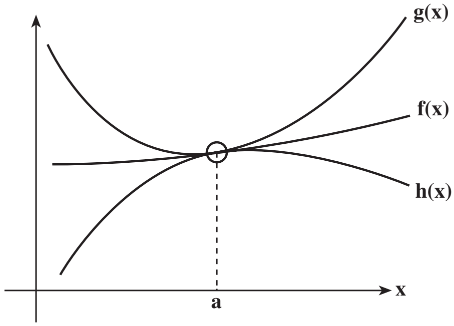
هـ) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt[۳]{\frac{۱}{(۴x^۲-۳x+۱)^۴}}=\sqrt[۳]{\frac{۱}{۲^۴}}=۲^{-\frac{۴}{۳}}$

قضیه‌ی ۱۰: اگر در یک همسایگی محذوف a، $h(x)\le f(x)\le g(x)$ و

$$\lim_{x\to a}h(x)=\lim_{x\to a}g(x)=L$$

آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}f(x)=L$$



اثبات: باید نشان دهیم که برای هر دنباله دلخواه، $\{a_n\}$ و $a_n\ne a$ و $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$ دنباله $\{f(a_n)\}$ به L همگراست.

ولی برای هر دنباله $\{a_n\}$، عدد طبیعی M وجود دارد که برای $n\ge M$، a_n داخل همسایگی محذوف موردنظر قرار گیرد. بنابراین برای $n\ge M$ داریم:

$$h(a_n)\le f(a_n)\le g(a_n)$$

و چون دنباله‌های $\{g(a_n)\}$ و $\{h(a_n)\}$ هر دو همگرا به L هستند، بنابراین دنباله $\{f(a_n)\}$ نیز به L

همگراست.

مثال ۱۰: نشان می‌دهیم $\lim\limits_{x\to ۰} x\sin\frac{۱}{x}=۰$.

راه اول: $\left|\sin\frac{۱}{x}\right|\le ۱$، یعنی $\sin\frac{۱}{x}$ تابعی است که در همسایگی محذوف ۰ کراندار و $\lim\limits_{x\to ۰} x=۰$. پس $\lim\limits_{x\to ۰} x=\sin\frac{۱}{x}=۰$.

راه دوم: $-۱\le\sin\frac{۱}{x}\le ۱$. در نتیجه $x\sin\frac{۱}{x}$ همواره بین x و $-x$ است (در مورد $x>۰$ و $x<۰$ بحث کنید.) و چون $\lim\limits_{x\to ۰} x=\lim\limits_{x\to ۰}(-x)=۰$، پس $\lim\limits_{x\to ۰} x\sin\frac{۱}{x}=۰$

تمرین‌ها

۱ــ حدهای زیر را به دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۴}(۵x+۲)$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳}(x^۳+۲۷)$

ج) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۳}}\frac{۳x-۱}{۹x^۲-۱}$

د) $\lim\limits_{x\to ۱^+}\frac{۲x+۱}{x^۲-۳x+۴}$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sqrt{x+۹}-۳}{x}$

و) $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۲}-\sqrt{۲}}{x}$

۲ــ ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to ۰} x\left[\frac{۱}{x}\right]=۱$.

۳ــ ثابت کنید که

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\sin x=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to ۰}\cos x=۱$

ج) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$

د) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$

۴ــ فرض کنیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$. در این صورت

الف) هرگاه $L>۰$، ثابت کنید که f در یک همسایگی محذوف a مثبت است.

ب) هرگاه $L<۰$، ثابت کنید که f در یک همسایگی محذوف a منفی است.

ج) اگر $L=۰$، چه می‌توان گفت؟

۵ــ حدهای زیر را به‌دست آورید. (می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$)

الف) $m\neq 0$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin nx}{\sin mx}$.

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

ج) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x-\sin 2x}{2x+3\sin 4x}$.

۶ــ اگر در یک همسایگی محذوف a داشته باشیم $f(x)\leq g(x)$ و اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L_2$ ، ثابت کنید که $L_1\leq L_2$. (حتی اگر $f(x)<g(x)$ نتیجه می‌شود $L_1\leq L_2$).

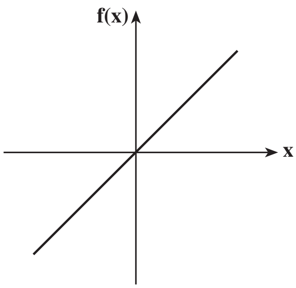
۷ــ قضیه‌های ۳ و ۴ را با استفاده از دنباله‌ها ثابت کنید.

۳ــ۵ــ پیوستگی در نقطه

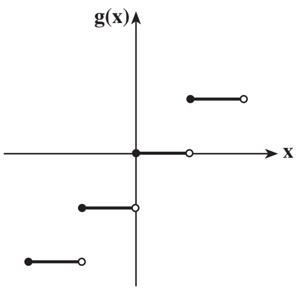
با مفهوم پیوستگی تابع در یک نقطه در سال قبل آشنا شده‌ایم. به‌طور شهودی تابعی را در نقطه‌ی a پیوسته گویند که نمودار آن در نقطه‌ی a بریدگی و یا پرش نداشته باشد.

مثال ۱۱: به نمودار تابع‌های حقیقی زیر در نقطه‌ی ۱ توجه کنید:

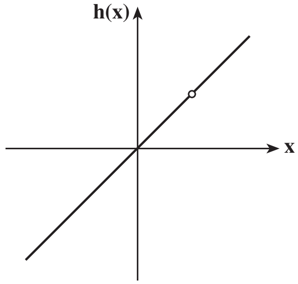
الف) $f(x)=x$



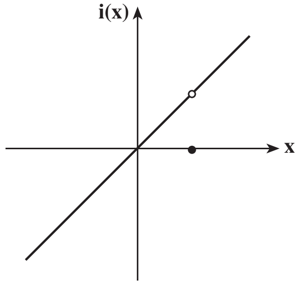
ب) $g(x)=[x]$



ج) $h(x)=\dfrac{x(x-1)}{x-1} \;,\; x\neq 1$



د) $i(x)=\begin{cases} x & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$



از میان تابع‌های فوق، فقط تابع f در نقطه‌ی ۱ بریدگی ندارد. حال حدّ این تابع‌ها را در نقطه‌ی ۱ بررسی می‌کنیم. چون $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=1$ ، ولی $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=0$ پس تابع g در نقطه‌ی ۱ حد ندارد. از طرف دیگر، $\lim\limits_{x\to 1} h(x)=1$. ولی تابع در نقطه‌ی ۱ تعریف نشده است. بالاخره $\lim\limits_{x\to 1} i(x)=1$ ولی مقدار حد برابر مقدار تابع در این نقطه نیست، که این مسئله باز هم منجر به بریدگی تابع در نقطه ۱ می‌شود. اما $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=1=f(1)$ که هیچ بریدگی در نمودار تابع f در نقطه‌ی ۱ نیست. پس برای نداشتن بریدگی، وجود حدّ تابع و برابر بودن آن با مقدار تابع در آن نقطه ملاک اصلی است.

تعریف : تابع f در نقطه‌ی a از دامنه‌اش پیوسته است هرگاه برای هر $\varepsilon>0$ ، عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد که برای xهای دامنه f اگر $|x-a|<\delta$، آن‌گاه $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

در غیر این صورت تابع f در نقطهٔ a ناپیوسته است.

در تعریف پیوستگی دامنه تابع زیرمجموعه‌ای دلخواه از اعداد حقیقی است. با توجه به اینکه تابع‌هایی که در این درس مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرند روی زیرمجموعه‌های خاصی از اعداد حقیقی، یعنی بازه‌ها تعریف می‌شوند، صورت معادلی از تعریف پیوستگی تابع روی بازه‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف. فرض کنید تابع f از بازهٔ I به $\mathbb{R}$ تعریف شده باشد. در این صورت تابع f در نقطه a از بازه I پیوسته است، هرگاه

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$$

به راحتی می‌توان دید که تابع f در نقطه‌ی a پیوسته است، اگر و تنها اگر برای هر دنباله‌ی

همگرای $\{a_n\}$ در دامنه f که $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ ، دنباله‌ی $\{f(a_n)\}$ به f(a) همگرا باشد.

مثال ۱۲: تمام تابع‌های مثال ۹ در نقطه‌ی ۱ پیوسته‌اند.

مثال ۱۳: چند جمله‌ای P_n و توابع sin و cos در هر نقطه‌ی $a \in \mathbb{R}$ پیوسته‌اند. (چرا؟)

تمرین‌ها

۱ــ ثابت کنید تابع‌های زیر در نقاط داده شده پیوسته نیستند.

الف) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x}-۲}{x-۴} & x\neq ۴\\ ۰ & x=۴\end{cases}$ در نقطه‌ی ۴.

ب) $f(x)=\begin{cases}۲x-۳ & x\leq ۱\\ x^۲ & ۱<x\end{cases}$ در نقطه‌ی ۱.

ج) $f(x)=\begin{cases}x\ \sin\dfrac{۱}{x} & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$ در نقطه‌ی ۰.

د) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۳-\sqrt{x+۹}}{x} & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$ در نقطه‌ی ۰.

هـ) $f(x)=\begin{cases}|x-۳| & x\neq ۳\\ ۲ & x=۳\end{cases}$ در نقطه‌ی ۳.

و) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۳+۱}{x^۲-۹} & x\neq ۳\\ ۱ & x=۳\end{cases}$ در نقطه‌ی ۳.

۲ــ در کدام‌یک از مسائل تمرین ۱، می‌توان با تغییر مقدار تابع در نقطه‌ی داده شده، تابع جدید پیوسته‌ای در آن نقطه ساخت؟ (در این حالت، این نقطه را برای آن تابع نقطه‌ی ناپیوستگی رفع شدنی می‌نامند.)

۳ــ نقاط ناپیوستگی تابع‌های حقیقی زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=\begin{cases}-x & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$ ب) $f(x)=[x]$.

۴ــ دامنه تعریف تابع $f(x)=\sqrt{x^3-x^2}$ را مشخص کنید. پیوستگی تابع f در نقاط $x=0$ و $x=1$ را بررسی کنید.

قضیه‌های پیوستگی

همان‌طور که درباره‌ی حد مطرح کردیم، به شرط وجود حدّ تابع‌های مختلف در یک نقطه ثابت، حدّ مجموع و حدّ حاصل‌ضرب آن‌ها هم قابل محاسبه‌اند. در این قسمت با استفاده از قضیه‌های حد، قضیه‌های نظیر را در مورد پیوستگی بیان می‌داریم.

قضیه‌ی ۱۱: اگر توابع f و g روی دامنه مشترکی تعریف شده باشند و در نقطه‌ی a، پیوسته باشند، آن‌گاه

الف) $f+g$ در نقطه‌ی a پیوسته است.

ب) $f-g$ در نقطه‌ی a پیوسته است.

ج) fg در نقطه‌ی a پیوسته است.

د) f/g در نقطه‌ی a پیوسته است، هرگاه $g(a)\neq 0$.

اثبات: فقط قسمت (د) را ثابت می‌کنیم، بقیه‌ی اثبات‌ها به صورت تمرین به عهده‌ی دانش‌آموزان است. اگر $g(a)\neq 0$ و f و g در نقطه a پیوسته باشند، داریم

$$\lim_{x\to a} f(x)=f(a) \text{ و } \lim_{x\to a} g(x)=g(a)\neq 0$$

پس

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(a)}{g(a)}$$

یعنی تابع $\frac{f}{g}$ در نقطه‌ی a پیوسته است. (از آن‌جا که $\lim_{x\to a} g(x)\neq 0$، پس تابع g در یک همسایگی a مخالف صفر است و لذا $\frac{f}{g}$ در آن همسایگی تعریف شده است.)

مثال ۱۴: $f(x)=\frac{x-2}{x^2+2x-8}$ در نقطه ۰ پیوسته است. چون

$$\lim_{x\to 0}(x-2)=-2\ ,\ \lim_{x\to 0}(x^2+2x-8)=-8\neq 0$$

پس $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = \frac{-۲}{-۸} = \frac{۱}{۴}$ و چون $f(۰) = \frac{۱}{۴}$ لذا تابع f در نقطه‌ی ۰ پیوسته است.

در حالت کلی، اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و $Q(a) \neq ۰$ آن‌گاه تابع گویای $R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ ، در نقطه‌ی a پیوسته است (چرا؟).

در این‌جا دو قضیه‌ی دیگر را بدون اثبات بیان کرده و کاربردهایی از آنان را ذکر می‌کنیم :

قضیه‌ی ۱۲: اگر $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$ و تابع f در نقطه‌ی b پیوسته باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a}(fog)(x) = f(b)$$

یعنی

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x))$$

مثال ۱۵: حدّ تابع $h(x) = \sin\frac{x-۱}{x^۲+x}$ را در نقطه‌ی ۱ پیدا می‌کنیم :

چون $\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x-۱}{x^۲+x} = ۰$ و تابع sin در نقطه ۰ پیوسته است.

$$\lim_{x\to ۱} h(x) = \sin(\lim_{x\to ۱}\frac{x-۱}{x^۲+x}) = \sin ۰ = ۰$$

نتیجه: اگر تابع g در نقطه‌ی a و تابع f در نقطه‌ی g(a) پیوسته باشند، آن‌گاه fog در نقطه‌ی a پیوسته است.

مثال ۱۶: تابع $f(t) = \sin ۳t$ در هر نقطه‌ی $a \in \mathbb{R}$ پیوسته است. تابع $۳t$ در نقطه‌ی $t = a$ و تابع $\sin t$ در نقطه‌ی $t = ۳a$ پیوسته‌اند پس تابع $\sin ۳t$ در نقطه‌ی $t = a$ پیوسته است.

مثال ۱۷: می‌خواهیم مقدار حدّ زیر را به‌دست آوریم :

$$\lim_{t\to\pi}\frac{\sin^۲ t}{۱+\cos^۳ t}$$

$$\frac{\sin^۲ t}{۱+\cos^۳ t} = \frac{(۱-\cos t)(۱+\cos t)}{(۱+\cos t)(۱-\cos t+\cos^۲ t)} = \frac{۱-\cos t}{۱-\cos t+\cos^۲ t}$$

(در همسایگی محذوف π، $\cos t \neq -۱$) و با توجه به پیوسته بودن تابع $\cos t$ در نقطه‌ی $t = \pi$ داریم :

$$\lim_{t\to\pi}\frac{\sin^۲ t}{۱+\cos^۳ t} = \frac{(۱-\cos t\pi)}{۱-\cos\pi+\cos^۲\pi} = \frac{۲}{۳}$$

مثال ۱۸: می‌خواهیم a و b را چنان تعیین کنیم که تابع زیر در هر نقطه از $\mathbb{R}$ پیوسته باشد.

$$f(t)=\begin{cases} a\sin t+b\cos ۲t & t<\dfrac{\pi}{۶} \\ \cos ۳t+۲ & \dfrac{\pi}{۶}\leq t\leq \dfrac{\pi}{۳} \\ \sin^{۲} t+b & t>\dfrac{\pi}{۳} \end{cases}$$

کافی است تابع در نقاط $t=\dfrac{\pi}{۶}$ و $t=\dfrac{\pi}{۳}$ پیوسته باشد (چرا؟)

$$\lim_{t\to \frac{\pi}{۶}^{-}} (a\sin t+b\cos ۲t)=a\sin\frac{\pi}{۶}+b\cos\frac{\pi}{۳}=\frac{a}{۲}+\frac{b}{۲}$$

و

$$\lim_{t\to \frac{\pi}{۶}^{+}} (\cos ۳t+۲)=\cos\frac{\pi}{۲}+۲=۲$$

پس $a+b=۴$. و نیز

$$\lim_{t\to \frac{\pi}{۳}^{-}} (\cos ۳t+۲)=\cos\pi+۲=۱$$

و

$$\lim_{t\to \frac{\pi}{۳}^{+}} (\sin^{۲} t+b)=\sin^{۲}\frac{\pi}{۳}+b=\frac{۳}{۴}+b$$

پس $\dfrac{۳}{۴}+b=۱$ و در نتیجه $b=\dfrac{۱}{۴}$ و $a=\dfrac{۱۵}{۴}$.

قضیه‌ی ۱۳: اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه تابع $f(x)=\sqrt[n]{x}$ در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته است.

مثال ۱۹: تابع $f(x)=\sqrt{۵-۲x^{۲}}$ در نقطه‌ی ۰ پیوسته است. زیرا تابع $g(x)=۵-۲x^{۲}$ در نقطه‌ی ۰ پیوسته است و تابع $h(x)=\sqrt{x}$ در $g(۰)=۵>۰$ پیوسته است پس $f=hog$ در نقطه‌ی ۰ پیوسته است.

نکته: فرض کنید f درنقطه‌ی $x_\circ$ پیوسته و در یک همسایگی آن نامنفی باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to x_\circ}\sqrt{f(x)}=\sqrt{f(x_\circ)}$$

تمرین‌ها

۱ــ نقاط ناپیوستگی توابع زیر را در دامنه‌ی آن‌ها پیدا کنید.

الف) $$f(x)=\begin{cases} x^۲-۴ & x\le ۲ \\ x & x>۲ \end{cases}$$

ب) $$f(x)=\frac{۳-\sqrt{x+۹}}{\sqrt[۲]{x+۱}-۱}$$

ج) $$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲}{x-۵} & x<۴ \\ \sqrt{x-۴} & x\ge ۴ \end{cases}$$

۲ــ نمودار تابع

$$f(x)=\begin{cases} \circ & x<\circ \\ x & \circ\le x<\dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{۲}{۳} & \dfrac{۱}{۲}\le x<۱ \\ ۱ & ۱\le x \end{cases}$$

را رسم کرده و نقاط ناپیوستگی آن را به‌دست آورید (ادعای خود را ثابت کنید).

۳ــ اگر

$$f(x)=\begin{cases} -x & x<\circ \\ ۱ & \circ\le x \end{cases}$$

و

$$g(x)=\begin{cases} ۱ & x<\circ \\ x & \circ\le x \end{cases}$$

ثابت کنید تابع‌های f و g در نقطه‌ی ∘ ناپیوسته‌اند ولی fog در نقطه‌ی ∘ پیوسته است.

۴ــ ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=|L|$. آیا عکس این مطلب نیز درست است؟

۵ــ آیا مجموع یک تابع پیوسته و یک تابع ناپیوسته، می‌تواند پیوسته باشد؟ چرا؟

۶ ــ ثابت کنید که

الف) تابع $f(x)=\sqrt{x^{۲}-۲x+۱}$ در نقطه‌ی ۱ پیوسته است.

ب) تابع $g(x)=\sqrt{۱-\cos x}$ در نقطه‌ی ۰ پیوسته است.

ج) تابع $f(x)=\sqrt{(x-۳)(۱-x)}$ در نقطه‌ی ۳ پیوسته است.

۳ــ۶ ــ پیوستگی روی یک بازه

به‌طور شهودی یک تابع روی یک بازه، پیوسته است اگر نمودارش در آن بازه هیچ پرش، سوراخ و یا برشی نداشته باشد. یا به عبارتی نمودار تابع‌های پیوسته را می‌توان بدون برداشتن مداد از روی کاغذ رسم کرد.

مثال ۲۰: به نمودار هر یک از تابع‌های زیر در بازه‌ی $I=(-۱,\ ۱)$ توجه کنید :

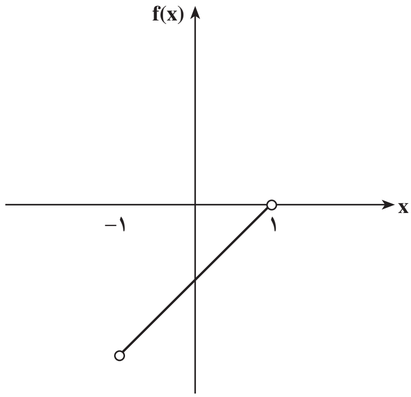
$f(x)=x-۱$

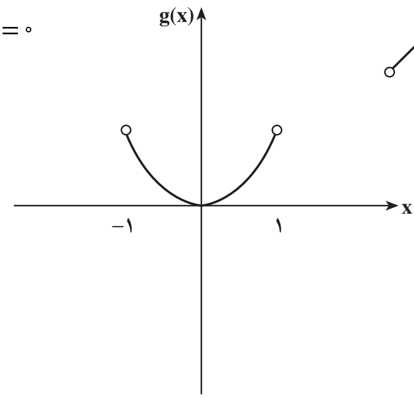
$g(x)=x^{۲}$

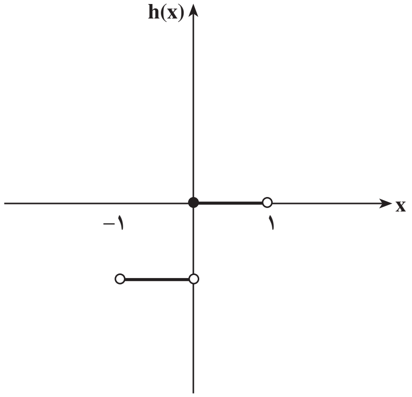
$h(x)=[x]$

$i(x)=\dfrac{x(x-۱)}{x}$

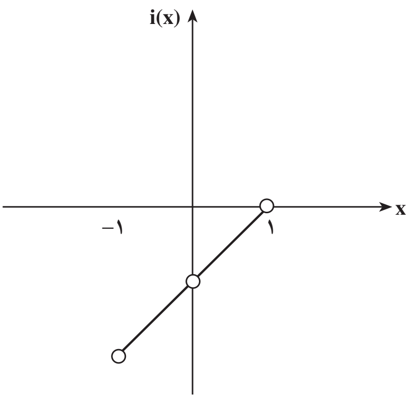
$$j(x)=\begin{cases} x-۱ & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰ \end{cases}$$

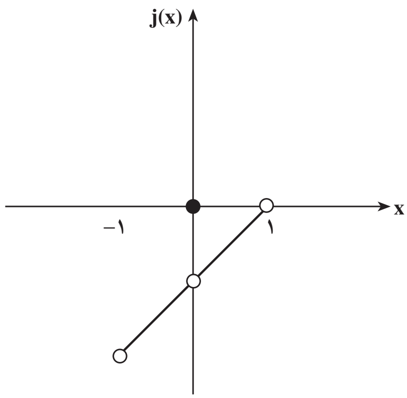






همان‌گونه که دیده می‌شود، تابع‌های f,g در بازه‌ی I هر دو پیوسته‌اند، اما هیچ‌یک از تابع‌های h,i,j در این بازه پیوسته نیستند.





تعریف: تابع f پیوسته است هرگاه در تمام نقاط دامنه خود پیوسته باشد[1].

مثال ۲۱: تابع $g(x) = x^2$ در هر بازه‌ی بازی پیوسته است، چون این تابع در تمام نقاط مجموعه‌ی اعداد حقیقی پیوسته است.

مثال ۲۲: تابع $h(x) = [x]$ در بازه‌ی (۰,۱) پیوسته است (چون مقدار h در این بازه همواره ۰ است، در نتیجه در تمام نقاط (۰,۱) پیوسته است). از طرفی چون h در نقطه‌ی صفر پیوسته نیست (چرا؟)، در بازه‌ی (۱,۱−) پیوسته نخواهد بود.

پیوستگی راست و چپ

به مثال ۲۰ توجه کنید. گرچه تابع h در نقطه‌ی ۰ دارای حدّهای چپ و راست متفاوت است (یعنی حد ندارد)، ولی حدّ راست آن با مقدار تابع در آن نقطه برابر است. اما تابع j با این که در

---

۱ ــ بازه‌ی باز I می‌تواند هر یک از بازه‌های $(a,b),(a,\infty),(-\infty,a),(-\infty,\infty)$ باشد.

نقطه‌ی ۰ حدّهای چپ و راست یکسان دارد، ولی این حدّها با مقدار تابع در نقطه‌ی ۰ برابر نیست. برای تشخیص بهتر این تفاوت، تعریف‌های زیر را مطرح می‌کنیم :

تعریف : فرض کنید تابع f از بازه I به $\mathbb{R}$ و a یک نقطه از I باشد. می‌گویند تابع f در نقطه‌ی a از راست پیوسته است، هرگاه این تابع در نقطه‌ی a حدّ راست داشته باشد و حدّ راست تابع در آن نقطه برابر مقدار تابع در نقطه‌ی a باشد، یعنی

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$$

تعریف : فرض کنید تابع f از بازه I به $\mathbb{R}$ و a یک نقطه از I باشد. می‌گویند تابع f در نقطه‌ی a از چپ پیوسته است، هرگاه این تابع در نقطه‌ی a حدّ چپ داشته باشد و حدّ چپ تابع در آن نقطه برابر مقدار تابع در نقطه‌ی a باشد، یعنی

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

مثال ۲۳: تابع $h(x)=[x]$ در تمام اعداد صحیح از راست پیوسته است (چرا؟).

مثال ۲۴: تابع $m(x)=[1-x]$ در تمام اعداد صحیح از چپ پیوسته است (چرا؟).

می‌توان ثابت کرد اگر a یک نقطه درونی بازه I باشد، آنگاه تابع f در نقطه‌ی a پیوسته است اگر و تنها اگر این تابع در نقطه‌ی a، پیوستگی راست و چپ داشته باشد (چرا؟).

نکته : وقتی دامنه تابع f بازهٔ $[a,b]$ است پیوستگی چپ f در b همان پیوستگی f در b و پیوستگی راست f در a همان پیوستگی f در a است.

مثال ۲۵: تابع $f(x)=\sqrt{4-x^2}$ روی بازهٔ $[-2,2]$ پیوسته است.

۳ــ۷ــ قضیه‌های مهم پیوستگی و کاربردها

هنگامی که تابعی در یک بازه پیوسته باشد، ویژگی‌هایی دارد که در این قسمت به بررسی برخی از آن‌ها می‌پردازیم. با توجه به این که نمودار یک تابع پیوسته، هیچ پرش یا سوراخی ندارد، پس اگر تابع پیوسته‌ای دو مقدار را روی محور y انتخاب کرد، هر مقدار بین این دو عدد را هم باید انتخاب کند. این اساس شهودی قضیه‌ی مهم زیر است که اثبات آن از حدود درس حساب دیفرانسیل و انتگرال خارج است.

قضیه‌ی ۱۴، (قضیه‌ی مقدار میانی): اگر تابع f در بازه‌ی بسته $[a,b]$ پیوسته باشد، و اگر عدد حقیقی k بین f(a) و f(b) باشد، آن‌گاه حداقل یک عدد حقیقی x_0 در بازه‌ی $[a,b]$ وجود دارد

که $f(x_\circ)=k$.

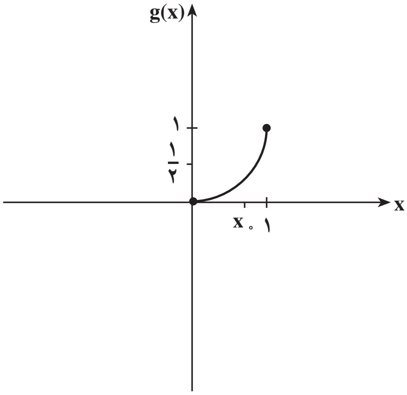
تعبیر هندسی قضیه‌ی فوق بدین‌صورت است که خط $y=k$، نمودار f را حتماً قطع می‌کند.

به مثال‌های زیر توجه کنید:

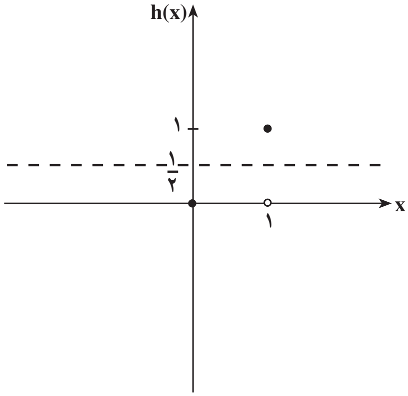
مثال ۲۶: $g(x)=x^{۲}$ در بازه‌ی $[۰,۱]$ پیوسته است و

$$g(۰)=۰<\frac{۱}{۲}<g(۱)=۱$$

پس حتماً نقطه‌ای مانند $x_\circ$ $(x_\circ=\frac{۱}{\sqrt{۲}})$ وجود دارد که $g(x_\circ)=\frac{۱}{۲}$.



مثال ۲۷: این موضوع برای تابع $h(x)=[x]$ در بازه‌ی $[۰,۱]$ درست نیست. چون برای مثال، $h(۰)=۰<\frac{۱}{۲}<h(۱)=۱$ ولی هیچ نقطه‌ی $x_\circ$ وجود ندارد که $h(x_\circ)=\frac{۱}{۲}$. یعنی خط $y=\frac{۱}{۲}$ هیچ‌گاه نمودار تابع h را قطع نمی‌کند.



یکی از موارد مهم کاربرد قضیه‌ی مقدار میانی پیدا کردن صفرهای یک تابع (یا حل معادلات $f(x)=0$) است.

نتیجه: اگر تابعی در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته و در نقطه‌ی a مثبت و در نقطه‌ی b منفی یا برعکس باشد ($f(a)f(b)<0$)، آن‌گاه در نقطه‌ای در بازه‌ی (a,b) مقدار آن ۰ می‌شود. یعنی حداقل یک $a<x_0<b$ وجود دارد به‌طوری که $f(x_0)=0$.

مثال ۲۸: تابع $f(x)=4x^3-12x^2+11x-3$ در بازه‌ی $[0,2]$ پیوسته است و $f(0)=-3<0$ و $f(2)=3>0$، قضیه‌ی مقدارمیانی وجود عدد $0<x_0<2$ را تضمین می‌کند که برای آن $f(x_0)=0$ (موقعیت x_0 در بازه‌ی $(0,2)$ چیست؟).

ضرورت پیدا کردن صفرهای یک چندجمله‌ای و یا تعیین محل تلاقی دو منحنی در مسائل مختلف ظاهر می‌شود. تعیین صفرهای چندجمله‌ای‌های درجه ۱ و ۲ ساده است و به‌طور دقیق می‌توان آن‌ها را پیدا کرد:

$x=\frac{-b}{a}$ برای $ax+b=0$ (درجه‌ی یک).

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ برای $ax^2+bx+c=0$ (درجه‌ی ۲) (به شرط آن‌که $b^2-4ac\geq 0$). برای چندجمله‌ای‌های با درجه‌ی بالاتر، یا مسئله بسیار پیچیده است و یا همان‌طور که در اوایل قرن نوزدهم ثابت شده است، هیچ فرمول جبری برای تعیین صفرهای چندجمله‌ای‌های از درجه‌ی ۵ به بالا وجود ندارد. وضعیت برای تعیین صفرهای غیرچندجمله‌ای‌ها بهتر از این نیست ولی پیدا کردن مقدار تقریبی این ریشه‌ها امکان‌پذیر است. قضیه‌ی مقدار میانی به‌طور کلی راه‌حلی برای این مسئله ارائه می‌دهد.

مثال ۲۹: ریشه‌های تقریبی $f(x)=x^3-4x-2=0$ را پیدا کنید.

$f(2)=-2$ و $f(3)=13$. چون f در بازه‌ی $[2,3]$ پیوسته است، پس حتماً صفری در این فاصله دارد. اما $f(2/5)=3/625$، پس حتماً صفری در بازه‌ی $[2,2/5]$ وجود دارد. به همین ترتیب می‌توان دید که f در ابتدا و انتهای هریک از بازه‌های $[2/125,2/25]$، $[2/1875,2/25]$، $[2/1875,2/21875]$، $[2/203125,2/21875]$ و $[2/2109375,2/21875]$ و $[2/2109375,2/2148438]$ تغییر علامت می‌دهد و لذا با هر دقتی که لازم باشد، می‌توان جواب را به‌دست آورد. مثلاً، تا یک صدم اعشار جواب تقریبی ۲/۲۱ است. (همان‌طور که می‌بینیم مقدار

دقیق x_0 به‌وسیله‌ی قضیه‌ی مقدار میانی به‌دست نمی‌آید.)

مثال ۳۰: برای ریشه $f(x) = \cos x - 2x^2 = 0$ جدول زیر چه حقایقی را مطرح می‌کند؟

x	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
f(x)	۱/۰	۰/۹	۰/۶	۰/۱۱	−۰/۵۸	−۱/۴۶

معادله‌ی $f(x) = 0$ حداقل ریشه‌ای در فاصله‌ی(۰/۸ و ۰/۶) دارد (چرا؟).

یکی دیگر از ویژگی‌های تابع‌های پیوسته روی بازه‌های بسته $[a,b]$، وجود مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع است، که آن را به‌صورت قضیه‌ای بدون اثبات بیان می‌کنیم. اما قبل از آن ماکسیمم و مینیمم مطلق را تعریف می‌کنیم :

تعریف: الف) تابع f روی مجموعه‌ی A دارای **مینیمم مطلق** است هرگاه نقطه‌ای مانند $x_1 \in A$ یافت شود که برای هر $x \in A$ ، $f(x_1) \le f(x)$. این نقطه را **نقطه‌ی مینیمم مطلق** تابع f روی مجموعه‌ی A و $f(x_1)$ را **مقدار مینیمم مطلق** می‌نامند.

ب) تابع f روی مجموعه‌ی A دارای **ماکسیمم مطلق** است هرگاه نقطه‌ای مانند $x_2 \in A$ یافت شود که برای هر $x \in A$ ، $f(x_2) \ge f(x)$. این نقطه را **نقطه‌ی ماکسیمم مطلق** تابع f روی مجموعه‌ی A و $f(x_2)$ را **مقدار ماکسیمم مطلق** می‌نامند.

قضیه‌ی ۱۵: اگر تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه

الف) عدد حقیقی K وجود دارد که برای هر $x \in [a,b]$ ، $|f(x)| \le K$.

ب) دو عدد x_1 و x_2 در بازه‌ی $[a,b]$ وجود دارند که برای هر $x \in [a,b]$. $f(x_1) \le f(x) \le f(x_2)$

به عبارت دیگر، اگر تابع در بازه‌ی بسته $[a,b]$ پیوسته باشد در این بازه کراندار است و ماکسیمم و مینیمم مطلق دارد.

مثال ۳۱: تابع $f(x) = 1 - x$ در بازه‌ی $[-1,1]$ پیوسته است. پس طبق قضیه‌ی ۱۵ کراندار است ؛ در واقع، واضح است که به ازای هر x در این بازه، $|f(x)| \le 2$ ، مقدار ماکسیمم مطلق f برابر ۲ در نقطه‌ی ۱− ، و مقدار مینیمم مطلق f برابر ۰ در نقطه‌ی ۱ است.

مثال ۳۲: الف) تابع $f(x) = x - 1$ را روی $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. این تابع ماکسیمم و مینیمم مطلق ندارد و کراندار هم نیست.

ب) تابع

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & -1\le x<1, x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

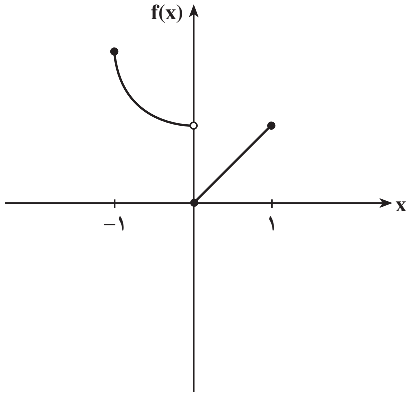
اگرچه در بازه‌ی بسته $[-1,1]$ تعریف شده ولی در آن بازه پیوسته نیست (چرا؟). علاوه‌بر آن، تابع h در $[-1,1]$ کراندار نیست و مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق هم ندارد.

شرط‌های قضیه ۱۵ برای وجود ماکسیمم و مینیمم مطلق و کراندار بودن کافی است، ولی حتماً ضروری نیست، برای مشاهده‌ی این مطلب به مثال‌های زیر توجه کنید :

مثال ۳۳: الف)

$$f(x)=\begin{cases}x^2+1 & -1\le x<0\\ x & 0\le x\le 1\end{cases}$$

در بازه‌ی $[-1,1]$ پیوسته نیست، ولی کراندار است و مقدار ماکسیمم مطلق آن ۲ و مینیمم مطلق آن ۰ است و برای هر $x\in[-1,1]$ ، $|f(x)|\le 2$.



ب) تابع $g(x)=1-x$ روی $(1,2)$ کراندار است ولی مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق ندارد.

مثال ۳۴: بزرگ‌ترین مساحت زمین مستطیلی‌شکل که بتوان با ۲۰۰ متر حصار، محصور کرد چه‌قدر است؟

اگر x طول و y عرض مستطیل باشد آن‌گاه محیط مستطیل عبارت است از

$$P(x,y)=2x+2y=200$$

پس $x+y=100$ یعنی $y=100-x$. مساحت مستطیل عبارت است از

$$A(x)=xy=x(100-x)=100x-x^2$$

تابع A در بازه‌ی $[0,100]$ پیوسته است. (آیا می‌توانید بگویید چرا بازه را $[0,100]$ در نظر

می‌گیریم؟) $A(0)=A(100)=0$

پس مقدار ماکسیمم A در نقطه‌ای مانند $x_0 \in (0,100)$ به‌دست می‌آید. برای پیدا کردن مقدار ماکسیمم، $A(x)$ را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$\begin{aligned} A(x) &= -(x^2 - 2\times 50x + 50^2 - 50^2) \\ &= 2500 - (50-x)^2 \end{aligned}$$

واضح است که $A(x) \le 2500$ و $A(50)=2500$ پس مقدار ماکسیمم مطلق A برابر 2500 مترمربع در نقطه‌ی $x_0 = 50$ به‌دست می‌آید.

قضیه‌ی ۱۵، همانند قضیه‌ی مقدار میانی، روشی برای به‌دست‌آوردن ماکسیمم و مینیمم مطلق ارائه نمی‌دهد. در بحث مشتق، روش مشخصی ارائه خواهد شد.

۳ــ۸ــ پیوستگی تابع معکوس

یادآوری می‌کنیم که اگر f تابعی یک به یک باشد، آن‌گاه برای معکوس آن f^{-1} داریم $f^{-1}(y)=x$ اگر و تنها اگر $y=f(x)$.

تابع f را صعودی اکید می‌گویند هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ ، که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) < f(x_2)$.

تابع f را نزولی اکید می‌گویند هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ ، که $x_1 < x_2$ داشته باشیم $f(x_1) > f(x_2)$.

تابعی را که در دامنه‌اش صعودی اکید و یا نزولی اکید باشد، تابع **یکنوای اکید** می‌نامند.

نکته: دقت کنید که تابع‌های یکنوای اکید، یک به یک هستند (چرا؟).

در مورد تابع‌های یکنوای اکید و پیوسته قضیه‌ی زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم :

قضیه‌ی ۱۶: اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و صعودی اکید باشد، آن‌گاه برد f برابر $[f(a),f(b)]$ است. به‌علاوه f^{-1} روی $[f(a),f(b)]$ پیوسته و صعودی اکید است.

قضیه‌ی مشابهی برای تابع‌های پیوسته‌ای که نزولی اکید هستند، می‌توان بیان کرد. در این حالت، دامنه‌ی تابع معکوس $[f(b),f(a)]$ است.

مثال ۳۵: الف) تابع Arcsin روی بازه $[-1,1]$ پیوسته و صعودی اکید است. زیرا معکوس آن تابع sin روی $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ پیوسته و صعودی اکید است.

ب) تابع Arccos روی بازه $[-1,1]$ پیوسته و نزولی اکید است. زیرا تابع معکوس آن، cos روی $[0,\pi]$ پیوسته و نزولی اکید است.

تمرین‌ها

۱ــ درباره‌ی پیوستگی تابع‌های زیر در بازه‌های داده‌شده بحث کنید.

الف) $f(x)=\frac{2x}{x+3}$ در بازه‌های $(-3,0)$ و $[-3,1]$.

ب)
$$g(x)=\begin{cases}2x-3 & x<-2\\ x-5 & -2\le x\le 1\\ 3-x & 1<x\end{cases}$$

در بازه‌های $(-\infty,2)$، $[-2,1]$ و $(3,\infty)$.

ج)
$$h(x)=\begin{cases}[x]+1 & -2\le x<0\\ 2x & 0\le x<1\\ x+1 & 1\le x\le 2\end{cases}$$

در بازه‌های $[-2,1]$ و $[0,2]$.

۲ــ در مورد پیوستگی و پیوستگی چپ و راست تابع‌های زیر در نقطه‌ی داده‌شده بحث کنید.

الف)
$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2+2x-3}{\sqrt{x^2-2x+1}} & x\ne 1\\ -4 & x=1\end{cases}$$

در نقطه‌ی $x=1$.

ب) $g(x)=\left[\frac{x+1}{2}\right]+\left[\frac{x-1}{2}\right]$ در نقطه‌ی $x=1$.

۳ــ مقدار ثابت c را طوری تعیین کنید که تابع
$$f(t)=\begin{cases}\tan t-\sec t & t\ne\frac{\pi}{2}\\ c & t=\frac{\pi}{2}\end{cases}$$
در بازه‌ی $\left[\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}\right]$ پیوسته باشد. $(\sec t=\frac{1}{\cos t})$

۴ــ با استفاده از جدول به پرسش‌های زیر در مورد ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=۰$ در بازه‌ی $[۰,۱/۸]$ که

$$f(x)=\sin ۳x \cos ۴x + ۰/۸$$

جواب دهید :

x	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱	۱/۲	۱/۴	۱/۶	۱/۸
f(x)	۰/۸	۱/۱۹	۰/۷۷	۰/۰۸	۰/۱۳	۰/۷۱	۰/۷۶	۰/۱۲	−۰/۱۹	۰/۳۳

الف) این تابع در بازه‌ی $[۰,۱/۸]$ چند ریشه می‌تواند داشته باشد؟

ب) آیا مطمئن هستید که تمام ریشه‌ها را به این طریق پیدا کرده‌اید؟

۵ــ نمودار سه تابع پیوسته در بازه‌ی $[۰,۱]$ را رسم کنید که مقدارهای آن‌ها در نقاط داده‌شده بر جدول زیر منطبق باشند، اولی یک و فقط یک ریشه در بازه‌ی $[۰,۱]$ داشته باشد. دومی حداقل دو ریشه متمایز در بازه‌ی $[۰/۶,۰/۸]$ داشته باشد و سومی حداقل سه ریشه متمایز در بازه‌ی $[۰,۰/۸]$ داشته باشد.

x	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
f(x)	۱	۰/۹	۰/۶	۰/۱۱	−۰/۵۸	−۱/۴۶

۶ ــ با استفاده از جدول زیر محل تقریبی جواب معادله‌ی $\sin ۳x \cos ۴x = \frac{x^۳}{\pi^۳}$ را در بازه‌ی $[۱/۰۷,۱/۱۵]$ به‌دست آورید.

x	$x^۳/\pi^۳$	$\sin ۳x \cos ۴x$
۱/۰۷	۰/۰۳۹۵	۰/۰۲۸۶
۱/۰۸	۰/۰۴۰۶	۰/۰۳۷۶
۱/۰۹	۰/۰۴۱۸	۰/۰۴۴۲
۱/۱۰	۰/۰۴۲۹	۰/۰۴۸۵
۱/۱۱	۰/۰۴۴۱	۰/۰۵۰۴
۱/۱۲	۰/۰۴۵۳	۰/۰۴۹۹
۱/۱۳	۰/۰۴۶۵	۰/۰۴۷۰
۱/۱۴	۰/۰۴۷۸	۰/۰۴۱۷
۱/۱۵	۰/۰۴۹۱	۰/۰۳۴۰

۷ــ کدام یک از تابع‌های زیر در بازه‌های داده‌شده کراندارند؟

الف) $f(x)=\frac{۱}{x}$ در بازه‌ی $[۱,۲]$.

ب) $f(x)=\frac{۱}{x}$ در بازه‌ی $[-۱,۰)$.

ج) $g(x)=\sin\frac{۱}{x}$ در بازه‌ی $(۰,\pi)$.

۸ــ اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ و نیز در بازه‌ی $[b,c]$ پیوسته باشد، ثابت کنید این تابع در بازه‌ی $[a,c]$ پیوسته است.

۹ــ مقدارهای ماکسیمم و مینیمم مطلق تابع‌های زیر را در مجموعه‌های داده‌شده پیدا کنید.

الف) $f(x)=x^۲$ در بازه‌ی $[۱,۲]$.

ب) $g(x)=\sin x$ در بازه‌ی $[۰,\pi]$.

ج) $h(x)=\frac{۱}{x}$ در بازه‌ی $[۱,۲]$.

۱۰ــ نشان دهید که خط $y=\frac{a+b}{۲}$ نمودار تابع $f(x)=(x-a)(x-b)+x$ را قطع می‌کند.

۳ــ۹ــ حدّ بی‌نهایت

دیدیم که L حدّ تابع f در نقطه‌ی a است، هرگاه مقادیر تابع در نقاط نزدیک به a نزدیک به L باشند. حال به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۳۶: جدول‌های زیر مقادیر تابع‌های داده‌شده را در نقاطی در همسایگی نقطه‌ی ۰ به نمایش می‌گذارند:

$$f(x)=\frac{۱}{x}$$

$$g(x)=\begin{cases}\frac{۱}{|x|} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$$

$$h(x)=-\sin(\frac{\pi}{x})\Big/x$$

x	$-۰/۳$	$-۰/۱$	$-۰/۰۳$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۳$	$-۰/۰۰۱$	۰
f(x)	$-\frac{۱۰}{۳}$	-۱۰	$-\frac{۱۰۰}{۳}$	-۱۰۰	$-\frac{۱۰۰۰}{۳}$	-۱۰۰۰	تعریف‌نشده
g(x)	$\frac{۱۰}{۳}$	۱۰	$\frac{۱۰۰}{۳}$	۱۰۰	$\frac{۱۰۰۰}{۳}$	۱۰۰۰	۰
h(x)	$+\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$	۰	$+\frac{۵۰\sqrt{۳}}{۳}$	۰	$\frac{۵۰۰\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف‌نشده

x	+۰/۳	+۰/۱	+۰/۰۳	+۰/۰۱	+۰/۰۰۳	+۰/۰۰۱	۰
f(x)	$\frac{۱۰}{۳}$	۱۰	$\frac{۱۰۰}{۳}$	۱۰۰	$\frac{۱۰۰۰}{۳}$	۱۰۰۰	تعریف‌نشده
g(x)	$\frac{۱۰}{۳}$	۱۰	$\frac{۱۰۰}{۳}$	۱۰۰	$\frac{۱۰۰۰}{۳}$	۱۰۰۰	۰
h(x)	$+\frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$	۰	$+\frac{۵۰\sqrt{۳}}{۳}$	۰	$\frac{۵۰۰\sqrt{۳}}{۳}$	۰	تعریف‌نشده

برای تابع g، هرقدر x به ۰ نزدیک‌تر شود، مقدار تابع بیشتر می‌شود و این افزایش بدون کران است. برای تابع f اگر x از طرف چپ به ۰ نزدیک شود، مقدار تابع کوچک‌تر می‌شود و بی‌کران کاهش پیدا می‌کند ولی اگر x از طرف راست به ۰ نزدیک شود، مقدار تابع مجدداً افزایش پیدا می‌کند. برای تابع h وضعیت متفاوت است!

در مثال ۳۶، هیچ‌یک از تابع‌ها در نقطه‌ی ۰ حد ندارند (چرا؟). ولی همان‌طورکه تجربه شد، رفتار تابع‌های f و g با h متفاوت است (آیا می‌توانید شرح دهید؟). پس از این مقدمه **حد بی‌نهایت** را تعریف می‌کنیم :

تعریف: الف) اگر تابع f در یک همسایگی چپ یا راست یا هردو a تعریف شده باشد، می‌گویند وقتی x به a نزدیک می‌شود، مقدار تابع **بدون کران افزایش می‌یابد** اگر برای هر $M>0$، عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر x از دامنه f که در $0<|x-a|<\delta$ صدق کند، آن‌گاه $f(x)>M$ و می‌نویسند

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

ب) اگر تابع f در یک همسایگی چپ یا راست یا هردو a تعریف شده باشد، می‌گویند وقتی x به a نزدیک می‌شود، مقدار تابع **بدون کران کاهش می‌یابد** اگر برای هر $M>0$ ،عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر x از دامنه f که در $0<|x-a|<\delta$ صدق کند، آن‌گاه $f(x)<-M$ و می‌نویسند

$$\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

ج) اگر تابع f در بازه‌ی (a,c) تعریف شده باشد، می‌گویند وقتی x در این بازه به a نزدیک می‌شود، مقدار تابع **بدون کران افزایش می‌یابد** اگر برای هر $M>0$، عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد که به‌ازای هر x که در $a<x<a+\delta$ صدق کند، آن‌گاه $f(x)>M$ و می‌نویسند

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$$

د) اگر تابع f در بازه‌ی (a,c) تعریف شده باشد، می‌گویند وقتی‌که x در این بازه به a نزدیک می‌شود، مقدار تابع **بدون کران کاهش می‌یابد** اگر برای هر $M>0$ عدد $\delta>0$ وجود داشته باشد که

به‌ازای هر x که در $a < x < a+\delta$ صدق کند، آن‌گاه $f(x) < -M$ و می‌نویسند

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$$

به همین ترتیب $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ را نیز می‌توان تعریف کرد.

نکته: نمایش، $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ یا $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ فقط یک علامتگذاری است و همان‌طورکه در مثال ۳۶ دیدیم در هریک از این حالت‌ها، تابع f حد ندارد.

مثال ۳۷: در موردتابع‌های مثال ۳۶، می‌توان ثابت کرد که

$$\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$$

ولی h از این قانون‌ها تبعیت نمی‌کند، زیرا برای $M = 1 > 0$، عدد $\delta > 0$ وجود ندارد که اگر $0 < |x - 0| < \delta$ آن‌گاه $h(x) > M$. می‌نویسیم $x_0 = \frac{1}{10^k}$ برای $k \in \mathbb{N}$. k را آن‌قدر بزرگ می‌گیریم که $|x_0| < \delta$. داریم $h(x_0) = 0 \le 1$، که با $h(x) > M$ تناقض دارد. پس

$$\lim_{x\to 0} h(x) \neq +\infty$$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که

$$\lim_{x\to 0^+} h(x) \neq +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} h(x) \neq -\infty$$
$$\lim_{x\to 0^-} h(x) \neq +\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^-} h(x) \neq -\infty$$

قضیه‌ی ۱۷: اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه

الف) $$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$$

ب) $$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^n} = \begin{cases} +\infty & \text{زوج } n \\ -\infty & \text{فرد } n \end{cases}$$

نکته‌ی ۱: می‌توان ثابت کرد که $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x) = +\infty$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

نکته‌ی ۲: می‌توان از قضیه‌ی ۱۷ نتیجه گرفت که اگر n زوج باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to ۰} \frac{۱}{x^n} = +\infty$$

مثال ۳۸:

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x^{۵}} = +\infty \quad , \quad \lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x^{۵}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{۱}{x^{۶}} = \lim_{x\to ۰^-} \frac{۱}{x^{۶}} = \lim_{x\to ۰} \frac{۱}{x^{۶}} = +\infty$$

(چرا؟).

در اینجا قضیه‌ی مهم دیگری را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱۸: فرض می‌کنیم برای عدد حقیقی a و $\lim_{x\to a} g(x) = M > ۰$ در این صورت

الف) اگر f(x) در یک همسایگی محذوف a مثبت و حدش در a صفر باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

ب) اگر f(x) در یک همسایگی محذوف a منفی و حدش در a صفر باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

نکته‌ی ۱: می‌توان ثابت کرد که $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ اگر و تنها اگر $\lim_{x\to a} (-f(x)) = -\infty$.

نکته‌ی ۲: قضیه‌ی ۱۸ برای حالت $M<۰$ به شرح زیر است:

الف) اگر f(x) در یک همسایگی محذوف a مثبت و حدش در a صفر باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty$$

ب) اگر f(x) در یک همسایگی محذوف a منفی و حدش در a صفر باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$$

نکته‌ی ۳: می‌توان نشان داد که اگر $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ و یا $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$، آن‌گاه $\lim_{x\to a} \frac{۱}{f(x)} = ۰$.

نکته‌ی ۴: قضیه‌ی ۱۸ و نکته‌های ۱، ۲ و ۳ نیز در حالت $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ نیز برقرارند.
برای نمایش نحوه‌ی استفاده از قضیه‌ی ۱۸ به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۳۹:

$$\lim_{x \to ۳^-} \frac{x^۲ + x + ۲}{x^۲ - ۲x - ۳} = -\infty$$

چون $\lim_{x \to ۳^-}(x^۲ + x + ۲) = ۱۴ > ۰$ و $\lim_{x \to ۳^-}(x^۲ - ۲x - ۳) = ۰$ پس شرایط قضیه برقرار است. اما $x^۲ - ۲x - ۳ = (x - ۳)(x + ۱)$. اگر بازه‌ی $(۳-\delta \,, ۳)$ را آن‌قدر کوچک انتخاب کنیم که ۱−، ریشه‌ی دیگر چندجمله‌ای در داخل این بازه نباشد، مثلاً $\delta = ۱$، در این صورت برای تمام $x \in (۲, ۳)$، x بین دو ریشه است و درنتیجه

$$x^۲ - ۲x - ۳ < ۰$$

(یا به‌عبارتی اگر $x \in (۲, ۳)$ آن‌گاه $x + ۱ > ۰$ و $(x - ۳) < ۰$، پس $(x - ۳)(x + ۱) < ۰$.) و درنتیجه

$$\lim_{x \to ۳^-} \frac{x^۲ + x + ۲}{x^۲ - ۲x - ۳} = -\infty$$

در این‌جا مثال دیگری را بحث می‌کنیم که با تغییری به شکل یکی از موارد قضیه‌ی ۱۸ تبدیل می‌شود.

مثال ۴۰:

$$\lim_{x \to ۲^+} \frac{\sqrt{x^۲ - ۴}}{x - ۲} = +\infty$$

چون $x \to ۲^+$، پس $x > ۲$. بنابراین $x - ۲ > ۰$ و $x + ۲ > ۰$، لذا

$$\frac{\sqrt{x^۲ - ۴}}{x - ۲} = \frac{\sqrt{(x - ۲)(x + ۲)}}{\sqrt{(x - ۲)(x - ۲)}} = \frac{\sqrt{x + ۲}}{\sqrt{x - ۲}}$$

توجه کنید که $x > ۲$ نتیجه می‌دهد $x - ۲ \neq ۰$ و بنابراین می‌توانیم عامل ناصفر $\sqrt{x - ۲}$ را از صورت و مخرج حذف کنیم، و

$$\lim_{x \to ۲^+} \sqrt{x + ۲} = ۲ > ۰ \,, \quad \lim_{x \to ۲^+} \sqrt{x - ۲} = ۰$$

پس

$$\lim_{x \to ۲^+} \frac{\sqrt{x^۲ - ۴}}{x - ۲} = +\infty$$

تمرین‌ها

۱ــ با استفاده از قضیه‌ها، نشان دهید

الف) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{1}{(x-5)^6}=+\infty$.

ب) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x^2}=+\infty$.

ج) $\lim\limits_{x\to 0}(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2})=-\infty$.

د) $\lim\limits_{x\to -3}\left|\dfrac{5-x}{3+x}\right|=+\infty$.

۲ــ با استفاده از قضیه‌ها، نشان دهید

الف) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{3+x^2}}{x}=-\infty$.

ب) $\lim\limits_{x\to 4^+}\dfrac{\sqrt{x^2-4}}{x-4}=+\infty$.

ج) $\lim\limits_{x\to 2^+}(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{2}{(x-2)^2})=-\infty$.

۳ــ a و b را طوری تعیین کنید که

$$\lim_{x\to 3}\frac{x}{x^2+ax+b}=+\infty$$

۴ــ رفتار تابع f را وقتی x به سمت مقادیر داده‌شده میل می‌کند بررسی کنید.

الف) $f(x)=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-2}$ وقتی $x\to 2^-$.

ب) $f(x)=\dfrac{[x]-4}{x-4}$ وقتی $x\to 4^-$.

قضیه‌های حدّ بی‌نهایت

در این قسمت قضیه‌های مربوط به حد حاصل‌جمع و حد حاصل ضرب تابع‌ها را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ۱۹:

الف) اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$ (یا $\lim\limits_{x\to a}g(x)=+\infty$)، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))=+\infty$.

ب) اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ (یا $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$)، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$.

قضیه‌ی ۲۰: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ و $L \neq 0$، آن‌گاه

الف) برای $L > 0$ داریم $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$.

ب) برای $L < 0$ داریم $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$.

قضیه‌ی ۲۱: اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x) = L$ و $L \neq 0$، آن‌گاه

الف) برای $L > 0$ داریم $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = -\infty$.

ب) برای $L < 0$ داریم $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = +\infty$.

مثال ۴۱: الف) چون $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{x-2} = \frac{1}{2}$، پس

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x-2}\right) = +\infty$$

ب) چون $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0}(x+2) = 2$، پس

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x^2} = +\infty$$

نکته: در قضیه‌های ۱۹، ۲۰ و ۲۱، $x \to a^+$ یا $x \to a^-$ می‌تواند جایگزین $x \to a$ شود.

مثال‌های زیر نشان می‌دهند درصورتی که شرایط قضیه‌های فوق برقرار نباشد نمی‌توان از آن‌ها استفاده کرد و این نه‌تنها نکته‌ای در مورد این قضیه‌هاست بلکه در مورد هر قضیه‌ای اگر شرایط برقرار نباشد، امکان غلط‌بودن نتیجه وجود دارد. پس برای به‌کارگیری قضیه‌ها باید شرایط آن‌ها برقرار باشد.

مثال ۴۲:

الف) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$، اما $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{1+x}{x^2}$، که

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1+x}{x^2} = +\infty$$

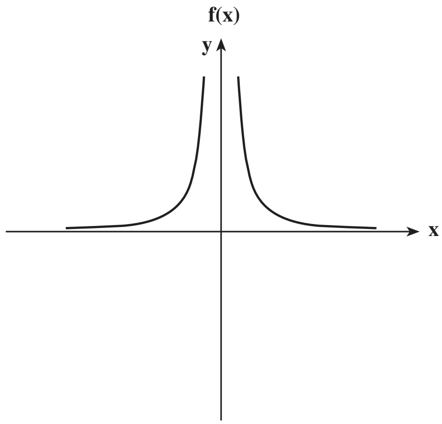
ب) $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{-1}{x} = +\infty$، ولی $\frac{1}{x} + (-\frac{1}{x})$، پس

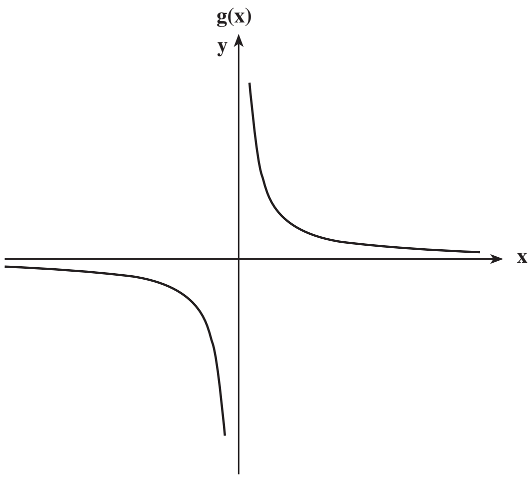
$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x} + \left(-\frac{1}{x}\right)\right) = 0$$

ج) $\lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0$ و $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2} = +\infty$ ، اما $x^3\,\frac{1}{x^2} = x$ ، که $\lim\limits_{x\to 0} x^3\,\frac{1}{x^2} = 0$

مجانب قائم

مثال ۴۳: به نمودار هریک از تابع‌های $f(x)=\frac{1}{x^2}$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ در اطراف نقطه‌ی 0 توجه کنید :





این دو تابع در بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,\infty)$ پیوسته‌اند ولی در نقطه‌ی 0 تعریف نشده‌اند، از طرفی می‌دانیم $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to 0^-} g(x) = -\infty$ خط $x=0$ را در هر دو حالت مجانب قائم نمودار می‌گویند.

تعریف : **خط** $x = a$ **را مجانب قائم نمودار تابع** f **گویند هرگاه حداقل یکی از موارد زیر** برقرار باشد :

الف) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$.

ب) $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$.

ج) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$.

د) $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

مثال ۴۴: خط $x = ۳$ **مجانب قائم تابع**

$$f(x) = \frac{x^۲ + x + ۲}{x^۲ - ۲x - ۳}$$

است (چرا؟).

تمرین‌ها

۱ــ مطلوب است :

الف) $\lim\limits_{x \to -۴^-} \left(\frac{۲}{x^۲ + ۳x - ۴} - \frac{۳}{x + ۴}\right)$.

ب) $\lim\limits_{x \to -۳^-} \frac{x^۳ + ۹x^۲ + ۱۲x}{x^۲ + x - ۱۲}$.

۲ــ برای هریک از تابع‌های زیر مجانب‌های قائم را پیدا کنید.

الف) $f(x) = \frac{x^۲ + x - ۲}{x^۲ - x - ۶}$.

ب) $g(x) = \frac{۱}{x^۲ + ۵x - ۶}$.

۳ــ الف) ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ و g در یک همسایگی محذوف a کراندار باشد، آن‌گاه $\lim\limits_{x \to a} (f(x) + g(x)) = +\infty$.

ب) ثابت کنید $\lim\limits_{x \to ۰} \left(\frac{۱}{x^۲} + [x]\right) = \infty$.

ج) ثابت کنید $\lim\limits_{x \to ۰^+} \left(\frac{۱}{x} + \sin\frac{۱}{x}\right) = \infty$.

۳ــ۱۰ــ رفتار تابع در بی‌نهایت

تاکنون رفتار تابع را در یک عدد حقیقی بررسی می‌کردیم. اما اگر تابعی روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی $(-\infty, \infty)$ یا بازه‌هایی شبیه (a,∞) یا $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد آن‌گاه بررسی مقادیر تابع وقتی که x خیلی بزرگ می‌شود($x \to +\infty$) یا خیلی کوچک می‌شود ($x \to -\infty$) در برخی از مسائل کاربرد دارد.

مثال زیر نمونه‌ای از کاربرد مسئله است.

مثال ۴۵: رابطه‌ی بین مقاومت موجود در یک مدار (R)، شدت جریان (I) و اختلاف پتانسیل دو سر یک مدار (V) به‌صورت زیر است:

$$V = RI$$

اگر اختلاف‌پتانسیل ثابت، ولی مقاومت خیلی زیاد شود، آن‌گاه شدت جریان خیلی کوچک می‌شود.

حال برای تعیین نحوه‌ی بررسی، مثال زیر را در نظر می‌گیریم:

مثال ۴۶: جدول‌های زیر مقادیر تابع‌های داده‌شده را برای xهای بزرگ و کوچک نمایش می‌دهند.

$$f(x) = \frac{۱}{x}$$

$$g(x) = \frac{۱}{|x|}$$

$$h(x) = x$$

$$i(x) = |x|$$

تابع‌های f و g در بازه‌های $(۰,\infty)$ و $(-\infty, ۰)$ و تابع‌های h و i روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی $(-\infty, \infty)$ تعریف شده‌اند.

x	−۱۰	−۱۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰۰
f(x)	−۰/۱	−۰/۰۱	−۰/۰۰۱	−۰/۰۰۰۱	−۰/۰۰۰۰۱
g(x)	+۰/۱	+۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱
h(x)	−۱۰	−۱۰۰	−۱۰۰۰	−۱۰۰۰۰	−۱۰۰۰۰۰
i(x)	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰

x	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰
f(x)	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱
g(x)	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱
h(x)	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰
i(x)	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰

همان‌طوری که مشاهده می‌شود هرقدر x بزرگ‌تر شود ($x\to+\infty$) تابع‌های f و g به ۰ نزدیک‌تر می‌شوند و هرقدر بخواهیم می‌توانیم با بزرگ‌گرفتن x، مقادیر f و g را به ۰ نزدیک کنیم. همین نتیجه برای تابع‌های f و g با کوچک‌گرفتن x ($x\to-\infty$) نیز حاصل می‌شود. اما در مورد تابع‌های h و i وضعیت متفاوت است. (شرح دهید!)

تعریف: اگر تابع f در بازه‌ی (a,∞) تعریف شده باشد و وقتی که x به اندازه‌ی کافی بزرگ انتخاب شود و مقدار تابع هر اندازه‌ی دلخواه به عدد ثابت L نزدیک باشد یعنی برای هر $\varepsilon>0$، عدد $M>0$ وجود داشته باشد که اگر $x>M$، آن‌گاه $|f(x)-L|<\varepsilon$، می‌گویند وقتی x به بی‌نهایت میل کند f به عدد L میل می‌کند و می‌نویسند :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=L$$

تعریف: اگر تابع f در بازه‌ی $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد و وقتی که x به اندازه‌ی کافی کوچک انتخاب شود و مقدار تابع هر اندازه‌ی دلخواه به عدد ثابت L نزدیک باشد یعنی برای هر $\varepsilon>0$، عدد $M>0$ وجود دارد که اگر $x<-M$، آن‌گاه $|f(x)-L|<\varepsilon$، می‌گویند وقتی x به منهای بی‌نهایت میل کند f، به عدد L میل می‌کند و می‌نویسند :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=L$$

مثال ۴۷:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

برای هر $\varepsilon>0$، اگر $M=\frac{1}{\varepsilon}$ آن‌گاه برای $x>M$ داریم $\frac{1}{x}<\varepsilon$ یا $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$، یعنی $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ و برای $x<-M$ (چون x منفی است) $-\frac{1}{x}<\varepsilon$ یا $\left|\frac{1}{x}-0\right|<\varepsilon$ یعنی $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$.

قضیه‌ی ۲۲: اگر n یک عدد طبیعی باشد، آن‌گاه

الف) $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^n}=0$

ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$

قضیه‌ی ۲۳: اگر $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=L_1$ و $\lim_{x\to\pm\infty} g(x)=L_2$، آن‌گاه

الف) $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)\pm g(x))=L_1\pm L_2$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)g(x))=L_۱L_۲$

ج) اگر $g(x)\neq ۰$ و $L_۲\neq ۰$ $\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{L_۱}{L_۲}$

نکته: قضیه ۲۳ برای حالتی که x به سمت $-\infty$ میل می‌کند نیز درست است.

مثال ۴۸: می‌توان نشان داد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۱+x}{x-۲x^۳}=۰$ زیرا

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{۱+x}{x-۲x^۳}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{۱}{x^۳}+\frac{۱}{x^۲}}{\frac{۱}{x^۲}-۲}=\frac{۰}{-۲}=۰$$

به همین ترتیب

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۱+x}{x-۲x^۳}=۰$$

(چرا؟)

مثال ۴۹: می‌خواهیم در مورد $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x\operatorname{Arctan}x}{۱+x}$ تحقیق کنیم. با توجه به تعریف تابع Arctanx روی $(-\infty,\ \infty)$ و صعودی اکیدبودن آن نتیجه می‌شود $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{Arctan}x=\dfrac{\pi}{۲}$ و نیز $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x}{۱+x}=۲$ بنابراین $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{۲x\operatorname{Arctan}x}{۱+x}=\pi$.

نکته: اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ ، آن گاه دنباله $\{f(n)\}$ نیز به L همگراست.

مثال ۵۰: اگر $f(x)=\begin{cases}۱ & [x]\ \text{فرد}\\ ۰ & [x]\ \text{زوج}\end{cases}$ می‌توان ثابت کرد که $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ وجود ندارد.

چون اگر $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=L$ ، آن‌گاه براساس نکته فوق باید دنباله $\{f(n)\}$ نیز به L همگرا باشد ولی دنباله

$$f(n)=\begin{cases}۱ & n\ \text{فرد}\\ ۰ & n\ \text{زوج}\end{cases}$$

واگراست و این یک تناقض است.

مجانب‌های افقی و مایل

تعریف: خط $y=L$ را مجانب افقی نمودار تابع f گویند هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد :

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

مثال ۵۱: مجانب‌های افقی تابع $\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}$ خطوط $y=۱$ و $y=-۱$ هستند.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x^{۲}}}}=۱$$

و

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۱}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x}{-x}}{\sqrt{۱+\frac{۱}{x^{۲}}}}=-۱$$

در مثال ۴۶، تابع‌های h و i با افزایش مقدار x، بدون کران افزایش می‌یابند و با کاهش x، h بدون کران کاهش و i بدون کران افزایش می‌یابد. پس می‌توان گفت

$$\lim_{x\to+\infty} h(x)=\lim_{x\to+\infty} i(x)=\infty$$

و $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} i(x)=\infty$ نمونه‌های فوق به‌طورکلی به شکل زیر تعریف می‌شوند :

تعریف:

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ ، اگر برای هر $M_{۱}>۰$ ، عدد $M_{۲}>۰$ وجود داشته باشد که اگر $x>M_{۲}$ ، آن‌گاه $f(x)>M_{۱}$.

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ ، اگر برای هر $M_{۱}>۰$ ، عدد $M_{۲}>۰$ وجود داشته باشد که اگر $x>M_{۲}$ ، آن‌گاه $f(x)<-M_{۱}$.

ج) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ ، اگر برای هر $M_{۱}>۰$ ، عدد $M_{۲}>۰$ وجود داشته باشد که اگر $x<-M_{۲}$ ، آن‌گاه $f(x)>M_{۱}$.

د) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ ، اگر برای هر $M_{۱}>۰$ ، عدد $M_{۲}>۰$ وجود داشته باشد که اگر $x<-M_{۲}$ ، آن‌گاه $f(x)<-M_{۱}$.

قضیه‌ی ۲۴: اگر $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$ و $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=L$ ، که در آن $L\neq 0$ ، آن‌گاه

الف) اگر $L>0$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)f(x)=\infty$.

ب) اگر $0>L$ ، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)f(x)=-\infty$.

مثال ۵۲:

الف)

$$\lim_{x\to\infty}(x^3-3x^2+5)=\lim_{x\to\infty}x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}\right)=\infty$$

ب)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x+5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{5}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{5}{x}}=\infty$$

(چرا؟).

در پایان این قسمت مفهوم **مجانب مایل** را تعریف می‌کنیم.

تعریف: خط $y=ax+b$ مجانب مایل نمودار تابع $f(x)$ است، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

الف) $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)-(ax+b)|=0$.

ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}|f(x)-(ax+b)|=0$.

مثال ۵۳: اگر $f(x)=\frac{x^2+1}{x+5}$ ، آن‌گاه

$$f(x)=x-5+\frac{26}{x+5}$$

و چون $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{26}{x+5}=0$ ، پس $\lim\limits_{x\to+\infty}|f(x)-(x-5)|=0$ یعنی $y=x-5$ مجانب مایل نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+1}{x+5}$ است.

اگر تابع f در یک بازه شامل بازه‌ی $(c,+\infty)$ تعریف شده و خط $y=ax+b$ مجانب مایل

نمودار آن باشد، با درنظرگرفتن $h(x)=f(x)-ax-b$ طبق تعریف مجانب مایل داریم $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$.

حال می‌نویسیم :

$$a=\frac{f(x)}{x}-\frac{b}{x}-\frac{h(x)}{x}$$

درنتیجه

$$(1)\quad a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$$

و همچنین

$$(2)\quad b=f(x)-ax-h(x)$$

و یا

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)$$

بدیهی است که وقتی خط $y=ax+b$ مجانب نمودار تابع $y=f(x)$ است که حدهای (۱) و (۲) وجود داشته باشند.

به طریق مشابه می‌توان نشان داد که اگر تابع f در یک بازه شامل بازه‌ی $(-\infty, c)$ تعریف شده و $y=ax+b$ مجانب مایل نمودار آن باشد، آن‌گاه

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad \text{و} \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b$$

(چرا؟)

مثال ۵۴: برای تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$

$$a_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=1 \quad \text{و} \quad a_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=-1$$

و

$$b_1=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}-x\right)=0$$

و

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+x\right)=0$$

پس خط‌های $y = x$ و $y = -x$ مجانب‌های مایل نمودار تابع فوق‌اند.

تمرین‌ها

۱ــ حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{۳x^{۲} + ۱}{۲x^{۲} + ۵}$$

ب)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x}(x + ۱)}{(۲\sqrt{x} + ۵)^{۲}(۱ - \sqrt{x})}$$

ج)

$$\lim_{x \to \infty} (\sqrt{x^{۲} + x} - x)$$

۲ــ ثابت کنید اگر P_n و Q_n دو چندجمله‌ای با درجه ی n باشند و a_n ضریب x^n در P_n و b_n ضریب x^n در Q_n باشند، آن‌گاه

$$\lim_{x \to \infty} \frac{P_n(x)}{Q_n(x)} = \frac{a_n}{b_n}$$

۳ــ مجانب‌های افقی و مایل هریک از تابع‌های زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف)

$$f(x) = \frac{۴x}{x^{۲} + ۵}$$

ب)

$$f(x) = \frac{x^{۳}}{x^{۲} - ۱}$$

ج)

$$f(x) = x + \sqrt{x^{۲} + ۲x}$$

د)

$$f(x) = x\sqrt{\frac{x - ۱}{x + ۱}}$$

حد

ریاضی‌دان‌ها حتی قبل از این‌که بتوانند مفهوم دقیق حد را بیان کنند، در مورد آن بحث می‌کرده‌اند. یونانیان باستان درکی از مفهوم حد داشته‌اند. مثلاً ارشمیدس مقدار تقریبی 2π را با استفاده از محیط چندضلعی‌های منتظم محاط در دایره به شعاع واحد، وقتی که تعداد اضلاع بدون کران افزایش می‌یابد به‌دست آورد. در قرون وسطی نیز تا زمان رنسانس انواع مفاهیم حد برای به‌دست‌آوردن مساحت شکل‌های مختلف به‌کار رفته است.

نیوتن و لابنیتس در قرن هفدهم، درک شهودی خوبی از حد داشته و حتی حدهای پیچیده‌ای را نیز محاسبه کرده‌اند. اما نه آن‌ها و نه در آن قرن، دانشمندان دیگر تعریف دقیقی از حد را ارائه نکرده‌اند.

یک قرن پس از پیشرفت حساب دیفرانسیل و انتگرال، آلمبرت در سال ۱۷۵۴ عنوان کرد که پایه‌ی منطقی مباحث این رشته از دانش بشری مفهوم حد است. کُشی در اوایل قرن نوزدهم حساب دیفرانسیل و انتگرال را به شکلی شبیه آنچه در حال حاضر می‌خوانیم ارائه داد:

«وقتی که مقادیر متوالی که به یک متغیر نسبت داده می‌شود، بی‌نهایت به عدد ثابتی نزدیک شوند، به‌طوری که اختلاف آن‌ها از مقدار ثابت به هر اندازه کوچک قابل انتخاب باشد، این مقدار ثابت را حدّ همه مقادیر متغیر می‌گویند.»

اگرچه تعریف او از حد، باز هم دقیق نبود ولی او قدم بزرگی برای رسیدن به تعریف دقیق فعلی برداشت.

تا این‌که سرانجام ویراشتراس در قرن نوزدهم تعریف دقیق حد را مطرح کرد که همواره مورد استناد ریاضی‌دانان است و در این کتاب نیز آورده شده است.

فصل چهارم

مشتق (۱)

در این فصل پس ازمعرفی مفهوم مشتق، چند قضیه درباره‌ی مشتق بیان می‌کنیم و سپس به برخی از کاربردهای آن می‌پردازیم.

۴ـ۱ـ مقدمه

سرعت را چگونه اندازه‌گیری می‌کنیم؟ اگر اتومبیلی مسافت بین دو شهر را که ۱۲۰ کیلومتر است در دو ساعت بپیماید، می‌گوییم سرعت متوسط این اتومبیل ۶۰ کیلومتر در ساعت بوده است ولی این بدین معنی نیست که عقربه‌ی سرعت‌سنج اتومبیل همواره عدد ۶۰ را نشان داده است. از طرفی اگر سانحه‌ی تصادفی برای این اتومبیل رخ دهد و گزارش کارشناس بدین گونه باشد که «اتومبیل هنگام تصادف سرعتی برابر ۱۴۰ کیلومتر داشته است» چه تعبیری می‌توان داشت؟ در این‌جا می‌توان گفت که در لحظه‌ی تصادف عقربه‌ی سرعت‌سنج عدد ۱۴۰ را نمایش داده و می‌گوییم سرعت لحظه‌ای برابر ۱۴۰ بوده است. قبلاً در دروس فیزیک مشاهده کرده‌اید که سرعت متوسط، نسبت (خارج قسمت) مسافت طی‌شده به طول زمان لازم برای این کار است و سرعت لحظه‌ای متحرک در یک زمان خاص، مقدار حدّی همین سرعت متوسط است، هرگاه طول زمان را کوچک و کوچک‌تر کنیم.

مثال۱: (سرعت لحظه‌ای) : فرض کنید جسمی هنگام سقوط آزاد از حالت سکون مسافتی برابر $S(t)=5t^2$ متر را در t ثانیه طی کند. مسافت طی‌شده توسط این متحرک را برای چند مقدار مشخص t در جدول صفحه‌ی بعد مشاهده می‌کنید :

t	۱	۱/۰۱	۱/۱	۲	۳
$S(t)$	۵	۵/۱۰۰۵	۶/۰۵	۲۰	۴۵

سرعت متوسط این متحرک در فاصله‌ی زمانی $t=۱$ تا $t=۲$ برابر است با

$$\frac{S(۲)-S(۱)}{۲-۱}=\frac{۲۰-۵}{۱}=۱۵ \text{ متر در ثانیه}$$

همچنین سرعت متوسط این متحرک در فاصله‌ی زمانی $t=۱$ تا $t=۱/۱$ ثانیه برابر است با :

$$\frac{S(۱/۱)-S(۱)}{۱/۱-۱}=\frac{۶/۰۵-۵}{۰/۱}=۱۰/۵ \text{ متر در ثانیه}$$

و بالاخره سرعت متوسط این متحرک در فاصله‌ی زمانی $t=۱$ تا $t=۱/۰۱$ ثانیه برابر است با :

$$\frac{S(۱/۰۱)-S(۱)}{۱/۰۱-۱}=\frac{۵/۱۰۰۵-۵}{۰/۰۱}=۱۰/۰۵ \text{ متر در ثانیه}$$

در این‌جا می‌توان با کوچک‌ترکردن فاصله‌ی زمانی، به سرعت لحظه‌ای در $t=۱$ رسید.

اگر سرعت متوسط متحرک را در فاصله‌ی زمانی $t=a$ تا $t=a+h$ با $\overline{V}$ نمایش دهیم، آن‌گاه

$$\overline{V}=\frac{S(a+h)-S(a)}{h}$$

V سرعت لحظه‌ای متحرک در $t=a$ برابر خواهد شد با :

$$V=\lim_{h\to ۰}\frac{S(a+h)-S(a)}{h}$$

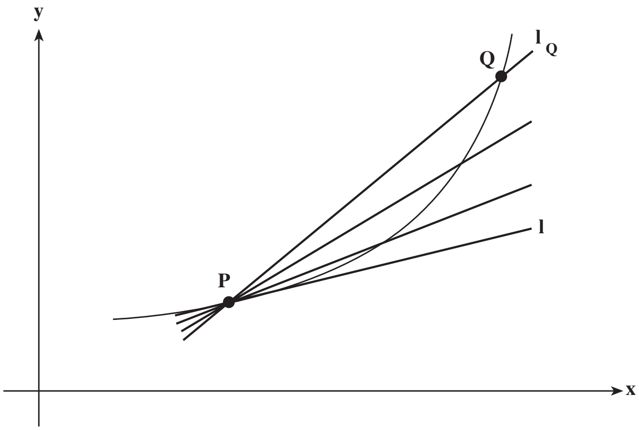
سرعت لحظه‌ای این متحرک در $t=۱$ برابر است با

$$\lim_{h\to ۰}\frac{S(۱+h)-S(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۵(۱+h)^۲-۵}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۱۰h+۵h^۲}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}(۱۰+۵h)=۱۰ \text{ متر در ثانیه}$$

مثال ۲ : (خط مماس) نقطه‌ی $P(a,f(a))$ را روی نمودار تابع f در نظر بگیرید. اگر Q نقطه‌ی دیگری روی نمودار f باشد، خط قاطع که از نقاط P و Q می‌گذرد را l_Q می‌نامیم. اکنون اگر اجازه دهیم که نقطه‌ی Q روی نمودار f به P نزدیک شود، خط l_Q حول نقطه‌ی P می‌چرخد و درصورتی

که شرایط مناسب باشد به سمت خطی که از نقطه‌ی P می‌گذرد و آن‌را l می‌نامیم میل خواهد کرد. به شکل روبه‌رو توجه کنید :



خط l که حالت حدی خطوط قاطعِ گذرنده از P و Q است، هنگامی که Q به P میل می‌کند را، خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی P می‌نامند. (توجه کنید که نقطه‌ی Q می‌تواند در هریک از دو طرف نقطه‌ی P روی نمودار f اختیار شود)

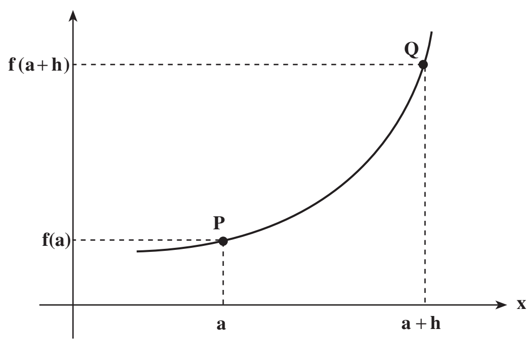
اکنون به بررسی وضعیت شیب[1] (ضریب زاویه) هریک از خطوط فوق می‌پردازیم. اگر مختصات نقطه‌ی Q، $(x,f(x))$ باشد، آن‌گاه شیب خط l_Q برابر است با :

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

اگر $h=x-a$ ، آن‌گاه $f(x)=f(a+h)$ و رابطه‌ی فوق را می‌توان به‌صورت زیر هم نوشت :

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

از آن‌جا که هر نقطه‌ی Q روی نمودار f متناظر با یک hاست



۱ــ شیب یک خط برابر تانژانت زاویه‌ای است که آن خط با جهت مثبت محور x می‌سازد.

و هنگامی که Q به P میل می‌کند، h به صفر میل می‌کند، پس شیب خط l، مماس بر منحنی در P، برابر است با

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(توجه کنید که اگر h منفی باشد، نقطه‌ی Q در سمت چپ P و روی نمودار f قرار دارد).[۱]

همان‌گونه که در مثال‌های ۱ و ۲ مشاهده کردید، دو مفهوم متفاوت از فیزیک و هندسه وقتی به زبان ریاضی بیان شدند یک شکل واحد پیدا کردند. می‌توان مثال‌های دیگری از سایر شاخه‌های علوم مطرح کرد که آن‌ها نیز همین ایده را بیان می‌کنند. به ارائه تعریف دقیق این مفهوم ریاضی می‌پردازیم.

تعریف: برای تابع f که در همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده است، اگر

$$(۱)\qquad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

وجود داشته باشد، می‌گویند f در a مشتق پذیر است و این حدّ یکتا را با $f'(a)$ نمایش داده آن را مشتق تابع f در a می‌نامند.

نکته: گاهی هم می‌نویسند :

$$(۲)\qquad f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

زیرا دیده‌ایم که حدهای (۱) و (۲) معادلند. همچنین گاهی می‌نویسند $\Delta f=f(x)-f(a)$ و $\Delta x=x-a$ و

$$(۳)\qquad f'(a)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

از آن‌جا که (۱)، (۲) و (۳) با هم تفاوتی ندارند، با توجه به موقعیت، می‌توان از هرکدام که مناسب و ساده‌تر است استفاده کرد.

۱ــ اگر f در a پیوسته باشد و $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\infty$ یا $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=-\infty$، آن گاه خط $x=a$ مماس بر منحنی در نقطه P است.

مثال ۳: برای تابع $f(x)=x^3$، داریم :

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \\ &= \lim_{x\to 2}(x^2+2x+4)=12 \end{aligned}$$

مثال ۴: اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $a>0$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} f'(a) &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{a+h}-\sqrt{a}}{h}\times\frac{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}} \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}} \end{aligned}$$

مثال ۵: برای تابع $f(x)=|x|$، $f'(0)$ وجود ندارد. زیرا حد عبارت

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\frac{|h|}{h}$$

وقتی $h\to 0$ به دلیل عدم برابری حدهای راست و چپ وجود ندارد. (چرا؟)

مثال ۶: جدول زیر برخی از مقادیر تابع f را در همسایگی نقطه‌ی ۱ (با دقت سه رقم اعشار) نشان می‌دهد.

x	۰/۹	۰/۹۹	۱	۱/۰۱	۱/۱
f(x)	۱/۵۹۰	۱/۹۵۱	۲	۲/۰۵۱	۱/۶۱۱

از این اطلاعات برای تخمین $f'(1)$ می‌توان بدین صورت استفاده کرد :

$$f'(1)\approx\frac{f(1)-f(0/99)}{1-0/99}=\frac{2-1/951}{0/01}=4/9$$

و یا

$$f'(1)\approx\frac{f(1)-f(1/01)}{1-1/01}=\frac{2-2/051}{-0/01}=5/1$$

توجه کنید که در این‌جا فرض می‌کنیم $f'(1)$ وجود دارد و h را تا حد امکان کوچک اختیار می‌کنیم. اگر همچنین بدانیم که $f(0/999)=1/995$ و $f(1/001)=2/005$ ، آن گاه تخمین بهتری برای $f'(1)$ برابر است با :

$$f'(1)\approx\frac{f(1)-f(0/999)}{1-0/999}=\frac{2-1/995}{0/001}=5/00$$

و یا

$$f'(1)\approx\frac{f(1)-f(1/001)}{1-1/001}=\frac{2-2/005}{-0/001}=5/00$$

۴ــ۲ــ مشتق‌پذیری و پیوستگی

در مثال ۲، هنگام بررسی خط مماس بر نمودار یک تابع، گفتیم که اگر شرایط مناسب باشد خط مماس وجود دارد ؛ این شرایط چیست؟ اگر f در a ناپیوسته باشد آیا نقطه‌ی Q می‌تواند روی نمودار به P میل کند؟ قضیه‌ی زیر که اثبات آن را قبلاً دیده‌اید بیان می‌کند که پیوستگی f در a شرطی لازم است.

قضیه‌ی ۱: اگر تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه در آن نقطه پیوسته است.

نکته: مثال ۵ نشان می‌دهد که عکس قضیه‌ی ۱ برقرار نیست، یعنی ممکن است f در نقطه‌ای پیوسته باشد، ولی در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد. همچنین از قضیه‌ی ۱ نتیجه می‌شود که اگر f در نقطه‌ای ناپیوسته باشد در آن نقطه مشتق ندارد. برای نمونه، چون تابع $f(x)=[x]$ در نقطه‌ی ۱ ناپیوسته است، در آن نقطه مشتق نیز ندارد.

مثال ۷: مشتق تابع $f(x)=mx+b$ در نقطه‌ی دلخواه a برابر است با

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(mx+b)-(ma+b)}{x-a}=m$$

بنابراین مشتق ثابت و برابر m است. همان‌طور که مشاهده کردید و انتظار هم می‌رفت، شیب یک خط عددی ثابت است. این مطلب را با توجه به مثال۲، هنگامی که $f(x)=mx+b$ می‌توان دید، دقت کنید وقتی نمودار f یک خط باشد، مماس بر آن در هر نقطه منطبق بر خود f است.

مثال ۸: معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{4}x^2$ در نقطه‌ی (۲،۱) را می‌توان به این

ترتیب به‌دست آورد که ابتدا شیب خط مماس در نقطه‌ی ۲، $f'(۲)$، را محاسبه کرد :

$$f'(۲)=\lim_{x\to ۲}\frac{\frac{۱}{۴}x^{۲}-۱}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۴}\frac{(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)}=\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{۴}(x+۲)=۱$$

و سپس معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی (۱و۲) با شیب ۱ می‌گذرد را به دست آورد.

$$y=x-۱$$

مثال ۹: تابع $f(x)=\sin x$ در نقطه‌ی ۰ مشتق‌پذیر است زیرا

$$f'(۰)=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(۰+h)-\sin(۰)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\sin(h)}{h}=۱$$

و خط $y=x$ بر نمودار آن در مبدأ مماس است.

مثال ۱۰: به ازای چه مقادیری از m و b تابع f(x) که

$$f(x)=\begin{cases} mx+b & x<a \\ x^{۲} & x\geq a \end{cases}$$

در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر است؟

با توجه به شرط لازم مشتق‌پذیری (قضیه‌ی ۱)، تابع f باید در نقطه‌ی a پیوسته باشد. بنابراین

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\lim_{x\to a^+}f(x)=f(a)$$

یعنی

$$ma+b=a^{۲}$$

و همچنین باید

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

وجود داشته که کافیست حدهای راست و چپ در $h=۰$ موجود و برابر باشند، پس

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{(a+h)^{۲}-a^{۲}}{h}=۲a$$

و

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{m(a+h)+b-(ma+b)}{h}=m$$

بنابراین $m=2a$ و بالاخره

$$b=a^2-ma=-a^2$$

پرسش: چه موقع تابع f در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر نیست؟

همان‌طورکه مشاهده کردید، تابع f در نقطه‌ی a مشتق دارد هرگاه

$$(4)\quad \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

وجود داشته باشد. اگر حداقل یکی از حالت‌های زیر برای تابع f اتفاق بیفتد، f در a مشتق ندارد :

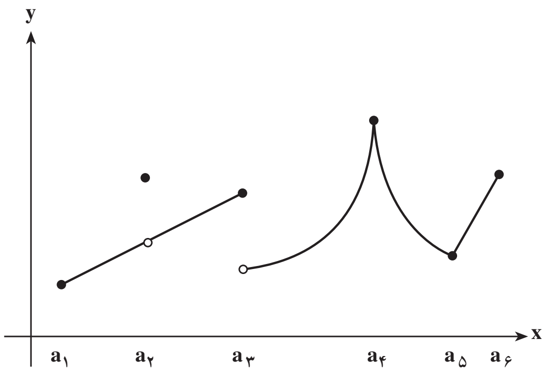
۱ــ f در هیچ همسایگی نقطه a تعریف نشده باشد (مانند $\sqrt{x}$ در نقطه‌ی ۰).

۲ــ f گرچه در همسایگی a تعریف شده ولی در آن نقطه پیوسته نباشد (مانند تابع $[x]$ در نقطه‌ی ۰).

۳ــ در رابطه‌ی (۴) حدهای راست و چپ موجود ولی نابرابر باشند (مانند تابع $|x|$ در نقطه‌ی ۰).

۴ــ در رابطه‌ی (۴) حداقل یکی از حدهای راست و چپ موجود نباشند (مانند تابع $\sqrt[3]{x}$ در نقطه‌ی ۰).

در شکل زیر تابع f با $D_f=[a_1,a_6]$ در شش نقطه‌ی a_1 ، a_2 ، ...، a_6 مشتق ندارد. (چرا؟)



نکته: در صورتی که $\lim_{h\to 0^+}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وجود داشته باشد، آن را مشتق راست تابع f در a نامیده با $f'_+(a)$ نمایش می‌دهند. از طرف دیگر، اگر $\lim_{h\to 0^-}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ وجود داشته باشد،

آن را **مشتق چپ** f در a نامیده با $f'_-(a)$ نمایش می‌دهند. هنگام صحبت از مشتق‌های چپ یا راست، نیازی نیست که تابع در طرف دیگر تعریف شده باشد.

دقت کنید که $f'(a)$ موجود است اگر و تنها اگر $f'_+(a)$ و $f'_-(a)$ موجود و برابر باشند. با توجه به مثال ۵، برای تابع $f(x)=|x|$ در نقطه‌ی ۰ داریم $f'_+(0)=1$ و $f'_-(0)=-1$.

تمرین‌ها

۱ــ مکان متحرکی پس از t ثانیه از مبدأ در جدول زیر برحسب متر داده شده است.

t	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
s(t)	۰	۰/۲۵	۰/۹	۱/۵۵	۳/۲۵	۴/۸

الف) سرعت متوسط متحرک در بازه‌ی $[0,1]$ چقدر است؟

ب) سرعت لحظه‌ای متحرک در $t=0/2$ ثانیه، تقریباً چقدر است؟

۲ــ جسمی روی یک خط راست به‌گونه‌ای حرکت می‌کند که مکان آن در لحظه ی t (برحسب ثانیه) $S(t)=2t^2+2$ متر است.

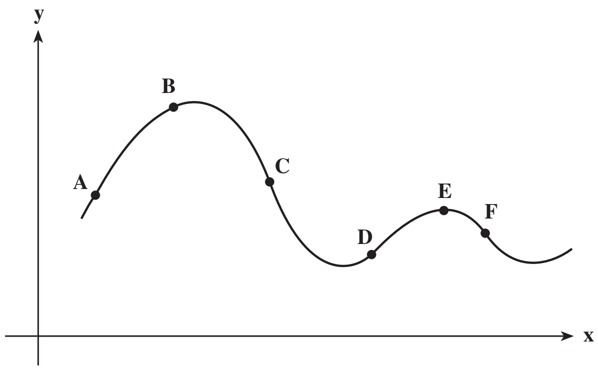
الف) سرعت متوسط متحرک در فاصله‌ی زمانی $2 \le t \le 3$ چقدر است؟

ب) سرعت متوسط متحرک در فاصله‌ی زمانی $2 \le t \le 2/1$ چقدر است؟

ج) سرعت لحظه‌ای متحرک در $t=2$ چقدر است؟

۳ــ اگر جسمی روی محور به‌گونه‌ای حرکت کند که فاصله‌ی آن از مبدأ پس از t ثانیه برابر $S(t)=-t^2+4t$ متر باشد، در چه لحظه‌ای جسم متوقف می‌شود (سرعت لحظه‌ای آن صفر می‌شود)؟

۴ــ شیب تقریبی خط مماس بر نمودار



در تعدادی نقطه در جدول زیر داده شده است. آن نقطه‌ها را تعیین کنید.

شیب	۳	۱	$\frac{۱}{۲}$	۰	۱−	۲−
نقطه						

۵ـ تابع $f(x)=x^{۳}+۱$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار f را رسم کنید.

ب) خط مماس بر نمودار f را در نقطه‌ی (۲,۹) رسم کنید.

ج) شیب این خط مماس را به‌طور تقریبی تعیین کنید.

د) شیب خط قاطع گذرنده از نقطه‌های (۲,۹) و $(۱/۹۹۹, ۱+(۱/۹۹۹)^{۳})$ را محاسبه کنید.

هـ) شیب خط مماس را در نقطه‌ی (۲,۹) دقیقاً تعیین کنید.

۶ـ با استفاده از تعریف مشتق توابع زیر را در نقاط داده‌شده به‌دست آورید:

الف) $f(x)=\sqrt[۳]{x}$ در نقطه‌ی ۱.

ب) $f(x)=\sqrt{x^{۲}+۱}$ در نقطه‌ی ۰.

۷ـ مشتق هریک از تابع‌های زیر را با استفاده از تعریف در نقطه‌ی a تعیین کنید.

الف) $f(x)=۴x^{۲}-۳$.

ب) $g(x)=x^{۴}$.

ج) $h(x)=\frac{۱}{x}$ برای $a\neq ۰$. وضعیت در نقطه‌ی ۰ چیست؟

۸ـ در مورد مشتق‌پذیری هریک از تابع‌های زیر در نقطه‌های داده‌شده بحث کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases} x & x\leq ۰ \\ x^{۲} & x>۰ \end{cases}$ در نقطه‌ی ۰

ب) $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x<۱ \\ ۳ & x=۱ \\ x^{۲}+۳ & x>۱ \end{cases}$ در نقطه‌ی ۱

۹ـ نمودار تابع $f(x)=(x-۱)[x]$ را روی بازه‌ی $[۰,۲]$ رسم کنید و $f'_-(۱)$ و $f'_+(۱)$ و $f'(۱)$ را بیابید.

۱۰ـ نشان دهید که برای تابع $f(x)=\cos x$، $f'(۰)=۰$.

۱۱ــ اگر تابع f در نقطه‌ی ۱ پیوسته باشد، نشان دهید تابع $g(x)=(x-۱)f(x)$ در ۱ مشتق‌پذیر است.

۴ــ۳ــ چند قضیه

استفاده از تعریف برای محاسبه مشتق توابع همواره آسان نیست.

در این قسمت، چند قضیه که محاسبه‌ی مشتق تابع‌ها را ساده می‌کند، بیان و برخی از آن ها را ثابت می‌کنیم.

قضیه‌ی ۲: اگر f و g هر دو در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشند و c یک عدد ثابت باشد، آن‌گاه تابع‌های $f\pm g$ ، cf و fg نیز در a مشتق‌پذیرند و

الف) $(f\pm g)'(a)=f'(a)\pm g'(a)$.

ب) $(cf)'(a)=cf'(a)$.

ج) $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$.

اثبات: قسمت (ج) را ثابت می‌کنیم، اثبات سایر قسمت‌ها به عهده دانش‌آموزان است.

فرض کنید که $F=fg$. در این صورت

$$\begin{aligned}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}&=\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\&=\frac{f(a+h)g(a+h)-f(a)g(a+h)+f(a)g(a+h)-f(a)g(a)}{h}\\&=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}g(a+h)+f(a)\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\end{aligned}$$

و چون f و g هر دو در a مشتق‌پذیرند، پس

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$$

و

$$\lim_{h\to ۰}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=g'(a)$$

علاوه‌بر آن، به دلیل پیوستگی g در a

$$\lim_{h\to ۰}g(a+h)=g(a)$$

بنابراین

$$\lim_{h\to ۰}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

قضیه‌ی ۳: اگر f و g هر دو در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر و g در یک همسایگی a مخالف صفر باشد، آن‌گاه توابع $\frac{۱}{g}$ و $\frac{f}{g}$ در a مشتق‌پذیراند و

$$(\frac{۱}{g})'(a)=\frac{-g'(a)}{g^{۲}(a)}$$

$$(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-f(a)g'(a)}{g^{۲}(a)}$$

اثبات: قسمت الف را ثابت می‌کنیم و اثبات قسمت دوم به عهده دانش‌آموزان است.

تابع $F=\frac{۱}{g}$ در یک همسایگی نقطه‌ی a تعریف شده است. پس برای h که $F(a+h)$ تعریف شده باشد، داریم

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=\frac{۱}{h}\left[\frac{۱}{g(a+h)}-\frac{۱}{g(a)}\right]$$

$$=\frac{۱}{h}\left[\frac{g(a)-g(a+h)}{g(a+h)g(a)}\right]$$

$$=\frac{-۱}{g(a)g(a+h)}\left[\frac{g(a+h)-g(a)}{h}\right]$$

و چون g در a مشتق‌پذیر است، داریم

$$\lim_{h\to ۰}\frac{F(a+h)-F(a)}{h}=\frac{-۱}{g^{۲}(a)}g'(a)$$

مثال ۱۱: هر دو جزء تشکیل‌دهنده تابع $f(x)=x^{۳}+(۴x+۲)$ بنا بر مثال‌های ۳ و ۷ در نقطه‌ی ۲ مشتق‌پذیرند و به‌ترتیب مشتق‌های ۱۲ و ۴ دارند، پس می‌توان گفت :

$$f'(۲)=۱۲+۴=۱۶$$

معادله‌ی خط مماس بر نمودار این تابع در نقطه‌ی $(۲,۱۸)$ برابرِ

$$y=۱۸+۱۶(x-۲)$$

و معادله‌ی خط قائم بر نمودار این تابع در آن نقطه (خطی که بر خط مماس در آن نقطه عمود است)[۱] برابر

$$y=۱۸-\frac{۱}{۱۶}(x-۲)$$

است.

مثال ۱۲: اگر تابع‌های $f_۱$ ، $f_۲$ ، ...، f_n همگی در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشند، چون

$$(f_۱+f_۲+\cdots+f_n)(a)=(f_۱+f_۲+\cdots+f_{n-۱})(a)+f_n(a)$$

با استفاده از استقرا و (بخشِ الفِ) قضیه‌ی ۲ می‌توان نتیجه گرفت که تابع

$$f_۱+f_۲+\cdots+f_n$$

نیز در a مشتق‌پذیر است (چرا؟) و

$$(f_۱+f_۲+\cdots+f_n)'(a)=f'_۱(a)+f'_۲(a)+\cdots+f'_n(a)$$

بنابراین تابع $f(x)=x^۳+۴x+۲+\sqrt{x}$ در نقطه‌ی ۲ مشتق‌پذیر است و داریم

$$f'(۲)=۱۲+۴+\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}=۱۶+\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}$$

قضیه‌ی زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ۴: برای $n\in\mathbb{N}$ ،

الف) تابع $f(x)=x^n$ در هر نقطه‌ی a مشتق‌پذیر است و

$$f'(a)=na^{n-۱}$$

ب) تابع $g(x)=x^{\frac{۱}{n}}$ در هر نقطه‌ی $a\neq ۰$ که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده باشد، مشتق‌پذیر است و

$$g'(a)=\frac{۱}{n}a^{\frac{۱}{n}-۱}$$

۱ــ **یادآوری:** حاصل‌ضرب شیب دو خط عمود بر هم (که هیچ‌یک از آن‌ها افقی نیست) در یک نقطه برابر ۱- است.

مثال ۱۳: چندجمله‌ای درجه‌ی n

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n \qquad (C_n \neq 0)$$

در هر نقطه‌ی a مشتق‌پذیر است و

$$P'_n(a) = c_1 + 2c_2 a + 3c_3 a^2 + \cdots + nc_n a^{n-1}$$

مثال ۱۴: برای $n \in \mathbb{N}$ نشان می‌دهیم تابع $f(x) = x^{-n}$ برای $a \neq 0$ مشتق‌پذیر است و

$$f'(a) = -na^{-n-1}$$

چون $f(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n}$، بنا به قضیه‌ی ۳

$$f'(a) = \frac{-na^{n-1}}{a^{2n}} = -na^{-n-1}$$

مثال ۱۵: برای $m \in \mathbb{N}$ مشتق تابع $f(x) = x^{-\frac{1}{m}}$، در هر نقطه‌ی $a > 0$ وجود دارد، زیرا

$$f(x) = x^{-\frac{1}{m}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{m}}}$$

لذا بنا بر قضیه‌های ۳و ۴

$$f'(a) = \frac{-\frac{1}{m}a^{\frac{1}{m}-1}}{a^{\frac{2}{m}}} = -\frac{1}{m}a^{-\frac{1}{m}-1}$$

مثال ۱۶: مشتق تابع $f(x) = \sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ در نقطه‌ی $a > 0$ وجود دارد، زیرا

$$f(x) = x^{\frac{1}{5}} + x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(a) = \frac{1}{5}a^{-\frac{4}{5}} - \frac{1}{2}a^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{a^4}} - \frac{1}{2\sqrt{a^3}}$$

مثال ۱۷: تابع‌های $f(x) = \sin x$ و $g(x) = \cos x$ در هر نقطه $a \in \mathbb{R}$، مشتق‌پذیرند و $f'(a) = \cos a$ و $g'(a) = -\sin a$ (چرا؟).

تمرین‌ها

۱ــ هر یک از حدهای زیر مربوط به مشتق تابع f در نقطه‌ی a است. f و a را تعیین کنید.

الف) $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{(۳+h)^۲+۲(۳+h)-۱۵}{h}$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\frac{x^۳+x-۱۰}{x-۲}$

آیا تابع‌های به‌دست‌آمده یکتا هستند؟

۲ــ مشتق هر یک از تابع‌های زیر را در نقطه‌ی دلخواه a حساب کنید. آیا برای a شرطی لازم است؟

الف) $f(x)=c^۳$ ب) $f(x)=\tan x$

ج) $f(x)=-۳x^{-۸}+۲\sqrt{x}$

۳ــ معادله‌ی خط مماس و خط قائم بر نمودار تابع $f(x)=۳x^۲-۶x+۱$ را در نقطه‌ی $(۱,-۲)$ بنویسید.

۴ــ در مورد مشتق‌پذیری هر یک از تابع‌های زیر در نقطه‌ی a تحقیق کنید.

الف) $f(x)=x[x]$ $a=۱$

ب) $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x<۱ \\ -۱-۲x & x\geq ۱\end{cases}$ $a=-۱$

۵ــ در مورد مشتق‌پذیری توابع زیر در نقطه $a=۰$ تحقیق کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x\ \sin\frac{۱}{x} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰\end{cases}$$

و

$$g(x)=\begin{cases} x^۲\sin\frac{۱}{x} & x\neq ۰ \\ ۰ & x=۰\end{cases}$$

۴ــ۴ــ تابع مشتق

تاکنون مشتق‌پذیری تابع f را در یک نقطه بررسی کردیم. اکنون می‌خواهیم که تعریف را به کلیه‌ی نقاط یک بازه گسترش دهیم.

تعریف: هرگاه تابع f در تمام نقاط بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه می‌گویند f **روی I مشتق‌پذیر**

است. در این حالت، تابع جدیدی به نام **تابع مشتق** $(f':I \to \mathbb{R})$ وجود دارد که برای هر $x \in I$

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

این تابع را با f' یا y' (وقتی $y = f(x)$) نمایش می‌دهند.

توجه کنید که حتی اگر f در برخی از نقاط I مشتق‌پذیر نباشد، می‌توان تابع مشتق، f'، را روی نقاطی که مشتق f وجود دارد تعریف کرد، یعنی

$$D_{f'} = \{x \in I : \text{وجود دارد } f'(x)\}$$

مثال ۱۸: با توجه به مثال‌هایی که تاکنون مشاهده کردید

الف) تابع $f(x) = x^۲$ روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است و $f'(x) = ۲x$.

ب) تابع $f(x) = \sqrt{x}$ روی $(۰,\infty)$ مشتق‌پذیر است و $f'(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$.

ج) برای تابع $f(x) = |x|$،

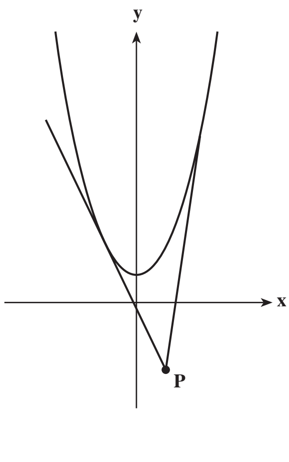
$$f'(x) = \begin{cases} -۱ & x < ۰ \\ \text{وجود ندارد} & x = ۰ \\ ۱ & x > ۰ \end{cases}$$

بنابراین $D_{f'} = (-\infty ,۰) \cup (۰,\infty)$

نکته‌ی ۱: توجه کنید که تابعی که روی بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد، بنا به قضیه‌ی ۱، روی آن بازه پیوسته است.

نکته‌ی ۲: به‌طورکلی، تابع f بر روی مجموعه‌ی $A \subset \mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است هرگاه f در تمام نقطه‌های A مشتق‌پذیر باشد.

مثال ۱۹: از نقطه‌ی $P(۱,-۲)$ می‌توان دو خط مماس بر نمودار $f(x) = x^۲ + ۱$ رسم کرد. می‌خواهیم معادله‌ی این خط‌ها را بیابیم.



اگر محل تماس را A بنامیم، مختصات آن $(a,a^{۲}+۱)$ است. از طرفی چون $f'(x)=۲x$، شیب خط مماس بر نمودار در A، برابر $۲a$ و درنتیجه معادله‌ی خط مماس بر نمودار در A برابر است با

$$y=۱+a^{۲}+۲a(x-a)$$

این خط باید از نقطه‌ی P بگذرد، پس

$$-۲=۱+a^{۲}+۲a(۱-a)$$

و یا

$$a^{۲}-۲a-۳=۰$$

یعنی $a=-۱$ یا $a=۳$. پس معادله‌ی خط‌های مماس عبارتند از

$$y=-۲x \quad \text{و} \quad y=۶x-۸$$

۴ــ۵ ــ مشتق تابع مرکب

هدف اصلی این بخش بیان و چگونگی به‌کارگیری قضیه‌ی مشتق تابع مرکب است، که آن را قاعده‌ی زنجیری نیز می‌نامند. از اثبات قضیه صرف‌نظر شده است.

قضیه‌ی ۵ (قاعده‌ی زنجیری): اگر تابع g در نقطه‌ی a و تابع f در $g(a)$ مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه تابع F=fog نیز در a مشتق‌پذیر است و

$$F'(a)=(fog)'(a)=f'(g(a))g'(a)$$

مثال ۲۰: اگر $f(x)=x^{n}$، که در آن $n\in\mathbb{Z}$، بنا به قضیه‌ی ۵، مشتق تابع

$$f(x)=(g(x))^{n}$$

در هر نقطه‌ی a که g در آن مشتق‌پذیر باشد، وجود داشته و برابر است با

$$F'(a)=n(g(a))^{n-۱}g'(a)$$

البته اگر n منفی باشد، شرط $g(a)\neq۰$ نیز لازم است (چرا؟).

مثال ۲۱: مشتق تابع $F(x)=(x^{۲}+۳x-۱)^{۵}$ در نقطه‌ی دلخواه a برابر است با

$$F'(a)=۵(a^{۲}+۳a-۱)^{۴}(۲a+۳)$$

و مشتق تابع $G(x)=\dfrac{۱}{(x^{۴}+۲x^{۲}+۲)^{۲}}$ در نقطه‌ی دلخواه a برابر است با

$$G'(a)=-۲(a^{۴}+۲a^{۲}+۲)^{-۳}(۴a^{۳}+۴a)$$

(چرا؟)

همان‌طور که مشاهده کردید، تاکنون نشان داده‌ایم که اگر r عدد صحیح (مثبت، منفی یا صفر) و یا عدد گویای $\frac{1}{m}$ (m عدد صحیح مثبت یا منفی) باشد، تابع $f(x)=x^r$ در هر نقطه‌ی $a\neq 0$ که f در همسایگی آن تعریف شده باشد، مشتق‌پذیر است و

$$f'(a)=ra^{r-1}$$

حال نشان می‌دهیم که این امر برای هر عدد گویا نیز درست است.

قضیه‌ی ۶: اگر r یک عدد گویا باشد، آن‌گاه تابع $f(x)=x^r$ در $a\neq 0$، مشروط بر این‌که f در همسایگی a تعریف شده باشد، مشتق‌پذیر بوده و

$$f'(a)=ra^{r-1}$$

اثبات: کافی است $r=\frac{n}{m}$ اختیار و

$$f(x)=x^{\frac{n}{m}}=(x^n)^{\frac{1}{m}}$$

در نظر گرفته شود، در این صورت

$$f'(a)=\frac{1}{m}(a^n)^{\frac{1}{m}-1}(na^{n-1})$$

$$=\frac{n}{m}a^{\frac{n}{m}-n}a^{n-1}=\frac{n}{m}a^{\frac{n}{m}-1}$$

مثال ۲۲: فرض کنید می‌خواهیم بدانیم تابع $f(x)=(x^4-1)^{\frac{3}{4}}$ در چه نقطه‌هایی مشتق‌پذیر است؟

اولاً توجه کنید که دامنه‌ی تعریف تابع f مجموعه xهایی است که در $|x|\geq 1$ صدق می‌کند. با توجه به این‌که روی بازه‌های $(1,\infty)$ و $(-\infty,-1)$، تابع x^4-1 مخالف صفر و مشتق‌پذیر بوده و نیز تابع $f(x)=x^{\frac{3}{4}}$ در همه‌ی نقاط مثبت x مشتق‌پذیر است، بنا بر قاعده‌ی زنجیری

$$f'(x)=\frac{3}{4}(x^4-1)^{-\frac{1}{4}}(4x^3)=\frac{3x^2}{\sqrt[4]{x^4-1}}$$

تمرین‌ها

۱ــ چه‌قدر طول می‌کشد تا سرعت جسمِ در حالِ سقوطِ مثال ۱، به **۲۵** متر در ثانیه برسد.

۲ــ کلیه‌ی نقاطی را تعیین کنید که خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^{3}-x^{2}$ در آن نقاط افقی باشد.

۳ــ از نقطه‌ی $(2,5)$ دو خط می‌توان به نمودار $f(x)=4x-x^{2}$ مماس کرد. معادله‌های این دو خط کدامند؟

۴ــ یک سفینه‌ی فضایی از چپ به راست روی منحنی $y=x^{2}$ حرکت می‌کند. هرگاه این سفینه موتورهای خود را خاموش کند، از آن لحظه به بعد روی خط مماس بر مسیر در آن نقطه حرکت خواهد کرد. در چه نقطه‌ای موتورها باید خاموش شوند تا سفینه از نقطه‌ی $(4,15)$ بگذرد.

۵ــ برای هر یک از تابع‌های زیر $D_{f'}$ را مشخص کنید.

الف) $f(x)=x^{2}+|x-1|$

ب) $f(x)=[x]$

ج) $f(x)=\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}-1 & x<0\\ 0 & x=0\\ 1 & x>0\end{cases}$

۶ــ اگر $n\in\mathbb{N}$ و

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ x^{n} & x>0\end{cases}$$

برای چه مقادیری از n، تابع f روی $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر است؟

۷ــ اگر بدانیم $f'(0)=1$ ، $g(0)=0$ و $g'(0)=3$. مشتق تابع $F=f\circ g$ را در نقطه‌ی 0 به دست آورید.

۸ــ تابع مشتق را برای تابع‌های زیر به دست آورید.

الف) $f(r)=\sqrt{r^{3}-2r+5}$ ب) $f(x)=\cos^{3}(2x+1)$

۹ــ اگر $g(x)=x^{2}-1$ و $f'(x)=\sqrt{3x+4}$ و $F=f\circ g$ باشد، $F'(x)$ را به دست آورید.

۱۰ــ فرض کنید که تابع f در هر نقطه مشتق‌پذیر است. نشان دهید.

الف) اگر تابع f زوج باشد، تابع f' فرد است.

ب) اگر تابع f فرد باشد تابع f' زوج است.

۱۱ــ اگر $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=[x]$ باشد، مشتق تابع $F=f\circ g$ را در نقاط $a=۱$ و $a=\frac{۳}{۲}$ به دست آورید.

۱۲ــ اگر برای $x>۰$ ، $f'(x)=\frac{۱}{x}$ ، مطلوبست مشتق توابع زیر

الف) $g(x)=f(x^{۲}+۱)$

ب) $g(x)=f(|x|)$ به ازای $x\neq ۰$

۴ــ۶ ــ مشتق تابع ضمنی

می‌توان نشان داد که رابطه $x^{۲}+y^{۲}=۲۵$ می‌تواند دو تابع

$$y=f(x)=\sqrt{۲۵-x^{۲}}$$

$$y=g(x)=-\sqrt{۲۵-x^{۲}}$$

را روی $[-۵,۵]$ تعیین کند. هر دو تابع روی بازه‌ی $(-۵,۵)$ مشتق‌پذیرند، در واقع

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{۲۵-x^{۲}}} \quad \text{و} \quad g'(x)=\frac{-x}{\sqrt{۲۵-x^{۲}}}$$

آیا می‌توان بدون محاسبه‌ی صورت صریح توابع f و g، مشتق آن‌ها را از روی معادله و یا صورت ضمنی تابع به دست آورد؟

با استفاده از قاعده‌ی زنجیری به راحتی می‌توان این کار را انجام داد، مشروط بر این‌که y را تابعی مشتق‌پذیر از x در نظر بگیریم :

$$۲x+۲yy'=۰$$

و از این رابطه y' را به دست می‌آوریم، یعنی $y'=-\frac{x}{y}$. اگر هدف محاسبه‌ی مقدار مشتق در نقطه‌ی ۳ باشد، مقدار y نظیر، ± ۴ است و لذا $y'=\pm\frac{۳}{۴}$. بر حسب این‌که کدام یک از دو تابع f و یا g در نظر گرفته شده باشد.

توجه کنید که معادله‌ی $x^۲+y^۲=۲۵$ می‌تواند صورت ضمنی تابع‌های دیگری از جمله

$$h(x)=\begin{cases}\sqrt{۲۵-x^۲} & -۵\leq x\leq ۳\\ -\sqrt{۲۵-x^۲} & ۳\leq x\leq ۵\end{cases}$$

باشد که در نقطه‌ی ۳ حتی پیوسته نیست پس مشتق ندارد. و لذا، در صورتی از این روش برای محاسبه‌ی مشتق استفاده می‌کنیم، که y مشتق‌پذیر باشد.

مثال ۲۳: برای محاسبه y' از $x^۲+۵y^۳=x+۹$، می‌توان نوشت

$$۲x+۱۵y^۲y'=۱$$

$$y'=\frac{۱-۲x}{۱۵y^۲}\quad (y\neq ۰)$$

مثال ۲۴: می‌خواهیم معادله‌ی خط مماس بر نمودار $x^۳+xy^۲+x^۳y^۵=۳$ را در نقطه‌ی $P(۱,۱)$ بنویسیم. (توجه کنید که نقطه‌ی P روی نمودار قرار دارد.)

ابتدا شیب خط مماس را در این نقطه تعیین می‌کنیم. برای این کار y' را محاسبه می‌کنیم :

$$۳x^۲+y^۲+۲xyy'+۳x^۲y^۵+۵x^۳y^۴y'=۰$$

و

$$y'=-\frac{۳x^۲+y^۲+۳x^۲y^۵}{۲xy+۵x^۳y^۴}$$

که مقدار آن در $(۱,۱)$ برابر -۱ است. بنابراین معادله‌ی خط مماس عبارت است از

$$y=۲-x$$

۴ــ۷ ــ مشتق تابع معکوس

در این قسمت قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که براساس آن ارتباط بین مشتق تابع f و مشتق تابع معکوس آن $f^{-۱}$ مطرح می‌گردد. این قضیه‌ی مشتق تابع معکوس نامیده می‌شود و از اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم. قبل از بیان صورت قضیه توجه شما را به این نکته جلب می‌کنیم که برای وجود $f^{-۱}$ لازم است تابع f تابعی یک به یک باشد. در این بخش فرض می‌کنیم که f در یک همسایگی نقطه‌ی مورد نظر، a، معکوس‌پذیر است.

قضیه‌ی ۷ (مشتق تابع معکوس): اگر تابع f در همسایگی نقطه‌ی a پیوسته و یک به یک بوده و $f'(a)$ موجود و غیر صفر باشد، آن‌گاه تابع f^{-1} در نقطه‌ی $b=f(a)$ مشتق‌پذیر است و

$$(f^{-1})'(b)=\frac{1}{f'(a)}$$

که در آن $a=f^{-1}(b)$.

مثال ۲۵: تابع $y=f(x)=x^3+x$ روی $\mathbb{R}$ یک به یک و پیوسته است. می‌توان نشان داد که مشتق f غیر صفر است. هم‌چنین می‌دانیم که $f(2)=10$. می‌خواهیم بدون یافتن f^{-1} مقدار $(f^{-1})'(10)$ را به دست آوریم.

با توجه به قضیه‌ی ۷

$$(f^{-1})'(10)=\frac{1}{f'(2)}=\frac{1}{13}$$

مثال ۲۶: تابع $y=f(x)=\frac{1+x}{1-x}$ برای $x\neq 1$ (روی بازه‌های $(-\infty,1)$ و $(1,+\infty)$) پیوسته و یک به یک است و مشتق غیر صفر دارد. معکوس آن برابر است با

$$x=f^{-1}(y)=\frac{y-1}{y+1}\quad (y\neq -1)$$

چون $f'(x)=\frac{2}{(1-x)^2}$، پس برای هر $y\neq -1$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{(1-x)^2}{2}$$

$$=\frac{(1-\frac{y-1}{y+1})^2}{2}=\frac{2}{(y+1)^2}$$

مثال ۲۷: تابع

$$y=f(x)=\frac{x}{1+x^2}$$

روی بازه‌ی $(1,+\infty)$ تابعی پیوسته و یک به یک است و تابع مشتق آن

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

به علاوه، چون $f'(۲)=\frac{-۳}{۲۵}$، پس $(f^{-۱})'(\frac{۲}{۵})=\frac{-۲۵}{۳}$ (با محاسبه فرم صریح $f^{-۱}(y)$ و مشتق‌گیری از آن نتیجه فوق را تحقیق کنید).

مثال ۲۸: تابع $h(t)=\text{Arc}\sin t$ در هر نقطه $a\in(-۱,۱)$ مشتق‌پذیر است زیرا اگر $f(b)=\sin b$ و $b=h(a)$، آن‌گاه

$$h'(a)=(f^{-۱})'(a)=\frac{۱}{f'(b)}=\frac{۱}{f'(h(a))}$$

ولی $f'(b)=\cos b$، پس

$$f'(h(a))=\cos(\text{Arc}\sin a)$$
$$=\sqrt{۱-\sin^{۲}(\text{Arc}\sin a)}=\sqrt{۱-a^{۲}}$$

دقت کنید وقتی $-۱<a<۱$، $-\frac{\pi}{۲}<\text{Arc}\sin a<\frac{\pi}{۲}$ و در نتیجه $\cos(\text{Arc}\sin a)>۰$ بنابراین

$$h'(a)=\frac{۱}{\sqrt{۱-a^{۲}}}$$

۴ــ۸ــ مشتق مراتب بالاتر

اگر تابع f روی بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد، یعنی؛ $I\subset D_{f'}$، تابع f' خود ممکن است در نقطه‌ای مثل a و یا همه‌ی نقاط I مشتق‌پذیر باشد. به عبارتی، اگر

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h}$$

موجود باشد، می‌گوییم **مشتق مرتبه‌ی دوم f در a موجود است** و آن را با $f''(a)$ نمایش می‌دهیم. و در صورتی که f'' برای همه‌ی نقاط I موجود باشد، می‌گوییم f در I مشتق مرتبه‌ی دوم دارد.

مثال ۲۹: برای تابع $f(x)=(x^{۲}+x+۱)^{۳}$

$$f'(x)=۳(x^{۲}+x+۱)^{۲}(۲x+۱)$$

و

$$f''(x)=۶(x^{۲}+x+۱)^{۲}(۲x+۱)^{۲}+۶(x^{۲}+x+۱)^{۲}$$

این عمل را می‌توان باز هم ادامه داد و مشتق‌های مرتبه‌ی سوم، چهارم، تا nام تابع f را تعریف کرد. این مشتق‌ها را به ترتیب با f'''، $f^{(۴)}$ و تا $f^{(n)}$ نمایش می‌دهند (برای این‌که تعداد علامت‌های (′)

زیاد نشود، مشتق‌های مرتبه‌ی چهارم به بعد را با $f^{(4)}$ و $f^{(5)}$ و ... نمایش می‌دهند).

مثال ۳۰: یک چند جمله‌ای درجه n،

$$P_n(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n \quad (c_n \neq 0)$$

از هر مرتبه مشتق‌پذیر است و

$$P'_n(x) = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots + nc_n x^{n-1}$$

$$P''_n(x) = 2c_2 + 6c_3 x + \cdots + n(n-1)c_n x^{n-2}$$

$$P'''_n(x) = 6c_3 + 12c_4 x + \cdots + n(n-1)(n-2)c_n x^{n-3}$$

$$\vdots$$

$$P_n^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdots \times 1 \times c_n = n!c_n$$

و به طور کلی برای هر $k > n$ ، $P_n^{(k)}(x) = 0$

توجه کنید برای این‌که تابع f روی بازه‌ی باز I دارای مشتق مرتبه nام باشد ($f^{(n)}$ وجود داشته باشد) حداقل لازم است که $f^{(n-1)}$ روی I پیوسته باشد (شرط لازم).

مثال ۳۱: قبلاً مشاهده کردید که اگر مکان یک جسم در حال حرکت را در لحظه‌ی t با S(t) نشان دهیم، $V(t) = S'(t)$ بیانگر سرعت لحظه‌ای این حرکت است. در فیزیک $V'(t) = S''(t)$ ، که در آن V' مشتق سرعت نسبت به زمان است، نیز مورد توجه است و آن را **شتاب** این حرکت می‌نامند. برای نمونه در مثال ۱ برای $S(t) = 5t^2$ ، $V(t) = s'(t) = 10t$ و $S''(t) = 10$ متر بر مجذور ثانیه شتاب سقوط آن جسم خواهد بود. یعنی جسم در حین سقوط دارای شتاب ثابتی است.

مثال ۳۲: مشتق‌پذیری تابع $f(x) = x|x|$ و مشتق‌های مراتب بالاتر آن را روی $\mathbb{R}$ بررسی می‌کنیم. می‌دانیم

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 & x < 0 \\ x^2 & x \geq 0 \end{cases}$$

چون

$$f'(0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 - 0}{h} = 0$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{-h^2 - 0}{h} = 0$$

بنابراین

$$f'(x)=\begin{cases}-۲x & x<۰\\ ۰ & x=۰\\ ۲x & x>۰\end{cases}$$

و همچنین

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{۲h-۰}{h}=۲$$

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{-۲h-۰}{h}=-۲$$

پس $f''(۰)$ وجود ندارد. ولی f'' در سایر نقاط $\mathbb{R}$ وجود دارد، یعنی

$$f''(x)=\begin{cases}-۲ & x<۰\\ \text{وجود ندارد} & x=۰\\ ۲ & x>۰\end{cases}$$

و برای $n\geq ۳$

$$f^{(n)}(x)=۰ \quad (x\neq ۰)$$

(چرا؟)

تمرین‌ها

۱ــ y' را در مورد هر یک از رابطه‌های زیر به دست آورید.

الف) $\frac{x}{y}-۲y=x^۲$

ب) $x\sqrt{y}-y+\sqrt{x}=۱$

۲ــ معادله‌ی خط مماس بر نمودار $۲x^۳+y^۲=۳$ را در نقطه‌ی $(۱,-۱)$ بنویسید.

۳ــ معادله‌ی خط‌های عمود بر نمودار $y=|x^۲-۱|$ را در نقاط $(۰,۱)$ و $(۱,۰)$، در صورت وجود، بنویسید.

۴ــ در چه نقاطی روی نمودار $x^۲-xy+y^۲=۱$ مماس بر منحنی افقی است؟ در چه نقاطی

مماس، قائم است؟

۵ــ برای هر یک از تابع‌های زیر مقدار مشتق تابع معکوس را در $b \in D_{f^{-1}}$ پیدا کنید.

الف) $f(x) = ۴x^۳ + ۵x + ۱$ در $b = ۱۰$

ب) $f(x) = \dfrac{x+۱}{x-۱}$ در $b = ۵$

۶ــ برای هر یک از تابع‌های زیر معادله‌ی خط مماس بر نمودار $x = f^{-۱}(y)$ را در نقطه‌ی P به دست آورید.

الف) $f(x) = \dfrac{x}{x-۴}$ در $P(-۳, ۳)$

ب) $f(x) = \dfrac{x+۱}{x-۵}$ در $P(۲, ۱۱)$

۷ــ مشتق مرتبه‌ی دوم، f''، و مرتبه‌ی سوم، f'''، را برای تابع‌های زیر بنویسید و دامنه‌ی هر یک را مشخص کنید.

الف) $f(x) = (۱ + x^۲)^۳$

ب) $f(x) = ۵x^{۱۰} + ۱۰x^۵ + ۴$

۸ــ برای چه مقداری از a، b، و c تابعِ

$$f(x) = \begin{cases} x^۳ & x \le ۱ \\ ax^۲ + bx + c & x > ۱ \end{cases}$$

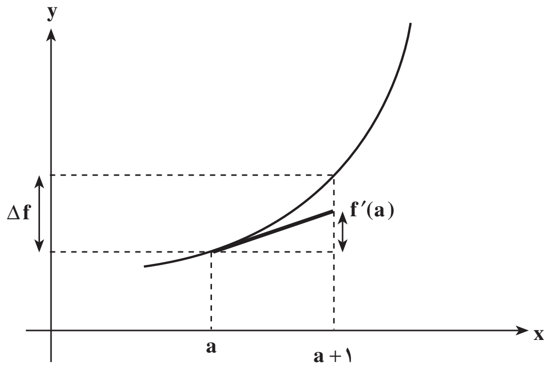
در نقطه‌ی ۱ مشتق مرتبه‌ی دوم دارد.

۴ــ۹ــ آهنگ تغییر

در ابتدای فصل مشاهده کردید که حدّ تغییر مسافت نسبت به زمان (سرعت لحظه‌ای) همان مشتق تابع مسافت نسبت به زمان است و گفتیم که مفهوم مشتق را در مسائل دیگری نیز می‌توان یافت. برای تابع f و $a \in D_f$، وقتی h مقدار کوچکی است، $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ تقریبی از $f'(a)$ است. حال اگر $h = ۱$ اختیار شود.

$$\Delta f = f(a+۱) - f(a)$$

نیز تقریباً برابر $f'(a)$ است. لذا میزان تغییر f در a را هنگامی که متغیر آن یک واحد تغییر می‌کند می‌توان با $f'(a)$ جایگزین کرد. $f'(a)$ **آهنگ تغییر** f نسبت به متغیر x در نقطه‌ی $x = a$ نامیده می‌شود.



مثال ۳۳: فرض کنید بادکنکی کروی مملو از هوا شعاعی برابر ۲۰ سانتی‌متر دارد. اگر ۱سانتی‌متر دیگر به شعاع آن افزوده شود، حجم بادکنک چه مقدار افزایش خواهد یافت؟ (آهنگ تغییر حجم چقدر است؟)

همان‌طور که می‌دانید حجم کره تابعی از شعاع آن r است،

$$V = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$$

میزان تغییر حجم نسبت به شعاع برابر است با

$$V'(r) = ۴\pi r^{۲}$$

یعنی ۱ واحد تغییر در شعاع موجب $۴\pi r^{۲}$ واحد تغییر در حجم خواهد شد. پس آهنگ تغییر $۴\pi r^{۲}$ است.

در این‌جا $r = ۲۰$ ، پس $\Delta V \approx V'(۲۰) = ۱۶۰۰\pi \approx ۵۰۲۶/۶$ ، یعنی هرگاه ۱ سانتی‌متر به شعاع بادکنک اضافه شود، حجم آن تقریباً ۵۰۲۶/۶ سانتی‌متر مکعب افزوده می‌شود.

در این مثال توجه شما را به میزان واقعی تغییر حجم نیز جلب می‌کنیم.

$V(۲۱) - V(۲۰) = ۳۸۷۹۲/۳۹ - ۳۳۵۱۰/۳۲ = ۵۲۸۲/۰۷$ سانتی‌متر مکعب

دقت کنید که اگر شعاع بادکنک $r = ۱۰$ سانتی‌متر بود و همین ۱ سانتی‌متر به شعاع افزوده می‌شد حجم آن به مقدار $۴۰۰\pi \approx ۱۲۵۶/۶$ سانتی‌متر مکعب افزایش می‌یافت.

مثال ۳۴: فرض کنید که یک شرکت برای فروش محصولات خود x تومان در روز هزینه تبلیغات داشته باشد، و سود شرکت $100y$ باشد که در آن $y = 2500 + 36x - 0/2x^2$. اگر در حال حاضر شرکت روزانه ۶۰ تومان هزینه تبلیغات داشته باشد، آهنگ اضافه‌شدن سود به ازای یک تومان افزایش هزینه‌ی تبلیغات را می‌توان به این طریق محاسبه کرد که اگر $P = 100y$ میزان سود باشد.

$$P'(x) = 100y'(x) = 100(36 - 0/4x)$$

و به ازای $x = 60$ ، $P'(x) = 1200$ تومان، یعنی افزایش سود به ازای ۱ تومان هزینه‌ی تبلیغات اضافی تقریباً ۱۲۰۰ تومان است.

اگر شرکت روزانه ۱۰۰ تومان هزینه‌ی تبلیغات داشته باشد، یعنی به ازای $x = 100$ ، آن‌گاه $P'(x) = -400$. یعنی تقریباً ۴۰۰ تومان کاهش سود به ازای هر تومان افزایش تبلیغات اضافی خواهد داشت! [1]

مثال ۳۵: طبق قانون انبساط گازها، قانون بویل، حاصل‌ضرب فشار P گاز در حجم V آن همواره مقداری ثابت است. اثر افزایش فشار به میزان ۱ کیلوگرم بر واحد سطح هنگامی که $P = 4$ کیلوگرم بر متر مربع و $V = 8$ متر مکعب باشد، بدین ترتیب قابل محاسبه است. داریم :

$$PV = c$$

$$V = \frac{c}{P}$$

$$V'(P) = \frac{c}{P^2}$$

و در زمان موردنظر $V'(4) = -\frac{32}{16} = -2$ ، یعنی افزایش یک کیلوگرم فشار در آن لحظه موجب کاهش ۲ متر مکعب از حجم گاز خواهد بود.

مثال ۳۶: استخراج t تن مس از یک معدن هزینه‌ای برابر $C = f(t)$ تومان خواهد داشت. $f'(2000) = 10000$ چه مفهومی را می‌رساند؟

عبارت فوق بدین معنی است که هرگاه تصمیم بگیریم از معدنی که در حال استخراج ۲۰۰۰ تن مس از آن هستیم، یک تن دیگر استخراج کنیم، می‌بایست تقریباً هزینه‌ی اضافی ۱۰۰۰۰ تومان را بپردازیم.

اقتصاددانان و صاحبان شرکت‌ها علاقه‌مندند بدانند که تغییر در برخی از متغیرها مانند موجودی،

۱ــ این اطلاعات معمولاً با استفاده از موارد مشابه و داده‌های آماری مربوط به آن‌ها به دست می‌آید.

تولید، ذخیره، تبلیغ، و قیمت چگونه روی متغیرهای دیگری مانند تقاضا، فروش، سود، تورم و حتی بیکاری اثر خواهد گذاشت. این گونه مسائل را تجزیه و تحلیل نهایی[1] می‌نامند. در واقع، لغت «نهایی» را اقتصاددانان به جای آهنگ تغییر به کار می‌برند.

وقتی x مقدار محصول باشد، سه تابع مهم می‌توان تعریف کرد :

تابع هزینه، $C(x)$ ؛ هزینه تولید

تابع درآمد، $R(x)$ ؛ درآمد حاصل از فروش

تابع سود، $P(x)$ ؛ سود حاصل از فروش

و داریم $P(x)=R(x)-C(x)$

اگر هزینه‌ی متوسط، درآمد متوسط، و سود متوسط هر واحد موردنظر باشد، می‌توان به ترتیب آن‌ها را از رابطه‌های $\frac{C(x)}{x}$ و $\frac{R(x)}{x}$ و $\frac{P(x)}{x}$ به دست آورد و در صورتی که هدف یافتن هزینه‌ی نهایی، درآمد نهایی و سودنهایی باشد، می‌توان به ترتیب آن‌ها را برابر $C'(x)$ و $R'(x)$ و $P'(x)$ گرفت.

مثال ۳۷: یک شرکت کوچک تولیدکننده‌ی رنگ در روز

$$C(x)=۱۰۰۰۰+۵x+۰/۰۱x^{۲}$$

تومان هزینه برای تولید x کیلوگرم رنگ دارد. توجه کنید که $C(۰)=۱۰۰۰۰$ نشان می‌دهد که حتی اگر هیچ محصولی تولید نشود شرکت متحمل هزینه‌هایی (از قبیل اجاره، تلفن، بیمه، دستمزد و ...) خواهد بود. هزینه‌ی نهایی شرکت هنگامی که روزانه x کیلوگرم رنگ تولید می‌کند برابر است با

$$C'(x)=۵+۰/۰۲x$$

و $C'(۵۰۰)=۱۵$ یعنی وقتی شرکت ۵۰۰ کیلو رنگ تولید می‌کند هزینه‌ی تولید ۵۰۱ اُمین کیلوگرم رنگ تقریباً ۱۵ تومان خواهد بود. هزینه واقعی ۵۰۱ اُمین کیلوگرم رنگ برابر است با

$$C(۵۰۱)-C(۵۰۰)=۱۵۰۱۵/۰۱-۱۵۰۰۰=۱۵/۰۱ \text{ تومان}$$

مثال ۳۸: فرض کنید که هزینه‌ی چاپ x کارت دعوت

$$C(x)=۸۳۰۰+۳/۲۵x+۴۰\sqrt[۳]{x}$$

تومان باشد هزینه‌ی متوسط و نیز هزینه‌ی نهایی چاپ ۱۰۰۰ کارت دعوت چه‌قدر است؟

۱ــ «نهایی» ترجمه‌ی لغت marginal است که «کناره‌ای» و «حاشیه‌ای» نیز ترجمه شده است.

با توجه به توضیحات بیان شده

$$\text{هزینه متوسط} = \frac{C(x)}{x} = \frac{۸۳۰۰ + ۳/۲۵x + ۴۰\sqrt[۳]{x}}{x}$$

$$\text{هزینه نهایی} = C'(x) = ۳/۲۵ + \frac{۴۰}{۳}x^{-\frac{۲}{۳}}$$

که به ازای $x = ۱۰۰۰$ ، هزینه‌ی متوسط و هزینه‌ی نهایی به ترتیب برابر ۱۱/۹۵ و ۳/۳۸ تومان خواهند بود. یعنی به طور متوسط هزینه چاپ هر کارت دعوت ۱۱/۹۵ تومان برای ۱۰۰۰ کارت اول است، و هزینه چاپ کارت بعدی تقریباً ۳/۳۸ تومان خواهد بود.

۴ـ۱۰ـ آهنگ‌های تغییر وابسته

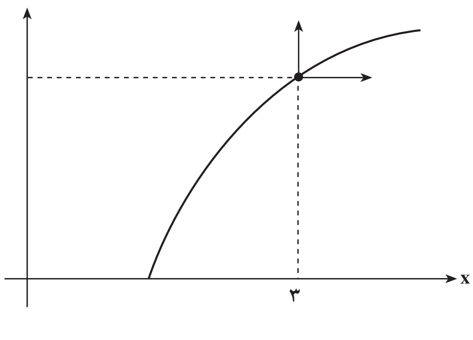
در برخی از مسائل نه تنها دو کمیت (متغیر) به هم مربوط‌اند، بلکه هر دوی این کمیت‌ها تابعی از متغیر سوم (در اغلب موارد زمان) هستند. در این صورت آهنگ تغییر هر یک از دو کمیّت نسبت به کمیّت سوم می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد. به چند نمونه توجه کنید :

مثال ۳۹: می‌خواهیم بدانیم اگر متحرکی روی نمودار $y = \sqrt{x^۲ - ۴}$ ، $x \geq ۲$ به گونه‌ای حرکت کند که آهنگ افزایش مؤلفه‌ی x آن ۵ متر در ثانیه باشد، برای $x = ۳$ مؤلفه y آن با چه آهنگی افزایش می‌یابد.

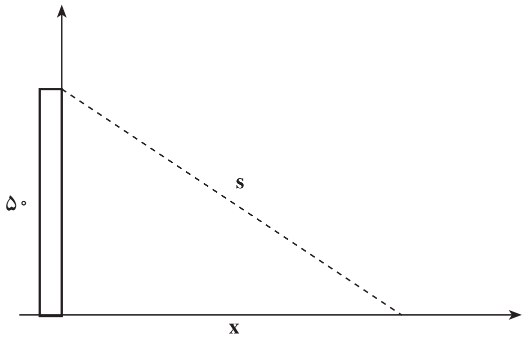
در این‌جا x و y هر دو تابعی از t‌اند و می‌دانیم $x'(t) = ۵$. می‌خواهیم $y'(t)$ را به دست آوریم. ولی بنا بر قاعده‌ی زنجیری

$$y' = \frac{xx'}{\sqrt{x^۲ - ۴}}$$

و برای لحظه‌ی مورد نظر یعنی وقتی که $x = ۳$ ، آهنگ افزایش مؤلفه y، $y'(t) = ۳\sqrt{۵}$ متر در ثانیه است.



مثال ۴۰: اگر ناظری از بالای یک برج دریایی به ارتفاع ۵۰ متر، به اطراف خود نگاه کند و یک قایق که در فاصله‌ی ۲۰۰ متری از پای برج قرار دارد با سرعت ۵ متر در ثانیه به برج نزدیک شود، می‌خواهیم بدانیم فاصله‌ی ناظر و قایق با چه سرعتی تغییر می‌کند. به شکل زیر توجه کنید.



در این‌جا دو کمیت x، (فاصله قایق از برج) و S، (فاصله‌ی قایق از ناظر)، توسط معادله‌ی

$$S^{۲} = x^{۲} + ۲۵۰۰$$

به هم مربوط‌اند. هم‌چنین x و S هر دو تابعی از t یعنی زمان‌اند. $x'(t)$ سرعت نزدیک‌شدن قایق به برج و $S'(t)$ سرعت نزدیک‌شدن قایق به ناظر است. به کمک قاعده‌ی زنجیری

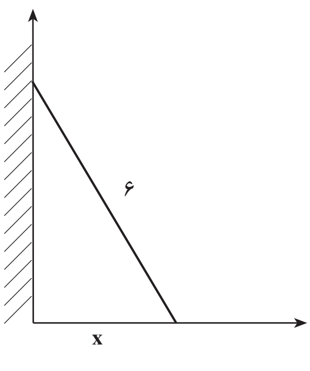
$$۲SS'(t) = ۲xx'(t)$$

یا $S'(t) = \frac{x}{S}x'(t)$. پس در لحظه‌ی مورد نظر، که $x = ۲۰۰$ ، $S = ۲۰۶/۱۶$

$$S'(t) = \frac{۲۰۰}{۲۰۶/۱۶} \times (-۵) = -۴/۸۵$$ متر در ثانیه

یعنی قایق با سرعت ۴/۸۵ متر در ثانیه به ناظر نزدیک می‌شود.

مثال ۴۱: نردبانی به طول ۶ متر به دیواری مطابق شکل زیر تکیه دارد :



اگر هنگامی که پای نردبان در فاصله‌ی ۴ متری از دیوار قرار دارد با سرعت ۰/۵ متر در ثانیه از دیوار دور شود، انتهای نردبان با چه سرعتی به زمین نزدیک خواهد شد؟

همان‌گونه که در شکل مشاهده می‌کنید، اگر زمان را با t (ثانیه) و فاصله پای نردبان از دیوار را با x (متر) و فاصله‌ی انتهای نردبان از پای دیوار را با y (متر) نمایش دهیم، آن‌گاه داریم :

$$x^۲ + y^۲ = ۳۶$$

در این‌جا $x'(t)$ سرعت دور شدن پای نردبان از دیوار در راستای محور x و $y'(t)$ سرعت دورشدن انتهای نردبان از زمین در راستای محور y است. (اگر $y'(t)$ مثبت باشد انتهای نردبان از زمین دور می‌شود و اگر $y'(t)$ منفی باشد انتهای نردبان به زمین نزدیک خواهد شد).

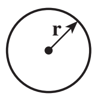
$$۲xx'(t) + ۲yy'(t) = ۰$$

$$y'(t) = -\frac{x}{y}x'(t)$$

و در لحظه‌ی مورد نظر، که $x'(t) = ۰/۵$ و $x = ۴$ و $y = ۴/۴۷۲$ ،

$$y'(t) = -۰/۴۴۷$$

مثال ۴۲: بر اثر انفجاری که در یک نفت‌کش رخ داده است، یک لکه نفت به شکل دایره حول نفتکش ایجاد شده است. اگر شعاع این لکه نفت با سرعت ثابت ۰/۵ متر در ثانیه افزایش یابد، می‌خواهیم بدانیم سطح این لکه نفت هنگامی که شعاع لکه برابر ۳۰ متر است، با چه سرعتی افزایش خواهد یافت؟



در این‌جا اگر زمان را با t (ثانیه) و شعاع لکه را با r (متر) و سطح لکه را با A (متر مربع) نمایش دهیم، داریم

$$A = \pi r^۲$$

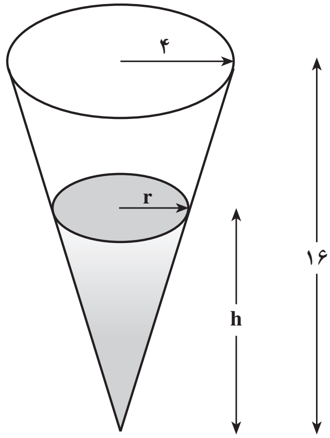
و r و A هر دو تابعی از t اند. به کمک قاعده‌ی زنجیری

$$A'(t) = ۲\pi r r'(t)$$

چون $r'(t) = ۰/۵$ و در لحظه‌ی مورد نظر $r = ۳۰$ ، پس

$A'(t) = ۳۰\pi \approx ۹۴/۲۴۸$ متر مربع در ثانیه

مثال ۴۳: قرار است برای تصفیه یک محلول از ذراتی که در آن معلق است، از یک ظرف به شکل مخروط که در رأس آن سوراخ بسیار ریزی تعبیه شده است، استفاده شود ؛ مطابق شکل :



اگر ارتفاع مخروط ۱۶ و شعاع قاعده آن ۴ سانتی‌متر باشد، و محلول با سرعت ثابت ۲ سانتی‌متر مکعب در دقیقه از ظرف خارج شود، هنگامی که ارتفاع محلول ۸ سانتی‌متر است، سرعت کاهش ارتفاع محلول در ظرف چه‌قدر است؟

اگر t را زمان فرض کنیم، v حجم محلول موجود، h ارتفاع محلول، و r شعاع سطح مایع در ظرف در لحظه‌ی t باشند، بین r و h و V در لحظه‌ی t رابطه‌ی

$$V = \frac{۱}{۳}\pi r^{۲} h$$

برقرار است، $h'(t)$ مورد نظر است و می‌دانیم $V'(t) = -۲$ (چرا؟) دقت کنید که در این‌جا متغیر دیگری نیز وجود دارد که با t تغییر می‌کند و آن r است. پس لازم است به گونه‌ای آن را بر حسب h یا V بیان کنیم. با استفاده از مقایسه‌ی مثلث‌های مشابه داریم

$$\frac{r}{h} = \frac{۴}{۱۶}$$

پس $r = \frac{۱}{۴}h$ و در نتیجه

$$V = \frac{۱}{۴۸}\pi h^{۳}$$

پس

$$V'(t) = \frac{۱}{۱۶}\pi h^{۲} h'(t)$$

و یا

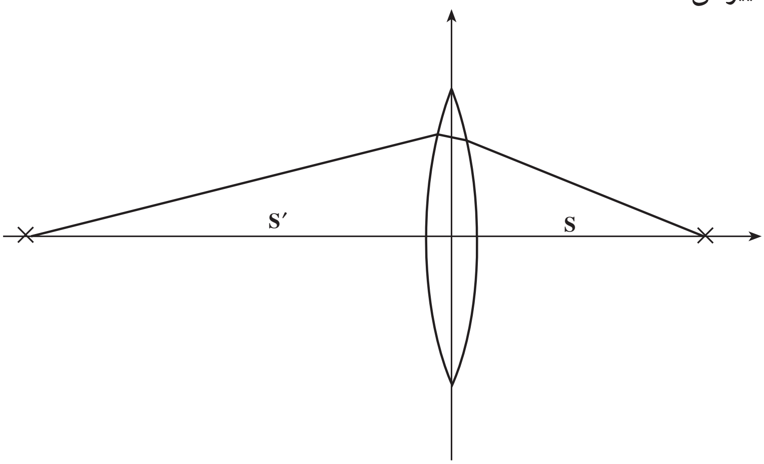
$$h'(t) = \frac{۱۶}{\pi h^{۲}} V'(t)$$

که وقتی $h=۸$ ، $h'(t)=\frac{-۱}{۲\pi}\approx -۰/۱۶$ (سانتی‌متر در دقیقه). به عبارتی هنگامی که ارتفاع محلول در ظرف ۸ سانتی‌متر است، ارتفاع با سرعت ۰/۱۶ سانتی‌متر در دقیقه کاهش می‌یابد.

مثال ۴۴: هنگام مطالعه‌ی ویژگی عدسی‌های نازک در فیزیک به رابطه‌ی

$$\frac{۱}{s}+\frac{۱}{S}=\frac{۱}{f}$$

برمی‌خوریم که در آن s فاصله‌ی جسم از عدسی، S فاصله‌ی تصویر از عدسی و f فاصله‌ی کانونی عدسی است. فاصله‌ی کانونی یک عدسی ۶ سانتی‌متر است. اگر جسمی که فاصله‌ی آن با عدسی ۱۰ سانتی‌متر است، با سرعت ثابت ۲ سانتی‌متر در ثانیه به عدسی نزدیک شود، فاصله تصویر از عدسی با چه سرعتی تغییر می‌کند؟



در این‌جا هدف یافتن $S'(t)$ است در حالی که می‌دانیم $s'(t)=-۲$ (چرا؟). اما داریم

$$-\frac{s'(t)}{s^{۲}}-\frac{S'(t)}{S^{۲}}=۰$$

پس

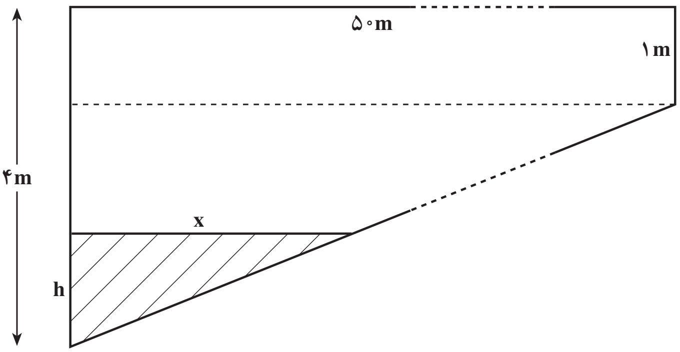
$$S'(t)=-\frac{S^{۲}}{s^{۲}}s'(t)$$

که در لحظه‌ی موردنظر $s=۱۰$ و $S=۱۵$ سانتی‌متر است، پس

$S'(t)=۴/۵$ سانتی‌متر در ثانیه

دقت کنید هنگامی که جسم به عدسی نزدیک می‌شود تصویر آن از عدسی دور می‌شود.

مثال ۴۵: در یک استخر به طول ۵۰ متر و عرض ۲۰ متر، ارتفاع بخش کم‌عمق ۱ متر و ارتفاع بخش عمیق ۴ متر است. مطابق شکل



آب با سرعت ۳۰ لیتر در دقیقه وارد استخر می‌شود، و سطح آب در یک متری از بخش عمیق قرار دارد. می‌خواهیم سرعت افزایش ارتفاع آب را حساب کنیم.

در این‌جا اگر ارتفاع آب را در بخش عمیق h، حجم آب موجود در استخر را V و طول بخشی از استخر را که آب در آن قرار گرفته x بنامیم، آن‌گاه حجم آب موجود در استخر برابر است با

$$V = ۲۰ \times \frac{۱}{۲} xh = ۱۰xh$$

هدف یافتن $h'(t)$ است در صورتی که می‌دانیم $V'(t) = ۰/۰۳$ (متر مکعب در دقیقه). متغیر x را نیز می‌توان برحسب h به صورت زیر به دست آورد :

$$\frac{h}{۳} = \frac{x}{۵۰}$$

(چرا؟) پس $V = \frac{۵۰۰}{۳} h^۲$ و یا

$$V'(t) = \frac{۱۰۰۰}{۳} hh'(t)$$

و برای $h = ۱$ داریم

$$h'(t) = \frac{۳}{۱۰۰۰} ۰/۰۳ = ۰/۰۰۰۰۹$$ متر در دقیقه

به عبارتی ارتفاع با سرعت ۰/۰۰۹ سانتی‌متر در دقیقه افزایش می‌یابد.

تمرین‌ها

۱ــ میزان تغییر در مساحت سطح بادکنک مثال ۳۳ را به ازای یک سانتی‌متر افزایش شعاع، هنگامی که شعاع برابر ۲۰ سانتی‌متر است محاسبه کنید. اگر شعاع ۱۰ سانتی‌متر باشد میزان این تغییر چه‌قدر خواهد بود؟

۲ــ می‌توان گفت شعاع بادکنک مثال ۳۳ نیز تابعی از حجم آن است (تابع معکوس). هنگامی که حجم بادکنک ۴۰۰π سانتی‌متر مکعب است، ۱ سانتی‌متر مکعب افزایش حجم، چه مقدار به شعاع آن اضافه می‌کند؟

۳ــ اگر بدانیم تابع مشتق‌پذیر $P(t)$، جمعیت یک جامعه را در زمان t سال بعد نشان می‌دهد. در این صورت $P'(۵)=۱۰۰۰۰$ و $P'(۱۰)=-۲۰۰۰$ چه مفهومی دارند؟

۴ــ فرض می‌کنیم ارتفاع نفوذ آب در خاک از رابطه‌ی $y=۳\sqrt{t}$ به دست می‌آید، یعنی آب در عرض مدت t ساعت به مقدار $۳\sqrt{t}$ سانتی‌متر در خاک نفوذ کند.

الف) مفهوم $\frac{۳}{۲\sqrt{t}}$ چیست؟

ب) درباره‌ی آهنگ نفوذ آب در خاک، وقتی t بزرگ باشد، چه می‌توان گفت؟

۵ــ کارخانه‌ای برای تولید x ساعت مچی

$$C(x)=۲۰۰۰+۱۰x+\frac{x^۲}{۱۰۰}$$

تومان هزینه می‌کند.

الف) برای تولید ۰ ساعت چه میزان باید هزینه کند؟ (هزینه‌ی اولیه تولید)

ب) هزینه‌ی نهایی چیست؟

ج) هزینه‌ی نهایی وقتی $x=۵۰$ چیست؟

د) هزینه‌ی تولید ۵۱ امین ساعت، یعنی $C(۵۱)-C(۵۰)$ چه‌قدر است؟

۶ــ نقطه‌ی P روی مسیر $y=\sqrt{x^۳+۱۷}$ در حرکت است. هنگامی که P در $(۲,۵)$ قرار دارد اگر y با سرعت ۲ متر در ثانیه افزایش یابد، x با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

۷ــ اگر طول هر ضلع یک مکعب با سرعت ۳ سانتی‌متر در ثانیه افزایش یابد، حجم آن هنگامی که طول ضلع آن ۱۰ سانتی‌متر است با چه سرعتی افزایش می‌یابد؟

۸ــ اگر شعاع یک دایره با سرعت ۲ سانتی‌متر در ثانیه افزایش یابد، مساحت سطح آن هنگامی که شعاع ۵ سانتی‌متر است با چه سرعتی افزایش می‌یابد (افتادن یک سنگ در آب)؟

۹ــ یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۲t^۳$ گرم است.

الف) جرم این توده باکتری در ساعت چهارم، $۳\le t\le ۴$ ، چند گرم افزایش می‌یابد؟

ب) آهنگ رشد جرم توده باکتری در لحظه‌ی $t=۳$ چه‌قدر است؟

۱۰ــ اگر ذره‌ای روی مسیر

$$\frac{xy^۲}{۱+y^۲}=\frac{۸}{۵}$$

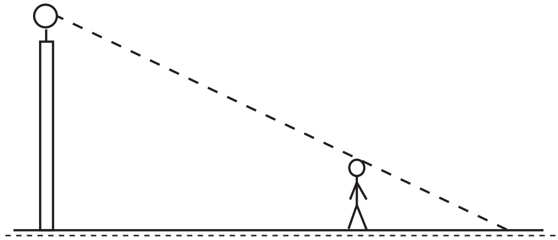
حرکت کند و مؤلفه‌ی x آن با سرعت ۶ متر در ثانیه افزایش یابد، هنگامی که ذره در نقطه‌ی (۱,۲) قرار دارد :

الف) مؤلفه‌ی y با چه سرعتی تغییر می‌کند؟

ب) ذره در حال اوج گرفتن است یا در حال سقوط؟

۱۱ــ هنگام پرکردن گاز به داخل یک بالن کروی شکل، با سرعت ۱۲ لیتر در دقیقه وقتی شعاع آن ۲ متر است، قطر بالن با چه سرعتی افزایش می‌یابد.

۱۲ــ مردی با قد ۱۷۰سانتی‌متر، با سرعت ۳۰ متر در ثانیه در خیابانی افقی به طرف تیر چراغی حرکت می‌کند که ارتفاع آن ۶ متر است. طول سایه‌ی این فرد با چه سرعتی تغییر می‌کند؟



فصل پنجم

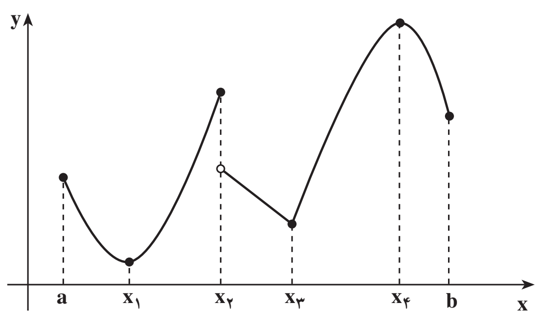
مشتق (۲)

در این فصل ابتدا به بررسی این مطلب می‌پردازیم که از مشتق تابع f چه اطلاعاتی در مورد آن می‌توان به دست آورد و سپس برخی دیگر از کاربردهای آن را مطرح می‌کنیم.

۵ــ۱ــ اکسترمم‌های نسبی

به خاطر آورید که در بررسی ویژگی‌های توابع پیوسته گفتیم که اگر f روی $[a,b]$ پیوسته باشد، x_1 و x_2 در این بازه وجود دارند که f به ترتیب در آن‌ها مینیمم مطلق و ماکسیمم مطلق است ولی به محل این نقاط و چگونگی یافتن x_1 و x_2 اشاره نکردیم. این نقاط را چگونه می‌توان یافت؟ قبل از پاسخ به این سؤال ماکسیمم نسبی، مینیمم نسبی و اکسترمم نسبی را تعریف می‌کنیم. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱: شکل زیر نمودار تابعی مانند f را روی بازه‌ی $[a,b]$ نشان می‌دهد.



f در x_4 ماکسیمم مطلق و در x_1 مینیمم مطلق دارد ولی نقاط x_2 و x_3 ، هنگامی که یک بازه‌ی کوچک شامل آن نقاط در نظر گرفته شوند نیز به ترتیب در آن بازه نقاط ماکسیمم یا مینیمم است. در واقع چنین تعریف می‌کنیم.

تعریف: اگر تابع f روی بازه‌ای شامل بازه‌ی باز I تعریف شده باشد، و $c \in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$ ، آن‌گاه می‌گویند f در c دارای یک **مینیمم نسبی** است و c را نقطه‌ی **مینیمم نسبی** f می‌نامند.

تعریف: اگر تابع f روی بازه‌ای شامل بازه‌ی باز I تعریف شده، و $c \in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \geq f(x)$ ، آن‌گاه می‌گویند f در c دارای یک **ماکسیمم نسبی** است و c را نقطه‌ی **ماکسیمم نسبی** f می‌نامند.

تعریف: اگر f در c دارای مینیمم نسبی یا ماکسیمم نسبی باشد، می‌گویند f در c دارای **اکسترمم نسبی** است و c را نقطه **اکسترمم نسبی** f می‌نامند.

در مثال ۱، f در نقاط x_1 و x_3 مینیمم نسبی و در نقاط x_2 و x_4 ماکسیمم نسبی دارد، یعنی f در هر چهار نقطه x_1 ، x_2 ، x_3 و x_4 اکسترمم نسبی دارد و نقاط فوق نقاط اکسترمم نسبی تابع fاند.

نکته‌ی ۱: اگر تابع f فقط روی $[a,b]$ تعریف شده باشد، آن‌گاه چون f در همسایگی نقاط a و b تعریف نشده است، این دو نقطه، نمی‌توانند نقاط اکسترمم نسبی f باشند.

نکته‌ی ۲:

ــ لزومی ندارد که f در نقاط اکسترمم نسبی پیوسته و یا مشتق‌پذیر باشد.

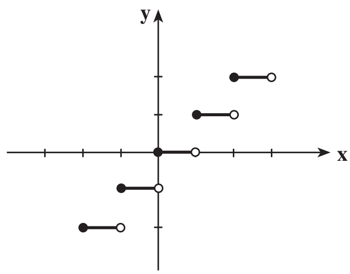
ــ نقطه‌ی اکسترمم نسبی می‌تواند نقطه‌ی اکسترمم مطلق f نیز باشد[1].

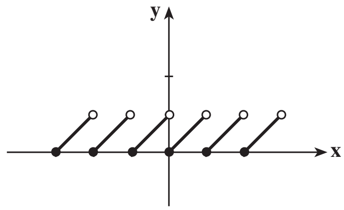
ــ اگر c نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع f روی دامنه‌ی آن باشد و تابع در همسایگی آن نقطه تعریف شده باشد، آن‌گاه نقطه c نقطه‌ی اکسترمم نسبی f نیز است.

مثال ۲: الف) برای تابع ثابت $f(x) = k$ ، هر نقطه اکسترمم نسبی است. در واقع هر نقطه می‌تواند نقطه‌ی ماکسیمم نسبی یا مینیمم نسبی تلقی شود (چرا؟)

ب) برای تابع $g(x) = [x]$ ، هر نقطه اکسترمم نسبی است. در واقع هر نقطه ماکسیمم نسبی است و نقاط غیرصحیح مینیمم نسبی نیز هستند.

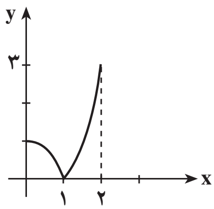
۱ــ هر نقطه‌ی ماکسیمم مطلق و یا مینیمم مطلق، نقطه‌ی اکسترمم مطلق نامیده می‌شود.





ج) برای تابع $h(x)=x-[x]$ ، نقاط $x\in\mathbb{Z}$ ، نقاط مینیمم نسبی تابع‌اند. (چرا؟)

د) اگر $[۰,۱]$ دامنه‌ی تابع $k(x)=|x^{۲}-۱|$ باشد، آن‌گاه تابع دارای ماکسیمم مطلق ۱ و مینیمم مطلق ۰ است و هیچ نقطه‌ی اکسترمم نسبی ندارد. در حالی که اگر $[۰,۲]$ دامنه‌ی تابع باشد، آن‌گاه تابع دارای ماکسیمم مطلق ۳ و مینیمم مطلق ۰ است. توجه کنید که در این حالت $x=۱$ نقطه‌ی مینیمم نسبی f است.



قضیه‌ی ۱: اگر تابع f در نقطه‌ی c دارای اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ وجود داشته باشد، آن‌گاه $f'(c)=۰$ است.

اثبات: فرض کنید که f در c دارای ماکسیمم نسبی است، در این صورت برای نقاط x در یک همسایگی c داریم $f(x)-f(c)\leq ۰$. حال اگر $x>c$ ، آن گاه

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq ۰$$

و در نتیجه

$$\lim_{x\to c^{+}}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'_{+}(c)=f'(c)\leq ۰ \qquad (۱)$$

(چرا؟) و نیز اگر $x < c$ ، آن‌گاه

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq ۰$$

و در نتیجه

$$\lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'_-(c) = f'(c) \geq ۰ \qquad (۲)$$

(۱) و (۲) نتیجه می‌دهد که $f'(c)=۰$.

اثبات برای حالتی که f در c مینیمم نسبی دارد مشابه اثبات فوق است.

تعریف: نقطه‌ی $c \in D_f$ را ***نقطه‌ی بحرانی***[1] تابع f می‌نامند، هرگاه $f'(c)$ تعریف نشده باشد یا $f'(c)=۰$.

نکته: دقت کنید هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی f، نقطه‌ی بحرانی f است، در صورتی که یک نقطه‌ی بحرانی ممکن است نقطه‌ی اکسترمم نسبی نباشد، مانند نقطه‌ی $x=۰$ برای تابع $f(x)=x^۳$.

مثال ۳: الف) تنها نقطه‌ی بحرانی تابع $f(x)=x^۲+۳x$ ، $x=-\frac{۳}{۲}$ است زیرا $f'(x)=۲x+۳$ و

$$f'(x)=۰ \Leftrightarrow x=-\frac{۳}{۲}$$

توجه کنید که تابع در بازه‌ی $(-۱,۱)$ نقطه‌ی بحرانی ندارد.

ب) تابع

$$g(x)=\begin{cases} x & -۱ \leq x < ۰ \\ ۲x^۲-x & ۰ \leq x \leq ۱ \end{cases}$$

با دامنه‌ی $D_g=[-۱,۱]$ ، دارای نقاط بحرانی $x_۱=-۱$ ، $x_۲=۰$ ، $x_۳=۰/۲۵$ و $x_۴=۱$ است. چون

$$g'(x)=\begin{cases} ۱ & -۱<x<۰ \\ \text{وجود ندارد} & x=۰ \\ ۴x-۱ & ۰<x<۱ \end{cases}$$

۱ــ گاهی نقطه‌ی $(c,f(c))$ روی نمودار f را نقطه‌ی بحرانی نمودار تابع f می‌نامند.

g' در نقاط ۱− ، ۰ و ۱ وجود ندارد و $g'(0/25)$.

ج) تابع

$$h(x) = \sqrt{1-x^2}$$

با دامنه $D_h = [-1,1]$ دارای نقاط بحرانی ۱− ، ۰ و۱ است زیرا

$$h'(x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

h' در نقاط ۱− و ۱ تعریف نشده و $h'(0) = 0$.

اکنون ابزار لازم برای تعیین نقاطی که اکسترمم مطلق در آن‌ها اتفاق می‌افتد فراهم شده است.

قضیه‌ی ۲ : اگر تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ تعریف شده و نقطه‌ی c، $a < c < b$ نقطه‌ی اکسترمم مطلق تابع روی این بازه باشد، آن گاه c نقطه‌ی بحرانی f است.

اثبات: چون f در همسایگی نقطه‌ی c تعریف شده است، c یک اکسترمم نسبی f است، حال اگر $f'(c)$ وجود نداشته باشد، c نقطه‌ی بحرانی f است و اگر $f'(c)$ وجود داشته باشد، بنا به قضیه‌ی ۱، $f'(c) = 0$ که باز هم c نقطه‌ی بحرانی f است.

نکته: برای یافتن اکسترمم‌های مطلق تابع پیوسته‌ی f روی بازه‌ی $[a,b]$ چون اکسترمم یا در a، یا b و یا نقاط بحرانی f در (a,b) اتفاق می‌افتند، پس از یافتن نقاط بحرانی f در (a,b) و تعیین مقادیر f در آن‌ها و مقایسه آن‌ها با $f(a)$ و $f(b)$ و با یکدیگر، می‌توان ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق f در این بازه را تعیین کرد[1].

مثال ۴: تابع

$$A(x) = 100x - x^2$$

روی بازه‌ی $[0,100]$ تعریف شده و پیوسته است،

$$A'(x) = 100 - 2x \qquad 0 < x < 100$$

پس $x = 50$ تنها نقطه‌ی بحرانی f در (۱۰۰ و ۰) است و

$$A(0) = 0 \;,\; A(50) = 2500 \;, A(100) = 0$$

پس A در ۵۰ دارای ماکسیمم مطلقی برابر ۲۵۰۰ است.

۱ــ در برخی از کتاب‌ها، هنگامی که مشتق راست f در a و مشتق چپ f در b وجود داشته باشد، a یا b را نقطه‌ی بحرانی در نظر نمی‌گیرند ولی برای تعیین اکسترمم مطلق از همین روش استفاده می‌شود. اگر $[a,b]$ جزئی از دامنه‌ی تابع f باشد، آن‌گاه می‌توان ابتدا دامنه‌ی f را به $[a,b]$ محدود و سپس نقاط بحرانی آن را یافت.

مثال ۵: برای تابع

$$C(r) = ۴۵\pi r^{۲} + \frac{۳۰۳۷۵۰\pi}{r}$$

هنگامی که $۰ < r \le ۳۰$، مینیمم مطلق در چه نقطه‌ای اتفاق می‌افتد؟

توجه کنید که تابع C در $r = ۰$ تعریف نشده است و $\lim_{r \to ۰^+} C(r) = \infty$. این سؤال مطرح است که اگر اکسترمم مطلق در بازه‌ی (۳۰ و ۰) اتفاق بیفتد، در چه نقطه‌ای خواهد بود. با توجه به قضیه‌ی ۲، کافی است نقاط بحرانی $C(r)$ را در این بازه بیابیم.

$$C'(r) = ۹۰\pi r - \frac{۳۰۳۷۵۰\pi}{r^{۲}}$$

و با قرار دادن $C'(r) = ۰$، خواهیم داشت $r = ۱۵$ و با مقایسه

$$C(۱۵) = ۳۰۳۷۵\pi \;,\; C(۳۰) = ۵۰۶۲۵\pi$$

در می‌یابیم که C در $r = ۱۵$ دارای مینیمم مطلق است.

تمرین‌ها

۱ــ نقاط ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق هر یک از توابع را روی بازه‌های داده شده تعیین کنید.

الف) $f(x) = x^{۲}$ روی $[-۱, ۲]$

ب) $g(x) = \sin x$ روی $[-\pi, \pi]$

ج) $h(x) = |x|(x-۲)$ روی $[-۱, ۲]$

۲ــ نقاط بحرانی توابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x) = ۳x^{۴} + x^{۳}$ ب) $f(t) = t^{۴} + ۲t^{۳} - ۵t^{۲}$

ج) $f(t) = \frac{t}{۱+t^{۲}}$

۳ــ نقاط ماکسیمم و مینیمم‌های نسبی هریک از تابع‌های زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $f(x) = x|x|$ ب) $f(x) = [\sin x]$ روی $[-\pi, \pi]$

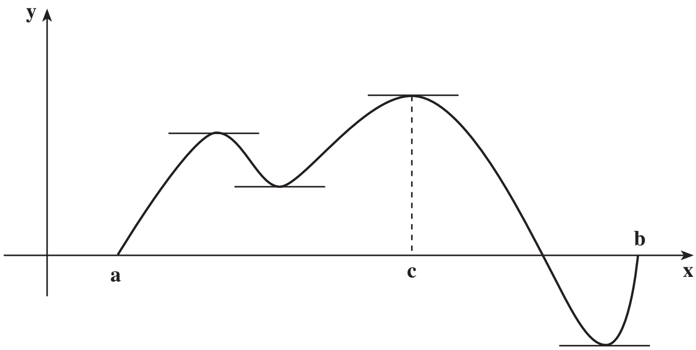
ج) $f(x) = [x] - x$ روی $[۰, ۳]$ د) $f(x) = \begin{cases} x & x < ۱ \\ ۱ - x^{۲} & x \ge ۱ \end{cases}$

۵ـــ۲ــ قضیه‌های رول و مقدار میانگین

اکنون به بیان قضیه‌ای می‌پردازیم که از آن برای یافتن ویژگی‌های بیشتری از تابع f استفاده خواهیم کرد. این قضیه به نام قضیه‌ی رول معروف است.

قضیـه‌ی ۳ (قضیـه‌ی رول): اگر تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و روی (a,b) مشتق‌پذیر باشد و $f(a)=f(b)$ ، آنگاه حداقل یک نقطه‌ی c، $a<c<b$ وجود دارد که برای آن $f'(c)=\circ$.

نکته: شکل زیر بیان کننده‌ی شرایط قضیه‌ی رول است :



نقاطی که در آن‌ها مماس بر نمودار افقی است، نقاط c در قضیه‌اند.

مثال ۶: تابع $f(x)=\sqrt{x(۴-x)}$ روی بازه‌ی $[\circ,۴]$ پیوسته و روی بازه‌ی $(\circ,۴)$ مشتق‌پذیر است و داریم :

$$f'(x)=\frac{۲-x}{\sqrt{x(۴-x)}}$$

همچنین $f(\circ)=f(۴)=\circ$ ، پس تمام شرایط قضیه‌ی رول برقرار است. نقطه‌ی $c=۲$ در شرط $f'(c)=\circ$ صدق می‌کند.

مثال ۷: تابع پیوسته $f(x)=|x|-۱$ در شرایط $f(-۱)=f(۱)=\circ$ صدق می‌کند و

$$f'(x)=\begin{cases}-۱ & x<\circ \\ \text{وجود ندارد} & x=\circ \\ ۱ & x>\circ\end{cases}$$

شرط مشتق‌پذیری قضیه‌ی رول برقرار نیست و لذا عدم وجود نقطه‌ای مانند c که برای آن $f'(c)=\circ$ متناقض با قضیه نیست.

باید دقت کرد که در صورتی از نتیجه یک قضیه می‌توان استفاده کرد که تمام شرایط آن قضیه برقرار باشد. همچنین ممکن است مثال‌هایی وجود داشته باشند که با این که شرایط قضیه برای آن‌ها صادق نیست، نتیجه‌ی قضیه برقرار باشد. به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۸: تابع

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۲ & -۱\leq x<۰ \\ x^۲-x+۲ & ۰\leq x<۱ \\ -۲x+۴ & ۱\leq x\leq ۲ \end{cases}$$

روی $[-۱,۲]$ پیوسته است و

$$f'(x)=\begin{cases} ۲ & -۱<x<۰ \\ \text{وجود ندارد} & x=۰ \\ ۲x-۱ & ۰<x<۱ \\ \text{وجود ندارد} & x=۱ \\ -۲ & ۱<x<۲ \end{cases}$$

پس f روی بازه‌ی $(-۱,۲)$ مشتق‌پذیر نیست ولی $f'(\frac{۱}{۲})=۰$.

مثال ۹: با استفاده از قضیه‌ی رول نشان می‌دهیم که معادله‌ی $x^۳-۳x^۲+۲۷x-۲=۰$ دقیقاً یک ریشه دارد.

زیرا اگر $f(x)=x^۳-۳x^۲+۲۷x-۲$ درنظر گرفته شود، $f(۰)=-۲$ و $f(۱)=۲۳$ بنابراین چون f پیوسته است در بازه‌ی $(۰،۱)$ حداقل یک ریشه دارد. حال اگر f دارای ۲ ریشه یا بیشتر باشد و $x_۱$ و $x_۲$ دو ریشه‌ی معادله باشند، $f(x_۱)=f(x_۲)=۰$، پس بنا به قضیه‌ی رول باید برای حداقل یک c بین $x_۱$ و $x_۲$ ، داشته باشیم $f'(c)=۰$ ولی

$$f'(x)=۳x^۲-۶x+۲۷=۳(x^۲-۲x+۹)$$
$$=۳\left[(x-۱)^۲+۸\right]$$

همواره مثبت است، و این با قضیه‌ی رول تناقض دارد. پس فرض این که f بیش از یک ریشه دارد غلط است.

نکته: از قضیه‌ی رول نتیجه می‌شود که بین هر دو ریشه‌ی تابع مشتق‌پذیر f، مشتق f حداقل

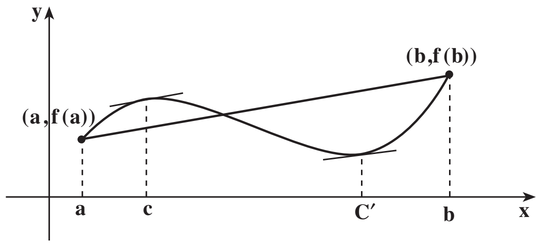
یک ریشه دارد. در مثال ۹ این نتیجه به کار برده شده است.

یکی از مهم‌ترین نتایج قضیه‌ی رول، قضیه‌ای است به نام قضیه‌ی مقدار میانگین که بدون اثبات بیان می‌کنیم.

قضیه‌ی ۴ (قضیه‌ی مقدار میانگین): هرگاه تابع f روی بازه‌ی [a ,b] پیوسته و روی بازه‌ی (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه حداقل یک نقطه‌ی c، $a<c<b$ ، وجود دارد که

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

نکته: به شکل زیر که بیان کننده‌ی شرایط قضیه‌ی مقدار میانگین است توجه کنید.



$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ شیب خط گذرنده از نقاط ((a,f(a)) و ((b,f(b)) است و در نتیجه قضیه بیان می‌کند که اگر f مشتق‌پذیر باشد، آنگاه در نقطه‌ای مثل c خط مماس بر منحنی دارای شیبی برابر مقدار فوق خواهد بود.

مثال ۱۰: تابع پیوسته $f(x)=۲x^۳-۸x+۳$ را روی بازه‌ی [۳,۱−] در نظر بگیرید داریم :

$$f(-۱)=۹\ ,\ f(۳)=۳۳$$

و

$$\frac{f(۳)-f(-۱)}{۳-(-۱)}=۶$$

و چون ′f روی بازه‌ی (۳,۱−) موجود است باید حداقل نقطه‌ای وجود داشته باشد که $f'(c)=۶$.

ولی

$$f'(x)=۶x^۲-۸$$

پس

$$۶c^۲-۸=۶$$

و بالاخره $c=\pm\sqrt{\frac{۷}{۳}}\simeq\pm\ ۱/۵۲۸$ که تنها عدد ۱/۵۲۸ دربازه‌ی [۳,۱−] قرار دارد.

مثال ۱۱: تابع

$$f(x)=\frac{x^{۲}-۴x+۵}{x-۲}$$

را روی بازه‌ی $[۱,۳]$ درنظر بگیرید، مشاهده می شود که $f(۱)=-۲$ و $f(۳)=۲$

و
$$\frac{f(۳)-f(۱)}{۳-۱}=۲$$

آیا نقطه‌ای در بازه‌ی فوق وجود دارد که $f'(c)=۲$ ؟ دقت کنید که تابع f در بازه‌ی $[۱,۳]$ پیوسته نیست، یعنی در شرایط قضیه‌ی مقدار میانگین صدق نمی‌کند، پس از قضیه نمی‌توان نتیجه گرفت که چنین نقطه‌ای وجود دارد، با محاسبه‌ی

$$f'(x)=\frac{x^{۲}-۴x+۳}{(x-۲)^{۲}}$$

برای $f'(c)=۲$ ، معادله‌ی $c^{۲}-۴c+۵=۰$ ، که جواب ندارد به‌دست می‌آید. پس چنین نقطه‌ای وجود ندارد.

مثال ۱۲: تابع پیوسته‌ی

$$f(x)=\begin{cases} x^{۳} & ۰\le x\le ۱ \\ x^{۲} & ۱<x\le ۲ \end{cases}$$

را روی بازه‌ی $[۰,۲]$ درنظر بگیرید. مشتق این تابع

$$f'(x)=\begin{cases} ۳x^{۲} & ۰<x<۱ \\ \text{وجود ندارد} & x=۱ \\ ۲x & ۱<x<۲ \end{cases}$$

توجه کنید که $۲=\frac{f(۲)-f(۰)}{۲-۰}$ و با این که شرایط قضیه‌ی مقدار میانگین برقرار نیست، $f'(\sqrt{\frac{۲}{۳}})=۲$.

مثال ۱۳: برای هر دو عدد حقیقی $x_۱$ و $x_۲$ نشان می‌دهیم نامعادله‌ی

$$|\sin x_۱-\sin x_۲|\le|x_۱-x_۲|$$

برقرار است.

بدون از دست دادن کلّیت مسئله می‌توان فرض کرد $x_۱<x_۲$ (چرا؟)، کافی است تابع $f(x)=\sin x$ را روی بازه‌ی $[x_۱,x_۲]$ درنظر بگیریم. f پیوسته و روی بازه‌ی $(x_۱,x_۲)$ مشتق‌پذیر

است، پس بنا بر قضیه‌ی مقدار میانگین نقطه‌ی c، $x_1 < c < x_2$ ، وجود دارد که

$$\sin x_1 - \sin x_2 = (\cos c)(x_1 - x_2)$$

و یا

$$\left|\sin x_1 - \sin x_2\right| = \left|\cos c\right|\left|x_1 - x_2\right|$$

و چون $\left|\cos c\right| \le 1$ است، پس

$$\left|\sin x_1 - \sin x_2\right| \le \left|x_1 - x_2\right|$$

در این‌جا نتیجه‌ای از قضیه‌ی مقدار میانگین را که در محاسبه‌ی مشتق توابع چندضابطه‌ای به‌کار می‌رود بدون اثبات بیان می‌کنیم.

نتیجه: اگر تابع f در نقطه‌ی c پیوسته و در یک همسایگی محذوف c مشتق‌پذیر باشد و

$$\lim_{x \to c} f'(x) = l$$

آنگاه $f'(c)$ موجود و برابر l است (یعنی f در c مشتق‌پذیر است).

مثال ۱۴: به ازاء چه مقادیری از m و b تابع

$$f(x) = \begin{cases} mx + b & x < a \\ x^2 & x \ge a \end{cases}$$

در نقطه a مشتق‌پذیر است؟

برای برقراری شرط پیوستگی f در a، باید $a^2 = ma + b$

و چون

$$f'(x) = \begin{cases} m & x < a \\ 2x & x > a \end{cases}$$

و $\lim_{x \to a^+} f'(x) = 2a$ و $\lim_{x \to a^-} f'(x) = m$ ، کافیست $m = 2a$ باشد و در نتیجه $b = -a^2$.

قبلاً مشاهده کردید که مشتق تابع ثابت برابر صفر است، ولی آیا هر تابعی که مشتق آن برابر صفر باشد، تابع ثابتی است؟ به قضیه زیر توجه کنید.

قضیه‌ی ۵: اگر تابع f روی بازه‌ی I مشتق‌پذیر بوده و f' روی I برابر مقدار ثابت صفر باشد، آن‌گاه f روی I ثابت است.

اثبات: نقطه‌ی دلخواه $a \in I$ را اختیار می‌کنیم، نشان می‌دهیم که برای هر $x \in I$ ، $f(x)$ برابر

$f(a)$ است و در نتیجه f ثابت است. فرض کنید که $a < x$، تابع f روی بازه‌ی $[a,x]$ در شرایط قضیه‌ی مقدار میانگین صدق می‌کند، پس

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$$

ولی $f'(c)=0$، و در نتیجه :

$$f(x)=f(a)$$

اگر $x < a$، کافی است f را روی بازه‌ی $[x,a]$ درنظر بگیریم تا به نتیجه مطلوب برسیم. (چرا؟)

نتیجه: اگر f روی I مشتق‌پذیر باشد، مشتق f روی I صفر است اگر و تنها اگر f تابع ثابت باشد.

مثال ۱۵: تابع $f(x)=[x]$ در نقاط $x\in Z$ ناپیوسته است و در نتیجه مشتق‌پذیر نیست و روی مجموعه $R-Z$ دارای مشتق صفر است ولی تابع ثابت نیست، آیا این مثال با قضیه‌ی فوق در تضاد نیست؟

مثال ۱۶: می‌خواهیم با استفاده از قضیه‌ی ۵، نشان دهیم که برای هر عدد حقیقی x

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1$$

تابع

$$f(x)=\sin_x^2+\cos^2 x$$

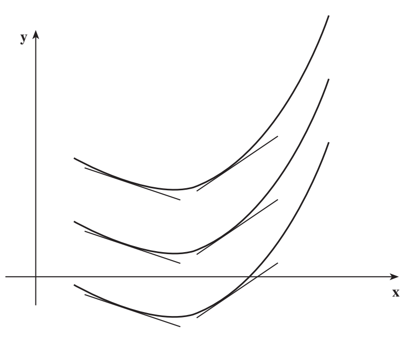
را روی R درنظر بگیرید، f تابعی پیوسته و مشتق‌پذیر است و داریم $f'(x)=0$. پس بنا به قضیه‌ی ۵، $f(x)=k$. نشان دادن $k=1$ به عهده‌ی خواننده است.

نکته: اگر برای دو تابع مشتق‌پذیر f و g روی بازه‌ی I، بدانیم

$$f'(x)=g'(x) \qquad x\in I$$

آنگاه $f(x)=g(x)+k$، زیرا مشتق تابع $h(x)=f(x)-g(x)$ روی I برابر صفر است و بنابر قضیه‌ی ۵ برای هر $x\in I$، $h(x)=k$ یا در I، $h\equiv k$ ؛ (بخوانید تابع h متحد با مقدار ثابت k است). به عبارت دیگر، مشتق دو تابع f و g روی بازه‌ی I با هم برابرند، اگر و فقط اگر $f-g$ روی I تابعی ثابت مانند k باشد.

به شکل روبه‌رو توجه کنید.



یعنی هرگاه دو تابع در هر نقطه‌ی یک بازه یک شیب داشته باشند، نمودار یکی را می‌توان با انتقال دیگری به اندازه‌ی k در امتداد محور y (به سوی بالا یا پایین)، به دست آورد.

مثال ۱۷: می‌خواهیم تحقیق کنیم که چه تابع یا تابع‌هایی روی R وجود دارند که مشتق آن‌ها برابر $\frac{1}{1+x^2}$ است.

قبلاً دیدیم که اگر $f(x)=\operatorname{Arctan} x$، آن‌گاه $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$. پس یکی از این تابع‌ها f است و با اضافه کردن مقدار ثابتی به f توابع دیگری با همین ویژگی به دست می‌آیند، یعنی تمام این توابع به فرم $(\operatorname{Arctan} x)+k$ هستند.

تمرین‌ها

۱ــ برای توابع زیر روی بازه‌های داده شده، شرایط قضیه‌ی رول را بررسی کنید و در صورت برقراری شرایط، نقاطی را که در آن‌ها مشتق صفر است بیابید.

الف) $f(x)=x^2-2x-3$ روی بازه‌ی $[-1,3]$

ب) $f(x)=x^3-6x^2+10x-5$ روی بازه‌ی $[1,4]$

ج) $f(x)=\sin x+\cos x-1$ روی بازه‌ی $[0,4\pi]$

۲ــ برای توابع زیر روی بازه‌های داده شده شرایط قضیه‌ی مقدار میانگین را بررسی کنید و در صورت برقراری شرایط، نقطه یا نقاط c مذکور در قضیه را بیابید.

الف) $f(x)=\sqrt{x^2+81}$ روی $[12,40]$

ب) $f(x)=x^4+x^3-3x^2+2x$ روی $[-2,-1]$

ج) $f(x)=\cos x-\frac{x}{2}$ روی $[\pi,\pi]$

۳ــ برای تابع $f(x)=2x^{\frac{2}{3}}$ روی $[-1,1]$ نشان دهید که هیچ عدد c یافت نمی‌شود که در رابطه‌ی قضیه‌ی مقدار میانگین صدق کند. چرا؟

۴ــ با استفاده از قضیه‌ی رول ثابت کنید:

الف) هر چندجمله‌ای درجه دو، $c_0+c_1x+c_2x^2$، حداکثر ۲ ریشه دارد.

ب) هر چندجمله‌ای درجه سه، $c_0+c_1x+c_2x^2+c_3x^3$، حداکثر ۳ ریشه دارد.

ج) هر چندجمله‌ای درجه n، $n \geq ۱$، $p_n(x)$، حداکثر n ریشه دارد.

۵ ــ با استفاده از قضیه‌ی ۵، ثابت کنید $\operatorname{Arcsin} x + \operatorname{Arccos} x = \frac{\pi}{۲}$

۶ ــ نشان دهید که مشتق تابع علامت

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -۱ & x < ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ ۱ & x > ۰ \end{cases}$$

در نقاطی که وجود دارد برابر صفر است. شرایط قضیه‌ی ۵ را برای این تابع بررسی کنید.

۵ ــ۳ــ تابع‌های صعودی و نزولی

دراین قسمت به یکی دیگر از کاربردهای مهم قضیه‌ی مقدار میانگین که ارتباط بین صعودی و نزولی بودن تابع و مشتق آن را بیان می‌کند، می‌پردازیم.

تعریف: تابع f را روی بازه‌ی I **صعودی** نامند، اگر برای هر $x_۱ ، x_۲ \in I$ ، که $x_۱ < x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱) \leq f(x_۲)$.

تعریف: تابع f را روی بازه‌ی I **نزولی** نامند، اگر برای هر $x_۱ ، x_۲ \in I$ ، که $x_۱ < x_۲$ داشته باشیم $f(x_۱) \geq f(x_۲)$

تعریف: تابعی را که روی بازه‌ی I صعودی و یا نزولی باشد، **یکنوا** نامند.

(تعریف‌های فوق را با تعریف‌های صعودی اکید و نزولی اکید مقایسه کنید. توجه کنید اگر f روی بازه‌ای صعودی اکید (نزولی اکید) باشد، روی آن بازه صعودی (نزولی) است[1])

مثال ۱۸: الف) تابع $f(x) = x$ روی R صعودی است.

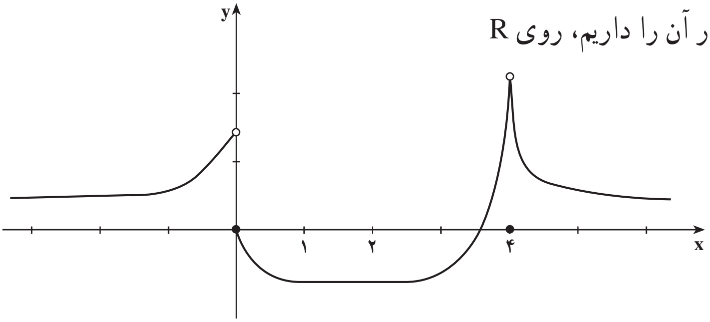
ب) تابع $g(x) = x^۲$ روی $(-\infty, ۰]$ نزولی و روی $[۰, +\infty)$ صعودی است. (چرا؟)

ج) تابع $h(x) = [x]$ روی R صعودی است.

د) تابع $k(x) = \frac{۱}{x}$ روی $(۰, +\infty)$ و روی $(-\infty, ۰)$ نزولی است ولی در دامنه‌اش یکنوا نیست.

۱ــ در برخی از کتاب‌ها از لفظ صعودی به جای صعودی اکید و غیرنزولی به جای صعودی استفاده می‌کنند.

مثال ۱۹: تابع f که نمودار آن را داریم، روی R نه صعودی و نه نزولی است.



ولی روی بازه‌های $(-\infty,0)$ و $[1,4]$ صعودی و روی بازه‌های $[0,2]$ و $(4,+\infty)$ نزولی است. دقت کنید که f روی بازه $[1,2]$ ثابت است در نتیجه هم نزولی و هم صعودی می‌تواند تلقی شود.

مثال ۲۰: تابع

$$f(x)=\begin{cases} 1 & \text{گویا } x \\ 0 & \text{اصم } x \end{cases}$$

روی هیچ بازه‌ای یکنوا نیست (چرا؟)

قضیه‌ی ۶:

الف) اگر برای هر $x\in I$ ، $f'(x)>0$ ، آن‌گاه f روی I صعودی اکید است.

ب) اگر برای هر $x\in I$ ، $f'(x)<0$ ، آن‌گاه f روی I نزولی اکید است.

اثبات: قسمت الف را ثابت می‌کنیم واثبات ب به عهده دانش‌آموزان است.

دو نقطه‌ی دلخواه x_1 و x_2 را در I اختیار می‌کنیم که $x_1<x_2$. تابع f روی بازه‌ی $[x_1,x_2]$ در شرایط قضیه‌ی مقدار میانگین صدق می‌کند، لذا عدد c وجود دارد که

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1) \qquad x_1<c<x_2$$

ولی $x_2-x_1>0$ و $f'(c)>0$ پس $f(x_2)-f(x_1)>0$. یعنی $f(x_1)<f(x_2)$ و در نتیجه f صعودی اکید است.

نکته‌ی ۱: اگرتابع f روی بازه‌هایی به شکل $(-\infty,a]$ یا $[a,b]$ و یا $[b,+\infty)$ پیوسته باشد برای صعودی اکید بودن f ، کافی است f' به ترتیب روی $(-\infty,a)$ یا (a,b) و یا $(b,+\infty)$ موجود و مثبت باشد. همین مطلب را در مورد نزولی اکید بودن f به طور مشابه می‌توان بیان کرد.

نکته‌ی ۲: اگر روی بازه‌ی I ، $f'\geq 0$ باشد، f صعودی و اگر $f'\leq 0$ باشد، f نزولی است.

نکته‌ی ۳: اگر تابع f روی بازه‌های (a,c) و (c,b) صعودی (صعودی اکید) و در نقطه‌ی C پیوسته

باشد، آنگاه f روی بازه‌ی (a,b) صعودی (صعودی اکید) است. و نیز اگر f روی بازه‌های (a,c) و(c,b) نزولی (نزولی اکید) و در نقطه‌ی c پیوسته باشد، آنگاه f روی بازه‌ی (a,b) نزولی (نزولی اکید) است.

مثال ۲۱: تابع‌های زیر روی بازه‌های مطرح شده صعودی‌اند.

الف) $f(x)=\sin x$ روی $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$

ب) $g(x)=x^{3}+1$ روی R

ج) $h(x)=\begin{cases} x+1 & x<-1 \\ 0 & -1\le x\le 0 \\ \operatorname{Arc}\tan x & x>0 \end{cases}$ روی R

مثال ۲۲: تابع‌های زیر روی بازه‌های مطرح شده نزولی‌اند.

الف) $f(x)=\cos x$ روی $[0,\pi]$

ب) $g(x)=\frac{1}{x}$ روی $(0,\infty)$ یا روی $(-\infty,0)$

ج) $h(x)=|x-2|-|x-1|$ روی R

مثال ۲۳: برای تابع $h(x)=\tan x$ ، می‌دانیم که

$$h'(x)=1+\tan^{2}x \qquad x\neq k\pi+\frac{\pi}{2} \qquad k\in Z$$

و h' روی بازه‌هایی که وجود دارد مثبت است، آیا می‌توان گفت که تابع $\tan x$ روی R صعودی است؟

بخشی از جدول رفتار تابع h را مشاهده می‌کنید.

x	$-\frac{5\pi}{2}$		$-\frac{3\pi}{2}$		$-\frac{\pi}{2}$		$+\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{2}$
h'	|	+	|	+	|	+	|	+	|
h		↗		↗		↗		↗	

این بار به دلیل عدم پیوستگی تابع h در نقاط $k\pi+\frac{\pi}{2}$ ، نمی‌توان گفت که تابع در R صعودی است.

مثال ۲۴: نشان می‌دهیم برای عدد $a>0$ ، عدد حقیقی یکتای b وجود دارد که

$$b=\sqrt[n]{a}$$

کافی است تابع پیوسته‌ی $f(x)=x^{n}-a$ را روی بازه‌ی $[0,\infty)$ درنظر بگیریم $f(0)=-a<0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. پس بنابه قضیه‌ی مقدار میانی f در این بازه حداقل یک بار صفر می‌شود. پس

عدد حقیقی b وجود دارد که $f(b)=۰$ (چرا؟) و چون برای هر x در این بازه $f'>۰$ است، b یکتاست.

این قسمت را با بیان قضیه‌ای که از آن برای اثبات برخی ازنامساوی‌ها می‌توان استفاده کرد به پایان می‌بریم.

قضیه‌ی ۷: اگر تابع‌های f و g روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و روی بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر باشند و $f(a)=g(a)$ و نیز برای هر x، $a<x<b$

$$f'(x)<g'(x)$$

آن‌گاه برای هر x، $a<x<b$، $f(x)<g(x)$.

مثال ۲۵: نشان می‌دهیم که اگر $n\in N$ و $n\geq ۲$، آن‌گاه نامساوی

$$(۱+x)^n>۱+nx$$

برای تمام xهای حقیقی و مثبت برقرار است.

اگر $F(x)=۱+nx$ و $g(x)=(۱+x)^n$ اختیار شوند. این تابع‌ها روی $[۰,+\infty)$ پیوسته و روی $(۰,+\infty)$ مشتق‌پذیرند و

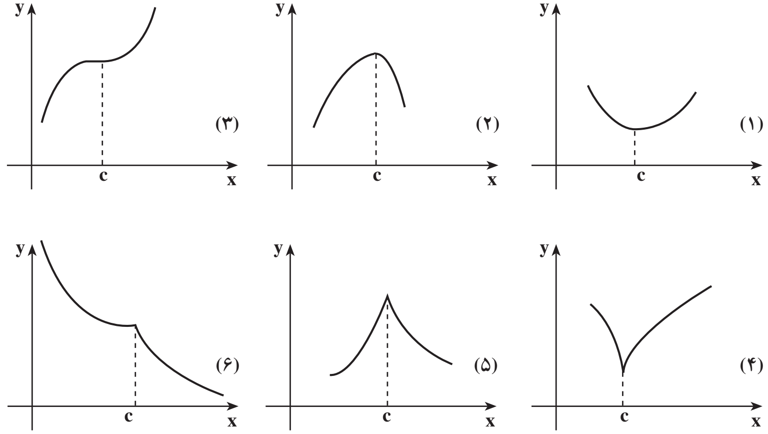
$$g'(x)=n(۱+x)^{n-۱} \qquad f'(x)=n$$

و چون برای هر x مثبت، $g'(x)>f'(x)$ است، (چرا؟) بنا به قضیه‌ی ۷، نامساوی موردنظر برقرار است. می‌توان نشان داد این نامساوی برای هر عدد گویای بزرگ‌تر از ۱ نیز درست است، یعنی

$$(۱+x)^r>۱+rx \qquad x>۰\ ,\ r\in Q\ ,\ r>۱$$

۵ــ۴ــ آزمون‌های مشتق

مشاهده کردیم که برای یافتن نقاط اکسترمم نسبی و یا مطلق باید نقاط بحرانی تابع را شناسایی کنیم و نیز دیدیم که نقاط بحرانی لزوماً اکسترمم نیستند. به شکل‌های زیر توجه کنید :



نقطه‌ی c نقطه‌ی بحرانی برای همه‌ی نمودارهای صفحه‌ی قبل است.

در (۱) و (۴)، c نقطه‌ی مینیمم نسبی است و نمودارها قبل از c نزولی و بعد از آن صعودی‌اند.

در (۲) و (۵)، c نقطه‌ی ماکسیمم نسبی است و نمودارها قبل از c صعودی و بعد از آن نزولی‌اند.

و در (۳) و (۶)، c نقطه‌ی اکسترمم نیست، و نمودارها قبل و بعد از c به صعودی یا نزولی بودن خود ادامه می‌دهند.

آنچه را که در شکل‌های بالا مشاهده شد می‌توان در قضیه‌ی زیر که بدون اثبات بیان می‌کنیم خلاصه کرد.

قضیه‌ی ۸ (آزمون مشتق اول): فرض کنید $a<c<b$ ، c، نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد و f روی بازه‌ی (a,b) پیوسته و بجز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد.

الف) اگر f' روی (a,c) مثبت و روی (c,b) منفی باشد، آنگاه f در c ماکسیمم نسبی دارد.

ب) اگر f' روی (a,c) منفی و روی (c,b) مثبت باشد، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

ج) اگر f' روی (a,c) و (c,b) هم علامت باشد، آنگاه f در c اکسترمم ندارد.

مثال ۲۶: می‌خواهیم نقاط اکسترمم تابع $h(x)=\frac{\sin x}{2+\cos x}$ را روی R تعیین کنیم.

داریم :

$$h'(x)=\frac{2\cos x+1}{(2+\cos x)^2}$$

و نقاط $x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ نقاط بحرانی h را تشکیل می‌دهند. بخشی از جدول رفتار تابع را که در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ قرار دارد مشاهده می‌کنید.

x	$-\pi$		$-\frac{2\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
h'		$-$	0	$+$	0	$-$	
h		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	

و h در $-\frac{2\pi}{3}$ مینیمم نسبی و در $\frac{2\pi}{3}$ ماکسیمم نسبی دارد و به دلیل متناوب بودن h می‌توان گفت که h دارای در نقاط $2k\pi-\frac{2\pi}{3}$ مینیمم نسبی و درنقاط $2k\pi+\frac{2\pi}{3}$ ماکسیمم نسبی دارد $(k\in Z)$.

مینیمم مطلق $-۰/۵۸ \approx \frac{-\sqrt{۳}}{۳}$ و ماکسیمم مطلق $۰/۵۸ \approx \frac{\sqrt{۳}}{۳}$ است. (چرا؟)

مثال ۲۷: برای تابع $f(x)=۳x^{۵}-۵x^{۳}$ ، $f'(x)=۱۵x^{۴}-۱۵x^{۲}$. پس نقاط ۱− ، ۰ ، ۱ نقاط بحرانی‌اند. بخشی از جدول رفتار تابع f به صورت زیر است.

x		-۱		۰		۱	
f'	+	۰	−	۰	−	۰	+
f	↗		↘		↘		↗

همان‌طور که مشاهده می‌شود نقطه‌ی ۱− نقطه‌ی ماکسیمم نسبی، نقطه‌ی ۱ نقطه‌ی مینیمم نسبی و نقطه‌ی ۰ با این که نقطه‌ی بحرانی تابع f است ولی نقطه‌ی اکسترمم نسبی نیست.

در برخی از مواقع تعیین علامت مشتق قبل و بعد از نقطه‌ی بحرانی کار ساده‌ای نیست، قضیه‌ی زیر ابزار دیگری را که از مشتق دوم تابع کمک می‌گیرد، جهت شناسایی نوع نقطه‌ی اکسترمم در اختیار ما قرار می‌دهد.

قضیه‌ی ۹ (آزمون مشتق دوم): اگر c نقطه‌ی بحرانی تابع f و $f''(c)$ موجود باشد و

الف) $f''(c)>۰$ ، آن‌گاه f در c مینیمم نسبی دارد.

ب) $f''(c)<۰$ ، آن‌گاه f در c ماکسیمم نسبی دارد.

نکته: در حالتی که $f''(c)=۰$ ، آزمون بی‌نتیجه است.

مثال ۲۸: برای تابع $h(x)=\frac{\sin x}{۲+\cos x}$ ، $h''(x)=\frac{۲\sin x(\cos x-۱)}{(۲+\cos x)^{۲}}$ و

$$h''(۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳})=-۰/۷۷ \quad ، \quad h''(۲k\pi-\frac{۲\pi}{۳})=-۰/۷۷$$

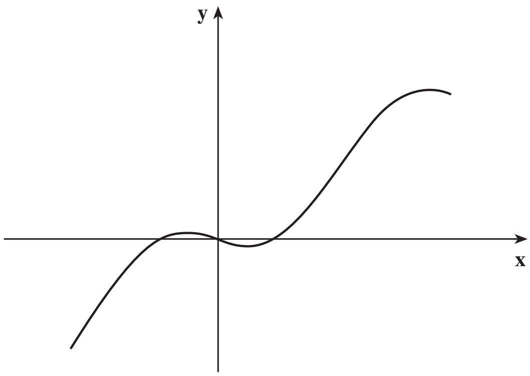
پس h در نقاط $۲k\pi-\frac{۲\pi}{۳}$ مینیمم نسبی و در نقاط $۲k\pi+\frac{۲\pi}{۳}$ ماکسیمم نسبی دارد.

مثال ۲۹: در مورد اکسترمم‌های نسبی تابع $g(x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x-\sin x$ روی R تحقیق می‌کنیم.

داریم $g'(x)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\cos x$ و $g''(x)=\sin x$.

نقاط $x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۴}\,(k\in Z)$ نقاط بحرانی تابع g اند و $g''(۲k\pi+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و $g''(۲k\pi-\frac{\pi}{۴})=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ پس g در نقاط $۲k\pi+\frac{\pi}{۴}$ دارای مینیمم نسبی و در $۲k\pi-\frac{\pi}{۴}$ دارای

ماکسیمم نسبی است. g در R دارای ماکسیمم مطلق و مینیمم مطلق نیست. به شکل زیر توجه کنید.



مثال ۳۰: مشتق دوم همه‌ی تابع‌های زیر در نقطه‌ی $c=0$ برابر صفر است.

الف) $f(x)=-x^{4}$

ب) $g(x)=x^{2}+\cos^{2}x$

ج) $h(x)=\tan^{-1}x$

درنقطه‌ی صفر f دارای ماکسیمم نسبی، g دارای مینیمم نسبی است و h نه ماکسیمم نسبی دارد و نه مینیمم نسبی (چرا؟)

مثال ۳۱: اگر ارتفاع یک موشک پرتاب شده با رابطه‌ی

$$s=f(t)=-t^{3}+96t^{2}+195t+5 \qquad t\geq 0$$

متر در ثانیه مشخص شود، حداکثر ارتفاع موشک چقدر است؟

می‌توان فرض کرد که دامنه‌ی تغییرات t بازه‌ی $[0,T]$ برای یک $T>0$ است. برای یافتن ماکسیمم f، داریم :

$$f'(t)=-3t^{2}+192t+195$$

$$=-3(t-65)(t+1)$$

که ریشه‌های معادله‌ی $f'(t)=0$ عبارتند از $t=-1$ (که در بازه‌ی موردنظر قرار ندارد) و $t=65$.
با محاسبه $f''(65)=-198$ به این نتیجه می رسیم که f در $t=65$ ماکسیمم دارد و مقدار آن برابر ۱۴۳۶۵۵ متر است که ۶۵ ثانیه پس از شلیک به دست می‌آید. (دقت کنید که f برای $t>65$ نزولی است).

مثال ۳۲: برای ساختن یک انبار بدون سقف به شکل یک استوانه در زمینی مربع شکل به

ضلع ۶۰ متر، هزینه‌ی ساخت هر مترمربع کف برابر ۴۵ هزارتومان و هزینه‌ی ساخت هر مترمربع دیوار برابر ۱۳۵ هزار تومان است. می‌خواهیم این انبار حجمی برابر $۱۱۲۵\pi \approx ۳۵۳۴$ مترمکعب داشته باشد، شعاع قاعده و ارتفاع این استوانه چقدر باشد تا کمترین هزینه‌ی ساخت را داشته باشیم؟

اگر r شعاع قاعده و h ارتفاع استوانه باشد، آن‌گاه سطح قاعده برابر $\pi r^۲$ و سطح جانبی آن برابر $۲\pi rh$ است. حجم این استوانه برابر است با

$$\pi r^۲ h = ۱۱۲۵\pi$$

یا به عبارتی $h = \frac{۱۱۲۵}{r^۲}$. از طرفی هزینه‌ی ساخت این انبار برابر است با

$$C(r) = ۴۵\pi r^۲ + ۱۳۵\left(۲\pi r(\frac{۱۱۲۵}{r^۲})\right)$$

$$= ۴۵\pi r^۲ + ۳۰۳۷۵۰\frac{\pi}{r}$$

هزارتومان. توجه کنید که درمثال ۵ نشان دادیم که این تابع به ازاء $r = ۱۵$ مقدار مینیمم خود را که تقریباً برابر $۳۰۳۷۵\pi \approx ۹۵۴۲۶$ هزار تومان است خواهد داشت.

تمرین‌ها

۱ـ جدول رفتار توابع زیر و مختصات نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی آن‌هارا (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y = ۲x^۳ - ۹x^۲ + ۱۲x + ۱$ ب) $y = x^۲(x+۲)^۳$

ج) $y = \frac{x}{۲x-۱}$ د) $y = x + \frac{۱}{x}$

۲ـ ثابت کنید برای $۰ < x < \pi$ ، $x - \frac{x^۳}{۶} < \sin x$.

۳ـ جدول رفتار توابع زیر و نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی آن‌ها را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y = (x-۱)x^{\frac{۲}{۳}}$ ب) $y = \left|x^۲ - ۲x\right|$

۴ـ جهت تغییرات و نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی توابع زیر را در یک دوره‌ی تناوب تعیین کنید.

الف) $y = ۲\sin x + \cos ۲x$ ب) $y = \tan x + \cot x$

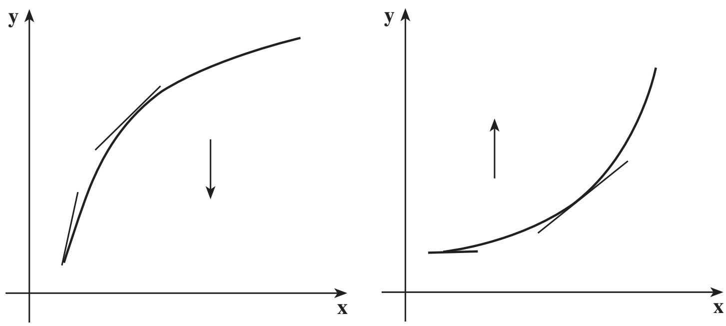
۵ ــ هزینه‌ی متوسط روزانه‌ی یک کارخانه‌ی تولید کننده‌ی نوعی ماشین حساب برحسب تومان، برابر است با :

$$A(x) = ۰/۰۰۰۱x^۲ - ۰/۰۸x + ۴۰ + \frac{۵۰۰۰}{x} \qquad x > ۰$$

که در آن x تعداد ماشین حساب تولید شده در روز است. تحقیق کنید که اگر تولید روزانه ۵۰۰ عدد باشد، هزینه متوسط مینیمم می‌شود.

۵ ــ ۵ ــ جهت تقعر، نقطه‌ی عطف

به شکل‌های زیر توجه کنید.



گرچه هر دو تابع روی بازه‌ی (a,b) صعودی‌اند ولی در یکی تقعر (خمیدگی یا گودی) نمودار رو به بالا و در دیگری رو به پایین است.

تعریف: اگر f' روی بازه‌ی باز I صعودی اکید باشد، گویند جهت تقعر نمودار f روی I رو به بالاست و اگر f' روی بازه‌ی باز I نزولی اکید باشد، گویند جهت تقعر نمودار f روی I رو به پایین است.

نکته: می‌توان نشان داد که روی بازه‌ی I، جهت تقعر نمودار رو به بالا است اگر و تنها اگر خطوط مماس بر نمودار در زیر آن واقع شوند. همچنین روی بازه‌ی I جهت تقعر نمودار رو به پایین است اگر و تنها اگر خطوط مماس بر نمودار بالای نمودار واقع شوند.

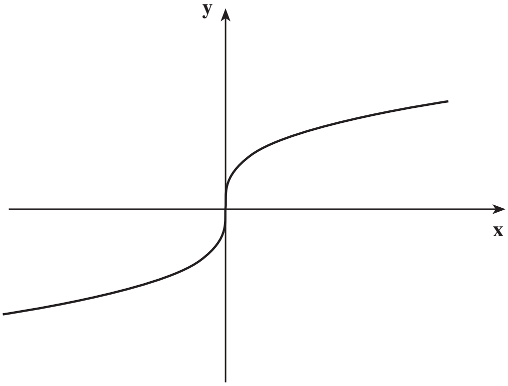
مثال ۳۳: الف) در نمودار تابع $f(x) = x^۳$ جهت تقعر روی بازه‌ی $(۰, \infty)$ رو به بالاست زیرا در این بازه $f'(x) = ۳x^۲$ صعودی است و نیز جهت تقعر روی بازه‌ی $(-\infty, ۰)$ رو به پایین است زیرا f' در این بازه نزولی است.

در قضیه‌ی زیر صعودی و نزولی بودن f' با کمک مشتق آن شناسایی شده است.

قضیه‌ی ۱۰: الف) اگر f'' روی بازه‌ی باز I موجود و همواره مثبت باشد، آن‌گاه **جهت تقعر** نمودار f روی این بازه رو به بالاست.

ب) اگر f'' روی بازه‌ی باز I موجود و همواره منفی باشد، آن‌گاه **جهت تقعر** نمودار f روی این بازه رو به پایین است.

مثال ۳۴: برای تابع $h(x)=x^{\frac{1}{3}}$، اگر $x\neq 0$، $h'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ و $h''(x)=-\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}$ و چون h'' روی بازه‌ی $(-\infty, 0)$ مثبت است، جهت تقعر نمودار در این بازه رو به بالاست و چون روی بازه‌ی $(0,\infty)$ منفی است جهت تقعر نمودار در این بازه‌ی رو به پایین است.



توجه کنید که h'' در 0 تعریف نشده است.

تعریف: اگر جهت تقعر نمودار f در c، تغییر کند و نمودار f در $(c,f(c))$ مماس داشته باشد، آن‌گاه $(c,f(c))$ را **نقطه‌ی عطف** نمودار f می‌نامند.

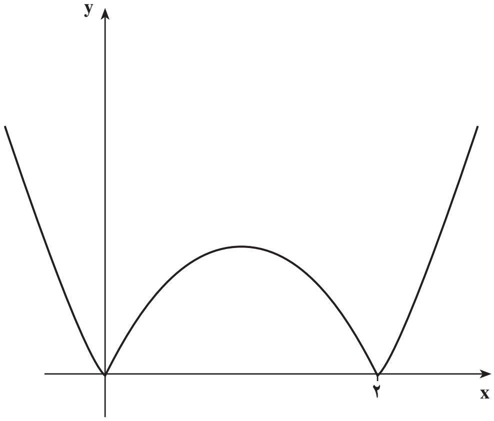
گاهی به جای این که بگوییم $(c,f(c))$ نقطه‌ی عطف نمودار f است به طور خلاصه می‌گوییم c نقطه‌ی عطف f است.

مثال ۳۵: جهت تقعر تابع $f(x)=\tan x$ روی بازه‌ی $(0,\frac{\pi}{2})$ رو به بالا و روی بازه‌ی $(\frac{\pi}{2},\pi)$ رو به پایین است ولی نمی‌توان گفت که f در $\frac{\pi}{2}$ نقطه‌ی عطف دارد زیرا پیوسته نیست که خط مماس داشته باشد.

نکته: برای یافتن نقاط عطف نمودار تابع کافی است نقاطی که f'' در آن‌ها وجود ندارد یا برابر صفر است را تعیین و علامت f'' را قبل و بعد از این نقاط و نیز وجود خط مماس را در این نقاط

بررسی کرد.

مثال ۳۶: برای تابع پیوسته $g(x)=\left|x^{۲}-۲x\right|$ ، می‌توان نشان داد که جهت تقعر نمودار روی بازه‌های $(∞ ,۰)$ و $(۲,∞)$ رو به بالا و روی بازه‌ی $(۰,۲)$ رو به پایین است. گرچه در نقاط $x=۰$ و $x=۲$ جهت تقعر نمودار تغییر یافته ولی به دلیل عدم وجود خط مماس، این نقاط، نقاط عطف نیستند.



مثال ۳۷: برای تابع $h(x)=x^{\frac{۴}{۳}}$ ، $h'(x)=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}$ و برای $x\neq ۰$ ، $h''(x)=\frac{۴}{۹}x^{-\frac{۲}{۳}}$. و چون h'' در ۰ وجود ندارد،علامت h'' را قبل و بعد از آن بررسی می‌کنیم که هر دو مثبت‌اند،پس ۰ نقطه‌ی عطف h نیست.

۵ــ۶ــ رسم نمودار

با کمک اطلاعاتی که از تابع f و مشتق‌های اول و دوم آن به‌دست می‌آید، می‌توان نمودار تابع را با دقت نسبتاً خوبی رسم کرد، این اطلاعات عبارتند از :

ــ دامنه‌ی تعریف f

ــ محل تلاقی نمودار و محورهای مختصات

ــ اینکه آیا f زوج است یا فرد یا هیچکدام؟

ــ دوره‌ی تناوب f درصورت متناوب بودن.

ــ بازه‌هایی که f در آن‌ها صعودی یا نزولی است.

ــ مقادیر اکسترمم‌های نسبی در صورت وجود.

ــ جهت تقعر نمودار f در بازه‌های مختلف.

ــ نقاط عطف نمودار f در صورت وجود.

ــ رفتار تابع f برای مقادیر بسیار بزرگ و کوچک x در صورت نیاز.

ــ مجانب‌های افقی، عمودی و مایل در صورت وجود.

البته توجه داشته باشید که ممکن است تعیین برخی از موارد فوق به سادگی امکان‌پذیر نباشد.

در سال‌های قبل مثال‌های متعددی از رسم نمودار توابع مختلف دیده‌اید، در این‌جا فقط جهت یادآوری چند مثال را ارائه می‌دهیم.

مثال ۳۸: نمودار تابع $f(x)=x^4-2x^3$ را رسم می‌کنیم.

دامنه تابع $\mathbb{R}$، محل تلاقی نمودار f با محور y در مبدأ و با محور x به جز مبدأ در $x=2$ است.

$$f'(x)=4x^3-6x^2=2x^2(2x-3)$$

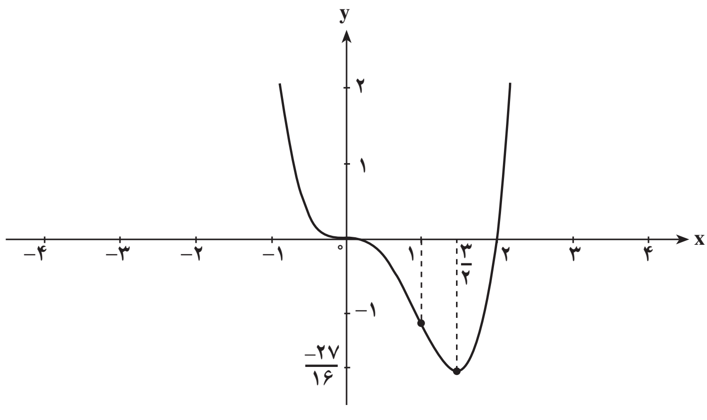
پس برای $x<\frac{3}{2}$ تابع نزولی و برای $x>\frac{3}{2}$ تابع صعودی است و نقطه‌ی $x=\frac{3}{2}$ نقطه‌ی مینیمم نسبی و مطلق f است (چرا؟) و

$$f''(x)=12x^2-12x=12x(x-1)$$

پس $f''(0)=f''(1)=0$ و برای $x<0$، همچنین برای $x>1$، $f''>0$ است پس تقعر نمودار رو به بالاست و برای $0<x<1$، $f''<0$، پس تقعر نمودار رو به پایین است. لذا نقاط 0 و 1 نقاط عطف نمودار هستند همچنین

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

تابع هیچ‌گونه مجانبی هم ندارد. نمودار f را در شکل زیر مشاهده می‌کنید.



مثال ۳۹: نمودار تابع $h(x)=\dfrac{x}{۱+x^{۲}}$ را رسم می‌کنیم.

دامنه‌ی تابع، R و محل تلاقی نمودار با محورها در مبدأ است و تابع نسبت به مبدأ مختصات متقارن است چون $h(-x)=-h(x)$ ، لذا کافی است رفتار h را در $[۰,\infty)$ بررسی و سپس نمودار آن را کامل کنیم. داریم :

$$h'(x)=\frac{۱-x^{۲}}{(۱+x^{۲})^{۲}}$$

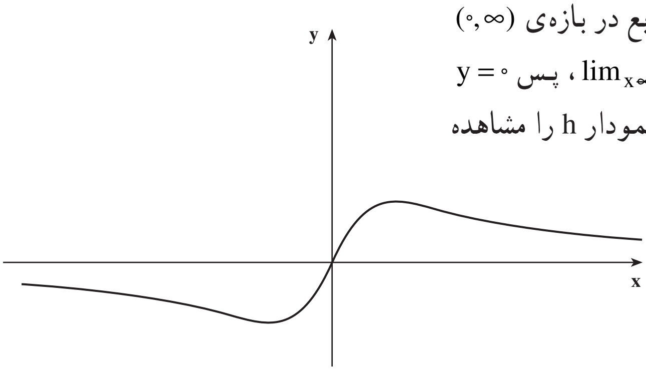
بنابراین نقطه‌ی ۱، نقطه‌ی بحرانی h است و چون h' روی بازه‌ی $(۱,+\infty)$ منفی است h در این بازه نزولی و روی بازه‌ی $(۰,۱)$ صعودی است. پس h در $x=۱$ دارای ماکسیمم نسبی است. همچنین

$$h'(x)=\frac{۲x(x^{۲}-۳)}{(۱+x^{۲})^{۳}}$$

پس نقاطی که نمودار h می‌تواند در آن‌ها نقطه‌ی عطف داشته باشد عبارتند از نقاط $x=۰$ و $x=\pm\sqrt{۳}$. که تنها $\sqrt{۳}$ در بازه‌ی $(۰,\infty)$ قرار دارد. علامت h' را می‌توان در جدول زیر به همراه سایر اطلاعات فوق مشاهده کرد.

x	۰		۱		$\sqrt{۳}$		۳
h'		+	۰	−		−	
h'	۰	−		−	۰	+	
h	۰	↗	$\frac{۱}{۲}$	↘	$\frac{\sqrt{۳}}{۴}$	↘	

نقطه‌ی $\sqrt{۳}$ نقطه‌ی عطف تابع در بازه‌ی $(۰,\infty)$ است. همچنین $\lim_{x\to\infty} h(x)=۰$ ، پس $y=۰$ مجانب افقی نمودار h است. نمودار h را مشاهده می‌کنید.



توجه کنید که نقاط $\sqrt{۳}-$ ، $\sqrt{۳}$ و ۰ نقاط عطف و نقطه‌ی ۱ نقطه‌ی ماکسیمم مطلق و نقطه‌ی ۱− نقطه‌ی مینیمم مطلق h هستند. (چرا؟)

مثال ۴۰: نمودار تابع $k(x)=۱+\frac{۱}{x^{۲}-۲x}$ را رسم می‌کنیم.

دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}-\{۰,۲\}$ است و محل تلاقی نمودار با محور x، درنقطه‌ای به طول ۱ است. داریم :

$$k'(x)=\frac{۲-۲x}{(x^{۲}-۲x)^{۲}}$$

و $k'(x)=۰$ نتیجه می‌دهد $x=۱$ ، پس نقطه‌ی ۱ نقطه‌ی بحرانی k است. همچنین

$$k''(x)=\frac{۲(۳x^{۲}-۶x+۴)}{(x^{۲}-۲x)^{۳}}$$

و $k''(x)\neq ۰$. بخشی از جدول رفتار تابع k را مشاهده می‌کنید :

x	۱−		۰		۱		۲		۳
k'		+		+	۰	−		−	
k''		+		−		−		+	
k	$\frac{۲}{۳}$	↗		↗	۰	↘		↘	$\frac{۴}{۳}$

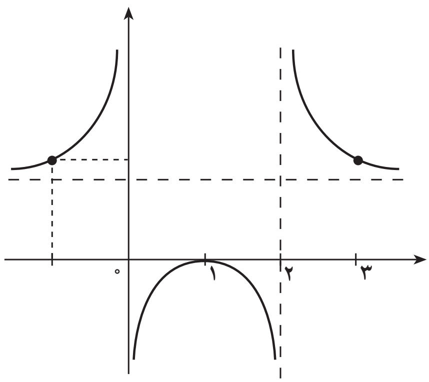
و نیز

$$\lim_{x\to -\infty} k(x)=\lim_{x\to +\infty} k(x)=۱$$

پس خط $y=۱$ مجانب افقی نمودار k است و چون

$$\lim_{x\to ۰^{-}} k(x)=\lim_{x\to ۲^{+}} k(x)=+\infty$$

$$\lim_{x\to ۰^{+}} k(x)=\lim_{x\to ۲^{-}} k(x)=-\infty$$

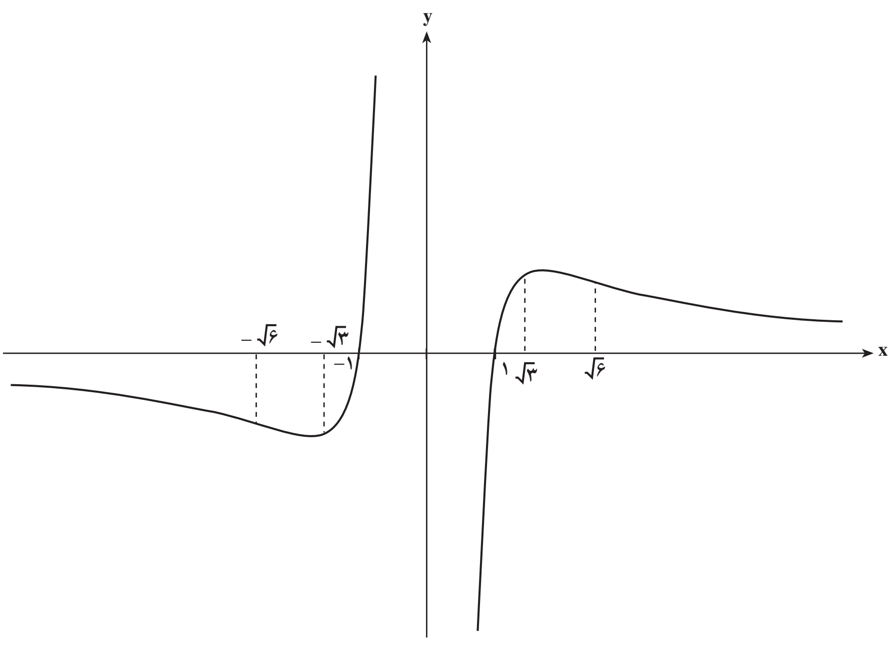


توجه کنید که k در $x=۱$ دارای ماکسیمم نسبی است.

مثال ۴۱: نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۱}{x^{۳}}$ را رسم می‌کنیم.

دامنه تابع $\mathbb{R}-\{۰\}$ و نمودار آن محور x را در $x=۱$ و $x=-۱$ قطع می‌کند. چون $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=۰$ (یا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=۰$)، خط $y=۰$ مجانب افقی f است و چون $\lim\limits_{x\to۰^{+}} f(x)=-\infty$ (یا $\lim\limits_{x\to۰^{-}} f(x)=+\infty$)، خط $x=۰$ مجانب قائم است. مشتق تابع، $f'(x)=\dfrac{-x^{۴}+۳x^{۲}}{x^{۶}}$، دارای ریشه‌های $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}$ است و مشتق دوم تابع، $f''(x)=\dfrac{۲x^{۲}-۱۲}{x^{۵}}$ که ریشه‌های $\sqrt{۶}$ و $-\sqrt{۶}$ دارد. جدول رفتار و نمودار این تابع عبارتند از : (دقت کنید f تابعی فرد و لذا نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات قرینه است).

x		$-\sqrt{۶}$		$-\sqrt{۳}$		۰		$\sqrt{۳}$		$\sqrt{۶}$	
f'		$-$		۰	$+$	‖	$+$	۰		$-$	
f''	$-$	۰		$+$		‖		$-$		۰	$+$
f	↘	$\dfrac{-۵\sqrt{۶}}{۳۶}$	↘	$\dfrac{-۲\sqrt{۳}}{۹}$	↗	‖	↗	$\dfrac{-۲\sqrt{۳}}{۹}$	↘	$\dfrac{۵\sqrt{۶}}{۳۶}$	↘



مثال ۴۲: نمودار تابع $f(x)=x+\sqrt{x^2-1}$ را رسم می‌کنیم :

دامنه f مجموعه $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ است چون

$$\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^2-1})=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}=0$$

پس خط $y=0$ مجانب افقی نمودار تابع f است. چون $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\infty$ ، بنابراین تابع می‌تواند مجانب مایل داشته باشد،

$$a=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x}=2$$

و

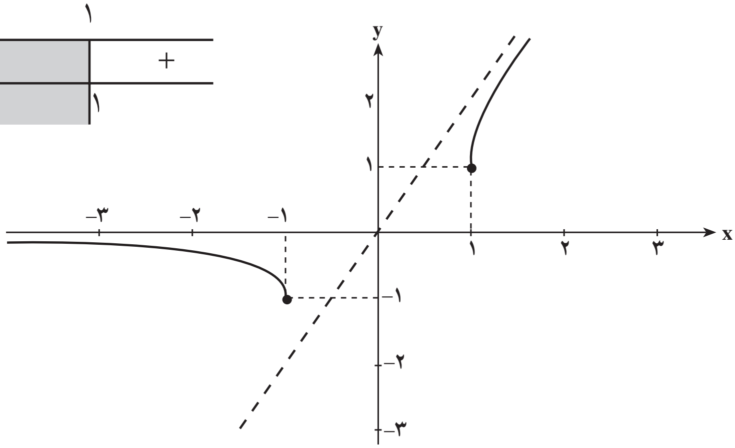
$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-1}-x)=0$$

و در نتیجه خط $y=2x$ مجانب مایل f است.

مشتق تابع، $f'(x)=1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}$ ریشه دارند.

جدول رفتار و نمودار تابع عبارتند از :

x		−۱		۱	
f′	−				+
f		−۱		۱	



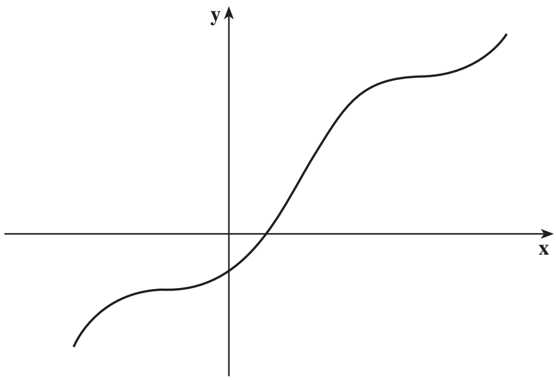
مثال ۴۳: نمودار تابع $g(x)=x-\cos x$ را رسم می‌کنیم.

دامنه‌ی این تابع $\mathbb{R}$ است و نمودار، محور y را در نقطه‌ای به عرض ۱− و محور x را در

نقطه‌ای به طول c، $0<c<\frac{\pi}{2}$ قطع می‌کند. (چرا؟). چون

$$g'(x)=1+\sin x$$

و برای $x\in\mathbb{R}$ ، $g'\geq 0$ ، g تابعی صعودی است و نقطه‌ی c تنها محل تلاقی نمودار با محور x است. $x=2k\pi+\frac{3\pi}{2},(k\in Z)$ نقاط بحرانی g اند ولی هیچیک اکسترمم نیستند. همچنین $g''(x)=\cos x$. و g'' روی بازه‌های $(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2})$ مثبت و تقعر نمودار رو به بالاست و g'' روی بازه‌های $(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2})$ منفی و تقعر نمودار رو به پایین است. و در نتیجه برای هر $k\in\mathbb{Z}$ ، نقطه‌ی $k\pi+\frac{\pi}{2}$ نقطه‌ی عطف نمودار است. (چرا؟) همچنین $\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty} g(x)=-\infty$ و g دارای هیچ‌گونه مجانبی نیست. همچنین می‌توان دید که $g(x+2\pi)=g(x)+2\pi$ ، پس کافی است مثلاً g را در بازه‌ی $[0,2\pi]$ رسم کرده و سپس به $\mathbb{R}$ گسترش دهیم. نمودار g مطابق شکل است.



تمرین‌ها

۱ــ جهت تقعر در بازه‌های مختلف و نیز نقاط عطف توابع زیر را در صورت وجود تعیین کنید.

الف) $f(x)=\frac{4}{x^2+3}$ ب) $f(x)=\frac{2(x+1)}{(x-2)^2}$

۲ــ a و b را چنان تعیین کنید که $A(1,3)$ نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+b}{x^2+1}$ باشد.

۳ــ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=x^{۳}-۳x^{۲}$ ب) $f(x)=\frac{x^{۲}}{x^{۲}+۱}$

ج) $f(x)=\frac{۲x^{۲}}{x^{۲}-۸x+۱۲}$

۴ــ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

الف) $f(x)=\sin x-\cos x$ ب) $f(x)=\frac{۱}{\sin x+\cos x}$

۵ ــ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=۲x\sqrt{۴-x^{۲}}$ ب) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^{۲}+۲}}$

۶ ــ نقاط عطف نمودار تابع $f(x)=x^{۲}+۲\sqrt{۲}(\sin x+\cos x)$ را در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ تعیین کنید.

۵ ــ۷ــ قاعده‌ی هوپیتال[۱]

هنگام بیان قضیه‌های حدّ خارج قسمت دو تابع f و g حالتی که حد صورت و مخرج کسر $\frac{f}{g}$ هردو صفر می‌شوند، مگر در حالت‌های خاصی نظیر $\frac{\sin x}{x}$ و $\frac{۱-\cos x}{x}$، مورد بررسی قرار نگرفتند. در این قسمت به این حالت و سایر موارد مشابه می‌پردازیم. به قضیه‌ی زیر توجه کنید.

قضیه‌ی ۱۱: (قاعده‌ی هوپیتال) اگر توابع f و g روی بازه‌ی $I=(a,b)$ مشتق‌پذیر و g' در هر نقطه I مخالف صفر باشد، $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=۰$، $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$ آن‌گاه $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

نکته‌ی ۱: این حالت را اصطلاحاً یک صورت مبهم می‌نامند و هدف از بیان قاعده‌ی هوپیتال یافتن مقدار واقعی $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}$ با استفاده از $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ است. یافتن مقدار واقعی صورت مبهم را رفع ابهام می‌نامند.

۱ــ لوپیتال، ریاضیدان، در فارسی به اشتباه هوپیتال نوشته، تلفظ و رایج شده است.

نکته‌ی ۲: با انتخاب بازه‌ی مناسب I در قضیه‌ی ۱۱، $\lim_{x\to a^+}$ را می‌توان با هریک از $\lim_{x\to a^-}$، $\lim_{x\to a}$، [1] $\lim_{x\to +\infty}$ و یا $\lim_{x\to -\infty}$ جایگزین کرد.

مثال ۴۴: محاسبه‌ی مقدار $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ موردنظر است.

مشاهده می‌کنیم $\lim_{x\to 0^+}\sin x=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x}=0$. شرایط قضیه برقرار است و چون داریم :

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to 0^+}2\sqrt{x}\cos x=0$$

پس $\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}=0$.

مثال ۴۵: مقدار $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{1-\tan^2 x}$ را نیز به دلیل برقراری شرایط قضیه می‌توان با قاعده‌ی هوپیتال حساب کرد :

$$\lim_{x\to \frac{x}{4}}\frac{-\sqrt{2}\sin x}{-2\tan x(1+\tan^2 x)}=\frac{1}{4}$$

پس مقدار حدّ مورد نظر نیز برابر $\frac{1}{4}$ است.

مثال ۴۶: اگر برای یافتن مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{1+x}$ از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کنیم، خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\tan^2 x}{1}=1$$

درحالی که با استفاده از این نکته که کسر مورد مطالعه در همسایگی صفر تابعی پیوسته است، $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{1+x}=0$. علت نتیجه‌گیری نادرست از قاعده‌ی هوپیتال را توضیح دهید.

مثال ۴۷: مقدار $\lim_{x\to +\infty}\frac{x^{-\frac{4}{3}}}{\sin\frac{1}{x}}$ را حساب می‌کنیم.

$\lim_{x\to +\infty}\sin(\frac{1}{x})=\lim_{x\to +\infty}x^{-\frac{4}{3}}=0$، و هر دو تابع روی بازه‌ی $(1,\infty)$، مشتق‌پذیرند و

---

۱ ــ در این حالت همسایگی محذوف a در نظر گرفته می‌شود.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{4}{3}x^{-\frac{7}{3}}}{(-\frac{1}{x^2})\cos\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{3}\frac{x^{-\frac{1}{3}}}{\cos\frac{1}{x}}=0$$

نکته‌ی ۳: اگر در قاعده‌ی هوپیتال $\lim_{x\to a^+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\pm\infty$ باشد باز هم می‌توان نتیجه گرفت که

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$$

مثال ۴۸: مقادیر $\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{x^2}$ و $\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x^2}$ را حساب می‌کنیم.

مشاهده می‌شود که $\lim_{x\to 0}\tan x=\lim_{x\to 0}x^2=0$ و چون

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1+\tan^2 x}{2x}=-\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1+\tan^2 x}{2x}=+\infty$$

پس $\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x}{x^2}=+\infty$ و $\lim_{x\to 0^-}\frac{\tan x}{x^2}=-\infty$.

نکته‌ی ۴: ممکن است لازم باشد که بیش از یک بار از قاعده‌ی هوپیتال استفاده شود، به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴۹: مقدار $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x^2-1}{x^4}$ را حساب می‌کنیم.

مشاهده می‌شود

$$\lim_{x\to 0}(\cos x^2-1)=\lim_{x\to 0}x^4=0$$

و

$$\lim_{x\to 0}\frac{-2x\sin x^2}{4x^3}=\lim_{x\to 0}-\frac{1}{2}\frac{\sin x^2}{x^2}$$

می‌توان مجدداً از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کرد :

$$-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x\cos x^2}{2x}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\cos x^2=-\frac{1}{2}$$

پس مقدار حد موردنظر $-\frac{1}{2}$ است.

صورت‌های مبهم دیگر

هنگام محاسبه‌ی حدخارج قسمت دو تابع، $\frac{f}{g}$ ، ممکن است دو تابع به $+\infty$ یا $-\infty$ میل کنند. این هم یکی از صور مبهم است. در این‌جا نیز می‌توان با بیان قضیه‌ای مشابه قضیه‌ی ۱۱، از این حالت نیز رفع ابهام کرد. هم‌چنین ممکن است هنگام محاسبه‌ی حد fg ، حاصل‌ضرب دو تابع f و g یکی بی‌کران شود و دیگری به صفر میل کند که این هم یکی دیگر از صور مبهم است و می‌توان آن را به صورتی نوشت که به یکی از دو حالت قبلی تبدیل شود. به مثال‌های زیر توجه کنید :

مثال ۵۰: مقدار

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+\sqrt{x}}{2x+1}$$

در این‌جا $\lim_{x\to+\infty}(2x+1)=+\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{x})=+\infty$ پس می‌توان نوشت :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2}=\frac{1}{2}$$

یعنی حد عبارت موردنظر برابر $\frac{1}{2}$ است.

مثال ۵۱: مقدار $\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}$ را محاسبه می‌کنیم. در این‌جا $\lim_{x\to+\infty} x=\infty$ و $\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{x}=0$ است. پس

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}$$

و چون

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\cos\frac{1}{x}=1$$

حد عبارت موردنظر برابر ۱ است.

بالاخره ممکن است هنگام محاسبه حد، f و g هردو به $+\infty$ میل کنند. $f-g$ صورت مبهم دیگری است که با تبدیل آن به صور قبلی می‌توان آن را رفع ابهام کرد. به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۵۲: برای محاسبه‌ی $\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\cos x-1}\right)$ داریم :

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\cos x-1}\right)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\cos x-1-x}{x(\cos x-1)}$$

و با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال

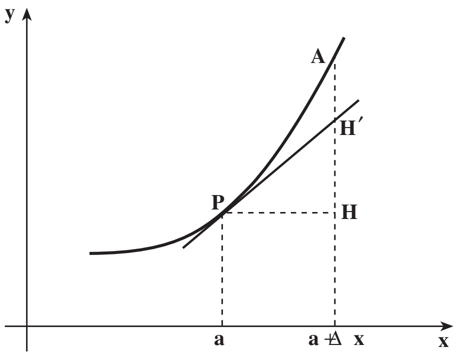
$$\lim_{x\to ۰^-} \frac{-\sin x - ۱}{\cos x - ۱ - x\sin x} = +\infty$$

۵ـ۸ــ دیفرانسیل، خطی‌سازی و خطا

در بحث آهنگ تغییر دیدیم، اگر تابع $y = f(x)$ در نقطه‌ی a مشتق‌پذیر باشد.

$$\Delta y = f(a+۱) - f(a) \approx f'(a)$$

مقدار تقریبی برای تغییرات تابع f به ازای افزایش یک واحد در متغیر x بود. لازم نیست از این فکر تقریبی تنها هنگامی که در متغیر چنین افزایشی روی می‌دهد استفاده کرد و می‌توان آن را برای تغییر به میزان Δx نیز بیان کرد. یعنی برای Δx کوچک $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تقریبی از $f'(a)$ و یا $f'(a)\Delta x$ را تقریبی از Δy درنظر گرفت. به شکل زیر توجه کنید.



$$|AH| = \Delta y = f(a+\Delta x) - f(a)$$

و نقطه‌ی H' نقطه‌ای به طول $a+\Delta x$ روی خط مماس بر نمودار f در $P(a, f(a))$ است (معادله این خط $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ است) و

$$|HH'| = f'(a)\Delta x$$

که تقریباً برابر $|AH|$ است. مقدار $f'(a)\Delta x$ را دیفرانسیل تابع f در نقطه‌ی a و عمل جایگزینی خط مماس به‌جای f را اصطلاحاً خطی‌سازی و فاصله بین Δy و $f'(a)\Delta x$، یعنی $|AH'|$ را خطای خطی‌سازی می‌نامند. با کوچک کردن Δx مقدار این خطا کاهش می‌یابد. در حالت کلی داریم:

تعریف: اگر $y = f(x)$ در نقطه‌ی x مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $f'(x)\Delta x$ را دیفرانسیل f نامیده آن

را با df (یا dy) نشان می‌دهند.

$$df = f'(x)\Delta x$$

نکته: برای یک تابع داده شده‌ی f ، مقدار df به هر دو کمیت x و Δx بستگی دارد. برای نمونه،

$$d(x^{۲}) = ۲x\Delta x$$

$$d(x) = ۱\times\Delta x = \Delta x$$

و به همین دلیل می‌توان نوشت

$$df = f'(x)dx$$

و یا

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

مثال ۵۳: تابع $y = f(x) = x^{۲} + ۲x + ۳$ را در نقطه‌ی $x = ۱$ درنظر می‌گیریم. چون $f'(۱) = ۴$ ،

$$dy = df = ۴dx$$

حال برای $dx = ۰/۱$ ، $dy = ۰/۴$ و

$$\Delta y = ((۱/۱)^{۲} + ۲(۱/۱) + ۳) - (۶) = ۰/۴۱$$

برای $dx = ۰/۱$ خطا برابر است با $|\Delta y - dy| = |۰/۴۱ - ۰/۴| = ۰/۰۱$ و برای $dx = -۰/۰۱$ ، $dy = -۰/۰۴$ و

$$\Delta y = ((۰/۹۹)^{۲} + ۲(۰/۹۹) + ۳) - ۶ = -۰/۰۳۹۹$$

و برای $dx = -۰/۰۱$ خطا برابر است با

$$|\Delta y - dy| = |-۰/۰۳۹۹ - (-۰/۰۴)| = ۰/۰۰۰۱$$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید هرچه $|dx|$ کوچک‌تر شود، خطای خطی‌سازی کمتر می‌شود یا به عبارتی dy تقریب بهتری از Δy می‌شود. هم‌چنین خط جایگزین تابع در اطراف نقطه‌ی ۱، برابر $y = ۶ + ۴(x-۱) = ۴x + ۲$ است.

مثال ۵۴: می‌خواهیم مقدار تقریبی $\sqrt[۳]{۲۶}$ را محاسبه کنیم. تابع $y = f(x) = \sqrt[۳]{x}$ را درنظر می‌گیریم دیفرانسیل را در نقطه‌ی $x = ۲۷$ و برای $dx = -۱$ حساب می‌کنیم. چون

$\circ/\circ ۳۷ \approx \frac{۱}{۲۷} = f'(۲۷)$ داریم $dy \approx \circ/\circ ۳۷$ و مقدار Δy در این نقطه عبارت است از :

$$\Delta y = f(۲۶) - f(۲۷) = \sqrt[۳]{۲۶} - \sqrt[۳]{۲۷} = \sqrt[۳]{۲۶} - ۳$$

که از تقریب $\Delta y \approx dy$ نتیجه می‌شود

$$\sqrt[۳]{۲۶} = \sqrt[۳]{۲۷-۱} \approx ۳ - \circ/\circ ۳۷ = ۲/۹۶۳$$

نکته‌ی ۱: با توجه به این‌که $\frac{dy}{dx} = f'(x)$ ، $\frac{dy}{dx}$ یکی دیگر از نمادهایی است که برای مشتق اول یک تابع به‌کار می‌رود. هم‌چنین مشتق مرتبه‌ی دوم y ، یعنی $\frac{d}{dx}(\frac{dy}{dx})$ را با نماد $\frac{d^۲y}{dx^۲}$ نمایش می‌دهند.

نکته‌ی ۲: به دلیل همین ارتباط نزدیک بین مشتق و دیفرانسیل می‌توان نتایج زیر را بیان کرد :
هرگاه f و g توابع مشتق‌پذیری در نقطه‌ی x باشند و c عددی ثابت باشد، آن‌گاه

$$d(c) = \circ$$

$$d(x^n) = nx^{n-۱}dx$$

$$d(f+g) = df + dg$$

$$d(cf) = cdf$$

$$d(fg) = gdf + fdg$$

$$d(\frac{f}{g}) = \frac{۱}{g^۲}(gdf - fdg) \qquad g(x) \neq \circ$$

$$d(f^n) = nf^{n-۱}df$$

نکته‌ی ۳ : اگر تابع g در نقطه‌ی x و تابع f در نقطه‌ی g(x) مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه

$$df(g) = f'(g)dg$$

مثال ۵۵: دیفرانسیل چند تابع در زیر آمده است.

$$d(x^۲+۱) = ۲xdx$$
$$d(\sin x) = \cos x dx$$
$$d(\mathrm{Arc}\tan x) = \frac{dx}{۱+x^۲}$$

$$d\left(\frac{\tan x}{x}\right)=\frac{x\sec^{۲} x-\tan x}{x^{۲}}dx$$

$$d(\cos x^{۲})=-۲x\sin x^{۲}dx$$

البته توجه دارید که دیفرانسیل تابع را روی بازه‌هایی درنظر می‌گیریم که تابع مشتق‌پذیر است.

مثال ۵۶: فرض کنید که می‌خواهیم مقدار تقریبی $\sin ۱^{\circ}$ و $\sin ۱۵^{\circ}$ را حساب کنیم.

می‌دانیم $\sin ۰=۰$ و چون ۱ درجه برابر با $\frac{\pi}{۱۸۰}\approx ۰/۰۱۷۵$ رادیان است، با استفاده از فرمول دیفرانسیل برای $y=\sin x$ داریم:

$$dy=\cos x dx$$

و در نقطه‌ی ۰، $dy=dx$. پس برای $dx\approx ۰/۰۱۷۵$ ، $dy\approx ۰/۰۱۷۵$. یعنی $\sin ۱^{\circ}\approx ۰/۰۱۷۵$ که این مقدار تا چهار رقم اعشار برابر مقدار واقعی است. اما برای محاسبه‌ی مقدار تقریبی $\sin ۱۵^{\circ}$ ، داریم $dx\approx ۱۵\times ۰/۰۱۷۵\approx ۰/۲۶۲۵$ ، و در نتیجه $\sin ۱۵^{\circ}\approx ۰/۲۶۲۵$ که با مقدار واقعی در حدود ۰/۰۰۴ اختلاف دارد.

مثال ۵۷: بادکنک کروی شکل مملو از هوا که شعاع ۲۰ سانتی‌متر (مثال ۳۳ فصل ۴) دارد مفروض است، اگر ۰/۲ سانتی‌متر به شعاع آن افزوده شود، حجم آن چقدر زیاد خواهد شد؟

با توجه به مطالب بیان شده $dv=۴\pi r^{۲}dr$. به ازای $r=۲۰$ ، $dr=۰/۲$ خواهیم داشت $dv=۱۰۰۵/۳$ یعنی تقریباً حجم به میزان ۱۰۰۵/۳ سانتی‌متر مکعب افزوده می‌شود. اگر شعاع بادکنک ۰/۲ سانتی‌متر کاهش یابد، حجم به میزان ۱۰۰۵/۳ سانتی‌متر مکعب کاهش می‌یابد.

تمرین‌ها

۱ــ حدهای زیر را با استفاده از قاعده‌ی هوپیتال حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{x-\sin x}{x^{۳}}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۳^{+}}\frac{\sin\frac{\pi x}{۳}}{x^{۲}-۵x+۶}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۲}(x^{۲}-۴)\tan\frac{\pi x}{۴}$

۲ــ حدهای زیر را حساب کنید. آیا برای محاسبه‌ی آن‌ها می‌توان از قاعده‌ی هوپیتال استفاده کرد؟

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^{2}\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$ ب) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x}$

۳ــ دیفرانسیل هریک از توابع زیر را در نقطه‌ی داده شده به دست آورید.

الف) $f(x)=-\frac{1}{2}x^{2}+3x-1$ ، در نقطه‌ی $x=1$

ب) $f(x)=x+\frac{2}{x}$ ، در نقطه‌ی $x=-1$

ج) $f(x)=3x^{\frac{7}{3}}-2x^{\frac{5}{2}}$ ، در نقطه‌ی $x=a$

۴ــ مقدار تقریبی اعداد زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{10}$ ب) $\sqrt{99/7}$ ج) $\sqrt[4]{81/6}$ د) $\sin 29^{\circ}$

۵ــ برای تابع $y=f(x)=\operatorname{Arc}\tan x$

الف) دیفرانسیل f را در نقطه‌ی $x=1$ بیابید.

ب) مقدار تقریبی افزایش f هنگامی که x از ۱ به ۱/۰۳ افزایش می‌یابد چقدر است؟

ج) با کمک ماشین حساب یا کامپیوتر مقدار دقیق‌تر افزایش f را هنگامی که x از ۱ به ۱/۰۳ افزایش می‌یابد پیدا کنید.

۶ــ حدهای زیر را با استفاده از قاعده هوپیتال حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}^{-}}(x\tan x-\frac{\pi}{2}\sec x)$ ب) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\cot 2x\tan(x+\frac{\pi}{4})$

ج) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{\sin^{2}x}-\frac{1}{x^{2}})$ د) $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+\sqrt{x^{2}+4x+5})$

۷ــ در یک گلوله‌ی کروی شکل که شعاع آن ۱/۱ سانتی‌متر است، اگر شعاع ۰/۰۰۵ سانتی‌متر اضافه شود، حجم چقدر تغییر می‌کند؟

۸ــ اگر تابع تقاضا برای نوع خاصی از زنگ خطر توسط فرمول زیر محاسبه شود :

$$P=f(x)=\frac{30000}{0/02x^{2}+1}$$

که در آن x میزان تقاضا (برحسب واحد ۱۰۰۰ عدد) و P قیمت هر واحد (برحسب تومان) است. با استفاده از دیفرانسیل میزان تغییر قیمت هر واحد را هنگامی که تقاضا از ۵۰۰۰ به ۵۵۰۰ دستگاه در ماه تغییر می‌یابد، به دست آورید.

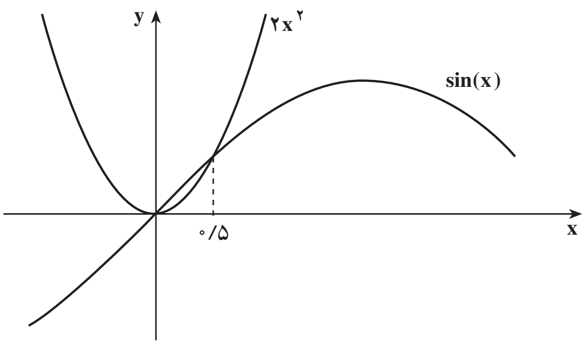
۵ــ۹ــ حل معادله‌ی $f(x) = 0$

همان‌طور که می‌دانید حل بسیاری از مسایل منجر به حل یک معادله یعنی یافتن ریشه‌های آن می‌شود. حل یک معادله همواره کار ساده‌ای نیست و تنها می‌توان جواب دقیق را در حالت‌های خاصی به‌دست آورد. اما در اغلب موارد می‌توان مقدار تقریبی ریشه‌ها را پیدا کرد. مقدار تقریبی ریشه‌های یک معادله را چگونه می‌توان یافت؟ اگر نمودار تابع f را رسم کنیم، نقطه‌ی x_0 محل تلاقی نمودار با محور x ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ است که مقدار تقریبی x_0 را می‌توان اندازه گرفت. در برخی از موارد هم می‌توان نوشت :

$$f(x) = g(x) - h(x)$$

که در این صورت با رسم نمودارهای توابع g و h ، x_0 که طول محل تلاقی نمودار آن‌ها است، مقدار تقریبی ریشه معادله‌ی $f(x) = 0$ را مشخص می‌کند.

مثال ۵۸: مقدار تقریبی ریشه‌های معادله‌ی $f(x) = 2x^2 - \sin x = 0$ را می‌توان با رسم نمودارهای توابع $g(x) = 2x^2$ و $h(x) = \sin x$ در یک دستگاه مختصات تعیین کرد.



از روی شکل (در صورتی که دقیق رسم شده باشد) می‌توان نتیجه گرفت که مقدار تقریبی ریشه (طول تقریبی محل تلاقی دو نمودار) ۰/۵ است. مقادیر تابع f را در ابتدا و انتهای بازه‌ی $[0/4, 0/6]$ محاسبه می‌کنیم.

$$f(0/4) = -0/069$$

$$f(0/6) = 0/155$$

بنابراین تابع پیوسته‌ی f در این بازه تغییر علامت داده و بنا به قضیه‌ی مقدار میانی دارای یک ریشه در این بازه است.

ریشه‌های معادلات را با چندین روش می‌توان با دقت کافی به دست آورد. ما به روش‌های «نصف کردن» و «نیوتن» بسنده می‌کنیم.

روش نصف کردن

این روش را قبلاً هم (پس از بیان قضیه‌ی مقدار میانی) بدون آن که به نام آن اشاره کرده باشیم به کار برده‌ایم. در این روش فرض بر این است که تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته است و $f(a)f(b) < 0$.

این بازه را $[a_1, b_1]$ می‌نامیم و نقطه‌ی $c_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}$ را درنظر می‌گیریم. اگر $f(c_1) = 0$ که c_1 ریشه است. در غیر این‌صورت یا $f(a)f(c_1) < 0$ و یا $f(c_1)f(b) < 0$ است. پس ریشه یا در بازه‌ی $[a_1, c_1]$ و یا در بازه‌ی $[c_1, b_1]$ قرار دارد، بازه‌ای را که ریشه در آن قرار دارد $[a_2, b_2]$ می‌نامیم.

توجه کنید که طول بازه‌ی $[a_2, b_2]$ نصف طول بازه‌ی $[a_1, b_1]$ است. مجدداً نقطه‌ی $c_2 = \frac{a_2 + b_2}{2}$ را یافته و اگر $f(c_2) \neq 0$ باشد، آن‌گاه ریشه در یکی از بازه‌های $[a_2, c_2]$ و یا $[c_2, b_2]$ قرار دارد، آن را که شامل ریشه است $[a_3, b_3]$ می‌نامیم. طول این بازه $\frac{1}{4}$ طول بازه‌ی اولیّه است. این کار را n بار ادامه می‌دهیم و n را آن قدر بزرگ می‌گیریم تا طول بازه‌ی $[a_n, b_n]$ از هر مقدار که بخواهیم کوچک‌تر شود. در این صورت هر عددی در این بازه می‌تواند ریشه‌ی تقریبی با خطای کمتر از مقدار دلخواه $\frac{b-a}{2^n}$، تلقی شود.

نکته ۱: دقت کنید که دنباله $\{a_n\}$ صعودی و کراندار و دنباله $\{b_n\}$ نزولی و کراندارند و حدّ آن‌ها یکسان است، مقدار این حد همان ریشه معادله $f(x) = 0$ است.

نکته ۲: در بسیاری از محاسبات ارقام اعشاری به دست آمده بیش از مقدار موردنظر است. معمولاً برای حذف این ارقام اضافی از روش گرد کردن استفاده می‌شود. به این ترتیب که اگر اولین رقمی که حذف می‌شود، ۰ تا ۴ باشد در آخرین رقمی که باقی می‌ماند هیچ تغییری نمی‌دهیم و در صورتی که اولین رقمی که حذف می‌شود، ۵ تا ۹ باشد به آخرین رقمی که باقی می‌ماند ۱ واحد اضافه می‌کنیم.

مثال ۵۹: الف) اعداد ۳/۴۵۰۲۹۶ و ۴/۲۸۷۱۴۸ که به ترتیب تا سه رقم اعشار، چهار رقم اعشار و پنج رقم اعشار گرد شده‌اند را در زیر مشاهده می‌کنید.

۳/۴۵۰	۴/۲۸۷
۳/۴۵۰۳	۴/۲۸۷۱
۳/۴۵۰۳۰	۴/۲۸۷۱۵

ب) دو عدد ۲/۷۴۴ و ۲/۷۳۵ در صورتی که تا دو رقم اعشار گرد شوند، نتیجه‌ی یکسان ۲/۷۴ را خواهند داد.

نکته‌ی ۳: در روش نصف کردن اگر هدف یافتن جواب با دقت k رقم اعشار باشد، هنگامی که گرد شده‌ی اعداد a_n و b_n در k رقم اعشار با یکدیگر برابر شدند محاسبات را متوقف نموده، و ریشه را برابر مقدار مشترک آن‌ها می‌گیریم.

مثال ۶۰: می‌خواهیم ریشه‌ی معادله‌ی $2x^2 - \sin x = 0$ را با دقت دو رقم اعشار حساب کنیم. جدول زیر نتایج محاسبه‌ها را در مراحل مختلف نشان می‌دهد.

توجه کنید که در مرحله‌ی ششم، a_6 و b_6 هردو تا دو رقم اعشار برابر ۰/۴۸ بوده و در نتیجه

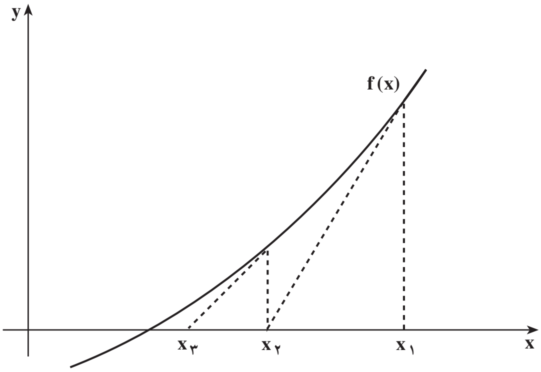
n	a_n	b_n	$f(a_n)$	$f(b_n)$	c_n	$f(c_n)$
۱	۰/۴	۰/۶	−۰/۰۶۹	۰/۱۵۵	۰/۵	۰/۰۲۱
۲	۰/۴	۰/۵	−۰/۰۶۹	۰/۰۲۱	۰/۴۵	−۰/۰۳۰
۳	۰/۴۵	۰/۵	−۰/۰۳۰	۰/۰۲۱	۰/۴۷۵	−۰/۰۰۶
۴	۰/۴۷۵	۰/۵	−۰/۰۰۶	۰/۰۲۱	۰/۴۸۸	۰/۰۰۶
۵	۰/۴۷۵	۰/۴۸۸	−۰/۰۰۶	۰/۰۰۶	۰/۴۸۲	۰/۰۰۰۱
۶	۰/۴۷۵	۰/۴۸۲				

می‌گوییم مقدار ریشه با دقت ۲ رقم اعشار برابر ۰/۴۸است.

روش نیوتن

در این روش از خطی سازی استفاده می‌کنیم. اگر x_1 تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = 0$ باشد می‌توان خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه‌ی $(x_1, f(x_1))$ را رسم کرد و محل تلاقی آن را با محور x به‌دست آورد. معادله‌ی این خط $y = f(x_1) + f'(x_1)(x - x_1)$

است و نقطه‌ی تلاقی با محور x ، $x_۲ = x_۱ - \frac{f(x_۱)}{f'(x_۱)}$ است. (مشروط بر این که $f'(x_۱)$ مخالف صفر باشد.) توجه کنید که $x_۲$ نیز تقریبی از ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = ۰$ است. حال خط مماس بر نمودار f در نقطه‌ی $(x_۲, f(x_۲))$ را رسم کرده، نقطه‌ی تلاقی این خط با محور x را $x_۳$ می‌نامیم، برای این کار کافی است در رابطه $x_۲ = x_۱ - \frac{f(x_۱)}{f'(x_۱)}$ به جای $x_۱$ و $x_۲$ به ترتیب $x_۲$ و $x_۳$ بگذاریم، یعنی $x_۳ = x_۲ - \frac{f(x_۲)}{f'(x_۲)}$. این عمل را آن‌قدر ادامه می‌دهیم تا اختلاف دو تقریب متوالی از مقدار خطای مورد قبول کمتر شود و یا به عبارتی دو تقریب متوالی با تعداد ارقام اعشاری مورد نیاز با هم برابر شوند. در شکل وضعیت نقاط و خطوط مماس را مشاهده می‌کنید :



در صورتی که نقطه‌ی $x_۱$ نزدیک ریشه باشد می‌توان انتظار داشت که دنباله‌ی $\{x_n\}$ تولید شده با رابطه‌ی

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad n = ۱, ۲, \cdots$$

به ریشه‌ی تابع f همگرا باشد.

مثال ۶۱: برای یافتن ریشه‌ی معادله‌ی $۲x^۲ - \sin x = ۰$ با روش نیوتن با تقریب اولیه‌ی $x_۱ = ۰/۵$ می‌توان چنین عمل کرد :

$$f(x) = ۲x^۲ - \sin x$$

$$f'(x) = ۴x - \cos x$$

و

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{۲x_n^۲ - \sin x_n}{۴x_n - \cos x_n}$$

و برای $x_1 = ۰/۵$ ، داریم

$$x_۲ = ۰/۵ - \frac{۲(۰/۵)^۲ - \sin(۰/۵)}{۴(۰/۵) - \cos(۰/۵)}$$

$$\approx ۰/۵ - \frac{۰/۵ - ۰/۴۷۹۴}{۲ - ۰/۸۷۷۶} = ۰/۴۸۱۶$$

و

$$x_۳ = ۰/۴۸۱۶ - \frac{۲(۰/۴۸۱۶)^۲ - \sin(۰/۴۸۱۶)}{۴(۰/۴۸۱۶) - \cos(۰/۴۸۱۶)}$$

$$\approx ۰/۴۸۰۹$$

بنابراین، مقدار ریشه با دقت ۲ رقم اعشار برابر ۰/۴۸ است. اگر دقت بیشتری مثلاً ۳ رقم مورد نیاز باشد می‌توان محاسبه را ادامه داد

$$x_۴ = ۰/۴۸۰۹ - \frac{۲(۰/۴۸۰۹)^۲ - \sin(۰/۴۸۰۹)}{۴(۰/۴۸۰۹) - \cos(۰/۴۸۰۹)}$$

$$\approx ۰/۴۸۰۹$$

پس جواب ۰/۴۸۱ است.

مثال ۶۲: ریشه‌ی معادله‌ی $f(x) = x^۳ - ۳x^۲ + ۲۷x - ۲ = ۰$ را به‌دست می‌آوریم (در مثال ۹ دیدیم که این معادله در بازه‌ی $[۰,۱]$ تنها یک ریشه دارد) از روش نیوتن استفاده می‌کنیم.

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{x_n^۳ - ۳x_n^۲ + ۲۷x_n - ۲}{۳x_n^۲ - ۶x_n + ۲۷}$$

با انتخاب $x_۱ = ۰$ ، می‌توان دنباله‌ی $\{x_n\}$ را به‌دست آورد. این مقادیر را در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$f(x_n)/f'(x_n)$
۱	۰	−۲	۲۷	−۰/۰۷۴۱
۲	۰/۰۷۴۱	−۰/۰۱۶۱	۲۶/۵۷۲۱	−۰/۰۰۰۶
۳	۰/۰۷۴۷	۰/۰۰۰۸	۲۶/۵۶۸۵	۰/۰۰۰۰
۴	۰/۷۴۷			

بنابراین مقدار ریشه برابر ۰/۰۷۴۷ و دقت آن تا ۴ رقم اعشار است.

مثال ۶۳: مقدار $\sqrt{۳}$ را با استفاده از روش نیوتن می‌توان به طریق زیر حساب کرد. $\sqrt{۳}$ ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $f(x) = x^۲ - ۳ = ۰$ است، که با روش نیوتن داریم :

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{x_n^۲ - ۳}{۲x_n}$$

$$= \frac{۱}{۲}(x_n + \frac{۳}{x_n})$$

مثلاً محاسبه مقدار $\sqrt{۳}$ را با دقت ۸ رقم اعشار با تقریب اولیه‌ی $x_۱ = ۲$ در جدول زیر مشاهده می‌کنید.

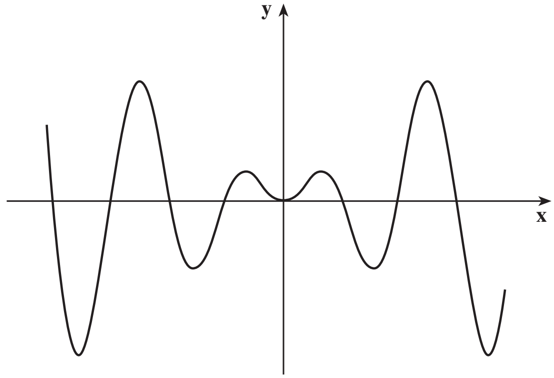
n	x_n
۱	۲
۲	۱/۷۵
۳	۱/۷۳۲۱۴۲۸۶
۴	۱/۷۳۲۰۵۰۸۱
۵	۱/۷۳۲۰۵۰۸۱

و در حالت کلی برای حساب کردن مقدار $\sqrt{a}$ ، برای $a > ۰$ می‌دانیم $\sqrt{a}$ ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $f(x) = x^۲ - a = ۰$ است که با روش نیوتن داریم

$$x_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(x_n + \frac{a}{x_n})$$

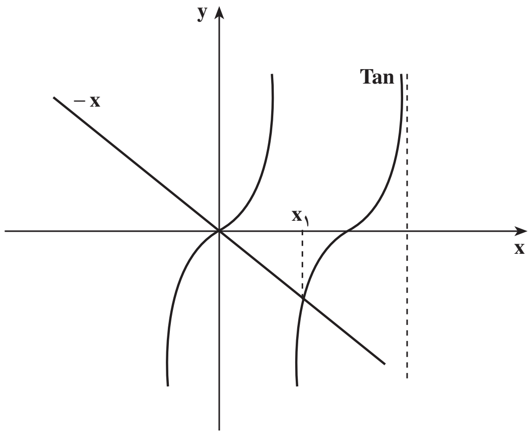
نکته: در این روش معمولاً فرض می‌شود که تابع f در یک بازه‌ی شامل ریشه، پیوسته و مشتق آن، f' نیز در آن بازه مخالف صفر است تا در یافتن مقادیر دنباله اشکالی ایجاد نگردد.

مثال ۶۴: می‌خواهیم نقاط اکسترمم نسبی تابع $f(x) = x\sin x$ را بیابیم، نمودار تقریبی این تابع به صورت زیر است :



برای یافتن نقاط اکسترمم نسبی f ، ابتدا نقاط بحرانی آن را به‌دست می‌آوریم.

به دلیل مشتق‌پذیری f روی R ، نقاط بحرانی تابع نقاطی‌اند که $f'(x)=۰$ ، یعنی ریشه‌های معادله‌ی $\sin x + x\cos x = ۰$. محل تقریبی این ریشه‌ها را نیز می‌توان با رسم نمودار تابع tanx و $-x$ به‌دست آورد.



همان‌طور که مشاهده می‌کنید، معادله‌ی فوق تعداد بی‌شماری ریشه دارد که می‌توان با استفاده از روش نیوتن به محاسبه‌ی تقریبی آن‌ها پرداخت. برای نمونه اولین ریشه‌ی مثبت این معادله در نزدیکی نقطه‌ی $x_۱ = \pi$ قرار دارد و داریم :

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{\sin x_n + x_n \cos x_n}{۲\cos x_n - x_n \sin x_n}$$

و دنباله‌ی حاصل برابر است با

n	x_n
۱	۳/۱۴۱۶
۲	۱/۵۷۰۸
۳	۲/۲۰۷۴
۴	۲/۰۳۶۰
۵	۲/۰۲۸۷
۶	۲/۰۲۸۷

پس اولین ریشه‌ی مثبت معادله، ۲/۰۲۹ است و چون

$$f'(x) = ۲\cos x - x\sin x$$

$$f'(۲/۰۲۹) \approx -۲/۷۰۴۴$$

این نقطه، نقطه‌ی ماکسیمم نسبی f است.

تمرین‌ها

۱ــ با استفاده از روش نصف کردن، ریشه‌ی معادله‌ی $x^۳ - ۳x^۲ + ۲۷x - ۲ = ۰$ را که در بازه‌ی $[۰,۱]$ قرار دارد با دقت دو رقم اعشار به‌دست آورید.

۲ــ معادله‌ی $x^۳ - ۳x^۲ + ۱ = ۰$ دارای ریشه‌ای در بازه‌ی $[۰,۱]$ است، این ریشه را با استفاده از روش نصف کردن تا دو رقم اعشار بیابید.

۳ــ با استفاده از روش نیوتن کوچک‌ترین ریشه‌ی مثبت $\tan x = x - ۱$ را تا دو رقم اعشار بیابید.

۴ــ ابتدا نشان دهید که معادله $f(x) = ۱۲x^۳ + ۴x^۲ - ۱۵x - ۴ = ۰$ دارای سه ریشه حقیقی است و سپس با استفاده از روش نیوتن مقدار این ریشه‌ها را تا دو رقم اعشار بیابید.

چه کسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را ابداع کرد؟

گفته می‌شود که نیوتن و لایبنیتس مخترعین حساب دیفرانسیل و انتگرال بوده‌اند. امّا براساس اطلاعات موجود در رابطه با مشتق و انتگرال و به‌طور خاص قضیه‌ی بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال، این سؤال مطرح است که چرا این دو ریاضی‌دان بزرگ به عنوان بنیان‌گذاران این شاخه از دانش بشری مشهور شده‌اند، در حالی که خیلی قبل از آن‌ها، نحوه‌ی محاسبه‌ی مماس بر منحنی‌ها رایج بوده است. علاوه بر آن، با استفاده از مماس‌های افقی، روشی برای تعیین ماکسیمم و مینیمم منحنی‌ها وجود داشته است. وقتی سخن از مساحت به میان می‌آید، حتی ارشمیدس هم قادر بوده مساحت ناحیه‌هایی که با منحنی‌هایی خاص محصور می‌شده‌اند را حساب کند. مثلاً او برای محاسبه‌ی مساحت دایره، مساحت چندضلعی‌های منتظم محاط در دایره را به دست می‌آورده و برای دقت بیشتر تعداد اضلاع را بیشتر می‌کرده است.

به‌هرحال در اوایل قرن هفدهم، پیشکسوتان ریاضی روش‌های پیشرفته‌تری را برای اندازه‌گیری مساحت‌ها و محاسبه‌ی آن‌چه به انتگرال معروف است، در دست داشتند. حتی تاریخچه‌ی قضیه‌ی بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال نیز به قبل از زمان لایبنیتس و نیوتن می‌رسد. بارو معلم نیوتن در کمبریج، بدون اطلاع از مفهوم دقیق مشتق و انتگرال، یک معادل هندسی قضیه‌ی بنیادی را بیان و اثبات کرده است.

آن‌چه که باعث شده این دو نفر را به عنوان پایه‌گذاران این علم بشناسند، درک آن‌ها از نیاز بشر به وجود یک روش سیستماتیک برای مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری و نیز به‌کارگیری علامات رایج و بیان استدلال‌های منطقی به‌جای اثبات‌های شهودی است.

نیوتن و لایبنیتس تشخیص دادند که به کمک قضیه‌ی اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌توان انتگرال توابع مختلف را به‌دست آورد. علاوه بر آن، این دو دانشمند قوانینی را برای مشتق و انتگرال ترکیب توابع کشف کردند.

نیوتن در اواسط دهه‌ی ۱۶۶۰ به این افکار دسترسی یافت، در حالی که لایبنیتس کار خود را از اوایل دهه‌ی ۱۶۷۰ آغاز کرد. اما لایبنیتس آن‌ها را زودتر به چاپ رساند و علامت‌گذاری‌های او بسیار جالب‌تر از علامت‌گذاری‌های نیوتن بودند. این‌ها همان علائمی هستند که در حال حاضر هم به‌کار می‌روند.

در حالی که قصد بر این نیست که تأثیر عمیق کارهای نیوتن و لایبنیتس کم جلوه کند، بلکه لازم به ذکر است که افکار آن‌ها تکیه‌ی زیادی بر کارهای قبلی دارد. در حقیقت آن‌ها پلی استوار بین ایده‌های قبلی و روش‌های مدرن در رابطه با این دانش را بنا نهاده‌اند.

فصل ششم

انتگرال

۶ــ۱ــ مقدمه

در مبحث مشتق دیدیم که با استفاده از معادله‌ی مسیر حرکت روی یک خط می‌توان سرعت لحظه‌ای را پیدا کرد. حال اگر عکس مطلب موردنظر باشد، یعنی با داشتن سرعت لحظه‌ای بخواهیم مسافت طی شده تا لحظه‌ی t را محاسبه کنیم، چه عملی باید انجام دهیم؟

اگر سرعت ثابت و برابر $v_\circ$ باشد، واضح است که مسافت برابر سرعت ضربدر زمان است.

$$s(t) = v_\circ . t$$

حال به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱ : اطلاعات زیر را در مورد حرکت یک شیء (که به تدریج سرعتش افزایش می‌یابد) در لحظات مختلف داریم :

زمان (ثانیه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
سرعت (متر بر ثانیه)	۱۰	۱۵	۱۹	۲۲	۲۴	۲۵

نمی‌توانیم مقدار دقیق مسافت طی شده تا لحظه‌ی ۵ ثانیه را پیدا کنیم. ولی به‌طور تقریب می‌توانیم چنین عمل کنیم :

با توجه به این که سرعت به‌طور مرتب افزایش یافته است، مسافت طی شده در اولین ثانیه حداقل ۱۰ متر، در دومین ثانیه حداقل ۱۵ متر و ... به همین ترتیب در مجموع حداقل

$$۱۰ + ۱۵ + ۱۹ + ۲۲ + ۲۴ = ۹۰$$

متر و هم‌چنین حداکثر

$$۱۵+۱۹+۲۲+۲۴+۲۵=۱۰۵ \text{ متر}$$

است. (یعنی $۹۰ < s(۵) < ۱۰۵$).

اگر اطلاعات بیشتری داشته باشیم (یعنی فاصله‌های زمانی نقاط مجاور با سرعت‌های لحظه‌ای معلوم، کمتر باشد) و مثلاً جدول زیر را داشته باشیم،

زمان (ثانیه)	۰	۰/۵	۱	۱/۵	۲	۲/۵	۳	۳/۵	۴	۴/۵	۵
سرعت (متر بر ثانیه)	۱۰	۱۳	۱۵	۱۷/۵	۱۹	۲۱	۲۲	۲۳	۲۴	۲۴/۵	۲۵

آن‌گاه حدّ پایین و بالای تقریب برای $s(۵)$ به ترتیب

$$۰/۵(۱۰+۱۳+\cdots+۲۴/۵)=۹۴/۵ \text{ متر}$$

و

$$۰/۵(۱۳+۱۵+\cdots+۲۵)=۱۰۲$$

متر خواهد شد. پس $۹۴/۵ < s(۵) < ۱۰۲$ به همین ترتیب می‌توانیم فاصله‌های زمانی را کوتاه‌تر کنیم تا به جواب دقیق‌تر برسیم.

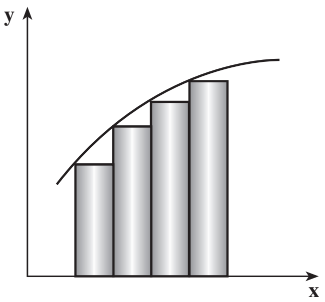
در حقیقت پذیرفته‌ایم که در هر (بازه) فاصله‌ی زمانی مثلاً $[۰ ، ۰/۵]$ سرعت ثابت داشته‌ایم و لذا حداقل و حداکثر مسافت طی شده در این بازه به ترتیب $۰/۵\times۱۰=۵$ و $۰/۵\times۱۳=۶/۵$ متر بوده است، پس هر چه طول بازه‌های زمانی کوتاه‌تر باشد، جواب دقیق‌تر خواهد شد.

همین مسئله را برای مساحت زیر منحنی در بازه‌ی $[a,b]$ داریم:

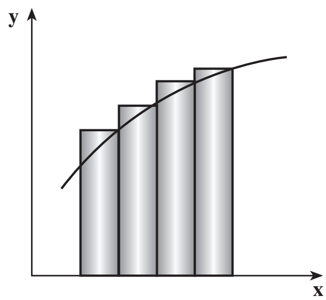
به‌طور کلی می‌دانیم که مساحت یک مستطیل، حاصل‌ضرب طول در عرض آن است

$$s = ab$$

حال اگر مساحت سطح زیر نمودار $y = f(x) \geq ۰$ را در بازه‌ی $[a,b]$ بخواهیم پیدا کنیم، کاری را که از زمان‌های بسیار دور و به‌طور طبیعی انجام می‌شده تکرار می‌کنیم. یعنی سطح را با مستطیل‌هایی می‌پوشانیم و مجموع مساحت‌های این مستطیل‌ها را حساب می‌کنیم. بدیهی است که برای بسیاری از سطوح این کار امکان‌پذیر نیست و قسمتی از سطح باقی می‌ماند، **تقریب نقصانی**، و یا مجبور می‌شویم سطح بیشتری را بپوشانیم که **تقریب اضافی** به دست می‌آید. به دو شکل صفحه‌ی بعد توجه کنید.



تقریب نقصانی



تقریب اضافی

در واقع بازه‌ی $[a,b]$ را به بازه‌های $[x_{n-۱},x_n]$, $\cdots$, $[x_۱,x_۲]$, $[x_۰,x_۱]$ که در آن

$$a=x_۰<x_۱<x_۲<x_۳<\cdots<x_n=b$$

تقسیم می‌کنیم. اگر چه لزومی ندارد که فاصله‌های $x_i-x_{i-۱}$ مساوی باشند، ولی برای سادگی معمولاً آن‌ها را مساوی می‌گیریم. در این صورت برای هر i، $i=۱,۲,\cdots,n$ داریم

$$x_i-x_{i-۱}=\Delta x=\frac{b-a}{n}$$

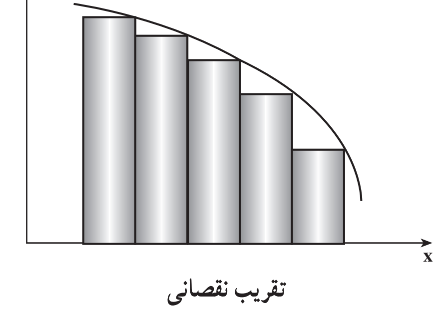
حال اگر تابع f صعودی باشد (مانند شکل‌های فوق)، آن‌گاه تقریب نقصانی عبارت است از :

$$f(x_۰)\Delta x+f(x_۱)\Delta x+\cdots+f(x_{n-۱})\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}f(x_{i-۱})\Delta x$$

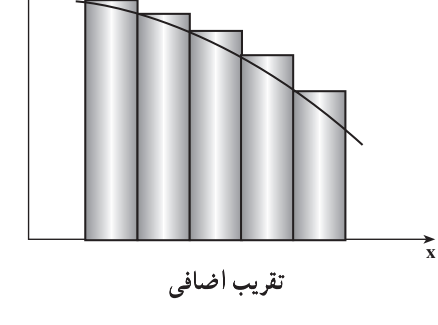
و تقریب اضافی عبارت است از : $f(x_۱)\Delta x+f(x_۲)\Delta x+\cdots+f(x_n)\Delta x=\sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x$

و $\sum_{i=۱}^{n}f(x_{i-۱})\Delta x <$ مساحت شکل $< \sum_{i=۱}^{n}f(x_i)\Delta x$

اما اگر تابع f نزولی باشد، آن‌گاه عکس این مطلب را داریم یعنی مطابق شکل تقریب نقصانی و اضافی جابه‌جا می‌شوند.



تقریب نقصانی



تقریب اضافی

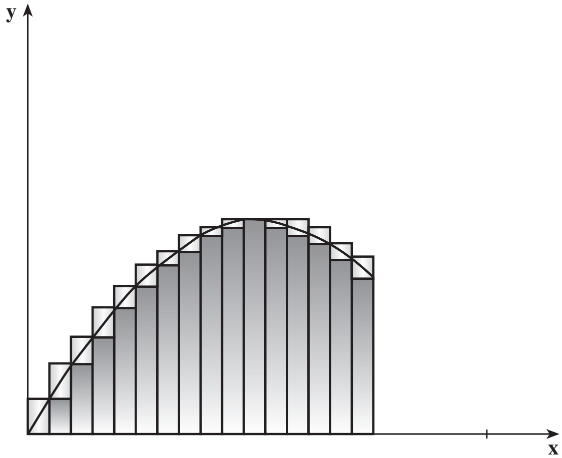
$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x < \text{مساحت شکل} < \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$$

حال اگر با افزایش n (کاهش طول بازه‌های $[x_{i-1}, x_i]$) این دو مقدار به هم نزدیک شوند و به یک عدد میل کنند، آن‌گاه این عدد حقیقی مساحت زیر منحنی $y = f(x)$ را در بازه‌ی $[a,b]$ مشخص می‌کند.

اگر حتی تابع f ، در بازه‌ی $[a,b]$ یکنوا نباشد باز هم این امکان وجود دارد که این دو مقدار به یک عدد میل کنند. به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۲: منحنی $y = 2x - x^2$ را در بازه‌ی $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ درنظر گرفته، به جدول زیر توجه کنید :

n	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$	$\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\Delta x$
۲	۱/۲۶۵۶۲۵	۰/۷۰۳۱۲۵
۱۰	۱/۱۷۵۶۲۵	۱/۰۶۳۱۲۵
۵۰	۱/۱۳۶۰۲۵	۱/۱۱۳۵۲۵
۲۵۰	۱/۱۲۷۲۴۱	۱/۱۲۲۷۴۱
۲۵۰۰	۱/۱۲۵۴۵۱	۱/۱۲۴۵۵۱



همان‌طور که دیده می‌شود این مقادیر با افزایش n ، به هم نزدیک می‌شوند.

تعریف: اگر تابع f روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد و برای هر $x \in [a,b]$ ، $f(x) \geq 0$ ، و برای هر $n \in N$ بازه‌ی $[a,b]$ را به زیربازه‌های

$$[x_0, x_1] \ , \ [x_1, x_2] \ , \ \cdots \ , \ [x_{n-1}, x_n]$$

افراز[1] کنیم، یعنی

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

۱ــ بازه‌ها به‌جز در دو انتها نقطه‌ی مشترکی ندارند و اجتماع همه‌ی آن‌ها بازه‌ی $[a,b]$ است.

و فرض کنیم برای هر i، $i=1,2,\cdots,n$ ،

$$x_i - x_{i-1} = \Delta x = \frac{b-a}{n}$$

و برای هر i ، $f(l_i)$ مقدار مینیمم مطلق تابع f در بازه‌ی $[x_{i-1},x_i]$ باشد[1]، آن‌گاه مساحت زیرمنحنی $y=f(x)$ محصور به خطوط $x=a$ ، $x=b$ و $y=0$ برابر است با :

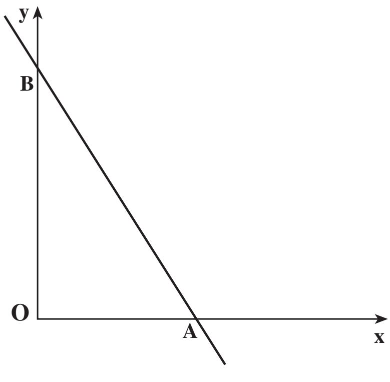
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x$$

این رابطه به این معنی است که برای هر $\varepsilon > 0$ ، عدد طبیعی N یافت می‌شود که برای هر $n \geq N$ ،

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x - A\right| < \varepsilon$$

بعداً نشان می‌دهیم که، l_i را می‌توان هر عدد در بازه‌ی $[x_{i-1},x_i]$ اختیار کرد.

مثال ۳: مساحت مثلث OAB مطابق شکل زیر برابر مساحت زیر خط $y = 8-2x$ بین 0 و 4 است.



برای هر n ، $\Delta x = \frac{4-0}{n} = \frac{4}{n}$ و چون تابع نزولی است، برای هر i ، $l_i = x_i = \frac{4}{n}i$. (چرا؟).

داریم :

$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(l_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} (8-2x_i)\frac{4}{n} = 4\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{8}{n} - \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

۱ــ چون تابع f روی بازه‌ی بسته‌ی $[x_{i-1},x_i]$ پیوسته است، این مقدار وجود دارد.

$$= ۴ \lim_{n \to \infty} (۸ - \frac{۲}{n} \sum_{i=۱}^{n} i \frac{۴}{n}) = ۴ \lim_{n \to \infty} (۸ - \frac{۸}{n^۲} \sum_{i=۱}^{n} i)$$

$$= ۴ \lim_{n \to \infty} (۸ - \frac{۸}{n^۲} \frac{n(n+۱)}{۲}) = ۱۶$$

این نتیجه دور از انتظار نیست. چون مساحت مثلث عبارت است از :

$(۸ \times ۴) \div ۲ = ۱۶$ (واحد سطح)

همان‌طور که دیدیم برای محاسبه‌ی مساحت به فرمول‌هایی نیاز داریم که بسیاری از آن‌ها با استقرای ریاضی قابل اثبات‌اند. از آن جمله‌اند

$$\sum_{i=۱}^{n} i = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$\sum_{i=۱}^{n} i^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}$$

$$\sum_{i=۱}^{n} i^۳ = \frac{n^۲(n+۱)^۲}{۴}$$

$$\sum_{i=۱}^{n} i^۴ = \frac{n(n+۱)(۶n^۳+۹n^۲+n-۱)}{۳۰}$$

هم‌چنین گاهی لازم است اندیس جمع‌بندی را تغییر داد، مثلاً می‌دانیم که

$$\sum_{i=۱}^{n} (i-۱)^۲ = \sum_{i=۰}^{n-۱} i^۲ \ , \ \sum_{i=۱}^{n} (i-۱) = \sum_{i=۰}^{n-۱} i$$

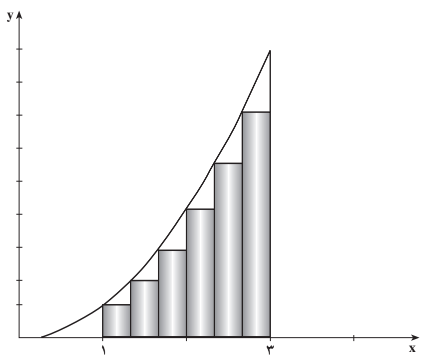
و به‌طور کلی

$$\sum_{i=۱}^{n} a_{i-۱} = \sum_{i=۰}^{n-۱} a_i$$

مثال ۴: مساحت زیر منحنی $y = x^۲$ بین ۱ و ۳ عبارت است از :

$$A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=۱}^{n} f(l_i) \Delta x$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{۲}{n} \sum_{i=۱}^{n} x_{i-۱}^۲ = ۲ \lim_{n \to \infty} \frac{۱}{n} \sum_{i=۰}^{n-۱} x_i^۲$$



(دقت کنید که $\Delta x = \frac{۳-۱}{n} = \frac{۲}{n}$). امّا

$$x_i = ۱ + \frac{۲i}{n}$$

$$x_i^۲ = ۱ + \frac{۴i^۲}{n^۲} + \frac{۴i}{n}$$

$$\sum_{i=۰}^{n-۱} x_i^۲ = \sum_{i=۰}^{n-۱} ۱ + \sum_{i=۰}^{n-۱} \frac{۴i^۲}{n^۲} + \sum_{i=۰}^{n-۱} \frac{۴i}{n}$$

$$= n + \frac{۴}{n^۲} \sum_{i=۰}^{n-۱} i^۲ + \frac{۴}{n} \sum_{i=۰}^{n-۱} i$$

$$= n + \frac{۴}{n^۲}\left(\frac{(n-۱)(n)(۲(n-۱)+۱)}{۶}\right) + \frac{۴}{n}\left(\frac{(n-۱)n}{۲}\right)$$

$$= n + \frac{۲(n-۱)(۲n-۱)}{۳n} + ۲(n-۱)$$

$$= \frac{۲(n-۱)(۲n-۱)}{۳n} + ۳n - ۲$$

و

$$A = ۲\lim_{n \to \infty} \left(\frac{۲}{۳}\left(\frac{n-۱}{n}\right)\left(\frac{۲n-۱}{n}\right) + ۳ - \frac{۲}{n}\right)$$

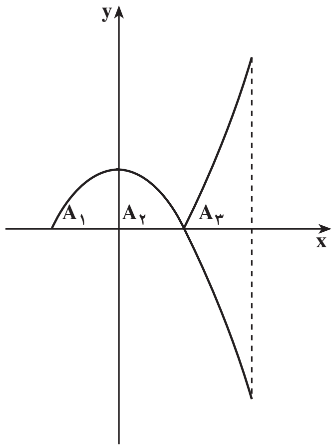
$$= ۲\left(\frac{۴}{۳} + ۳\right) = \frac{۲۶}{۳} \approx ۸/۶۶۶۷$$

در این مثال می‌توان برای هر i ، $x_{i-۱}$ را به x_i تبدیل کرد و همان نتیجه را به‌دست آورد (تحقیق کنید!) می‌توان نشان داد که با محاسبه مقادیر تقریب اضافی و نقصانی برای $n = ۱۰۰$ ، داریم :

$$۸/۶۶۵۰ < A < ۸/۶۶۸۳$$

در مثالی که در زیر می‌آید شرط نامنفی بودن تابع برقرار نیست. ببینید در این حالت چگونه مساحت را حساب می‌کنیم.

مثال ۵: مساحت محصور بین نمودار تابع $y = ۱ - x^۲$ ، خط‌های $y = ۰$ ، $x = -۱$ و $x = ۲$ را پیدا می‌کنیم.



تابع $f(x)=۱-x^{۲}$ در بازه‌ی $[-۱,۱]$ نامنفی ولی در بازه‌ی $[۱,۲]$ نامثبت است. مقدار مساحت در بازه‌ی $[۱,۲]$ مساوی مقدار مساحت زیر منحنی $y=-f(x)$ در همین بازه است و لذا می‌توان مساحت زیر منحنی را در بازه‌ی $[-۱,۱]$ پیدا کرد و با مساحت زیر منحنی $y=-f(x)$ در بازه‌ی $[۱,۲]$ جمع کرد. داریم :

$$A = A_{۱} + A_{۲} + A_{۳}$$

وقتی که $A_{۱}+A_{۲}$ مساحت زیر منحنی $y=۱-x^{۲}$ در بازه‌ی $[-۱,۱]$ و $A_{۳}$ مساحت زیرمنحنی $y=-(۱-x^{۲})=x^{۲}-۱$ در بازه‌ی $[۱,۲]$ است. داریم :

$$A_{۲} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=۱}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=۱}^{n} (۱-(\frac{i}{n})^{۲})\frac{۱}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (۱-\sum_{i=۱}^{n} \frac{i^{۲}}{n^{۳}}) = \frac{۲}{۳}$$

به همین ترتیب می‌توان نشان داد $A_{۱}=\frac{۲}{۳}$ و $A_{۳}=\frac{۴}{۳}$ (چرا؟)، پس $A=\frac{۸}{۳}$.

تمرین‌ها

۱ــ ماشینی ۵ ثانیه پس از ترمز گرفتن می‌ایستد. سرعت در لحظات مختلف این ۵ ثانیه در

جدول زیر آمده است :

زمان	۰	۱	۲	۳	۴	۵
سرعت (متر بر ثانیه)	۴۴	۳۰	۲۰	۱۲/۵	۵	۰

مطلوب است تقریب اضافی و نقصانی برای مسافتی که ماشین در عرض این ۵ ثانیه طی می‌کند.

۲ــ مقادیر تقریب اضافی و نقصانی مساحت ربع دایره به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۱ را برای $n=۴$ به دست آورید. (این مقدار عدد $\frac{\pi}{۴}$ را تقریب می‌زند، چرا؟)

۳ــ مقادیر تقریب اضافی و نقصانی مساحت زیرمنحنی $y=\frac{۱}{x}$ را بین ۱ تا ۲ برای $n=۴$ به‌دست آورید.

۴ــ مساحت ناحیه‌ی داده شده در مثال ۳ را با استفاده از مستطیل‌های محیط بر ناحیه به دست آورید. چه تفاوتی مشاهده می‌کنید؟

۵ــ مساحت زیر خط $y=mx$ (برای $m>۰$) را بین a و b ، $(b>a>۰)$ حساب کنید.

۶ــ ثابت کنید در مثال ۱ اگر مقدار سرعت لحظه‌ای را در هر $\frac{۱}{۱۰}$ ثانیه داشته باشیم، آن‌گاه تفاضل تقریب اضافی و نقصانی برای مسافت حداکثر ۱/۵ متر است.

۷ــ وقتی چتربازی از هواپیما خود را پرتاب می‌کند، تا باز شدن چتر سرعتش رو به افزایش است ولی به‌دلیل مقاومت هوا شتاب او کاهش می‌یابد. جدول زیر شتاب لحظه‌ای چترباز، a را در هر ثانیه ثبت کرده است :

t (ثانیه)	۰	۱	۲	۳	۴	۵
a (متر بر مربع ثانیه)	۹/۸۱	۸/۰۳	۶/۵۳	۵/۳۸	۴/۴۱	۳/۶۱

مقادیر تقریب نقصانی و اضافی سرعت را در لحظه‌ی $t=۵$ به‌دست آورید.

۶ــ۲ــ انتگرال معیّن

اکنون برای تعریف انتگرال معین آمادگی داریم، ابتدا فرض می‌کنیم برای $a<b$ تابع f در بازه‌ی بسته $[a,b]$ ، پیوسته باشد (دقت کنید که شرط $f(x)\geq ۰$ ضروری نیست!) حال بازه‌ی $[a,b]$ را به n

زیر بازه‌ی

$$[x_۰, x_۱] \ , \ [x_۱, x_۲] \ , \ \cdots \ , \ [x_{n-۱}, x_n]$$

که در آن

$$a = x_۰ < x_۱ < x_۲ < x_۳ < \ \cdots \ < x_n = b$$

افراز می‌کنیم و برای هر i، $\Delta_i x = x_i - x_{i-۱}$. معمولاً $\Delta_i x = \Delta x = \frac{b-a}{n}$ فرض می‌شود. برای هر $i = ۱,۲,\cdots,n$ ، نقطه‌ی c_i را در بازه‌ی $[x_{i-۱}, x_i]$ به‌طور دلخواه درنظر می‌گیریم.

$$R_n(f) = \sum_{i=۱}^{n} f(c_i)\Delta x$$

را مجموع ریمان تابع f روی بازه‌ی [a,b] برای افراز فوق می‌نامند (دقت کنید که می‌توان حتی $\Delta_i x$ ها را برابر با یکدیگر فرض نکرده و نوشت $\sum_{i=۱}^{n} f(c_i)\Delta_i x$.)

حال با درنظر گرفتن پیوستگی تابع f روی بازه‌ی [a,b]، نتیجه می‌شود که این تابع در هریک از زیر بازه‌های $[x_{i-۱}, x_i]$ پیوسته است و لذا در هر یک از این زیر بازه‌ها ماکسیمم و مینیمم مطلق دارد. اگر برای هر $i = ۱,۲,\cdots,n$ ، l_i نقطه‌ی مینیمم مطلق و u_i نقطه‌ی ماکسیمم مطلق f در بازه‌ی $[x_{i-۱}, x_i]$ باشد، آن‌گاه داریم

$$f(l_i) \le f(c_i) \le f(u_i)$$

حال

$$U_n(f) = \sum_{i=۱}^{n} f(u_i)\Delta x$$

را مجموع بالای ریمان تابع f در بازه‌ی [a,b] برای افراز فوق و

$$L_n(f) = \sum_{i=۱}^{n} f(l_i)\Delta x$$

را مجموع پایین ریمان تابع f در بازه‌ی [a,b] می‌نامیم. به راحتی دیده می‌شود که $L_n(f) \le R_n(f) \le U_n(f)$ [۱].

۱ــ دقت کنید که برای هر f، $\{L_n(f)\}$ ، $\{R_n(f)\}$ و $\{U_n(f)\}$ سه دنباله‌اند.

نکته: اگر تابع f در بازه‌ی [a,b] پیوسته نباشد ولی برای هریک از زیر بازه‌ها مقدار ماکسیمم مطلق و مقدار مینیمم مطلق وجود داشته باشند باز هم می‌توان $U_n(f)$ و $L_n(f)$ را به همین ترتیب تعریف کرد.

تعریف: تابع f بر بازه‌ی بسته [a,b] را انتگرال‌پذیر گویند[1]، هرگاه

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f)=\lim_{n\to\infty} U_n(f)$$

و این مقدار مشترک حدّی را انتگرال معیّن تابع f روی بازه‌ی [a,b] می‌نامند و آن را با $\int_a^b f(x)dx$ نشان می‌دهند.

در حقیقت $\int_a^b f(x)dx$ یک عدد حقیقی است که آن را مقدار انتگرال معیّن می‌نامند، f تابع زیر انتگرال است، a حد پایینی انتگرال و $b>a$ حد بالایی انتگرال است.

علامت "$\int$" از روش سنتی نوشتن S به‌جای لغت مجموع "Sum" گرفته شده است و dx همان دیفرانسیل x است.

نکته‌ی ۱: هرگاه $\lim_{n\to\infty} L_n(f)=\lim_{n\to\infty} U_n(f)$ (یعنی تابع f در بازه‌ی [a,b] انتگرال‌پذیر بود) در آن صورت $\lim_{n\to\infty} R_n(f)$ هم همین مقدار خواهد بود.

نکته‌ی ۲: چون حدّ مجموع ریمان به متغیر x بستگی ندارد می‌توان x را به هر متغیر دیگر تبدیل کرد و داریم:

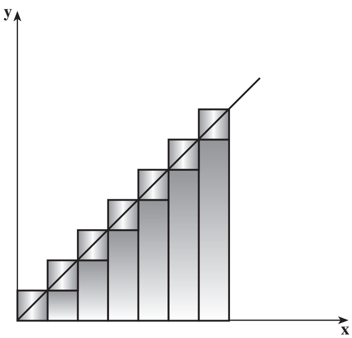
$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b f(t)\,dt$$

مثال ۶: اگر $b>\circ$، برای محاسبه‌ی $\int_\circ^b xdx$، $\Delta x=\frac{b-\circ}{n}=\frac{b}{n}$. و برای هر i، $x_i=i\frac{b}{n}$.

$$L_n(f)=\frac{b}{n}(\circ+\frac{b}{n}+\frac{۲b}{n}+\cdots+(n-۱)\frac{b}{n})$$

$$=\frac{b^۲}{n^۲}(۱+۲+۳+\cdots+(n-۱))$$

$$=\frac{b^۲}{n^۲}\frac{(n-۱)n}{۲}=\frac{b^۲}{۲}(۱-\frac{۱}{n})$$



۱ــ انتگرال‌پذیری فقط برای تابع‌هایی که در بازه بسته [a,b] تعریف شده و کراندار باشند مفهوم دارد. انتگرال روی بازه‌های دیگر هم با استفاده از مفهوم حد قابل تعریف است ولی به‌طور کلی از حدود این کتاب خارج است.

به همین ترتیب

$$U_n(f)=\frac{b}{n}(\frac{b}{n}+\frac{۲b}{n}+\cdots+n\frac{b}{n})$$

$$=\frac{b^۲}{n^۲}\frac{n(n+۱)}{۲}=\frac{b^۲}{۲}(۱+\frac{۱}{n})$$

پس

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f)=\lim_{n\to\infty} U_n(f)=\frac{b^۲}{۲}$$

یعنی

$$\int_۰^b xdx=\frac{۱}{۲}(b^۲)$$

و مثلاً $\int_۰^۱ xdx=\frac{۱}{۲}$. به طور کلی می‌توان ثابت کرد که

$$\int_a^b xdx=\frac{۱}{۲}(b^۲-a^۲)$$

قضیه‌ی زیر را که شرط کافی برای انتگرال‌پذیری است بدون اثبات بیان می‌کنیم

قضیه‌ی ۱: اگر تابع f در بازه‌ی بسته‌ی $[a,b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه f در این بازه انتگرال‌پذیر است.

مثال ۷: برای هر $x>۱$، تابع $f(t)=\frac{۱}{t}$ در بازه‌ی بسته $[۱,x]$ پیوسته است و در نتیجه انتگرال‌پذیر است.

نکته: لزومی ندارد که تابع f پیوسته باشد تا انتگرال‌پذیر باشد. به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۸:

$$f(x)=\begin{cases}۰ & x\neq ۰\\ ۱ & x=۰\end{cases}$$

این تابع در بازه $[-۱,۱]$ پیوسته نیست (چرا؟) ولی انتگرال‌پذیر است.

$$L_n(f)=\sum_{i=۱}^{n} f(l_i)\Delta x=۰$$

$$۰\leq U_n(f)=\sum_{i=۱}^{n} f(u_i)\Delta x\leq\frac{۴}{n}$$

(دقت کنید که ممکن است نقطه‌ی ۰ به دو بازه از افراز یعنی $[x_i, x_{i+1}]$ و $[x_{i-1}, x_i]$ تعلق داشته باشد، $U_n(f)=\frac{4}{n}$ و یا نقطه ۰ به یکی از آن‌ها تعلق داشته باشد، $U_n(f)=\frac{2}{n}$)

پس $\lim_{n\to\infty} L_n(f)=\lim_{n\to\infty} U_n(f)=0$ ، یعنی f انتگرال‌پذیر است و

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=0$$

در مثال ۸، تابع f در همه‌ی نقاط مگر نقطه‌ی ۰ با تابع ثابت ۰ برابر است و همان‌طور که دیده می‌شود انتگرال این دو تابع در بازه‌ی $[-1,1]$ با هم برابرند و به طور کلی مطلب زیر را می‌توان ثابت کرد.

نکته: هرگاه دو تابع f و g در تمام نقاط یک بازه‌ی بسته تعریف شده و در همه نقاط این بازه مگر نقطه‌ای از آن برابر باشند، به شرط انتگرال‌پذیری یکی از آن‌ها، دیگری هم انتگرال‌پذیر است و مقادیر این دو انتگرال برابرند.

تا به حال انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ را برای $a<b$ تعریف کردیم، با استفاده از تعریف زیر این انتگرال را برای هر b و a می‌توان تعریف کرد :

تعریف: ۱ــ اگر $a>b$ و $\int_b^a f(x)dx$ وجود داشته باشد، آن‌گاه تعریف می‌کنیم

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

۲ــ اگر f(a) وجود داشته باشد، آن‌گاه تعریف می‌کنیم

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

همان‌طور که در مثال ۷ دیدیم، برای هر $x>1$ ، $\int_1^x \frac{dt}{t}$ تعریف شده است، حال تعریف می‌کنیم :

تعریف: به ازاءِ هر $x\in(0,\infty)$ ، $\int_1^x \frac{dt}{t}$ را لگاریتم طبیعی x می‌نامند و آن را با $\ln x$ نمایش می‌دهند. مقدار تقریبی این تابع را می‌توان با استفاده از حاصل جمع ریمان تابع $\frac{1}{t}$ در بازه $[1,x]$ برای $x>1$ و یا $[x,1]$ برای $0<x<1$ به‌دست آورد.

عدد حقیقی‌ای که مقدار تابع ln در آن برابر ۱ است را با e نمایش می‌دهیم و عدد نپر نامیده می‌شود ($\ln e=1$).

نکته: این عدد e در موارد دیگر هم ظاهر شده است. (مثال ۱۹ فصل دوم) علاوه بر آن $\ln x = \log_e^x$ (یعنی لگاریتم طبیعی همان log در مبنای e است.)

۶ــ۳ــ ویژگی‌های انتگرال معین

برخی از ویژگی‌های مهم انتگرال معین را در این قسمت بیان می‌کنیم :

مثال ۹: $\int_a^b dx$ عبارت است از انتگرال تابع ثابت $f \equiv 1$ در بازه‌ی $[a,b]$ و می‌توان ثابت کرد :

$$\int_a^b dx = b - a$$

قضیه‌ی ۲: اگر f در بازه‌ی $[a,b]$ انتگرال‌پذیر و k یک عدد حقیقی ثابت باشد، آن‌گاه

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

اثبات :

$$\int_a^b kf(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} kf(c_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} k\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x$$

$$= k\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x = k\int_a^b f(x)dx$$

قضیه‌ی ۳: اگر f و g دو تابع انتگرال‌پذیر در بازه‌ی $[a,b]$ باشند، آن‌گاه

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

اثبات:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n}(f(c_i)+g(c_i))\Delta x = \lim_{n\to\infty}(\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x + \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} g(c_i)\Delta x$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx .$$

قضیه‌های زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم :

قضیه‌ی ۴: اگر f در بازه‌ی بسته‌ای که شامل نقاط a، b و c است انتگرال‌پذیر باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

لزوماً عدد c بین a و b نیست.

نکته: با استفاده از قضیه‌ی ۴، می‌توان ثابت کرد که اگر تابعی در یک بازه‌ی بسته تعریف شده و تعدادی متناهی نقطه‌ی ناپیوستگی داشته باشد و تابع در این نقاط دارای حدهای راست و چپ باشد، باز هم تابع در آن بازه انتگرال‌پذیر است. به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱۰ :

$$\int_{۰}^{۳}[x]\,dx=\int_{۰}^{۱}[x]\,dx+\int_{۱}^{۲}[x]\,dx+\int_{۲}^{۳}[x]\,dx$$

$$=\int_{۰}^{۱}۰\,dx+\int_{۱}^{۲}dx+\int_{۲}^{۳}۲dx$$

$$=۰+(۲-۱)+۲(۳-۲)$$

$$=۱+۲=۳$$

قضیه‌ی ۵: اگر f و g دو تابع انتگرال‌پذیر در بازه‌ی $[a,b]$ باشند، و برای هر $x\in[a,b]$ ، $f(x)\le g(x)$ ، آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$$

با استفاده از قضیه‌ی ۵، می‌توان نتیجه گرفت که اگر $a\le b$ ، آن‌گاه

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx$$

قضیه‌ی ۶: اگر تابع f در بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و m و M به ترتیب مقدار مینیمم مطلق و ماکسیمم مطلق تابع در این بازه باشند، آن‌گاه

$$m\le\frac{۱}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le M$$

اثبات: واضح است که برای هر $x\in[a,b]$ ، $m\le f(x)\le M$

پس

$$\int_a^b m\,dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b M\,dx$$

و یا

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)dx\le M(b-a)$$

یعنی

$$m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$$

مقدار $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ ، مقدار متوسط یا میانگین تابع f از نقطه‌ی a تا نقطه‌ی b (یا در بازه‌ی $[a,b]$) نامیده می‌شود. دلیل این نام‌گذاری را می‌توان به شرح زیر بیان کرد :

اگر بازه‌ی $[a,b]$ را به n قسمت مساوی تقسیم کنیم و $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ، آن‌گاه می‌توان برای افراز حاصل

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2] \cdots [x_{n-1}, x_n]$$

یکی از حاصل‌جمع‌های ریمان را در نظر گرفت :

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = (b-a)\frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

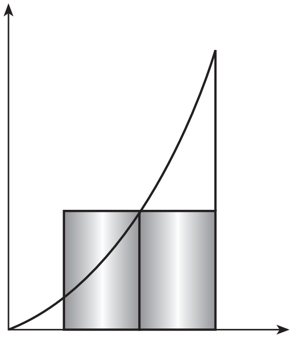
و اگر چنانچه انتگرال معین f بر بازه‌ی $[a,b]$ وجود داشته باشد، آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty} (b-a)\sum_{i=1}^{n} \frac{f(x_i)}{n} = \int_a^b f(x)dx$$

و لذا به طور تقریب

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \approx \frac{\sum_{i=1}^{n} f(x_i)}{n}$$

که عبارت طرف راست همان مقدار متوسط یا میانگین مقادیر $f(x_1),\cdots,f(x_n)$ است. به شکل هم توجه کنید، قسمت هاشور خورده مقدار مساحت زیر منحنی $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ است. که این مساحت با مساحت مستطیلی که اضلاع آن به طول‌های $b-a$ و مقدار متوسط f هستند، برابر است.



مثال ۱۱: می‌خواهیم بدون محاسبه‌ی انتگرال، کران بالا و کران پایینی برای

$$\int_{\frac{1}{2}}^{4}(x^3-6x^2+9x+1)dx$$

به دست آوریم.

$$f(x)=x^3-6x^2+9x+1$$

در بازه‌ی $\left[\frac{1}{2},4\right]$ دارای مقدار ماکسیمم مطلق ۵ و مینیمم مطلق ۱ است. (چرا؟)

پس

$$1\left(4-\frac{1}{2}\right)\le\int_{\frac{1}{2}}^{4}(x^3-6x^2+9x+1)dx\le 5\left(4-\frac{1}{2}\right)$$

$$3/5\le\int_{\frac{1}{2}}^{4}(x^3-6x^2+9x+1)dx\le 17/5$$

قضیه‌ی ۷: (قضیه‌ی مقدار میانگین برای انتگرال‌ها) اگر f در بازه‌ی بسته $[a,b]$ پیوسته باشد آن‌گاه عدد حقیقی c، $a\le c\le b$ وجود دارد که

$$\int_a^b f(x)dx=f(c)(b-a)$$

اثبات: چون $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ بین دو مقدار ماکسیمم مطلق M و مینیمم مطلق m تابع f است، بنا به قضیه‌ی مقدار میانی، $c\in[a,b]$ وجود دارد که

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

البته ممکن است نقطه‌ی c یکتا نباشد.

مثال ۱۲: تابع $f(x)=x^2$ را در بازه‌ی $[1,4]$ در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد $\int_1^4 x^2dx=21$.

مقدار متوسط تابع برابر است با $\frac{\int_1^4 x^2dx}{3}=7$. مقدار c باید طوری باشد که $f(c)=7$ یا $c^2=7$ که تنها جواب در بازه‌ی $[1,4]$، $\sqrt{7}$ است. مساحت زیر منحنی در بازه‌ی $[1,4]$ برابر مساحت مستطیل به اضلاع $f(\sqrt{7})=7$ و ۳ (طول بازه‌ی $[1,4]$) است.

برخی دیگر از ویژگی‌های انتگرال معین، را بدون اثبات بیان می‌کنیم.

۱ـ اگر f تابعی فرد و در $[-a,a]$ انتگرال‌پذیر باشد (یعنی برای هر x، $f(-x)=-f(x)$)، آن‌گاه

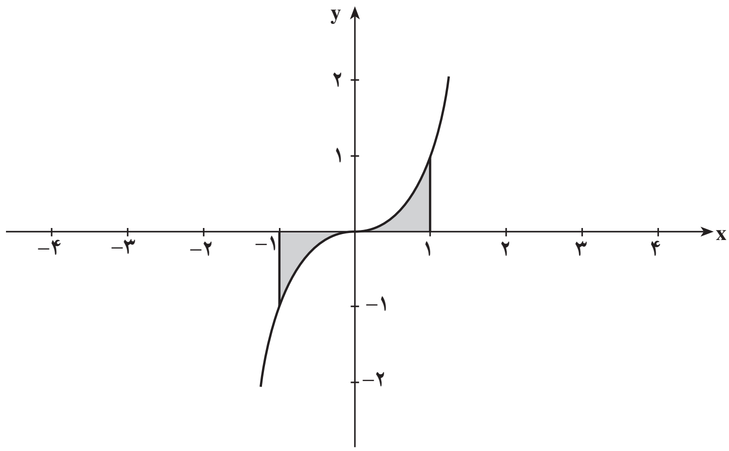
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

۲ـ اگر f تابعی زوج و در $[-a,a]$ انتگرال‌پذیر باشد (یعنی برای هر x، $f(-x)=f(x)$)، آن‌گاه

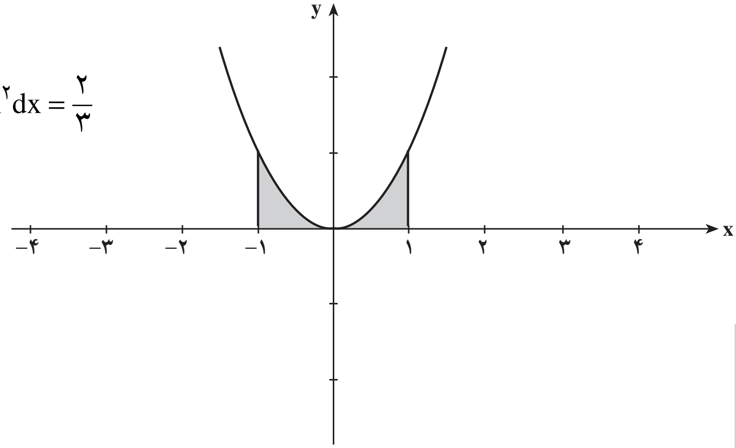
$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

تصویر دو ویژگی اخیر را در شکل‌های زیر می‌توان مشاهده کرد :

$$\int_{-1}^{1} x^3 dx = 0$$



$$\int_{-1}^{1} x^2 dx = 2\int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{2}{3}$$



۱ــ مجموع بالا و پایین ریمان را برای توابع زیر در بازه‌های داده شده و مقادیر n محاسبه کنید.

الف) $f(x)=\sin x$ در بازه‌ی $[۰,\pi]$ برای $n=۶$

ب) $g(x)=x^۳$ در بازه‌ی $[-۱,۱]$ برای $n=۸$

ج) $h(x)=\cos x$ در بازه‌ی $\left[۰,\frac{\pi}{۲}\right]$ برای $n=۳$

د) $t(x)=\frac{۱}{x}$ در بازه‌ی $[۱,۲]$ برای $n=۱۰$

۲ــ ثابت کنید که برای هر $b>۰$ ،

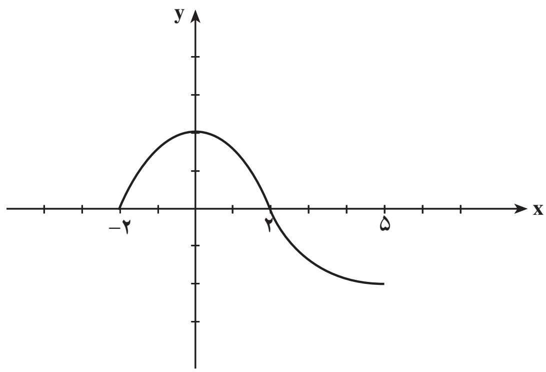
$$\int_۰^b x^۳dx=\frac{b^۴}{۴} \quad \text{و} \quad \int_۰^b x^۲dx=\frac{b^۳}{۳}$$

۳ــ نمودار تابع f در بازه‌ی $[-۲,۲]$ نسبت به محور y متقارن است و در بازه‌ی $[-۲,۵]$ پیوسته است (مطابق شکل). اگر $A=\int_{-۲}^{۲} f(x)dx$ و $B=\int_۰^۵ f(x)dx$ ، مطلوب است

الف)

$$\int_۲^۵ f(x)dx$$

ب) مقدار متوسط تابع f را در بازه‌ی $[۰,۵]$ و نیز مقدار متوسط تابع $|f|$ را در همان بازه پیدا کنید.



۴ــ اگر بدانیم $\int_۱^۳ ۳x^۲dx=۲۶$ و $\int_۱^۳ ۲xdx=۸$ ، مطلوب است

$$\int_۱^۳ (x^۲-x)dx$$

۵ــ انتگرال‌های معین زیر را محاسبه کنید.

الف) $\int_{-1}^{1}(x^{3}+2)dx$ ب) $\int_{-1}^{2}|x|dx$

ج) $\int_{1}^{-1}(x^{5}-3x^{3}+2)dx$

۶ــ نامساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\frac{3}{26}\le\int_{2}^{5}\frac{1}{x^{2}+1}dx\le\frac{3}{5}$ ب) $0\le\int_{0}^{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)dx\le 2$

۷ــ مقدار متوسط تابع $f(x)=x^{2}$ را در بازه‌ی $[-1,2]$ به‌دست آورید. در چه نقطه‌ای از این بازه مقدار تابع f با مقدار متوسط تابع برابر است؟ از نظر هندسی نتیجه‌ی به دست آمده را نمایش دهید.

۸ــ ثابت کنید برای هر b و a،

$$\int_{a}^{b}x^{3}dx=\frac{b^{4}-a^{4}}{4}$$

۹ــ تابع

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{گویا } x\\ 0 & \text{اصم } x\end{cases}$$

را در بازه‌ی بسته $\left[\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}\right]$ برای $n\in N$ و $0\le i\le n-1$ در نظر بگیرید.

الف) مقدار ماکسیمم و مینیمم مطلق این تابع را در هر یک از این بازه‌ها پیدا کنید.

ب) $L_n(f)$ و $U_n(f)$ را در بازه‌ی $[0,1]$ به دست آورید.

ج) آیا تابع f در بازه‌ی $[0,1]$ انتگرال‌پذیر است؟

۱۰ــ $\int_{1}^{4}x^{3}\lfloor x\rfloor\, dx$ را حساب کنید.

۶ــ۴ــ قضیه‌های بنیادی[1]

دیدیم که مشتق به عنوان نسبت تغییرات به کار می‌رود از طرف دیگر، با داشتن مشتق می‌توان اطلاعاتی را در رابطه با تابع به دست آورد. مثلاً مسافت را با استفاده از سرعت لحظه‌ای پیدا کردیم.

۱ــ این قضیه‌ها را قضیه‌های اساسی یا اصلی هم می‌نامند.

لذا به نظر می‌آید ارتباطی منطقی بین انتگرال و مشتق وجود دارد. قضیه‌های بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال که در قرن هفدهم به طور دقیق اثبات شدند این ارتباط را نشان می‌دهند. اما قبل از آن به مثال زیر توجه کنید:

مثال ۱۳: به تابع $F(x)=3x+1$ توجه کنید. مشتق این تابع، تابع ثابت $f\equiv 3$ است و

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b 3dx=3(b-a)$$

که برابر است با

$$\begin{aligned}F(b)-F(a)&=3b+1-(3a+1)\\&=3(b-a)\end{aligned}$$

به طور کلی داریم:

قضیه‌ی ۸: (قضیه‌ی بنیادی اوّل حساب دیفرانسیل و انتگرال) اگر f تابعی پیوسته در بازه‌ی I شامل نقطه‌ی a باشد و تابع F با دامنه‌ی I با ضابطه‌ی زیر تعریف شود:

$$F(x)=\int_a^x f(t)dt$$

آن‌گاه F روی I مشتق‌پذیر است و برای هر $x\in I$، $F'(x)=f(x)$.

اثبات: به دلیل پیوستگی تابع f روی I، برای هر x، $F(x)$ موجود است. حال نشان می‌دهیم این تابع مشتق‌پذیر است:

$$\begin{aligned}F'(x)&=\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\int_a^{x+h}f(t)dt-\int_a^x f(t)dt}{h}\\&=\lim_{h\to 0}\frac{\int_x^{x+h}f(t)dt}{h}\end{aligned}$$

امّا بنابر قضیه‌ی مقدار میانگین $\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt=f(c)$ که c بین x و $x+h$ قرار دارد. پس وقتی h به سمت صفر میل کرد، c به x میل می‌کند و به دلیل پیوستگی f داریم:

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h}f(t)dt=\lim_{c\to x}f(c)=f(x)$$

در نتیجه

$$F'(x)=f(x)$$

قضیه‌ی ۹: (قضیه‌ی بنیادی دوّم حساب دیفرانسیل و انتگرال) اگر f در بازه‌ی بسته $[a,b]$ پیوسته باشد و تابع g به گونه‌ای باشد که برای هر x در بازه‌ی $[a,b]$ داشته باشیم $g'(x)=f(x)$ ، آن‌گاه

$$\int_a^b f(t)dt=g(b)-g(a)$$

اثبات: اگر $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ تعریف شود دیدیم که برای هر $x\in[a,b]$ ، $F'(x)=f(x)$. پس برای هر x، $(F-g)'(x)=0$ یعنی $F-g\equiv k$ که k یک مقدار ثابت است. (یعنی برای هر $x\in[a,b]$ ، $F(x)=g(x)+k$)

اما

$$F(b)=g(b)+k=\int_a^b f(t)dt$$

و

$$F(a)=g(a)+k=\int_a^a f(t)dt=0$$

در نتیجه

$$k=-g(a)$$

و داریم

$$\int_a^b f(t)dt=g(b)-g(a)$$

$g(b)-g(a)$ را با $g(x)\Big|_a^b$ نیز نمایش می‌دهند.

نکته: در قضیه‌ی ۹ کافی است $g'(a)$ ، مشتق راست تابع g در نقطه‌ی a و $g'(b)$ ، مشتق چپ تابع در نقطه‌ی b باشد.

مثال ۱۴: اگر $g'(t)=f(t)=t$ و $g(0)=2$ ، مقدار $g(b)$ را در نقاط ۰ , ۰/۲ , ۰/۴ ... و ۱

پیدا می‌کنیم.

$$g(b)-g(۰)=\int_۰^b f(t)dt=\int_۰^b tdt$$

یا

$$g(b)=۲+\int_۰^b t\,dt$$

در مثال ۶، $\int_۰^b tdt$ را برای مقادیر مختلف b پیدا کرده و داریم $g(b)=۲+\frac{۱}{۲}b^۲$. پس مثلاً

b	۰	۰/۲	۰/۴	۰/۶	۰/۸	۱
g(b)	۲	۲/۰۲	۲/۰۸	۲/۱۸	۲/۳۲	۲/۵

مثال ۱۵: چون مشتق تابع $g(x)=-\cos x$، تابع $f(x)=\sin x$ است، پس

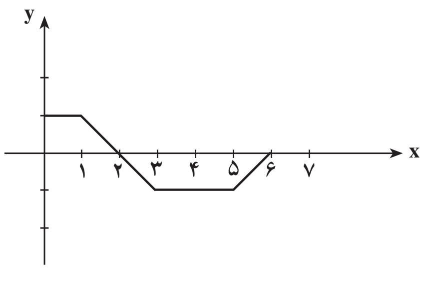
$$\int_۰^{\frac{\pi}{۲}} \sin xdx=-\cos x\Big|_۰^{\frac{\pi}{۲}}=۱$$

نکته: از قضیه‌ی اول برای محاسبه‌ی مشتق برخی از توابعی که به صورت انتگرال معین داده شده‌اند، می‌توان استفاده کرد، مثلاً داریم:

اگر $F(x)=\int_a^x f(t)dt$، آن‌گاه $F'(x)=f(x)$ و اگر $F(x)=\int_a^{g(x)} f(t)dt$، آن‌گاه $F'(x)=g'(x)f(g(x))$ (چرا؟)

تمرین‌ها

۱ـ اگر نمودار تابع f مطابق شکل باشد و $F'=f$ و $F(۰)=۰$، مطلوب است F(b) برای نقاط $b=۱,۲,۳,۵,۶$.



۲ـ اگر $f(x)=۲x$ و $F(x)=x^۲$ ،

الف) نشان دهید که $F'=f$.

ب) $\int_a^b f(x)dx$ را با استفاده از تعریف انتگرال معین محاسبه کنید.

ج) نشان دهید که $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$

۳ـ مشتق‌های زیر را بدون محاسبه‌ی انتگرال معین داده شده به دست آورید.

الف) $\frac{d}{dx}\int_۱^x \frac{\sin t}{t}dt$ ب) $\frac{d}{dt}\int_\pi^t \frac{\cos y}{۱+y^۲}dy$

۴ـ مشتق‌های زیر را پیدا کنید.

الف) $\frac{d}{dt}\int_۰^{\cos t} \frac{dx}{۴-x^۲}$ ب) $\frac{d}{dt}\int_{\sin t}^{\cos t} \frac{dx}{۴-x^۲}$

۵ـ با استفاده از قضیه‌ی بنیادی و این‌که مشتق تابع $F(x)=\frac{۱}{۴}x^۴$ برابر است با $f(x)=x^۳$

برای هر $b>۰$ ، $\int_۰^b x^۳dx$ را محاسبه کنید.

۶ـ نشان دهید برای هر $a>۰$ و $b>۰$

$$\int_a^b \frac{dt}{t}=\ln\frac{b}{a}$$

۷ـ مشتق توابع زیر را در دامنه تعریفشان به دست آورید.

الف) $f(x)=\ln|x|$ ب) $g(x)=\ln(\cos x)$

۶ـ۵ـ تابع اوّلیه (انتگرال نامعیّن)

محاسبه‌ی انتگرال معین با استفاده از تعریف، بسیار طولانی و خسته‌کننده است ولی قضیه‌ی بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال که می‌گوید اگر $F'(x)=f(x)$ داریم

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)=F(x)\Big|_a^b$$

روشی را برای محاسبه‌ی انتگرال معین ارائه می‌دهد که با استفاده از آن جواب دقیق را می‌توان سریعاً حساب کرد. این روش به‌شرطی به‌کار می‌رود که برای تابع f، تابع F وجود داشته باشد که $F'=f$.

مثال ۱۶: برای محاسبه‌ی $\int_{۰}^{۴}(۸-۲x)dx$

می‌بینیم اگر $F(x)=۸x-x^{۲}$ ، آنگاه $F'(x)=۸-۲x$. پس

$$\int_{۰}^{۴}(۸-۲x)dx=۸x-x^{۲}\Big|_{۰}^{۴}=۱۶$$

نکته :

ــ برای دو تابع F و G، $F'=G'$ اگر و تنها اگر $G=F+k$ که در آن k ثابت است.

ــ پیدا کردن تابع F که برای آن $F'=f$ ، در حقیقت عکس عمل مشتق‌گیری است.

ــ به‌دست‌آوردن F همواره ساده و امکانپذیر نیست، مثلاً برای تابع $f(x)=\sin x^{۲}$ به‌سادگی نمی‌توان تابعی مانند F پیدا کرد که برای آن $F'(x)=f(x)$.

تعریف: اگر f تابعی باشد که در بازه‌ای شامل بازه‌ی بسته $[a,b]$ تعریف شده باشد، آنگاه F را تابع اوّلیه[1] یا انتگرال نامعیّن تابع f می‌نامند اگر برای هر $x\in[a,b]$ ، $F'(x)=f(x)$. تابع اولیه‌ی تابع f را با

$$\int f(x)dx$$

نمایش می‌دهند.

دقت کنید که برای هر عدد حقیقی ثابت k، $\int f(x)dx=F(x)+k$ ، وقتی که $F'(x)=f(x)$.

پس هر تابع که تابع اوّلیه داشته باشد، بی‌نهایت تابع اوّلیه دارد، ولی هر زوج از آن‌ها اختلافی برابر عدد ثابت k دارند. به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱۷: برای تابع $f(x)=۸-۲x$ ، می‌توان توابع

$$F_{۱}(x)=۸x-x^{۲}$$

$$F_{۲}(x)=۸x-x^{۲}+۱$$

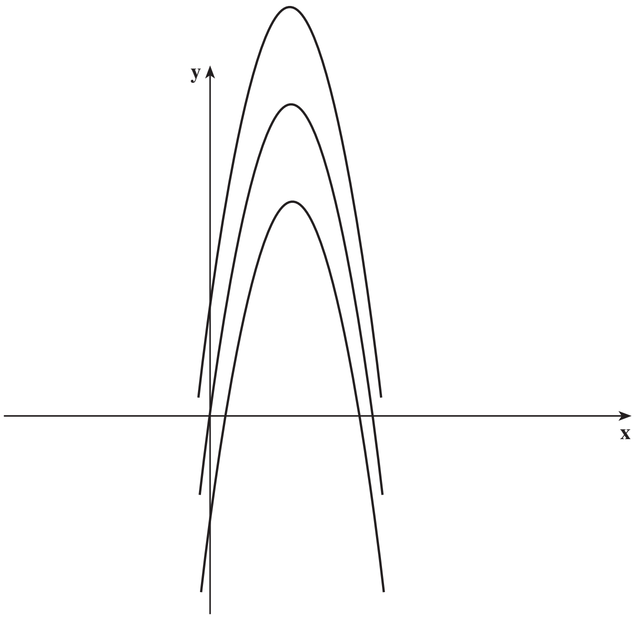
$$F_{۳}(x)=۸x-x^{۲}-۱$$

را به‌عنوان تابع اوّلیه در نظر گرفت. مثلاً اگر تابع اوّلیه‌ای بخواهیم که نمودار آن از مبدأ بگذرد، داریم :

$$F'(x)=۸-۲x$$

۱ــ تابع اوّلیه در برخی از کتاب‌ها، تابع اولی هم نامیده شده است. از نظر دستور زبان فارسی هم تابع اولی صحیح‌تر است ولی ما همان لغت متداول آن را به‌کار می‌بریم.

پس $F(x) = ۸x - x^۲ + k$. چون می‌خواهیم $F(۰) = ۰$ ، $k = ۰$ و $F_۱$ جواب مورد نظر است. $F_۲$ و $F_۳$ نیز توابع اولیه $۸ - ۲x$ هستند که نمودار آن‌ها به‌ترتیب از نقاط $(۰,۱)$ و $(۰,-۱)$ می‌گذرند.



نکته‌ی ۱: اگرچه برای نمایش انتگرال معین و انتگرال نامعین از یک علامت استفاده می‌شود ولی باید دقت کرد که $\int_a^b f(x)\,dx$ یک عدد حقیقی است درحالی که $\int f(x)dx$ ، دسته‌ای از توابع هستند که مشتق آن‌ها برابر f است.

همچنین

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int f(x)dx\Big|_a^b$$

نکته‌ی ۲: برای محاسبه‌ی انتگرال معین با استفاده از تابع اوّلیه، تفاوتی ندارد که از کدام یک از تابع‌های اوّلیه استفاده کنیم چون

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

$$= F(b) + k - (F(a) + k)$$

$$= G(b) - G(a) = G(x)\Big|_a^b$$

وقتی که $F' = G' = f$. پس در محاسبه‌ی انتگرال معین می‌توان از نوشتن k صرف‌نظر کرد.

مثال ۱۸: برای هر عدد گویای r چون اگر $f(x)=x^{r+1}$ ، آنگاه $f'(x)=(r+1)x^{r}$ ، پس به‌ازای $r\neq -1$ ، داریم :

$$\int x^{r}dx=\frac{1}{r+1}x^{r+1}+k$$

و مثلاً

$$\int_{1}^{3}x^{2}dx=\frac{1}{3}x^{3}\Big|_{1}^{3}=9-\frac{1}{3}=\frac{26}{3}\approx 8/667$$

و یا

$$\int_{1}^{4}\frac{dx}{\sqrt{x}}=\int_{1}^{4}x^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}x^{-\frac{1}{2}+1}\Big|_{1}^{4}=2$$

مثال ۱۹: چون به‌ترتیب مشتق تابع sinx برابر cosx و cosx برابر $-\sin x$ است،

$$\int \cos x dx=\sin x+k$$

و

$$\int \sin x dx=-\cos x+k$$

و مثلاً

$$\int_{0}^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_{0}^{\pi}=-\cos\pi+\cos 0=1+1=2$$

$$\int_{0}^{\pi}\cos x dx=\sin x\Big|_{0}^{\pi}=\sin\pi-\sin 0=0$$

برخی از ویژگی‌های تابع اوّلیه

با توجه به این‌که مشتق توابع $F\pm G$ برابر $F'\pm G'$ و مشتق تابع cF برابر cF' است.

$$\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

و

$$\int cf(x)dx=c\int f(x)dx$$

و به‌طور کلی[1]

$$\int \{c_1f(x)+c_2g(x)\}dx=c_1\int f(x)dx+c_2\int g(x)dx$$

۱ــ تابع اوّلیه گرفتن عملی خطی است. با استقرای ریاضی می‌توان ثابت کرد که برای هر عدد طبیعی n،

$$\int (c_1f_1(x)+c_2f_2(x)+\dots+c_nf_n(x))dx=c_1\int f_1(x)dx+\dots+c_n\int f_n(x)dx$$

مثال ۲۰:

$$\int(8-2x)dx = 8\int x^{0}dx - 2\int xdx$$
$$= 8x - \frac{2}{2}x^{2} + k$$
$$= 8x - x^{2} + k$$

و

$$\int(x^{3}-6x^{2}+9x+1)dx = \frac{x^{4}}{4} - 2x^{3} + \frac{9}{2}x^{2} + x + k$$

و یا

$$\int_{\frac{1}{2}}^{4}(x^{3}-6x^{2}+9x+1)dx = \frac{679}{64} \approx 10/6094$$

(چرا؟) و نیز

$$\int(\sin x + 3\cos x)dx = \int \sin xdx + 3\int \cos xdx$$
$$= -\cos x + 3\sin x + k$$

و یا

$$\int(\sin x - \frac{2}{\sqrt{x^{3}}})dx = -\cos + \frac{4}{\sqrt{x}} + k$$

در اینجا قضیه‌ای را با استفاده از قاعده‌ی زنجیری اثبات می‌کنیم :

قضیه‌ی ۱۰:

$$\int g'(x)f(g(x))dx = F(g(x)) + k$$

که در آن F تابع اوّلیه‌ی تابع f است.

اثبات: مشتق $F(g(x))+k$ برابر است با

$$g'(x)F'(g(x)) = g'(x)f(g(x))$$

مثال ۲۱:

$$\int x^{3}\sqrt{x^{4}+5}dx = \int \frac{1}{4}(4x^{3})\sqrt{x^{4}+5}dx$$
$$= \frac{1}{4}\int(4x^{3})\sqrt{x^{4}+5}dx$$
$$= \frac{1}{4} \times \frac{2}{3}(x^{4}+5)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$=\frac{۱}{۶}\sqrt{(x^۴+۵)^۳}+k$$

و

$$\int x^۲\cos x^۳dx=\int\frac{۱}{۳}(۳x^۲)\cos x^۳dx$$

$$=\frac{۱}{۳}\sin x^۳+k$$

تمرین‌ها

۱ــ برای هریک از تابع‌های زیر، تابع اولّیه‌ای را پیدا کنید که نمودار آن از نقطه‌ی داده شده بگذرد.

الف) $f(x)=۳$ از مبدأ مختصات

ب) $f(x)=\sqrt{x}$ از (۲و۱)

ج) $f(x)=\sin x$ از (۲ و ۰)

۲ــ تابع اولّیه‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\int\frac{۱}{\sqrt{x}}dx$

ب) $\int(x^۳+۵\sqrt{x}-\frac{۲}{x^۳})dx$

ج) $\int(t^{\frac{۳}{۲}}+t^{-\frac{۳}{۲}})dt$

د) $\int(۵\sin\theta-۴\cos\theta)d\theta$

۳ــ انتگرال‌های معین زیر را پیدا کنید :

الف) $\int_{\frac{\pi}{۶}}^{۰}(\sin x+۲\cos x)dx$

ب) $\int_{۱}^{۲}\sqrt{x}dx$

۴ــ مقدار متوسط تابع $V(x)=\frac{۶}{x^۲}$ در بازه‌ی $[۱,c]$ برابر ۱ است. مقدار c را پیدا کنید.

۵ــ تابع اولّیه‌های زیر را به‌دست آورید :

الف) $\int x(x^۲+۳)^۲dx$

ب) $\int x^۲\sin(x^۳+۵)dx$

ج) $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$

۶ــ با استفاده و بدون استفاده از قضیه‌ی ۱۰، $\int ۴x(x^۲+۱)dx$ را به‌دست آورید.

۷ــ الف) نشان دهید که $\dfrac{(\frac{x^4}{4})+6x}{(\frac{x^3}{3})}$ تابع اوّلیه‌ی تابع $\dfrac{x^3+6}{x^2}$ نیست.

ب) تابع اوّلیه‌ی $\dfrac{x^3+6}{x^2}$ را به‌دست آورید.

۸ــ نشان دهید که یکی از توابع اوّلیه‌ی تابع $\dfrac{2}{1+4t^2}$، تابع $\operatorname{Arc}\tan(2t)$ است.

۹ــ دو نوع هزینه برای حفاری چاه نفت وجود دارد، هزینه‌های ثابت که مستقل از مقدار حفاری است و هزینه‌های کناری که افزایش مقدار هزینه را با حفر ۱ متر اضافه تر در نظر می‌گیرد. این هزینه‌ها مشترکاً هزینه‌ی کلی برابر C را به‌دست می‌دهند. اگر هزینه ثابت برابر ۱۰۰۰۰ و $C'(x)=4000+10x$، برحسب میلیون ریال بر متر، وقتی که x عمق چاه حفاری شده است، باشد. مطلوب است هزینه‌ی کلی چاهی به عمق ۱۰۰ متر.

۱۰ــ با استفاده از مفهوم انتگرال معین حدود زیر را به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{n}{n^2+1}+\dfrac{n}{n^2+4}+\dfrac{n}{n^2+9}+\cdots+\dfrac{n}{2n^2}\right)$

ب) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\pi}{n}\left(\sin\dfrac{\pi}{n}+\sin\dfrac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\dfrac{n\pi}{n}\right)$

مسائل تکمیلی

۱ــ چند جمله‌ی اول هریک از دنباله‌های زیر را نوشته ثابت کنید که این دنباله‌ها واگرا هستند.

الف) $\left\{\dfrac{n+(-۱)^n n}{n+۱}\right\}$ ب) $\left\{n^{(-۱)^n}\right\}$

۲ــ جمله‌ی اول یک دنباله $a_۱=۱$ و برای هر $n\in\mathbb{N}$ ، $a_{n+۱}=۲a_n+۳$ ، چند جمله‌ی اول این دنباله را نوشته، ثابت کنید $a_n=۲^{n+۱}-۳$. آیا این دنباله همگراست؟

۳ــ در مورد کرانداربودن و یکنوابودن هریک از دنباله‌های زیر بحث کنید :

الف) $\left\{n^۲+\cos\dfrac{\pi}{n}\right\}$ ب) $\left\{(۲-\dfrac{۱}{۲^n})^۲\right\}$ ج) $\{a_n\}$

که

$$a_n=\begin{cases}۱ & \text{فرد } n\\ -\dfrac{\pi}{۲} & \text{زوج } n\end{cases}$$

۴ــ نشان دهید دنباله های $\{a_n\}$ که

الف) $a_۱=۱$, $a_{n+۱}=\sqrt{۲a_n}$

ب) $a_۱=۱$, $a_{n+۱}=\dfrac{۲(a_n+۱)}{۳}$

کراندار و صعودی‌اند. حدّ هریک را به‌دست آورید.

۵ــ با استفاده از تعریف ثابت کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^۲-۶}{x-۲}=۳$.

ب) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۲+۲}{۵x-۸}=۳$.

ج) $\lim\limits_{x\to ۲^+}\dfrac{x+۴}{[-x]-۳}=-۱$.

۶ــ در مورد حدّ تابع $[x]$ در نقطه ی a بحث کنید (حالات $a \in \mathbb{Z}$ و $a \notin \mathbb{Z}$ را به‌طور جداگانه بررسی کنید).

۷ــ ثابت کنید دنباله‌ی $\left\{\left[1+\frac{1}{n}\right]\right\}$ حد دارد، حال آن‌که دنباله‌ی $\left\{\left[1+\frac{(-1)^n}{n}\right]\right\}$ حد ندارد.

۸ــ ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$.

۹ــ ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{\sin x}=0$.

۱۰ــ تابع $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2nx}{1-nx}$ در چه نقاطی ناپیوسته است؟ (دقت کنید که برای هر $x \in R$، دنباله‌ی $\left\{\frac{2nx}{1-nx}\right\}$ همگراست، حدّ این دنباله مقدار تابع در نقطه‌ی x است.) آیا این ناپیوستگی رفع‌شدنی است؟

۱۱ــ اگر

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{گویا } x \\ 0 & \text{اصم } x \end{cases}$$

در مورد پیوستگی f و ترکیب f با خودش (fof) در نقطه‌های مختلف بحث کنید.

۱۲ــ اگر $f(x)=\frac{x+1}{x-4}(x\neq 4)$ و $g(x)=\frac{x^2-5}{x-2}(x\neq 2)$، در مورد پیوستگی fog در نقاط $x=1$ و $x=4$ بحث کنید.

۱۳ــ در مورد پیوستگی تابع $f(x)=[x]^2-[x]$ در نقطه‌ی $n \in \mathbb{Z}$، بحث کنید.

۱۴ــ مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در بازه‌ی $[-1, 1]$ پیوسته باشد.

$$f(x)=\begin{cases} a-x^3 & -1\leq x<0 \\ [x]+1 & 0\leq x<\frac{1}{2} \\ 2x+b & \frac{1}{2}\leq x\leq 1 \end{cases}$$

۱۵ــ اگر تابع f در بازه‌ی $[0, 1]$ پیوسته و برای هر $x\in[0, 1]$، $0\leq f(x)\leq 1$. نشان دهید که برای حداقل یک مقدار $c\in[0, 1]$

$$f(c)=c$$

۱۶ــ اگر یک تابع زوج در نقطه‌ی ۰ از راست پیوسته باشد، نشان دهید که از طرف چپ هم درنقطه‌ی ۰ پیوسته است. (تابع f زوج است اگر برای هر $x \in D_f$ ، $f(-x)=f(x)$.)

۱۷ــ اگر تابع فردی در نقطه‌ی ۰ از راست پیوسته باشد، نشان دهید $f(0)=0$ و تابع در این نقطه پیوسته است (تابع f فرد است اگر برای هر $x \in D_f$ ، $f(-x)=-f(x)$.)

۱۸ــ حدهای زیر را به‌دست آورید.

الف)

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}-\frac{x}{x-1}\right)$$

ب)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x+4}$$

ج)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

۱۹ــ ثابت کنید که اگر $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=L$ ، آنگاه

$$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{1}{t}\right)=L$$

۲۰ــ ثابت کنید که هرچند جمله‌ای با درجه‌ی فرد، حتماً یک صفر دارد.

۲۱ــ با استفاده از قضیه‌ی دوجمله‌ای

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots+nab^{n-1}+b^n$$

اثباتی برای مشتق‌پذیری تابع $f(x)=x^n$ در نقطه‌ی $a\in\mathbb{R}$ ارائه دهید.

۲۲ــ فرض کنید

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{x}} & 0<x<a\\[2mm] \dfrac{1}{4}x\sqrt{x} & a\le x\end{cases}$$

الف) برای چه مقدارِ a تابع f روی $(0,\infty)$ پیوسته است؟

ب) آیا f در مقدار به‌دست‌آمده در قسمت الف مشتق‌پذیر است؟

۲۳ـ برای چه مقدار k و b تابع

$$f(x)=\begin{cases} b+|x| & x<۱ \\ k^{۲}\sqrt{x} & x\geq ۱ \end{cases}$$

در نقطه‌ی ۱ مشتق‌پذیر است.

۲۴ـ آیا می‌توان a را چنان تعیین کرد که تابع f در $\mathbb{R}$ مشتق‌پذیر باشد؟

الف) $$f(x)=\begin{cases} ax-۳ & x< ۱ \\ x^{۲}+a & x\geq ۱ \end{cases}$$

ب) $$f(x)=\begin{cases} ax+۱ & x\leq ۱ \\ x^{۲} & x>۱ \end{cases}$$

۲۵ـ نشان دهید که تابع $y=\sqrt{۱+x}$ در معادله‌ی

$$۲(۱+x)y'=y$$

که اصطلاحاً یک معادله‌ی دیفرانسیل نامیده می‌شود، صدق می‌کند.

۲۶ـ درصورتی که بدانیم برای $x\neq ۱$

$$۱+x+x^{۲}+\cdots+x^{n}=\frac{x^{n+۱}-۱}{x-۱}$$

با استفاده از مشتق، فرمول‌هایی برای مجموع‌های زیر به‌دست آورید.

الف) $۱+۲x+۳x^{۲}+\cdots+nx^{n-۱}$

ب) $۱^{۲}x+۲^{۲}x^{۲}+۳^{۲}x^{۳}+\cdots+n^{۲}x^{n}$

۲۷ـ نشان دهید که تابع $y=f(x)=-\frac{۱}{۳}x^{۳}-\frac{۳}{۲}x^{۲}+x$ در معادله‌ی دیفرانسیل

$$y''-y'=x^{۲}+x-۴$$

صدق می‌کند.

۲۸ـ مشتق مرتبه‌ی nام هریک از تابع‌های زیر را بنویسید.

الف) $f(x)=\frac{۱}{۱-x}$

ب) $g(x)=\frac{۲x}{۱-x^{۲}}$

۲۹ـ حاصل هریک از حدهای زیر را به‌دست آورید :

الف) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos 5t-\cos t}{\cos 6t-\cos 2t}$

ب) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\cos^2 2t-\cos^2 t}{2\cos 4t\sin t+\sin 3t}$

۳۰ـ مقدار هریک از حدهای زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $\lim\limits_{t\to \pi}\sin 2t\cot t$ ب) $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin(t-\frac{\pi}{3})}{1-2\cos t}$

ج) $\lim\limits_{t\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin 2t-\cot 2t-1}{\cos t-\sin t}$ د) $\lim\limits_{t\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2 t}-\dfrac{1}{4\sin^2 \frac{t}{2}}\right)$

۳۱ـ a و b را چنان تعیین کنید که تابع زیر در هرنقطه $t\in \mathbb{R}$ پیوسته باشد.

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{a\cos 2t}{\sin t-\cos t} & t\neq k\pi+\dfrac{\pi}{4}\\[2ex] [2\sin t]+b & t=k\pi+\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

۳۲ـ از رابطه‌ی $y=\sin(t+y)$ مقدار y' را به‌دست آورید.

۳۳ـ a و b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در نقطه‌ی $t=\pi$ مشتق‌پذیر باشد.

$$f(t)=\begin{cases}a\sin t+3\cos t & t<\pi\\[2ex] b\sin\dfrac{t}{2}+2\cos\dfrac{t}{2} & t\geq\pi\end{cases}$$

۳۴ـ نقاط ماکسیمم و مینیمم توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y=3x^2-x^3+1$

ب) $y=x-1+\dfrac{1}{x+1}$

۳۵ـ ثابت کنید دو عدد حقیقی که دارای مجموع ثابتی هستند، هنگامی دارای حاصل‌ضرب ماکسیمم‌اند که با هم برابر باشند.

۳۶ــ نقاط ماکسیمم و مینیمم توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $y = \dfrac{x}{x^۲ + ۱}$

ب) $y = \dfrac{\cos x}{۲(\cos x - ۲)}$

ج) $y = \sqrt[۳]{x^۳ - ۶x^۲}$

۳۷ــ جهت تقعر در بازه‌های مختلف و نیز نقاط عطف توابع زیر را در صورت وجود پیدا کنید.

الف) $f(x) = x + x^{\frac{۲}{۳}}$

ب) $f(x) = \begin{cases} x^۲ & x < ۰ \\ \sqrt{x} & x \geq ۰ \end{cases}$

۳۸ــ نمودار دو منحنی $y = ۲\sin^۲ x$ و $y = \cos ۲x$ را در بازه‌ی $[۰, ۲\pi]$، روی یک دستگاه مختصات، رسم کرده زاویه‌ی بین دو منحنی را حساب کنید. (زاویه‌ی بین دو منحنی زاویه‌ی بین خطوط مماس بر دو منحنی در نقطه‌ی تقاطع آن دو منحنی است).

۳۹ــ با استفاده از روش نیوتن کوچک‌ترین ریشه‌ی مثبت معادله‌ی $۲\sin x - x = ۰$ را تا دو رقم اعشار بیابید.

۴۰ــ مینیمم مقدار تابع $f(x) = x^۴ - ۲x^۲ - ۸x + ۱$ روی R در چه نقطه‌ای قرار دارد؟ (با دقت دو رقم اعشار) برای یافتن این مقدار از هریک از دو روش نصف‌کردن و یا نیوتن می‌توان استفاده کرد.

۴۱ــ با استفاده از مساحت مثلث حادث از ناحیه‌ی زیر خطی که از مبدأ مختصات و نقطه‌ی $(۱, \sin ۱)$ می‌گذرد، یک کران پایین برای انتگرال زیر به‌دست آورید.

$$\int_۰^۱ \sin x dx$$

۴۲ــ نمودار سهمی $y = x(\pi - x)$ و منحنی $y = \sin x$ را رسم کرده، محل تلاقی آن‌ها را به‌دست آورید و پس از آن مساحت بین این دو نمودار را محاسبه کنید.

مراجع

[1] D. Hughes-Hallett, A.M. Gleason, et al, Calculus, (Preliminary Edition), John Wiley, (1992).

[2] L. Leithold, The Calculus with Analytic Geometry, (Fith Edition), Harper & Row (1986).

ترجمه‌ی چاپ چهارم این کتاب را مرکز نشر دانشگاهی منتشر کرده است.

[3] R.A. Silverman, Calculus with Analytic Geometry, Prentice- Hill (1985).

ترجمه‌ی این کتاب را انتشارات ققنوس منتشر کرده است.

[4] H.Anton, Calculus with Analytic Geometry, (Third Edition), John Wiley, (1988).

معلمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را دربارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران ـ صندوق پستی ۳۶۳ ۱۵۸۵۵ـ گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (**Email**)

talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی