بسم الله الرحمن الرحیم

حسابان

سال سوم آموزش متوسطه

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

۱۳۹۰

محتوای این کتاب تا پایان سال تحصیلی ۹۲-۱۳۹۱ تغییر نخواهد کرد.

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

برنامه‌ریزی محتوا و نظارت بر تألیف : **دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی**

نام کتاب : **حسابان ـ ۲۵۸/۱**

اعضای شورای برنامه‌ریزی ریاضی : **بهمن اصلاح‌پذیر، دکتر علی ایرانمنش، امین باشی‌زاده، ناهید بریری، دکتر محمد حسن بیژن‌زاده، طیبه حمزه‌بیگی، محسن جمالی، اصغر جوادی، مینو رحیمی، حسین رودسری، دکتراحمد شاهورانی، جعفر شهاب‌زاده، دکتر وحید عالمیان، سعید قریشی، سمیه سادات میر معینی و دکتر محمدکاظم نائینی**

مؤلفان : **بهمن اصلاح‌پذیر، دکتر ناصر بروجردیان، دکتر ابراهیم ریحانی، محمد تقی طاهری تنجانی و دکتر وحید عالمیان**

آماده‌سازی و نظارت بر چاپ و توزیع : **ادارهٔ کلّ چاپ و توزیع کتاب‌های درسی**

تهران :خیابان ایرانشهرشمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)

تلفن : ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار : ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی : ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹،

وب سایت : **www.chap.sch.ir**

مدیر امور فنی و چاپ : **سید احمد حسینی**

مدیر هنری : **مجید ذاکری یونسی**

طراح گرافیک و جلد : **محمد عباسی**

رسام : **مریم دهقان‌زاده**

صفحه‌آرا : **مریم نصرتی**

حروفچین : **زهرا ایمانی نصر**

مصحح : **سیف‌الله بیک‌محمددلیوند، رضا جعفری**

امور آماده‌سازی خبر : **ناهید خیام باشی**

امور فنی رایانه‌ای : **حمید ثابت کلاچاهی، فاطمه رئیسیان فیروزآباد**

ناشر : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران : تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)**

تلفن :۵ ـ ۴۴۹۸۵۱۶۱ ، دورنگار :۴۴۹۸۵۱۶۰ ، صندوق پستی :۱۳۴۴۵/۶۸۴

چاپخانه : **شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»**

سال انتشار و نوبت چاپ : **چاپ دوم ۱۳۹۰**

ISBN 964-05-1837-9 شابک ۹-۱۸۳۷-۰۵-۹۶۴

اگر بخواهید بی‌خوف و هراس در مقابل باطل بایستید و از حق دفاع کنید و ابر قدرت‌ها و سلاح‌های پیشرفتهٔ آنان و شیاطین و توطئه‌های آنان در روح شما اثر نگذارد و شما را از میدان به در نکند خود را به ساده زیستن عادت دهید و از تعلق قلب به مال و منال و جاه و مقام بپرهیزید.

امام خمینی (ره)

فهرست

معلمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را دربارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران ـ صندوق پستی ۴۸۷۴/۱۵۸۵۵ ـ گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر برنامه‌ریزی و تألیف کتاب‌های درسی

سخنی با معلم

کتاب حاضر با کتاب پیشین از لحاظ روش‌های آموزشی تفاوت‌های مهمی دارد. روش آموزش اصلی این کتاب اصطلاحاً «روش حل مسئله» نام دارد. منظور از روش حل مسئله آن است که برای آموزش مفاهیم جدید، مسئله‌ای طرح کنید که در حل آن، مفاهیم موردنظر حضور داشته باشند و دانش‌آموزان غیر مستقیم آن مفاهیم را تجربه کنند. سپس با یک نامگذاری و کلیت دادن به آن، مفهوم جدید رسماً ارائه می‌شود.

به همین خاطر در این کتاب علامت «حل یک مسئله» بسیار رخ می‌دهد که در اکثر آن‌ها هدف، آموزش یک مفهوم جدید است. در این‌گونه موارد معمولاً یک فعالیت به‌همراه حل یک مسئله وجود دارد که انجام آن فعالیت چگونگی حل آن مسئله را روشن می‌سازد.

در کتاب مسائلی خاص و فعالیت‌های خاصی برای آموزش مفاهیم ارائه شده است، اما شما می‌توانید با توجه به تجربیات خود و دانش‌آموزانی که با آن‌ها روبه‌رو هستید مسئله‌ای دیگر یا فعالیتی دیگر طرح کنید، اما نهایتاً سعی کنید روش آموزشی کتاب را رعایت کنید و ارزشیابی‌های مستمر و نهایی خود را با اهداف موضوعی و مهارتی کتاب منطبق سازید.

از لحاظ موضوعی از حدود موضوعات مطرح شده در کتاب خارج نشوید و سطح پیچیدگی مسائلی که مطرح می‌کنید بیش‌تر از پیچیدگی‌های مثال‌ها و مسائل در کتاب نباشد. مثلاً در کتاب مفهوم تابع و دامنه و بُرد و . . . مطرح شده است و می‌توان نسبت به آن‌ها مسائل پیچیده بسیاری مطرح کرد، اما هدف این کتاب پرداختن به این‌گونه پیچیدگی‌ها نیست و لازم است که فقط در همان سطحی مسائل طرح شوند که در کتاب به‌صورت مثال یا مسئله طرح شده است.

هدف اصلی کتاب درک معنادار از مفاهیم ریاضی، توانایی به‌کارگیری ریاضی در حل مسائل واقعی، یادگیری استراتژی‌های حل مسئله، توانایی استدلال و مباحثه و موشکافی است. سعی کنید طرح درس‌های شما به‌گونه‌ای باشد که با طرح یک مسئله، مباحثه‌ای را در میان دانش‌آموزان نسبت به آن ایجاد کنید. مشابه این مباحثات در کتاب آمده است که می‌تواند الگویی برای مباحثه در کلاس باشد.

در عمل مباحثه اهداف بسیاری برآورده می‌شود و فواید بسیاری در آن است و روش مباحثه‌ای در آموزش، روشی است با آثار آموزشی و اجتماعی عالی. در این روش توانایی‌های زیر تقویت می‌شوند و به‌کار می‌افتند.

۱ــ همکاری اجتماعی

۲ــ دقت در بیان خود و روشن ساختن افکار خود

۳ــ سعی در درک دیگران

۴ــ تجزیه و تحلیل و موشکافی

۵ــ برقرار کردن ارتباطات منطقی بین جملات و داده‌ها

۶ــ نقادی دیگران و نقدپذیر شدن

۷ــ استفاده از تجربه دیگران و اصلاح خود

۸ــ یافتن نقاط ضعف افکار خود و دیگران

آموزش استراتژی‌های حل مسئله نیز از اهداف کتاب است که هیچ‌گاه به‌طور مستقیم نباید انجام شود. بلکه باید دانش‌آموزان با تجربه خود به آن‌ها دست یابند. بنابراین، با طرح مسائل مناسب و راهنمایی‌های مناسب، معلمین باید دانش‌آموزان را دچار این تجربه‌ها کنند و هر بار با تکرار آن‌ها استراتژی‌های حل مسئله را در درون آن‌ها ملکه کنند. نمونه‌هایی از این آموزش‌ها در کتاب طراحی شده است که در آن‌ها استفاده از تجربیات گذشته، بررسی مسئله در حالت‌های ساده، رسم شکل، آموزش داده شده است.

ارتباط با محیط پیرامونی یکی از اصولی است که در نوشتن این کتاب مورد توجه قرار داشته است. در اکثر موارد مسئله طرح شده در دنیای غیرریاضی بوده است که ابتدا با توصیف مناسب به یک مسئله ریاضی تبدیل می‌شود، سپس در دنیای ریاضی حل می‌شود و نهایتاً جواب‌های به‌دست آمده باید در دنیای واقعی تفسیر شوند. این روند و تکرار آن در جاهای دیگر از اهداف مهم این کتاب است و لازم است معلمین در طرح درس‌های خود به این‌گونه مسائل توجه جدی داشته باشند. صرف محاسبات ریاضی هرچقدر هم که پیچیده باشد، نشان‌دهنده درک واقعی از ریاضی نیست. دیدن ریاضی در طبیعت و توانایی به‌کارگیری ریاضی در حل مسائل واقعی، موجب می‌شود تا دانش‌آموزان درک صحیح‌تری از ریاضی بیابند و نگرش مثبتی نسبت به ریاضی پیدا کنند.

در ارزشیابی از دانش‌آموزان به اهداف اصلی کتاب توجه داشته باشید. شما باید بسنجید که دانش‌آموزان تا چه حد توانایی مدلسازی، حل مسئله، تفسیر جواب و محاسبات را نسبت به موضوعات مختلفی که در کتاب طرح شده است یافته‌اند. این ارزشیابی باید کاملاً در سطحی که کتاب به آن پرداخته است صورت بگیرید.

در خاتمه به مدیران مدارس و تمام کسانی که در پیاده‌سازی آموزش نقش دارند توصیه می‌شود که به این تغییرات در نگرش به ریاضی و روش‌های آموزش ریاضی اهمیت بدهند و معلمین را در پیاده‌سازی هرچه بهتر کتاب یاری دهند. درغیر این صورت نمی‌توان انتظار یک تحول آموزشی در یادگیری ریاضی را داشت.

سخنی با دانش‌آموز

شما اکنون ۱۰ سال است که وارد مدرسه شده‌اید و درباره ریاضی مطالعه کرده‌اید. حتماً متوجه شده‌اید که فقط دروسی را توانسته‌اید به‌خوبی فراگیرید که فعالانه در مورد آن‌ها تفکر کرده‌اید و درباره آن با دیگران مباحثه کرده‌اید و نسبت به آن محاسباتی را انجام داده‌اید. این تجربه گران‌قدری است که درک و یادگیری همواره با شرکت فعالانه خود دانش‌آموز و تجربه کردن و تجزیه و تحلیل کردن و مباحثه‌کردن و موشکافی کردن و مرتبط کردن مفاهیم جدید با مفاهیم آشنا صورت می‌پذیرد.

روش آموزشی این کتاب بر مبنای عمل فعالانه شما پی‌ریزی شده است. گمان نکنید که با حفظ‌کردن برخی روش‌ها و راه‌های محاسباتی می‌توانید این کتاب را یاد بگیرید. در این کتاب فعالیت‌های زیادی طراحی شده است که موجب ایجاد یک تجربه مهم ریاضی در شما می‌شود. اگر این تجربیات را به خوبی انجام دهید، درک مفاهیم جدید برای شما بسیار آسان خواهد شد.

هدف این کتاب آن است که شما بتوانید، خوب ببینید، به‌درستی بیان کنید، مناسب استدلال کنید و خوب نتیجه‌گیری کنید.

تمامی این‌ها را باید در حل مسائل انجام دهید. شما در هرجای ریاضی با مسئله‌ای روبه‌رو هستید که باید آن را حل کنید. در این کتاب علامت «حل یک مسئله» را بسیار مشاهده خواهید کرد، زیرا هر مفهوم جدیدی با بروز یک مسئله و سعی در حل آن به‌وجود می‌آید. بنابراین شما باید بتوانید با یک مسئله درست مواجه شوید و تجربیات خود را در حل آن به‌درستی به‌کار برید.

علاوه بر این‌ها باید بتوانید برای پاسخ به سؤالات بیشماری که در ذهن شما ایجاد می‌شود، آن‌ها را به مسائل مناسبی تبدیل کنید و سپس سعی در حل آن‌ها نمایید، یافتن این توانایی‌ها کمک زیادی به توانمند شدن در حل مسائل و مشکلات زندگی شما خواهد کرد و این همان دلیلی است که باعث می‌شود که ما باید ریاضی را بیاموزیم.

ترجمه فارسی دیباچه مفتاح الحساب
بسم الله الرحمن الرحیم
ستایش خداوندی را سزاست که در آفرینش آحاد یگانه است، و در به هم پیوستن اعداد گوناگون بی‌همتا است. و درود بر بهترین آفریده او محمد(ص) که والاترین شفاعت‌کننده روز رستاخیز است، و بر خاندان او و فرزندانش که راه‌های رهایی و رستگاری را رهنموند. اما بعد......

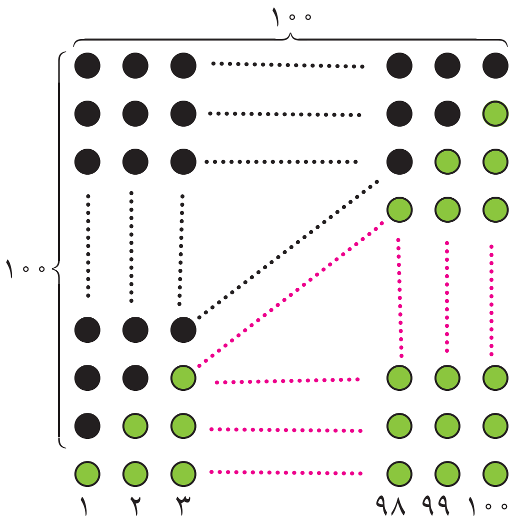
محاسبات جبری، معادلات و نامعادلات

۱. مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
۲. تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری
۳. بسط دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی
۴. بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک چند جمله‌ای‌ها
۵. معادلات
۶. ماکزیمم و مینیمم توابع درجه دوم
۷. معادلات شامل عبارات گویا
۸. معادلات شامل عبارات گنگ
۹. حل معادلات به روش هندسی
۱۰. قدرمطلق و ویژگی‌های آن
۱۱. معادلات قدرمطلقی
۱۲. نامعادلات ــ نامعادلات قدرمطلقی
۱۳. حل نامعادلات از طریق نموداری (هندسی)

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

گاوس یکی از دانشمندان ریاضی قرن هیجدهم است که داستان جالبی در زمان مدرسه خود دارد. یک روز معلم برای سرگرم کردن دانش‌آموزان از آن‌ها می‌خواهد اعداد ۱ تا ۱۰۰ را با هم جمع بزنند و نتیجه را به‌دست آورند. در حالی که دانش‌آموزان مشغول این کار کسل کننده بودند، گاوس نتیجه را به‌سرعت به‌دست می‌آورد و به‌معلم ارائه می‌کند.

آیا شما هم می‌توانید این عمل جمع را به‌سرعت انجام دهید؟ شکل مقابل می‌تواند ایده‌ای برای این کار به شما بدهد.



بحث در کلاس

از شکل بالا چگونه می‌توان استفاده کرد و جمع اعداد از ۱ تا ۱۰۰ را به‌دست آورد؟

تمرین در کلاس

۱ــ با استفاده از تجربیاتی که در بالا به‌دست آورده‌اید برای یک عدد طبیعی n نشان دهید :

$$۱+۲+\cdots+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

۲ــ اگر جمله اول یک دنباله حسابی a و قدر نسبت آن d باشد، جملات آن به شکل زیرند :

$$a, a+d, a+۲d, \ldots, a+nd, \ldots$$

نشان دهید مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $\frac{n}{۲}(۲a+(n-۱)d)$.

۳ــ نشان دهید $۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=n^۲$.

بحث در کلاس

می‌گویند یک روز حاکم شهری خواست به‌مخترع شطرنج جایزه‌ای بدهد و از او خواست خودش جایزه‌ای برای خودش تعیین کند. شطرنج ۶۴ خانه دارد و مخترع شطرنج گفت در خانه اول یک دانه گندم بگذارید و در خانه دوم ۲ گندم بگذارید و در خانه سوم ۴ گندم بگذارید و به‌همین ترتیب در هر خانه دو برابر خانه قبل گندم بگذارید و نهایتاً کل گندم‌ها را به من بدهید. اگر هر دانه گندم یک گرم باشد، چند گرم گندم جایزه مخترع شطرنج خواهد شد؟

این مسئله به‌نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی* با روش خاص خود آن را حل کرده است. شما هم سعی کنید راه حلی برای آن بیابید.

حل یک مسئله

طول ضلع مربعی ۱ متر است. ابتدا نیمی‌از مساحت آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی‌از مساحت باقی‌مانده را رنگ می‌کنیم. به‌همین ترتیب در هر مرحله نیمی‌از مساحت باقی‌مانده از مرحله قبل را رنگ می‌زنیم. پس از چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

آن مقدار از مساحت مربع (بر حسب متر مربع) که در هر مرحله رنگ می‌شود یک دنباله هندسی به‌شکل زیر تشکیل می‌دهد.

$$\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۸},\dots,(\frac{۱}{۲})^n,\dots$$

بنابراین آن مقدار از مساحت مربع که پس از n مرحله رنگ می‌شود برابر است با

$$S_n=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\dots+(\frac{۱}{۲})^n$$

$\frac{۱}{۲}S_n$ شباهت زیادی با S_n دارد. از همین نکته برای محاسبه S_n استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۲}S_n=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\dots+(\frac{۱}{۲})^n+(\frac{۱}{۲})^{n+۱}$$
$$=-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}+\dots+(\frac{۱}{۲})^n+(\frac{۱}{۲})^{n+۱}=-\frac{۱}{۲}+S_n+(\frac{۱}{۲})^{n+۱}$$

این تساوی معادله‌ای بر حسب S_n است و از آن نتیجه می‌شود، $S_n=۱-(\frac{۱}{۲})^n$.

حال باید نامعادله $\frac{۹۹}{۱۰۰}\leq ۱-(\frac{۱}{۲})^n$ را حل کنیم.

$$\frac{۹۹}{۱۰۰}\leq ۱-(\frac{۱}{۲})^n \Rightarrow ۹۹\leq ۱۰۰-\frac{۱۰۰}{۲^n} \Rightarrow \frac{۱۰۰}{۲^n}\leq ۱ \Rightarrow ۱۰۰\leq ۲^n$$

* ترجمه میزان‌الحکمه ص ۷۷

حداقل مقدار n که در این نامعادله صدق می‌کند ۷ می‌باشد، یعنی پس از مرحله هفتم حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است.

فعالیت ۱

۱ــ برای یک عدد طبیعی n و یک عدد حقیقی q قرار دهید $S=۱+q+q^۲+\cdots+q^n$. با مقایسه S و qS نتیجه بگیرید :

$$(۱-q)S=۱-q^{n+۱}$$

۲ــ اگر $q\neq ۱$ نشان دهید :

$$۱+q+q^۲+\cdots+q^n=\frac{۱-q^{n+۱}}{۱-q}$$

۳ــ اگر جمله اول یک دنباله هندسی برابر a و قدر نسبت آن برابر q باشد، جملات این دنباله به شکل زیرند.

$$a, aq, aq^۲, \ldots, aq^n, \ldots$$

نشان دهید در حالت $q\neq ۱$ مجموع n جمله اول این دنباله برابر است با $a\dfrac{۱-q^n}{۱-q}$

۴ــ درحالت $|q|<۱$، مجموع n جمله اول دنباله هندسی بالا با افزایش n به چه عددی نزدیک می‌شود؟

با انجام فعالیت بالا قضیه زیر به‌دست می‌آید.

قضیه :

در یک دنباله هندسی نامتناهی با جمله اول a و قدر نسبت q که $|q|<۱$ ، مجموع تمام جملات آن برابر است با $\dfrac{a}{۱-q}$.

مثال

توپی در اختیار داریم که از هر ارتفاعی که رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. فرض کنید این توپ را از زمین به‌هوا پرتاب کرده‌ایم تا به‌ارتفاع ۵ متری برسد. می‌خواهیم بدانیم پس از شروع پرتاب تا زمان ایستادن، این توپ چقدر مسافت طی می‌کند؟

ارتفاع توپ قبل از n امین برخورد با زمین را A_n می‌نامیم. روشن است که

$$A_۱=۵, A_۲=\frac{۵}{۴}, A_۳=\frac{۵}{۱۶}, \cdots, A_n=\frac{۵}{۴^{n-۱}}, \cdots$$

بنابراین مسافت طی شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین عبارت است از :

$$۱۰, \frac{۱۰}{۴}, \frac{۱۰}{۱۶}, \dots, \frac{۱۰}{۴^{n-۱}}, \dots$$

کل مسافت طی شده توسط توپ برابر است با مجموع جملات دنباله بالا. اما دنباله بالا یک دنباله هندسی نامتناهی با جمله اول ۱۰ و قدر نسبت $\frac{۱}{۴}$ است و مجموع جملات آن برابر است با

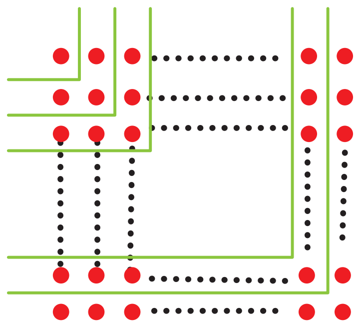
$$\frac{a}{۱-q} = \frac{۱۰}{۱-\frac{۱}{۴}} = \frac{۴۰}{۳} \approx ۱۳/۳۳$$

یعنی توپ تقریباً ۱۳/۳۳ متر تا توقف کامل طی می کند.

مسائل

۱ــ در دنباله حسابی ...,۱۱ ,۸ ,۵ حداقل چند جمله آن را باید جمع کنیم تا حاصل از ۵۰۰ بیشتر شود؟

۲ــ به کمک شکل زیر نتیجه بگیرید $۱ + ۳ + ۵ + \cdots + (۲n - ۱) = n^۲$.

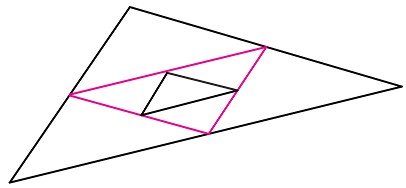


۳ــ در مسئله شطرنج نشان دهید جایزه مخترع شطرنج بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن گندم خواهد شد.

۴ــ علی می‌خواهد پول‌های خود را پس‌انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می‌دهد و قرار می‌گذارد هر روز ۰/۹ پول واریزی در روز قبل را در صندوق قرار دهد. پس از ۵۰ روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او هیچ‌گاه از ۱۰۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

۵ــ برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌هایی محافظتی ساخته شده‌است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۹ درصد کاهش یابد؟

۶ــ یک مثلث با محیط P و مساحت S در نظر بگیرید. وسط‌های اضلاع آن را به‌هم وصل کنید و مثلث کوچکتر جدیدی بسازید. این عمل را مجدداً روی مثلث کوچکتر انجام دهید. این عملیات را به‌طور متوالی ادامه دهید.



مجموع محیط مثلث‌های به‌دست آمده (با احتساب مثلث اولیه) چقدر است؟ مجموع مساحت مثلث‌های به‌دست آمده چقدر است؟

تقسیم چند جمله‌ای‌ها و بخش‌پذیری

در سال‌های پیش دیدیم که با تقسیم یک چندجمله‌ای $P(x)$ بر یک چندجمله‌ای ناصفر $B(x)$ یک خارج‌قسمتِ $Q(x)$ و باقی‌مانده $R(x)$ به‌دست می‌آید که $R(x)$ برابر صفر است یا درجه آن از درجهٔ $B(x)$ کمتر خواهد بود و می‌توان نوشت :

$$P(x) = B(x)Q(x) + R(x)$$

این تساوی را **رابطهٔ تقسیم** می‌نامند.

تمرین در کلاس

۱ــ چندجمله‌ای $P(x)=۴x^۴+۲x^۳+۱$ را بر چندجمله‌ای $B(x)=x^۲-۱$ تقسیم کنید.

۲ــ مقسوم، مقسوم علیه، خارج قسمت و باقی‌مانده را مشخص کنید.

۳ــ رابطهٔ تقسیم را بنویسید و به‌کمک آن مقدار $P(۱)$ و $P(-۱)$ را به‌دست آورید.

اگر باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $B(x)$ صفر باشد، نتیجه می‌شود، $P(x) = B(x)Q(x)$

در این‌حالت گوییم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $B(x)$ بخش‌پذیر است.

مثال

چندجمله‌ای $x^۳+۱$ بر $x+۱$ بخش‌پذیر است، زیرا $x^۳+۱=(x+۱)(x^۲-x+۱)$.

فعالیت ۲

فرض کنید چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ تقسیم شده است و باقی‌ماندهٔ آن R باشد.

۱ــ رابطهٔ تقسیم را بنویسید.

۲ــ درجهٔ باقی‌ماندهٔ تقسیم چیست؟

۳ــ $P(a)$ را به‌دست آورید.

۴ــ اگر $P(a)$ صفر باشد، چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

از فعالیت بالا قضیه زیر به‌دست می‌آید.

قضیه :

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ همان $P(a)$ است. بنابراین اگر $P(a)$ صفر باشد، چندجمله‌ای $P(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است.

مثال

باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)=۲x^۸-۵x^۲+x+۳$ بر $x+۱$ را حساب می‌کنیم.

$x+۱$ را می‌توانیم به‌صورت $x-(-۱)$ بنویسیم، پس $P(-۱)$ را حساب می‌کنیم.

$$R=P(-۱)=۲(-۱)^۸-۵(-۱)^۲+(-۱)+۳=۲-۵-۱+۳=-۱$$

بحث در کلاس

چگونه می‌توانیم باقیمانده تقسیم یک چندجمله‌ای مانند $P(x)$ بر چندجمله‌ای $ax+b$ را به‌دست آوریم؟

تمرین در کلاس

الف) درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید :

۱ــ عبارت $۲+۵x-۳x^۲$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر است. ☐

۲ــ چندجمله‌ای x^n-a^n بر $x-a$ بخش‌پذیر است. ☐

۳ــ چندجمله ای x^n+a^n بر $x+a$ بخش‌پذیر است. ☐

۴ــ باقی‌ماندهٔ تقسیم $P(x)$ بر $ax+b$ برابر است با $P(-b)$. ☐

ب) باقی‌ماندهٔ تقسیم $۴x^۳-۲x+۱$ بر $۲x-۱$ را تعیین کنید.

فعالیت ۳

برای یک عدد حقیقی a و عدد طبیعی n عبارت $S=1+a+a^2+a^3+\dots+a^{n-1}$ را در نظر بگیرید.

۱ــ عبارت $aS-S$ را حساب کنید و اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\cdots+a^2+a+1)$$

۲ــ اگر n عددی فرد باشد، با تبدیل a به $-a$ نتیجه بگیرید :

$$a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+\cdots-a+1)$$

مثال

به کمک اتحادهای بالا عبارت‌های زیر را ساده می‌کنیم.

$$A=\frac{(x^5+1)(x-1)}{x^2-1} \quad , \quad B=\frac{(1+t+t^2+t^3+t^4)(1-t)}{t^{10}-1}$$

صورت و مخرج کسر A را تجزیه می‌کنیم.

$$A=\frac{(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)(x-1)}{(x+1)(x-1)}=x^4-x^3+x^2-x+1$$

برای ساده کردن B می‌توان نوشت :

$$B=\frac{1-t^5}{(t^5+1)(t^5-1)}=\frac{-1}{t^5+1}$$

تمرین در کلاس

به کمک اتحاد $a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+\cdots+a^2+a+1)$ اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

بسط دوجمله‌ای غیاث الدین جمشید کاشانی

در سال‌های قبل با محاسبه مربع و مکعب دوجمله‌ای‌ها آشنا شدید. در حالت کلی نیز می‌توان توان‌های طبیعی دوجمله‌ای‌ها را به‌دست‌آورد.

فعالیت ۴

به اتحادهای زیر و ضرایبی که در آن‌ها است توجه کنید.

۱	$(a+b)^0=1$
۱ ۱	$(a+b)^1=a+b$
۱ ۲ ۱	$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
۱ ۳ ۳ ۱	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
۱ ۴ ۶ ۴ ۱	$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱	$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
	....

۱ــ چه الگویی در توان‌های a و b و ضرایب آن‌ها می‌یابید؟

۲ــ با توجه به الگوی به‌دست آمده $(a+b)^6$ برابر چه عبارتی می‌شود؟

۳ــ تعداد جملات هر بسط با توان دو جمله‌ای چه رابطه‌ای دارد؟

هرعبارت به‌صورت $(a+b)^n$ را که در آن n یک عدد صحیح نامنفی است، **دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی** و بسط آن را به‌صورت چندجمله‌ای از a و b **بسط دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی** می‌نامند زیرا این دانشمند ایرانی از اولین کسانی بوده است که روی آن کار کرده است. این چندجمله‌ای دارای $n+1$ جمله است و هر جملهٔ آن به‌صورت مضربی از a^kb^{n-k} است و جملات a^kb^{n-k} و $a^{n-k}b^k$ ضریب‌های مساوی دارند.

ضرایب بسط دوجمله‌ای را می‌توان در مثلثی مانند زیر مرتب کرد که به آن **مثلث خیام ــ پاسکال** می‌گویند.

۱

۱ ۱

۱ ۲ ۱

۱ ۳ ۳ ۱

۱ ۴ ۶ ۴ ۱

....

مرتب نمودن ضرایب به‌صورت بالا را ابتدا خیام، دانشمند مشهور ایرانی، و سپس پاسکال انجام داد و به همین خاطر به نام هر دوی آن‌ها خوانده می‌شود.

تمرین در کلاس

۱ــ اعداد هرسطر در مثلث خیام ــ پاسکال چگونه از طریق اعداد سطر قبل از آن به‌دست‌می‌آیند؟

۲ــ چه ارتباطی بین اعداد هر سطر در مثلث صفحهٔ قبل با بسط دوجمله‌ای غیاث‌الدین جمشید کاشانی وجود دارد؟

۳ــ مجموع ضرایب در هر یک از بسط‌های $(a+b)^۲$ ، $(a+b)^۳$ و $(a+b)^۴$ را به‌دست‌آورید. آیا می‌توانید مجموع ضرایب در بسط $(a+b)^n$ را حدس بزنید؟ حدس خود را ثابت کنید.

۴ــ طرف دوم هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست‌آورید.

$(۲x+y)^۵=$

$(۳x+۲z)^۴=$

$(۲a-۱)^۶=$

مسائل

۱ــ $P(x)$ یک چندجمله‌ای درجه ۲ است و ضریب بزرگترین توان آن ۱ است. در هر یک از حالت‌های زیر $P(x)$ را به‌گونه‌ای تعیین کنید که در شرایط مورد نظر صدق کند.

الف) $P(۱)=۰ \ , P(۲)=۰$ ب) $P(۰)=۰ \ , P(۱)=۱$ ج) $P(-۱)=۲ \ , P(۲)=-۱$

۲ــ مقدار m را چنان بیابید که چندجمله‌ای $P(x)=x^۳-mx^۲-x+۴$ بر $۲x+۱$ بخش‌پذیر باشد.

۳ــ در چندجمله‌ای $P(x)=x^۳+ax^۲+x+b$ ، a و b را طوری بیابید که باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x-۱$ برابر ۴ بوده و بر $x+۲$ بخش‌پذیر باشد.

۴ــ m و n را چنان بیابید که چندجمله‌ای $x^۴-۳x^۳+mx+n$ بر $x^۲-۵x+۶$ بخش‌پذیر باشد.

۵ــ نشان دهید عبارت $x-۲$ یک فاکتور(عامل) $f(x)=x^۳+۲x^۲-۵x-۶$ است. سپس معادلهٔ $f(x)=۰$ را حل کنید.

۶ــ a را چنان بیابید که یک جواب معادلهٔ $x^۳-۲x^۲+ax+۲=۰$ برابر ۲ باشد. سپس جواب‌های دیگر معادله را به‌دست آورید.

۷ــ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(۱-x)^۷$ ب) $(۱+\frac{۲}{x})^۶$ ج) $(۲x-۳y)^۴$

۸ــ عبارات زیر را تجزیه کنید.

$A=x^۹-x^۳y^۳ \quad , \quad B=(a^۶+۱)^۲-(a^۶-۱)^۲$

۹ــ اگر n یک عدد طبیعی زوج باشد، اتحاد زیر را به‌دست آورید.

$$1-x^{n}=(1+x)(1-x+\cdots-x^{n-1})$$

بزرگترین مقسوم علیه و کوچکترین مضرب مشترک چندجمله‌ای‌ها

در دورهٔ راهنمایی با مفاهیم مقسوم علیه، عدد اول و تعیین بزرگترین مقسوم علیه مشترک و کوچکترین مضرب مشترک دو عدد آشنا شدیم. مشابه این مفاهیم برای عبارت‌های جبری نیز قابل بررسی است. با مروری بر این مفاهیم به‌تعمیم آن به‌عبارات جبری می‌پردازیم.

تجزیه عدد : هر عدد طبیعی مخالف یک که اول نباشد یک عدد مرکب است. هر عدد مرکب را می‌توان به‌حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه نمود. در حالتی که در تجزیه اعداد عامل‌های اول تکراری را به‌صورت توانی بنویسیم به آن **تجزیه استاندارد** می‌گوییم.

برای تجزیهٔ یک عدد به‌عامل‌های اول، مرتباً عدد را به عامل‌های اول ۲، ۳، ۵، ۷ و ... تقسیم می‌کنیم تا به خارج قسمت ۱ برسیم سپس آن را به‌صورت تجزیهٔ استاندارد می‌نویسیم.

مثال

عدد ۳۶۰ را به‌صورت تجزیهٔ استاندارد می‌نویسیم.

عدد ۳۶۰ را مطابق الگوی مقابل به‌طور متوالی بر مقسوم علیه‌های اول آن تقسیم می‌کنیم تا به خارج قسمت ۱ برسیم. در نتیجه ۳۶۰ حاصلضرب اعداد اول سمت راست هستند.

۲	۳۶۰
۲	۱۸۰
۲	۹۰
۳	۴۵
۳	۱۵
۵	۵
	۱

$$360=2^{3}\times3^{2}\times5$$

تمرین در کلاس

عددهای ۱۲۰ و ۵۲۵ و ۴۷ را به‌صورت تجزیهٔ استاندارد بنویسید.

می‌دانید که بزرگترین عددی که دو عدد طبیعی a و b بر آن بخش‌پذیرند بزرگترین مقسوم علیه مشترک آن دو عدد نامیده می‌شود که به اختصار با ب.م.م. نشان می‌دهند. برای یافتن ب.م.م. چند عدد می‌توانیم آن‌ها را به‌صورت استاندارد به‌عامل‌های اول تجزیه کنیم، در این صورت حاصلضرب عامل‌های مشترک با **کمترین توان**، ب.م.م. این اعداد خواهند بود.

مثال

ب.م.م. اعداد ۳۶ و ۲۲۵ و ۴۰۵ را تعیین می‌کنیم.

هریک از اعداد را به‌صورت استاندارد تجزیه می‌کنیم. $\begin{cases} ۳۶ = ۲^۲ \times ۳^۲ \\ ۲۲۵ = ۳^۲ \times ۵^۲ \\ ۴۰۵ = ۳^۴ \times ۵ \end{cases}$ تنها عامل مشترک عدد ۳ است و

کمترین توان آن ۲ است. پس ب.م.م. $۳^۲$ است. روشن است که همه این اعداد بر ب.م.م. خود بخش‌پذیرند.

تمرین در کلاس

ب. م.م. اعداد ۷۸ و ۲۳۴ و ۱۵۶ را به‌دست آورید.

می‌دانید که کوچکترین عددی که بر دو عدد طبیعی a و b بخش‌پذیر است را کوچکترین مضرب مشترک آن دو عدد می‌نامند که به اختصار با ک.م.م. نشان می‌دهند. برای یافتن ک.م.م. چند عدد می‌توانیم آن‌ها را به‌صورت استاندارد به عامل‌های اول تجزیه کنیم، در این صورت حاصلضرب عامل‌های موجود در این تجزیه‌ها با **بزرگترین توان**، ک.م.م. این اعداد خواهند بود.

مثال

ک.م.م. اعداد $a = ۲^۳ \times ۵^۲$ و $b = ۲ \times ۵^۳ \times ۷^۲$ و $c = ۲^۵ \times ۵ \times ۱۳$ را تعیین می‌کنیم.

حاصلضرب همهٔ عامل‌های مشترک و غیرمشترک a ، b و c با بیشترین توان را به‌دست می‌آوریم:

$$۲^۵ \times ۵^۳ \times ۷^۲ \times ۱۳$$

عدد بالا ک.م.م. سه عدد a ، b و c است و روشن است که بر a ، b و c بخش پذیر است.

تمرین در کلاس

۱ــ ک.م.م. اعداد ۱۵ و ۳۵ و ۱۴۰ را به‌دست آورید.

۲ــ می‌خواهیم سالنی به ابعاد ۴۰ و ۳۶ متر را با فرش‌های مربع شکل هم اندازه که اندازهٔ ضلع آن‌ها بر حسب متر عدد طبیعی باشد بپوشانیم. اندازهٔ ضلع فرش‌ها چه عددهایی می‌تواند باشد؟ ضلع فرش‌ها چقدر باشد تا کمترین تعداد فرش برای پوشاندن سالن مورد نیاز باشد بدون آن‌که فرش‌ها روی هم بیفتند؟

۳ــ ب.م.م. و ک.م.م. هر یک از دسته اعداد زیر را تعیین کنید. (حروف نشان دهنده اعداد اول متمایزند و مخالف ۲، ۳ و ۵ هستند.)

الف) $32a^3 , 16ab^2 , 8a^2b^3$ ب) $6x^2y , 8xy^2z , 10x^2y^2z^2$

در چندجمله‌ای‌ها نیز، همانند اعداد، اعمال جمع و ضرب و مفهوم بخش‌پذیری برقرار است. پس می‌توانیم ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌ها را نیز همانند اعداد تعریف کنیم.

فعالیت ۵

چندجمله‌ای‌های $P(x)=2x^3-16$ و $Q(x)=3x^2-12$ را در نظر بگیرید.

۱ــ $P(x)$ و $Q(x)$ را تجزیه کنید.

۲ــ بزرگترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش‌پذیرند را بنویسید.

۳ــ کوچکترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که هم بر $P(x)$ و هم بر $Q(x)$ بخش‌پذیر باشد را بنویسید.

آنچه که در فعالیت بالا انجام دادید یافتن ب.م.م. و ک.م.م. دو چندجمله‌ای بود.

تعریف :

بزرگترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ بر آن بخش‌پذیرند را بزرگترین مقسوم علیه مشترک (به اختصار ب.م.م.) $P(x)$ و $Q(x)$ می‌نامند.

کوچکترین چندجمله‌ای (از لحاظ درجه) که بر چندجمله‌ای‌های $P(x)$ و $Q(x)$ بخش‌پذیر است را کوچکترین مضرب مشترک (به اختصار ک.م.م.) $P(x)$ و $Q(x)$ می‌نامند.

این تعاریف برای بیش از دو چندجمله‌ای به شکل مشابه انجام می‌شود.

مثال

ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌های $P(x)=x^{۳}+۱$ و $Q(x)=x^{۶}-۱$ و $R(x)=۴x^{۲}-۴$ را تعیین می‌کنیم. برای این کار، ابتدا هر یک از چندجمله‌ای‌ها را تجزیه می‌کنیم. سپس مشابه آنچه که در مورد ب.م.م. و ک.م.م. اعداد گفته شد عمل می‌کنیم.

$$P(x)=(x+۱)(x^{۲}-x+۱)$$

$$Q(x)=(x^{۳}+۱)(x^{۳}-۱)=(x+۱)(x^{۲}-x+۱)(x-۱)(x^{۲}+x+۱)$$

$$R(x)=۴(x^{۲}-۱)=۴(x-۱)(x+۱)$$

تنها عامل مشترک در این تجزیه‌ها $x+۱$ است و کمترین توان آن ۱ است، پس $x+۱$ ب.م.م. این سه چندجمله‌ای است.

عواملی که در این تجزیه‌ها وجود دارند عبارتند از : $x^{۲}+x+۱$, $x^{۲}-x+۱$, $x-۱$, $x+۱$, ۴ و بزرگترین توان آن‌ها ۱ است. بنابراین ک.م.م. این سه چندجمله‌ای عبارت است از :

$$۴(x+۱)(x^{۲}-x+۱)(x-۱)(x^{۲}+x+۱)=۴(x^{۳}+۱)(x^{۳}-۱)=۴(x^{۶}-۱)$$

ب.م.م. و ک.م.م. چندجمله‌ای‌ها کمک زیادی به کوتاه‌تر شدن و ساده کردن محاسبات در کسرها و جمع و تفریق عبارت‌های گویا می‌کند.

تمرین در کلاس

۱ــ حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$A=\frac{۱}{۷۲}+\frac{۵}{۴۸}-\frac{۱}{۱۶}$$

۲ــ کسرهای زیر را به‌ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$A=\frac{۳x^{۲}-۳xy}{۳(x-y)^{۲}} \qquad B=\frac{x^{۲}+۲x+۱}{x^{۲}+۸x+۷}$$

۳ــ حاصل عبارت زیر را به ساده‌ترین صورت بنویسید.

$$\frac{a+۵}{a-۱}-\frac{۶}{a^{۲}+a+۱}-\frac{۶(a^{۲}+۲)}{a^{۳}-۱}$$

مسائل

۱ــ سه زنگ در یک کارخانه برای موارد مختلف زده می‌شود. اولین زنگ هر ۱۸ دقیقه یک بار، دومین زنگ هر ۲۴ دقیقه یک بار و سومین زنگ هر ۳۲ دقیقه یک بار زده می‌شوند. بعد از اولین بار که هر سه زنگ با هم زده شوند حداقل چند دقیقه باید بگذرد تا آن‌ها دوباره با هم زده شوند؟

۲ــ در دنباله‌های حسابی زیر چند عدد سه رقمی مشترک وجود دارد؟

۴، ۷، ۱۰، ... ۱، ۵، ۹، ...

۳ــ می‌خواهیم ۷۲ لیتر آب میوه، ۴۰ لیتر شیر و ۴۸ لیتر دوغ در شیشه‌هایی با حجم یکسان بسته‌بندی کنیم، حداقل تعداد شیشه‌ها کدام است؟(گنجایش شیشه‌ها را بر حسب لیتر عدد طبیعی فرض کنید.)

۴ــ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

ب) $\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-9} \div \dfrac{x^2-6x-7}{x^2-10x+21}$ الف) $\dfrac{x^2-5x+4}{x^2-4x} \div \dfrac{x^2+x-2}{x^3+2x^2}$

د) $\dfrac{x+1}{x-1} + \dfrac{1}{x+3} - \dfrac{8}{x^2+2x-3}$ ج) $\dfrac{1}{a^2-1} + \dfrac{2a}{a^2+2a+1} - \dfrac{2}{a+1}$

معادلات

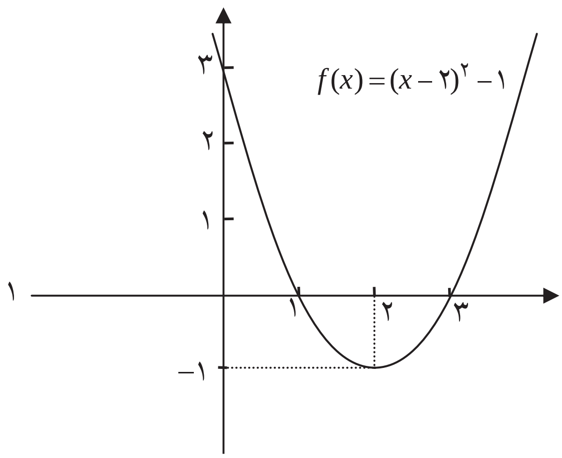
در سال‌های قبل با مفهوم معادله و حل معادلهٔ درجهٔ اول و درجهٔ دوم آشنا شدید. در این بخش با برخی نکات جدید دربارهٔ حل معادلات آشنا خواهیم شد و سپس انواع دیگری از معادلات جبری را بررسی خواهیم کرد.

فعالیت ۶

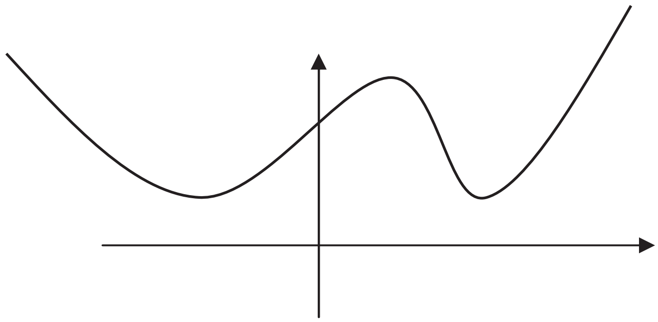
۱ــ نمودار تابع $f(x) = x^2-4x+3$ به شکل مقابل است.

جواب‌های معادله $f(x) = x^2-4x+3 = 0$ چه ویژگی از نمودار تابع $f(x)$ را مشخص می‌کند؟

از طریق نمودار $f(x)$ چگونه می‌توان در مورد جواب‌های معادله $f(x)=0$ اظهارنظر کرد؟



۲ــ نمودار تابع $g(x)$ به شکل زیر است. در مورد جواب‌های معادله $g(x)=0$ چه می‌توانید بگویید؟

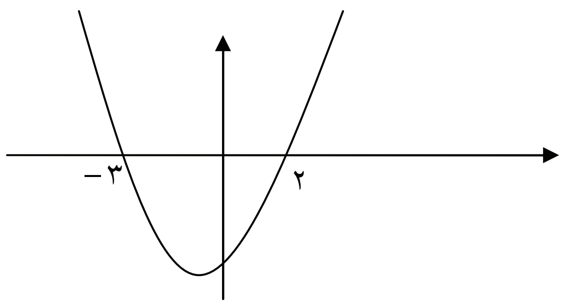


۳ــ با رسم نمودار تابع $f(x)=x^2-4x+4$ توضیح دهید چرا معادله $x^2-4x+4=0$ فقط یک جواب دارد.

برای یک تابع $f(x)$ جواب‌های معادلهٔ $f(x)=0$ را (در صورت وجود) **صفرهای تابع f** می‌نامیم. صفرهای تابع f آن مقادیری از x هستند که به‌ازای آن‌ها $f(x)$ صفر می‌شود. اگر نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم، صفرهای f، طول‌های نقاط تلاقی نمودار f با محور طول‌ها است.

مثال

اعداد ۲ و ۳− صفرهای تابع $f(x)=x^2+x-6$ می‌باشند و نمودار f در نقاطی به‌طول‌های ۲ و ۳− محور طول‌ها را قطع می‌کند.



نمودار توابعی که ضابطه آن‌ها یک چندجمله‌ای درجه دوم است را **سهمی** می‌نامند. سهمی‌ها شکل‌های مشابه و خواص هندسی مشترکی دارند که در درس هندسه با آن‌ها بیشتر آشنا خواهید شد.

در سال‌های قبل دیدیم یک معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0$ که $\Delta=b^2-4ac>0$ دارای دو جواب به صورت زیر است.

$$x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad , \quad x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

در حالت $\Delta=0$ داریم $x'=x''=-\frac{b}{2a}$ در این حالت معادله فقط یک جواب دارد و می‌توان تعبیر کرد که معادله دو جواب مساوی دارد. به‌همین خاطر در این حالت گوییم معادله یک جواب مضاعف (تکراری) دارد. سال قبل دیدیم که اگر x' و x'' جواب‌های معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ باشند، داریم $x'+x''=\frac{-b}{a}$ و $x'x''=\frac{c}{a}$.

حل یک مسئله

مستطیلی بسازید که محیط آن ۲۲ سانتی‌متر و مساحت آن ۲۸ سانتی‌مترمربع باشد.

برای مشخص کردن این مستطیل باید طول و عرض آن را تعیین کنیم. اگر چنین مستطیلی وجود داشته باشد ضلع‌های آن را با x' و x'' نشان می‌دهیم. فرضیات مسئله به معنای آن است که

$$x'x''=28, x'+x''=11$$

x' و x'' ریشه‌های معادله درجه دوم $(x-x')(x-x'')=0$ هستند. از طرف دیگر

$$(x-x')(x-x'')=x^2-(x'+x'')x+x'x''=x^2-11x+28$$

بنابراین برای یافتن جواب مسئله کافی است جواب‌های معادلهٔ $x^2-11x+28=0$ را حساب کنیم. از حل این معادله نتیجه می‌شود: $x'=4$ و $x''=7$.

قضیه:

اگر α و β دو عدد دلخواه و $S=\alpha+\beta$ و $P=\alpha\beta$، آنگاه α و β جواب‌های معادلهٔ $x^2-Sx+P=0$ هستند.

مثال

معادلهٔ درجهٔ دومی تشکیل دهید که جواب‌های آن ۲ و ۳ باشد.

روش اول: داریم $S=x'+x''=2+3=5$ و $P=x'\times x''=2\times3=6$ ، پس ۲ و ۳ جواب‌های معادلهٔ $x^2-5x+6=0$ هستند.

روش دوم: $(x-2)(x-3)=0$ معادله‌ای است که مستقیماً دیده می‌شود ۲ و ۳ جواب‌های آن هستند. این یک معادلهٔ درجه دوم است و پس از انجام عمل ضرب به شکل $x^2-5x+6=0$ در می‌آید.

ماکزیمم و مینیمم توابع درجه دوم

حل یک مسئله

بیشترین مساحت قطعه زمین مستطیل شکل کنار دریا که می‌توان آن را فقط با ۱۲۰ متر نرده محصور کرد چقدر است؟

برای فهم درست مسئله شکلی مانند بالا رسم می‌کنیم. برای حل مسئله باید تشخیص دهیم چه چیزی را باید به‌دست آوریم. در اینجا یافتن طول مستطیل برای حل مسئله کافی است. طول این زمین مستطیل شکل را با x نشان می‌دهیم. پس عرض زمین برابر $\frac{۱۲۰-x}{۲}$ خواهد بود. اگر مساحت این زمین را با A نشان دهیم، داریم :

$$A=x(۶۰-\frac{x}{۲})=-\frac{x^۲}{۲}+۶۰x$$

$$=-\frac{۱}{۲}(x^۲-۱۲۰x)=-\frac{۱}{۲}\left[(x-۶۰)^۲-۳۶۰۰\right]=-\frac{۱}{۲}(x-۶۰)^۲+۱۸۰۰$$

بیشترین مقدار A وقتی است که $x-۶۰=۰$ و در نتیجه $x=۶۰$. پس با انتخاب طول ۶۰ متر بیشترین مساحت ساخته می‌شود که برابر ۱۸۰۰ مترمربع خواهد بود.

فعالیت ۷

تابع $f(x)=ax^۲+bx+c$ را در نظر بگیرید که در آن $a\neq ۰$.

۱ــ درستی محاسبات زیر را توضیح دهید.

$$f(x)=a(x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a})=a\left((x+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{c}{a}-\frac{b^۲}{۴a^۲}\right)=a(x+\frac{b}{۲a})^۲+\frac{۴ac-b^۲}{۴a}$$

۲ــ اگر $a<۰$ به ازای چه مقداری از x تابع f بیشترین مقدار را خواهد یافت؟

۳ــ اگر $a>۰$ به ازای چه مقداری از x تابع f کمترین مقدار را خواهد یافت؟

از فعالیت فوق قضیه زیر به‌دست می‌آید.

قضیه :

تابع $f(x) = ax^۲ + bx + c$ به ازای $x = \frac{-b}{۲a}$ در حالت $a > ۰$ به‌کمترین مقدار (مینیمم) و در حالت $a < ۰$ به بیشترین مقدار (ماکزیمم) خود می‌رسد.

مثال

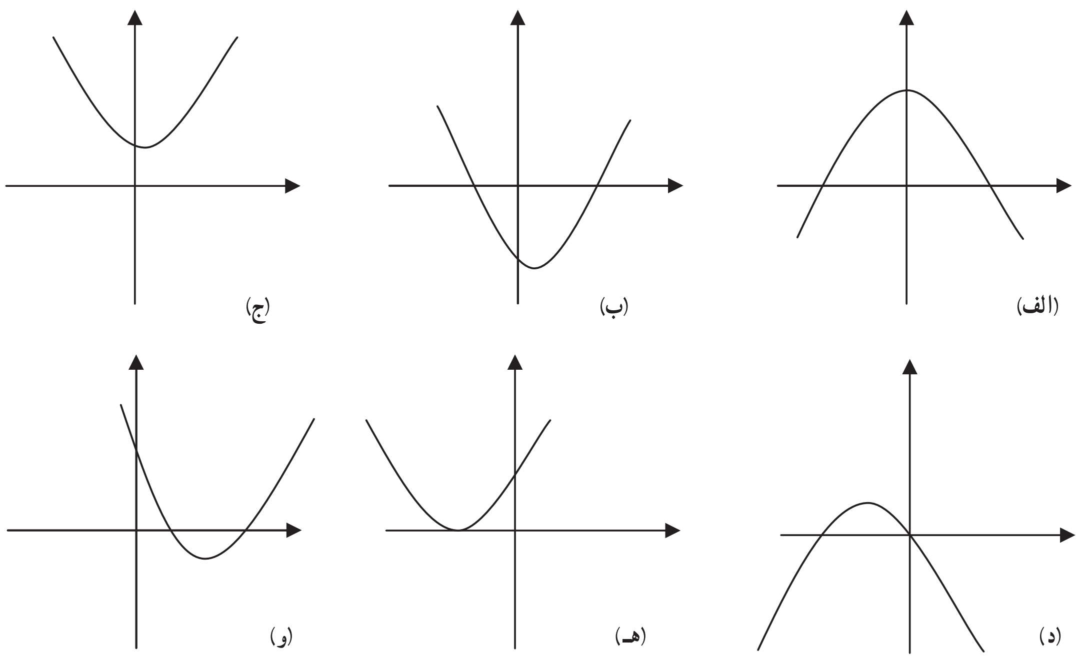
کمترین مقدار تابع $f(x) = ۳x^۲ - ۱۲x + ۵$ را تعیین می کنیم.

به ازای $x = \frac{۱۲}{۶} = ۲$ تابع کمترین مقدار را داراست. از آنجا که $f(۲) = -۷$، کمترین مقدار تابع برابر ۷− می‌باشد.

تمرین در کلاس

۱ــ اگر جمع دو عدد $\frac{۷}{۶}$ و حاصل ضربشان $\frac{-۱}{۲}$ باشد آن دو عدد را بیابید.

۲ــ در هر یک از شکل‌های زیر سهمی به‌معادله $P(x) = ax^۲ + bx + c$ داده شده است. در هر مورد علامت ضرایب a, b, c و تعداد جواب‌های معادلهٔ $ax^۲ + bx + c = ۰$ را تعیین کنید.



۳ــ نشان دهید در بین مستطیل‌هایی که محیط شان مقدار ثابتی است، مربع دارای بیشترین مساحت است.

حل یک مسئله

یک معادله چندجمله‌ای با ضرایب صحیح بیابید که $\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$ یک جواب آن باشد.

عباس : جواب این مسئله بسیار ساده است کافی است معادلهٔ چندجمله‌ای $x-(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})=۰$ را درنظر بگیریم.

معلم : در این چندجمله‌ای اعداد غیر صحیح به‌کار رفته است و این جواب مسئله نیست.

حسن : ما چگونه می‌توانیم چنین معادله‌ای بسازیم؟

معلم : بهتر است اول در حالت ساده‌تری این مسئله را حل کنید. مثلاً معادله‌ای با ضرایب صحیح بسازید که $\sqrt{۲}$ یک جواب آن باشد.

عباس : ما قبلاً به‌چنین معادله‌ای برخورد کرده‌ایم. کافی است معادله $x^{۲}-۲=۰$ را در نظر بگیریم.

معلم : این معادله را چگونه می‌توانید به‌دست آورید؟

عباس : کافی است در تساوی $x=\sqrt{۲}$ طرفین را به توان ۲ برسانیم. نتیجه می‌شود $x^{۲}=۲$ و سپس معادله $x^{۲}-۲=۰$ به‌دست می‌آید.

معلم : بله این روش شما کارساز است. البته توجه دارید که معادله ساخته شده جواب‌های دیگری هم دارد. آیا می‌توانید این روش را برای حل مسئله اصلی هم به‌کار برید؟

عباس : بهتر است این روش را آزمایش کنیم. قرار می‌دهیم $x=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}$. با به توان دو رساندن طرفین این تساوی می‌توان نوشت $x^{۲}=۵+۲\sqrt{۶}$. متأسفانه هنوز اعداد غیر صحیح در معادله جدید وجود دارند.

معلم : بله هنوز اعداد غیر صحیح وجود دارند و باز هم باید عملیات دیگری را انجام دهید.

عباس : فکر می‌کنم باز هم باید روش خود را تکرار کنیم. می‌توان نوشت $x^{۲}-۵=۲\sqrt{۶}$ و با به توان دو رساندن طرفین این معادله و ساده کردن آن خواهیم داشت : $x^{۴}-۱۰x^{۲}+۱=۰$. به‌نظر می‌رسد این معادله جواب مسئله باشد.

معلم : بله شما به‌جواب مسئله رسیده‌اید. البته این معادله جواب‌های دیگری هم دارد و خوب است بقیهٔ جواب‌های این معادله را هم به‌دست آوریم. این یک معادله درجه چهار است ولی با در نظرگرفتن $x^{۲}=z$ می‌توان آن را به یک معادلهٔ درجه دوم بر حسب z تبدیل کرد : $z^{۲}-۱۰z+۱=۰$. با حل این معادله خواهیم داشت : $z=۵\pm۲\sqrt{۶}$. حال با حل دو معادلهٔ $x^{۲}=۵+۲\sqrt{۶}$, $x^{۲}=۵-۲\sqrt{۶}$ خواهیم داشت :

$$x^{۲}=۵+۲\sqrt{۶}=(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})^{۲}\Rightarrow x=\pm(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})$$

با همین روش جواب‌های $x=\pm(\sqrt{۲}-\sqrt{۳})$ برای معادلهٔ دیگر به‌دست می‌آیند. این معادله دارای چهار جواب است.

در برخی از معادلات با درنظر گرفتن یک متغیر جدید می‌توان آن را به یک معادلهٔ درجهٔ دوم تبدیل کرد.

تمرین در کلاس

معادلهٔ $(x^2-1)^4+(x^2-1)^2-2=0$ را حل کنید.

حل یک مسئله

اگر $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ یک چند جمله‌ای درجه n باشد که $a_0\neq 0$ و از روی آن چندجمله‌ای درجه n، $Q(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$ را بسازیم، آیا رابطه‌ای بین ریشه‌های این دو چندجمله‌ای وجود دارد؟ چند جمله‌ای $Q(x)$ را چند جمله‌ای وارونه $P(x)$ می‌نامند.

یکی از دانش‌آموزان که در مورد چگونگی جواب معادلات چندجمله‌ای فکر کرده بود مسئله بالا برایش مطرح شده بود که آن را با معلم خود در میان گذاشت. معلم نیز این مسئله را برای همه دانش‌آموزان مطرح کرد تا همه درباره آن فکر کنند و راه‌حل‌های خودشان را ارائه کنند.

در جلسهٔ بعدی درس، معلم از دانش‌آموزان خواست راه‌حل‌های خودشان را ارائه کنند.

علی : به‌نظر من بهتر است ابتدا در حالت‌های خاص که ساده‌تر است مسئله را بررسی کنیم، مثلاً چندجمله‌ای‌های درجه اول و دوم را بررسی کنیم.

معلم : آفرین، این روش شما کمک زیادی به‌حل یک مسئله می‌کند. با مشاهدهٔ مسئله در حالت‌های خاص می‌توانیم درک بهتری از جزئیات مسئله پیدا کنیم. حال بگو چه پیشنهادی داری؟

علی : من توانستم حدس بزنم که چه رابطه‌ای بین ریشه‌های دو چندجمله‌ای وجود دارد ولی نتوانستم اثباتی برای آن ارائه کنم.

در حالت چندجمله‌ای‌های درجه اول مانند $P(x)=ax+b$ داریم $Q(x)=bx+a$ و ریشه‌های آن‌ها به‌ترتیب $\frac{-b}{a}$ و $\frac{-a}{b}$ می‌باشند که وارون یکدیگرند. در حالت چندجمله‌ای‌های درجهٔ دوم محاسبات پیچیده‌تر بود و نتوانستم فکر خود را تعقیب کنم.

سعید : جالب است اتفاقاً من نیز همین کار را کردم ولی با چندجمله‌ای درجه دوم خاصی که ریشه‌هایشان را می‌دانستم محاسبه کردم و به‌همین نتیجه رسیدم. من یک چندجمله‌ای ساده مثل $P(x)=(x+3)(x-4)$ را در نظر گرفتم که ریشه‌هایش را از قبل می‌دانستم. اگر آن را به‌صورت استاندارد بنویسیم داریم : $P(x)=x^2-x-12$. بنابراین $Q(x)=-12x^2-x+1$ و ریشه‌های آن از دستور کلی معادلهٔ درجهٔ دوم $\frac{1}{3},-\frac{1}{4}$ خواهند شد.

معلم : هر دو روش کارهای خوبی برای حل مسئله انجام داده‌اند. در هر دو روش این حدس پیش می‌آید که ریشه‌های دو چندجمله‌ای معکوس یکدیگرند. شما می‌توانید این حدس را در مثال‌های دیگری هم بررسی کنید. حال چگونه می‌توانید این مطلب را برای یک چندجمله‌ای دلخواه ثابت کنید؟ ابتدا بهتر است حدس خود را به‌شکل دقیق‌تری بیان کنید. مثلاً برای دو چندجمله‌ای $P(x)=ax^2+bx+c$ و $Q(x)=cx^2+bx+a$ اگر r یک ریشهٔ $P(x)$ باشد باید تحقیق کنیم که آیا $\frac{1}{r}$ یک ریشه $Q(x)$ می‌شود؟

علی : پس باید از $P(r)=0$ بتوانیم نتیجه بگیریم $Q(\frac{1}{r})=0$. اما اگر صفر یک ریشه $P(x)$ باشد چنین نتیجه‌گیری امکان‌پذیر نخواهد بود.

معلم : لابد صفر نمی‌تواند ریشه $P(x)$ شود. آیا می‌توانید این مطلب را بررسی کنید؟

سعید : درست است صفر نمی‌تواند ریشه $P(x)$ باشد، زیرا $P(0)=a_0 \neq 0$.

معلم : حالا که مطمئن شدید $P(x)$ ریشه صفر ندارد، سعی کنید از فرض $P(r)=0$ حکم $Q(\frac{1}{r})=0$ را به‌دست آورید.

عباس : پس فرض کنیم $P(r)=ar^2+br+c=0$ اکنون می‌خواهیم $Q(\frac{1}{r})$ را به‌دست آوریم.

$$Q(\frac{1}{r})=c(\frac{1}{r})^2+b(\frac{1}{r})+a=\frac{c+br+ar^2}{r^2}=\frac{P(r)}{r^2}=0$$

معلم : آفرین، محاسبه را به‌درستی انجام دادی. انجام این محاسبه در حالت کلی هم چندان مشکل نیست.

اگر r ریشه‌ای از چندجمله‌ای $P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1 x+a_0$ باشد آن‌گاه $P(r)=0$ بنابراین :

$$Q(\frac{1}{r})=a_0(\frac{1}{r})^n+a_1(\frac{1}{2})^{n-1}+\dots+a_{n-1}(\frac{1}{r})+a_n$$

$$=\frac{1}{r^n}(a_0+a_1r+a_2r^2+\dots+a_{n-1}r^{n-1}+a_nr^n)=\frac{1}{r^n}P(r)=0$$

بنابراین $\frac{1}{r}$ ریشهٔ $Q(x)$ است.

علی : آیا عکس مطلب هم درست است اگر s ریشه‌ای از $Q(x)$ باشد آیا می‌توان گفت $P(\frac{1}{s})=0$ ؟

معلم : این مطلب بدیهی است زیرا اگر از چندجمله‌ای $Q(x)$ شروع کنیم و چندجمله‌ای وارون آن را بسازیم همان $P(x)$ می‌شود.

تذکر :

برهان نهایی این مسئله مانند یک مبحث ریاضی مختصر و رسمی‌است و نتایج نهایی فرایند فکر ما را نمایش می‌دهد. ولی مطلب مهم آن است که بدانیم با یک مسئله چگونه برخورد کنیم و راه‌حل‌های خود را به‌دست آوریم؟ اگر به شیوه‌های کار توجه کنید کاری که ما انجام دادیم آزمایش حالت‌های خاص به‌منظور دیدن یک الگو برای برهان یک مسألهٔ کلی بود. از این روش در حل بسیاری از مسائل می‌توان استفاده کرد.

تمرین در کلاس

با استفاده از فرمول جواب‌های دو معادلهٔ $ax^2+bx+c=0$ و $cx^2+bx+a=0$ را به‌دست‌آورید و نشان دهید جواب‌های آن‌ها عکس یکدیگرند.

مسائل

۱ــ در معادلهٔ $۲x^۲-۸x+m=۰$ اگر یکی از جواب‌ها دو واحد بیشتر از جواب دیگر باشد m و هر دو جواب را پیدا کنید.

۲ــ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x)=x^۳-۴x$ ب) $g(x)=(x+\frac{۱}{x})^۲+(x+\frac{۱}{x})$

۳ــ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $۲x^۳+x^۲+۳x=۰$ ب) $\frac{۳x^۲-۱۱}{۸}+\frac{۷۴-۲x^۲}{۱۲}=۱۰$

۴ــ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که :

الف) جواب‌های آن $\frac{۱}{۵}$ و $\frac{۴}{۵}$ باشد.

ب) جواب‌های آن $۱\pm\sqrt{۳}$ باشد.

۵ــ مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=۹x^۲+۶x+۳$ ب) $f(x)=۴+۸x-x^۲$

۶ــ اگر α و β جواب‌های معادلهٔ درجه دوم $۴x^۲-۵x-۵=۰$ باشد معادله‌ای بنویسید که جواب‌های آن $\frac{۱}{\alpha}$ و $\frac{۱}{\beta}$ باشد.

۷ــ بدون حل معادله، و با استفاده از S و P و Δ در وجود و علامت جواب‌های معادلهٔ $۵x^۲-۷x-۵=۰$ بحث کنید.

۸ــ از دبیر ریاضی کلاس حسابان سنش را پرسیدند. پاسخ داد : ۲۱ سال بعد، سن من توان دوم سنی خواهد بود که ۲۱ سال پیش از این داشتم. این دبیر چند سال سن دارد؟

۹ــ (مسأله‌ای از کتاب جبر و مقابله خوارزمی) کدام عدد (مثبت) است که چون یک سوم آن را با یک و همچنین یک چهارم آن را با یک جمع کنیم و دو حاصل جمع را در هم ضرب کنیم، برابر ۲۰ شود؟

۱۰ــ در ضرب دو عدد طبیعی که یکی از دیگری ۱۰ واحد بزرگتر است؛ اشتباهی رخ می‌دهد. در نتیجه رقم دهگان ۴ واحد کوچکتر می‌شود. برای آزمایش، حاصلضرب را بر عدد کوچکتر تقسیم می کنند. خارج قسمت ۳۹ و باقی‌مانده آن ۲۲ می‌شود آن دو عدد را پیدا کنید.

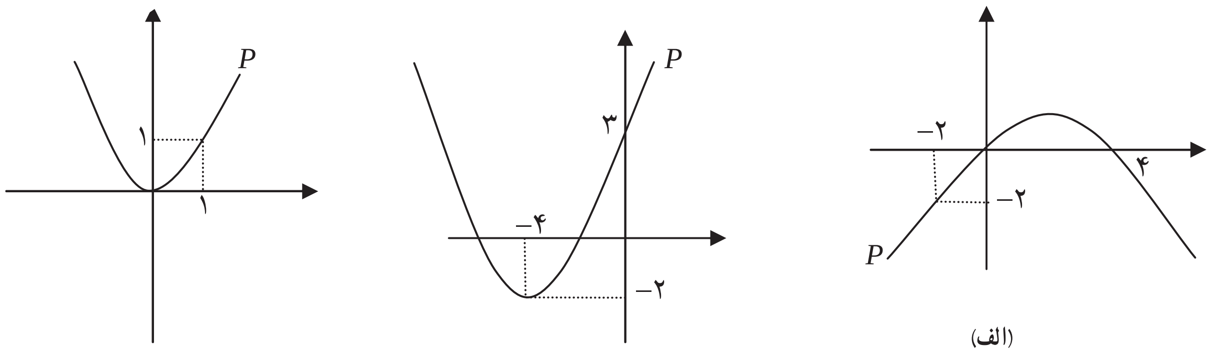
۱۱ــ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^۴-۳x^۲+۲=۰$ ب) $(\frac{x^۲}{۳}-۲)^۲-۷(\frac{x^۲}{۳}-۲)+۶=۰$

ج) $(۴-x^۲)^۲-۲(۴-x^۲)-۱۵=۰$

۱۲ــ کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{۲}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x پیدا کنید.

۱۳ــ در تابع درجه دوم $P(x) = ax^{۲} + bx + c$ در هر یک از حالت‌های زیر اولاً ضرایب a و b و c ثانیاً علامت $P(x)$ را تعیین کنید.



(ج) (ب) (الف)

۱۴ــ محیط یک زمین مستطیل شکل ۱۸ متر و مساحت آن ۱۴ مترمربع است. اندازهٔ طول و عرض این زمین را تعیین کنید.

معادلات شامل عبارات گویا

حل یک مسئله

در یک مزرعه شالیکاری دو کارگر که با هم کار می‌کنند، کار نشاکاری را در ۱۸ روز تمام می‌کنند. اما اگر هر کدام به‌تنهایی کار می‌کردند، کارگر اول ۱۵ روز زودتر از کارگر دوم این کار را تمام می‌کرد. هر کدام از این دو کارگر به‌تنهایی کار را در چند روز تمام می‌کنند؟

خانم تقوی دبیر دبیرستان ایمان است. او معمولاً درس خود را با طرح یک مسئله آغاز می‌کند. او امروز مسئله بالا را طرح کرد و به‌دانش‌آموزان فرصت داد تا روی مسئله کار کنند. سپس از آن‌ها خواست راه حل خود را مطرح کنند.

زهرا : فکر می‌کنم مسئله با تشکیل یک معادله حل می‌شود. فرض می‌کنیم کارگر اول در x روز کار را تمام کند، پس کارگر دوم همین کار را در $x+۱۵$ روز تمام می‌کند. باید مفروضات مسئله را به زبان ریاضی بنویسیم، اما من نتوانستم این کار را انجام دهم.

خانم تقوی : این دو کارگر با هم در یک روز چه کسری از کار را انجام می‌دهند؟

دانش‌آموزان : معلوم است $\frac{۱}{۱۸}$ کار را.

خانم تقوی : حال شما مشخص کنید در یک روز هر کارگر چه میزان از کار را انجام می‌دهد و ببینید چگونه بین این نسبت‌ها می‌توانید ارتباط برقرار کنید.

سارا : فکر کنم بتوانم ارتباط بین این نسبت‌ها را بنویسم سپس از معلم اجازه خواست و پای تابلو نوشت :

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۱۵}=\frac{۱}{۱۸}$$

و توضیح داد که $\frac{۱}{x}$ میزان کار کارگر اول در یک روز و $\frac{۱}{x+۱۵}$ میزان کار کارگر دوم در یک روز است و مجموع آن‌ها مجموع کار هر دو کارگر در یک روز است که برابر $\frac{۱}{۱۸}$ است.

خانم تقوی : شما معادله موردنظر را پیدا کردید و برای حل مسئله کافی است این معادله را حل کنید. برای حل این معادله باید عبارت متناظر آن را ساده کنیم.

مینا : ما قبلاً برای جمع کسرها از روش هم مخرج کردن استفاده می‌کردیم این‌جا هم می‌توانیم از روش کلی هم مخرج کردن کسرها استفاده کنیم. یک راه که امسال با آن آشنا شدیم استفاده از کوچکترین مضرب مشترک مخرج هاست، که در این جا همان حاصل‌ضرب مخرج‌ها می‌شود.

$$\frac{x+۱۵+x}{x(x+۱۵)}=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow\frac{۲x+۱۵}{x^{۲}+۱۵x}=\frac{۱}{۱۸}\Rightarrow ۱۸(۲x+۱۵)=x^{۲}+۱۵x$$

$$\Rightarrow x^{۲}-۲۱x-۲۷۰=۰\Rightarrow(x-۳۰)(x+۹)=۰\Rightarrow x=۳۰,\ x=-۹$$

جواب $x=-۹$ قابل قبول نیست(چرا؟) و جواب معادله ۳۰ روز است. یعنی کارگر اول به تنهایی در ۳۰ روز و کارگر دوم به تنهایی در ۴۵ روز کار را تمام می‌کند.

حل یک مسئله

در یک مغازهٔ ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب نمک با غلظت ۷ درصد نگهداری می‌شوند. به‌علت تازه کار بودن کارگرها، ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته شده است. چگونه می‌توان این محلول را به‌غلظت موردنظر رساند؟

حالت اول : فرض می‌کنیم نمک به‌اندازهٔ کافی موجود باشد و بتوانیم با اضافه کردن نمک کافی، محلول با ۷ درصد نمک بسازیم. ابتدا محاسبه می‌کنیم که در محلول فعلی چند کیلوگرم نمک وجود دارد.

$$\frac{۴}{۱۰۰}\times ۲۰۰=۸ \text{ کیلو}$$

اگر x کیلوگرم نمک به این محلول بیفزاییم، میزان نمک آب $x+۸$ کیلوگرم می‌شود و وزن کل محلول $x+۲۰۰$ کیلو می‌شود،

پس برای داشتن محلول ۷ درصدی نمک باید داشته باشیم :

$$\frac{۸+x}{۲۰۰+x}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

با حل این معادله نتیجه می‌شود $x=\frac{۶۰۰}{۹۳}$. یعنی تقریباً ۶ کیلو و ۴۵۲ گرم نمک باید به‌محلول اضافه شود.

حالت دوم : اگر نمک موجود نباشد و بخواهیم با تبخیر y کیلوگرم از آب، محلول ۷ درصد نمک بسازیم، باید داشته باشیم :

$$\frac{۸}{۲۰۰-y}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

با حل این معادله داریم $y=\frac{۶۰۰}{۷}$. یعنی تقریباً ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم آب را باید تبخیر کنیم.

تذکر :

برای حل معادلات شامل عبارات گویا با ضرب طرفین معادله در کوچکترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به‌دست آمده، معادله را حل می‌کنیم. جواب به‌دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند. (چرا؟) همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله که از واقعیت می‌آیند مطابقت نداشته باشند که این جواب‌ها نیز قابل قبول نیستند.

بحث در کلاس

در حل مسئله محلول آب نمک، اگر مقدار نمک موجود در مغازه ۵ کیلوگرم باشد و آن را به‌محلول اضافه کنیم، چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کنیم تا به‌هدف موردنظر برسیم؟

مثال

مجموعه جواب معادلهٔ $\frac{۲x-۳}{۲x+۲}=\frac{۵}{x^{۲}-۱}-\frac{۲x+۳}{۲x-۲}$ را به‌دست آورید.

ابتدا کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها را به‌دست می‌آوریم. برای این کار ابتدا مخرج کسرها را تجزیه می‌کنیم.

$$\begin{cases}۲x-۲=۲(x-۱)\\ x^{۲}-۱=(x-۱)(x+۱)\\ ۲x+۲=۲(x+۱)\end{cases}$$

ک.م.م. مخرج ها $=۲(x-۱)(x+۱)$

طرفین معادله را در این عبارت ضرب می‌کنیم.

$$(x+۱)(۲x+۳) - ۵\times۲ = (x-۱)(۲x-۳)$$

$$۲x^۲+۳x+۲x+۳-۱۰=۲x^۲-۳x-۲x+۳$$

$$۱۰x-۱۰=۰$$

$$x=۱$$

اما $x=۱$ مخرج یکی از کسرهای معادله را صفر می‌کند. پس معادله جواب ندارد.

تمرین در کلاس

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{t-۱}{t+۴}-\frac{۲}{t-۴}=\frac{۷}{۶}$

ب) $\frac{۳}{۲x}=\frac{x+۲}{x^۲-۳x}$

ج) $\frac{۵}{x}-\frac{۴}{x(x-۲)}=\frac{x-۴}{x-۲}$

مسائل

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

۱) $\frac{۶}{p}=۲+\frac{p}{p+۱}$

۲) $\frac{k}{۲-k}+\frac{۲}{k}=۵$

۳) $۲+\frac{۵}{۳k-۱}=\frac{-۲}{(۳k-۱)^۲}$

۴) $\frac{۳y+۵}{y^۲+۵y}+\frac{y+۴}{y+۵}=\frac{y+۱}{y}$

۵) $\frac{۳}{m+۲}+\frac{۲}{m}=\frac{۴m-۴}{m^۲-۴}$

۶) $\frac{۲}{x-۳}-\frac{۳}{x+۳}=\frac{۱۲}{x^۲-۹}$

۷ـ معلم سؤال کرد مجموعه جواب معادلهٔ $\frac{x+۳}{x+۳}=۱$ چیست؟ برخی از دانش‌آموزان گفتند : همه اعداد. معلم گفت این جواب صحیح نمی‌باشد؟ جواب صحیح چیست؟

۸ـ آقای عماد چند اسباب بازی یکسان برای هدیه به مهد کودک خرید که در مجموع قیمت آن‌ها ۱۲۰۰۰ تومان شد. اگر فروشنده برای هر اسباب بازی ۱۰۰ تومان به او تخفیف می‌داد او با همان پول ۴ اسباب‌بازی بیشتر می‌توانست بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی را قبل از تخفیف به‌دست آورید.

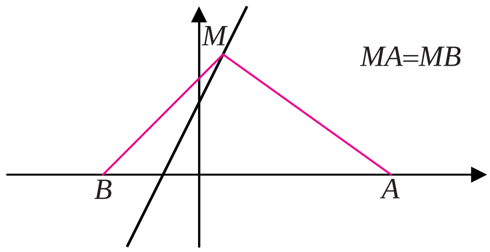
معادلات شامل عبارات گنگ

حل یک مسئله

نقطه‌ای روی خط $y = ۲x + ۱$ بیابید که از دو نقطهٔ $A(۳,۰)$ و $B(-۱,۰)$ به یک فاصله باشد.

سجاد و صادق دو دانش‌آموز علاقمند هستند که روی این مسئله کار کرده‌اند.

سجاد : مناسب است برای درک بهتر مسئله شکلی رسم کنیم که مشخصات مسئله در آن دیده شود.



صادق : ما می‌توانیم نقطه دلخواهی روی خط $y = ۲x + ۱$ در نظر بگیریم و فاصله آن را تا A و B حساب کنیم و ببینیم تحت چه شرایطی این فاصله‌ها مساوی می‌شوند.

سجاد : بسیار خوب. اگر این نقطه را M بنامیم چون روی خط $y = ۲x + ۱$ قرار دارد مختصات آن باید به شکل $M(a, ۲a+۱)$ باشد.

صادق : همچنین باید داشته باشیم $MA = MB$، یعنی

$$MA = \sqrt{(a-۳)^۲ + (۲a+۱-۰)^۲} = \sqrt{(a+۱)^۲ + (۲a+۱-۰)^۲} = MB$$

با به‌توان دو رساندن طرفین این رابطه خواهیم داشت :

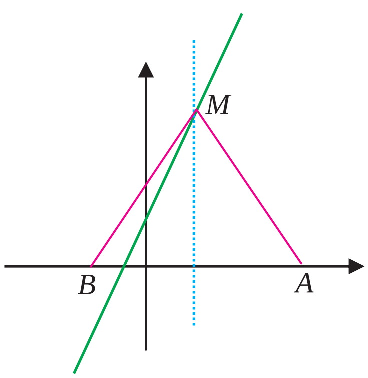
$$(a-۳)^۲ + (۲a+۱)^۲ = (a+۱)^۲ + (۲a+۱)^۲$$

$$a^۲ - ۶a + ۹ = a^۲ + ۲a + ۱$$

$$a = ۱$$

سجاد : پس جواب مسئله نقطه $M(۱,۳)$ است.

صادق : این مسئله را می‌توانیم به‌صورت هندسی نیز حل کنیم. نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند روی عمودمنصف پاره‌خط واصل آن دو نقطه قرار دارند. پس نقطه M روی عمودمنصف AB است؛ از طرف دیگر M روی خط $y = ۲x + ۱$ است، پس M محل برخورد این دو خط است.



تذکر :

برخی معادلات دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند که آن‌ها را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آن‌ها با توان رسانی طرفین معادله و در صورت لزوم تکرار آن و ساده کردن، معادله‌ای بدون عبارت گنگ به‌دست می‌آید که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده باید در معادلهٔ اصلی آزمایش شوند زیرا عملیات توان رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کنند.

مثال

معادلهٔ $\sqrt{۱۵+\sqrt{۲x+۸۰}}=۵$ را حل می کنیم.

با به‌توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت :

$$۱۵+\sqrt{۲x+۸۰}=۲۵$$
$$\sqrt{۲x+۸۰}=۱۰$$

دوباره طرفین معادلهٔ اخیر را به توان ۲ می‌رسانیم. خواهیم داشت :

$$۲x+۸۰=۱۰۰ \Rightarrow x=۱۰$$

جواب به‌دست آمده را در معادلهٔ اصلی قرار می‌دهیم :

$$\sqrt{۱۵+\sqrt{۲۰+۸۰}}=\sqrt{۱۵+۱۰}=\sqrt{۲۵}=۵$$

تساوی برقرار است و $x=۱۰$ جواب معادله می‌باشد.

مثال

آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر ۶ باشد.

اگر عدد مورد نظر را x بنامیم باید تساوی $x+\sqrt{x}=۶$ برقرار شود. یعنی

$$\sqrt{x}=۶-x$$

با به توان ۲ رساندن طرفین معادله خواهیم داشت :

$$x=۳۶+x^۲-۱۲x$$

با حل این معادله خواهیم داشت :

$$x=۹ \quad , \quad x=۴$$

با آزمایش جواب‌ها در معادلهٔ اصلی دیده می‌شود، $x=۹$ نمی‌تواند مورد قبول واقع شود و تنها جواب معادله $x=۴$ می‌باشد.

$$x=۴:\quad ۴+\sqrt{۴}\overset{?}{=}۶$$
$$۴+۲\overset{?}{=}۶$$
$$۶=۶$$
✓

$$x=۹:\quad ۹+\sqrt{۹}\overset{?}{=}۶$$
$$۹+۳\overset{?}{=}۶$$
$$۱۲=۶$$
×

بحث در کلاس

چرا یکی از جواب‌های معادلهٔ اخیر در معادلهٔ اولیه صدق نمی‌کند؟ این جواب اضافه به چه دلیل ایجاد شده است؟

تمرین در کلاس

هریک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{۵q-۱}+۳=۰$

ب) $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x+۴}$

ج) $\sqrt{۳-۳p}=۳+\sqrt{۳p+۲}$

مسائل

۱ــ معادلات رادیکالی زیر را حل کنید.

الف) $\sqrt{۱-x^۲}=x$

ب) $\dfrac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x$

ج) $۲+\sqrt{۱+x}=\sqrt{x}$

۲ــ بدون حل معادلهٔ $\sqrt{۱-x}+\sqrt{۲-x}+۳=۰$ توضیح دهید چرا مجموعهٔ جواب تهی است؟

۳ــ در هر یک از فرمول‌های زیر متغیر خواسته شده را بر حسب سایر متغیرها بیابید.

الف) $V=\sqrt{\dfrac{۲k}{m}}\quad,\quad k=?$

ب) $F=\dfrac{۱}{۲\pi}\sqrt{LC}\quad,\quad L=?$

ج) $I=\dfrac{nE}{R+nr}$, $n=?$

د) $\dfrac{P_1V_1}{T_1}=\dfrac{P_2V_2}{T_2}$, $T_1=?$

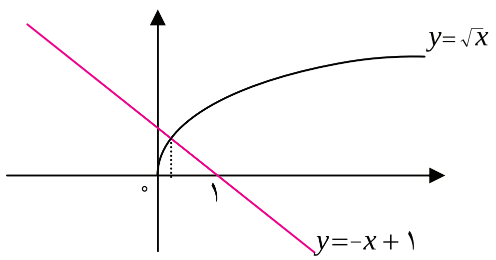
ه) $A=p(1+i)^2$, $i=?$

حل معادلات به روش هندسی

تاکنون با حل انواعی از معادلات با روش‌های جبری آشنا شده‌ایم. در اینجا می‌خواهیم با روش دیگری از حل معادلات آشنا شویم که از برخی لحاظ بر روش جبری ارجحیت دارد. دراین روش مقدار تقریبی جواب‌ها و تعداد جواب‌ها آسان‌تر مشخص می‌شوند. حتی در برخی مثال‌ها حل جبری امکان‌پذیر نیست ولی حل با روش هندسی امکان‌پذیر است.

فعالیت ۸

نمودار دو تابع $y=\sqrt{x}$ و $y=-x+1$ در روبرو رسم شده است.



۱ــ اگر طول نقطه تلاقی این دو نمودار a باشد، نشان دهید a یک جواب معادله $-x+1=\sqrt{x}$ است.

۲ــ برعکس اگر بدانیم عددی مانند a یک جواب معادله $-x+1=\sqrt{x}$ است، آیا a طول یکی از نقاط تلاقی دو نمودار است؟

۳ــ از طریق شکل بالا استدلال کنید که معادله $\sqrt{x}=-x+1$ فقط یک جواب دارد که درفاصله $[0, 1]$ قرار دارد.

۴ــ مقدار دقیق جواب معادله $\sqrt{x}=-x+1$ چیست؟

به کمک فعالیت بالا قضیه زیر به‌دست می‌آید.

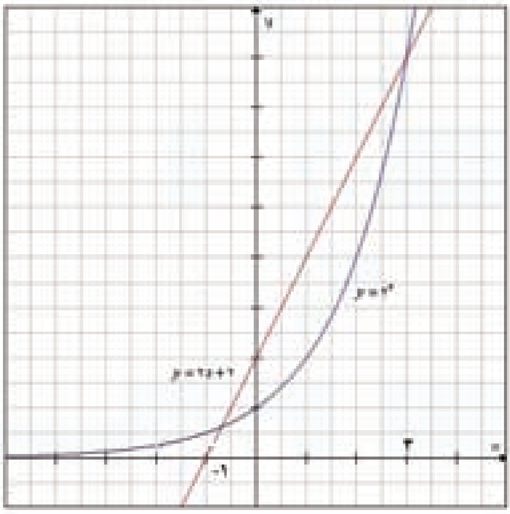
قضیه :

اگر $y=f(x)$ و $y=g(x)$ دو تابع باشند؛ طول نقاط محل تلاقی نمودار این دو تابع جواب‌های معادله $f(x)=g(x)$ خواهند بود و برعکس هر جواب این معادله، طول یکی از نقاط محل تلاقی نمودار این دو تابع است.

این شیوهٔ حل معادلات را که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی جواب‌ها قابل تشخیص است، روش هندسی (نموداری) حل معادلات می‌نامند.

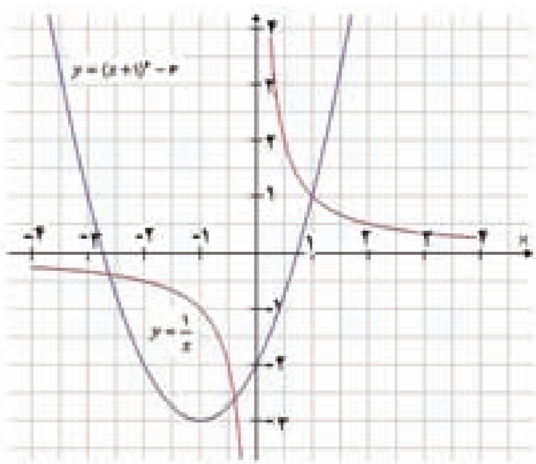
مثال

معادلهٔ $2^x = 2x + 2$ را به روش هندسی حل می‌کنیم.
کافی است نمودار توابع $y = 2^x$,$y = 2x + 2$ را رسم کنیم و محل تلاقی نمودارها را به‌دست آوریم.
از روی نمودار واضح است که معادله دارای جوابی بین ۱– و صفر و یک جواب مثبت است و معادله فقط همین دو جواب را دارد.
جواب مثبت این معادله ۳ است ولی جواب دیگر را به‌طور دقیق نمی‌توانیم به‌دست آوریم اما با روش آزمون و خطا که در سال‌های قبل آموخته‌اید می‌توانید تقریبات اعشار جواب را با دقت مورد نظر به‌دست آورید.



مثال

تعداد جواب‌های معادلهٔ $x^2 + 2x - 2 = \frac{1}{x}$ را از طریق هندسی می‌یابیم، سپس با استفاده از روش جبری جواب‌های معادله را به‌طور دقیق تعیین می‌کنیم.



نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ را می‌شناسید. توجه داریم که این تابع در $x = 0$ تعریف نمی‌شود و شامل دو شاخه در ربع اول و سوم می‌باشد. با استفاده از رسم تابع $y = x^2$ و انتقال نمودار آن، تابع $y = x^2 + 2x - 2$ را رسم می‌کنیم. توجه داریم که

$$y = x^2 + 2x - 2 = (x+1)^2 - 3$$

از روی شکل می‌توان حدس زد که یکی از جواب‌ها ۱ خواهد شد و با جای‌گذاری $x = 1$ در معادله، درستی این حدس تأیید می‌شود. شکل نشان می‌دهد که این معادله دو جواب دیگر هم دارد که منفی هستند. اگر مقدار دقیق جواب‌ها را بخواهیم ابتدا با ضرب طرفین معادله در x آن را به‌صورت $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$ می‌نویسیم. چون چندجمله‌ای $x^3 + 2x^2 - 2x - 1$ بر $x - 1$ بخش‌پذیر است، داریم:

$$x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = (x-1)(x^2 + 3x + 1) = 0$$

در نتیجه $x = 1$, $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

تمرین در کلاس

۱ــ معادله $\sqrt{x+۱}-x^{۲}=۲x+۱$ را به روش هندسی و جبری حل کنید و جواب‌های به‌دست آمده را مقایسه کنید.

۲ــ تعداد جواب‌های معادله $x-۲\sin x=۰$ را مشخص کنید.

۳ــ از طریق جبری و هندسی نشان دهید معادله $\sqrt{x}=x+۱$ جواب ندارد.

مسائل

۱ــ با روش هندسی به‌طور تقریبی هر یک از معادلات زیر را حل کنید و در صورت امکان جواب‌های دقیق را با روش جبری به‌دست آورید.

الف) $\sqrt{x-۱}=x-۳$ ب) $\dfrac{۲x-۱}{x}=۵-x$

ج) $۲^{x}=x^{۲}$ د) $\sqrt{x}+۲x=x^{۲}+۲$

۲ــ به‌روش نقطه یابی نمودار تابع $y=x^{۳}$ را رسم کنید. سپس با استفاده از انتقال نمودار تابع $y=(x+۱)^{۳}$ را رسم کنید و جواب‌های معادلهٔ $(x+۱)^{۳}=-۳x+۵$ را با روش هندسی به‌طور تقریبی به‌دست آورید.

قدرمطلق و ویژگی‌های آن

در سال‌های قبل با مفهوم قدرمطلق و تابع قدرمطلق آشنا شدید. اگر a عددی حقیقی باشد، قدرمطلق a را با $|a|$ نشان می‌دهیم. اگر a مثبت یا صفر باشد، $|a|$ برابر خود عدد a و اگر a منفی باشد، $|a|$ برابر قرینه a است. این مطلب را به‌صورت زیر می‌توان خلاصه کرد.

$$|a|=\begin{cases} a & a\geq ۰ \\ -a & a<۰ \end{cases}$$

تمرین در کلاس

۱ــ حاصل هریک از عبارات زیر را بدون علامت قدرمطلق بنویسید.

الف) $|-۲-(-۳)|$ ب) $|۱-\sqrt{۲}|$ ج) $|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|$

۲ــ عبارات زیر را به‌ساده‌ترین صورت بنویسید.

الف) $\sqrt{۴-۲\sqrt{۳}}$ ب) $\sqrt{x^{۴}+۲x^{۲}+۱}$

۳ــ عبارت «فاصلهٔ بین دو عدد x و a کمتر از ۰/۰۱ است» را با استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.

با توجه به‌تعریف قدرمطلق می‌توان عبارات قدرمطلقی را ساده نمود.

مثال

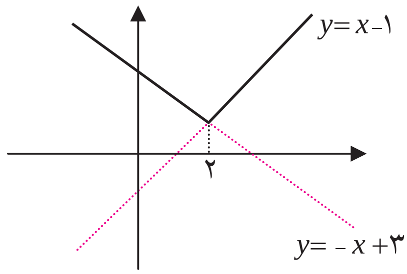
نمودار $y=|x-۲|+۱$ را رسم می‌کنیم.

با رسم نمودار این تابع از طریق انتقال‌های مناسب نمودار $y=|x|$ آشنا هستید، ولی در اینجا می‌خواهیم با استفاده از مفهوم قدرمطلق و ساده کردن عبارت این کار را انجام دهیم.

ابتدا جدول تعیین علامت $x-۲$ را تشکیل می‌دهیم و از طریق آن علامت $x-۲$ را تشخیص می‌دهیم.

x		۲	
$x-۲$	$-$	۰	$+$
$\lvert x-۲\rvert$	$-x+۲$		$x-۲$
$\lvert x-۲\rvert+۱$	$-x+۳$		$x-۱$

$$y=|x-۲|+۱=\begin{cases}-x+۳ & x\leq ۲\\ x-۱ & ۲<x\end{cases}$$



تمرین در کلاس

فرض کنید a و b دو عدد حقیقی باشند:

۱ــ با توجه به این که $\sqrt{a^۲}=|a|$ نشان دهید $|ab|=|a||b|$

۲ــ با فرض $b\neq ۰$ و استفاده از قسمت قبل ثابت کنید: $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}$

۳ــ اگر $|x|\leq c$ $(c\geq ۰)$ با استفاده از استدلال زیر توضیح دهید چگونه می‌توان نتیجه گرفت: $-c\leq x\leq c$.

$$|x|\leq c\Rightarrow |x|^۲\leq c^۲\Rightarrow x^۲\leq c^۲\Rightarrow x^۲-c^۲\leq ۰\Rightarrow (x-c)(x+c)\leq ۰$$

x		$-c$		c	
$(x-c)(x+c)$	$+$	۰	$-$	۰	$+$

۴ــ اگر $c \geq ۰$ و $-c \leq a \leq c$ ثابت کنید $|a| \leq c$.

مسائل

۱ــ برای هر عدد حقیقی a ثابت کنید $|-a| = |a|$ و $|a|^۲ = a^۲$ و $-|a| \leq a \leq |a|$

۲ــ برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید : $-|a|-|b| \leq a + b \leq |a| + |b|$ و نتیجه بگیرید :

$$|a+b| \leq |a| + |b|$$

(خاصیت بالا را خاصیت نامساوی مثلث می‌نامند.)

۳ــ برای هر دو عدد حقیقی x و y ثابت کنید : $|y| \leq |x| + |y-x|$ و نتیجه بگیرید :

$$|y| - |x| \leq |y-x|$$

۴ــ اگر $c > ۰$ و $|a| > c$ نشان دهید $a > c$ یا $a < -c$.

۵ــ به کمک تعیین علامتِ عبارت‌های داخل قدر مطلق، ضابطهٔ توابع زیر را بدون استفاده از قدرمطلق بنویسید.

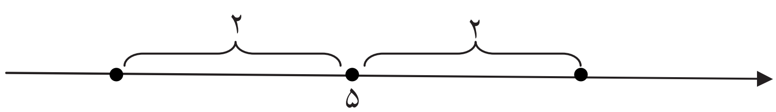
الف) $f(x) = x|x|$ ب) $f(x) = |x+۱|-۲$ ج) $y = |x-۱|+|x+۲|$

معادلات قدرمطلقی

حل یک مسئله

فاصله چه نقاطی روی محور اعداد از نقطه متناظر ۵ برابر ۲ است؟

برای حل این مسئله ابتدا شکل زیر را رسم می‌کنیم.



اگر طول نقطه جواب را x بنامیم شرط مسئله به‌معنای آن است که $|x-۵| = ۲$. این یک معادله بر حسب مجهول x است. شرط $|x-۵| = ۲$ به‌معنای آن است که $x-۵ = ۲$ یا $x-۵ = -۲$. جواب‌های هر کدام از این دو معادله، جواب معادله $|x-۵| = ۲$ می‌باشند. در نتیجه $x = ۷$ و $x = ۳$ دو جواب آن معادله هستند.

به‌طور کلی قضیه زیر برقرار است.

قضیه :

جواب‌های یک معادله به‌صورت $|f(x)| = |g(x)|$ همان جواب‌های دو معادله $f(x) = g(x)$ و $f(x) = -g(x)$ روی هم هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارات قدرمطلق هستند معادلات قدرمطلقی گویند.

برای یافتن جواب این معادلات با استفاده از خواص قدرمطلق و حذف علامت قدرمطلق معادلهٔ ساده شده را حل می‌کنیم.

مثال

۱ : معادلهٔ $|x|=|۲x-۳|$ را حل می‌کنیم. جواب‌های این معادله همان جواب‌های دو معادله $x = \pm(۲x-۳)$ هستند که نتیجه می‌شود ۳ و ۱ جواب‌های آن هستند.

۲ : معادلهٔ $|x+۱| = ۲x+۴$ را حل می‌کنیم.

توجه داریم که سمت چپ عبارت متناظر معادله نامنفی است پس باید داشته باشیم : $۲x + ۴ \geq ۰$ در نتیجه $x \geq -۲$. حال دو معادله $x+۱ = \pm(۴+۲x)$ را حل می‌کنیم.

$$x+۱=۴+۲x \Rightarrow x=-۳$$

این جواب قابل قبول نیست، زیرا باید $x \geq -۲$.

$$x+۱=-(۴+۲x) \Rightarrow x=-\frac{۵}{۳}$$

این جواب قابل قبول است.

تمرین در کلاس

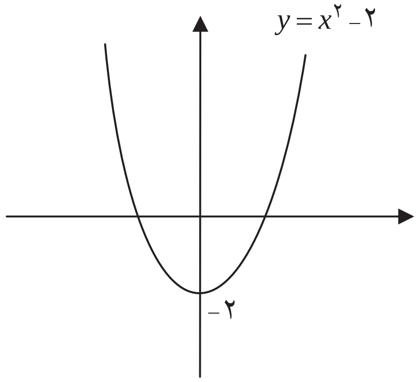
معادلات قدرمطلقی زیر را حل کنید.

الف) $||x|-۱| = ۵$

ب) $|۲x-۱| + |x| = ۷$

ج) $x|x| = -۴$

فعالیت ۹



در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=x^2-2$ آمده است.

۱ــ با توجه به‌علامت x^2-2 نمودار تابع $f(x)=|x^2-2|$ را رسم کنید.

۲ــ نمودار $y=2$ را رسم کنید و محل تلاقی آن با نمودار تابع $f(x)=|x^2-2|$ را مشخص کنید.

۳ــ جواب‌های معادلهٔ $|x^2-2|=2$ را با استفاده از بند ۲ به‌طور تقریبی تعیین کنید.

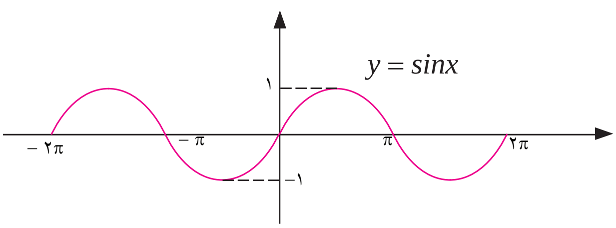
۴ــ به‌روش جبری معادلهٔ $|x^2-2|=2$ را حل کرده و با جواب‌های به‌دست آمده در بند ۳ مقایسه کنید.

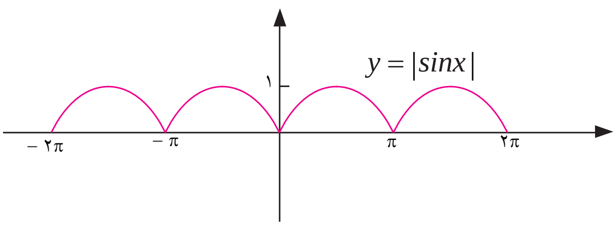
با توجه به تجربه بالا در رسم نمودار تابع $y=|x^2-2|$ می‌توانید رابطه بین نمودار دو تابع $f(x)$ و $|f(x)|$ را به‌دست آورید.

در بازه‌هایی که نمودار $f(x)$ بالای محورxها است $f(x)$ مثبت است و$|f(x)|=f(x)$. یعنی در این بازه‌ها نمودار $f(x)$ و $|f(x)|$ بر هم منطبق است. اما در بازه‌هایی که نمودار $f(x)$ پایین محور xها است $f(x)$ منفی است و $|f(x)|=-f(x)$. یعنی در این بازه‌ها نمودار $|f(x)|$ تصویر آینه‌ای نمودار $f(x)$ است.

تذکر :

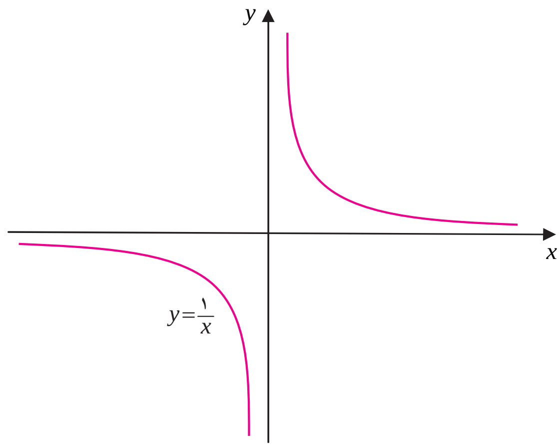
برای رسم نمودار $|f(x)|$ کافی است نمودار $f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور xها است تصویر آینه‌ای نمودار $f(x)$ را رسم کنیم.

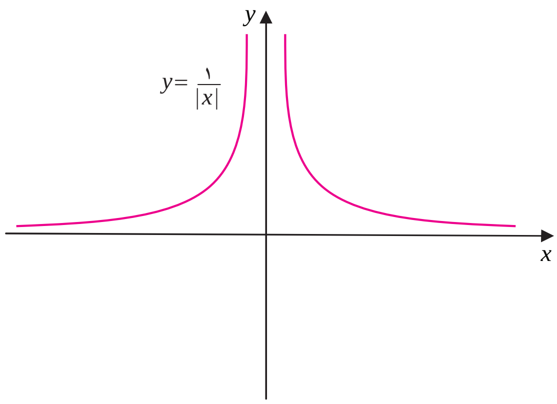




مثال

۱ : نمودار تابع $y=\frac{۱}{|x|}$ را رسم می‌کنیم.

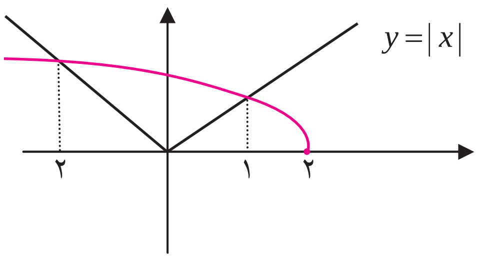




۲ : به روش جبری و نموداری (هندسی) معادلهٔ $\sqrt{۲-x}=|x|$ را حل می‌کنیم.

در روش جبری با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت : $x^۲=۲-x$ در نتیجه $x^۲+x-۲=۰$ که جواب‌های آن $x=-۲$, $x=۱$ هستند که هر دو در معادلهٔ اصلی صدق می‌کنند پس معادله دو جواب دارد.

در روش هندسی نمودارهای توابع $y=|x|$ و $y=\sqrt{۲-x}$ را رسم می‌کنیم. طول‌های محل تلاقی دو نمودار جواب‌های معادله‌اند.

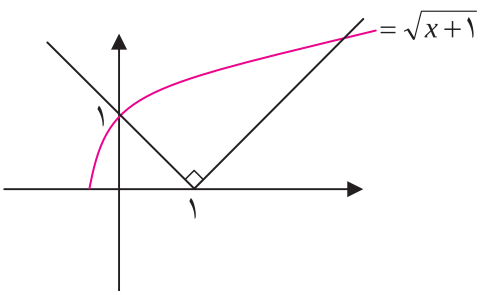


تمرین در کلاس

۱ــ به روش هندسی جواب‌های معادلهٔ $|\sin x|=\frac{۱}{۲}$ را در بازه $[-\pi , \pi]$ به‌دست آورید.

۲ــ معادلهٔ $|x^۲-۱|=۲x-|x|$ را با روش هندسی حل کنید.

۳ــ در شکل روبه‌رو نمودار تابع $y=\sqrt{x+۱}$ و یک تابع قدرمطلقی که نمودار آن نسبت به خط $x=۱$ متقارن است دیده می‌شود. معادله‌ای که جواب‌های آن طول نقاط تلاقی این دو منحنی است را تشکیل دهید و به‌روش جبری آن را حل کنید.



مسائل

۱ــ هریک از معادلات قدرمطلقی زیر را حل کنید و مجموعهٔ جواب آن را مشخص کنید.

الف) $|۲t-۱|-۳=۰$ ب) $|y^۲-۲|=۷$ ج) $|۲x-۳|=۳-۲x$

۲ــ نمودار هریک از روابط زیر را رسم کنید. سپس به ازای $y=۳$ معادله به‌دست آمده را با روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y=|۲x-۴|$ ب) $y=|x|+|۱-x|$ ج) $y=x+\frac{x}{|x|}$

نامعادلات ــ نامعادلات قدرمطلقی

در سال قبل با تعیین علامت چندجمله‌ای‌ها و استفاده از آن در حل نامعادله‌های درجهٔ دوم آشنا شدید. هر نامعادلهٔ درجه دوم را با استفاده از جدول تعیین علامت و خواص نامساوی‌ها می‌توان حل نمود.

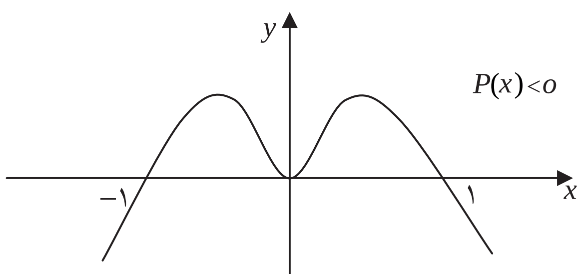
تمرین در کلاس

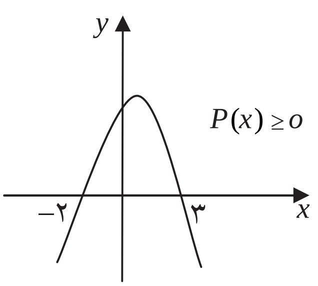
۱ــ هریک از نامعادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^۲-۵x+۶\le ۰$ ب) $(۱+x^۲)(۱-x^۲)\le ۰$

د) $۱+\frac{۱}{x}<x$ ج) $(۱-x)(x+۲)>۲x^۲-۱$

۲ــ در هر یک از حالت‌های زیر نمودار تابعی، مانند $P(x)$ داده شده است. مجموعه جواب نامعادلهٔ داده شده را مشخص کنید.





نامعادلاتی که دارای عبارت‌های قدرمطلقی هستند، **نامعادلات قدرمطلقی** می‌نامند. برای حل این‌گونه نامعادلات عموماً از دو خاصیت مهم قدرمطلق استفاده می‌کنند.

اگر k عددی مثبت باشد، نامساوی $|u|\leq k$ معادل با آن است که $-k\leq u\leq k$.

و نامساوی $|u|\geq k$ معادل است با آن که $u\geq k$ یا $-u\geq k$.

مثال

۱ : نامعادلهٔ $|۲x-۱|\leq ۷$ را حل می‌کنیم.

$$|۲x-۱|\leq ۷\Rightarrow -۷\leq ۲x-۱\leq ۷\Rightarrow -۶\leq ۲x\leq ۸\Rightarrow -۳\leq x\leq ۴$$

مجموعه جواب بازه $[-۳,۴]$ می‌باشد زیرا نتیجه‌گیری‌های بالا در جهت عکس نیز برقرارند.

۲ : نامعادلهٔ $|۳x-۶|\geq ۵$ را حل می‌کنیم.

مجموعه جواب این نامعادله، اجتماع مجموعه جواب‌های دو نامعادله $۳x-۶\geq ۵$ و $-(۳x-۶)\geq ۵$ است. مجموعه جواب اولی بازه $(-\infty,\frac{۱}{۳}]$ و مجموعه جواب دومی $[\frac{۱۱}{۳},\infty)$ است و اجتماع این دو بازه مجموعه جواب نامعادله اصلی است.

۳ : نامعادلهٔ $|۲x+۱|\geq ۳$ را حل می‌کنیم.

این نامعادله را می‌توان مانند مثال قبل حل کرد. اما از روش دیگری هم می‌توانیم استفاده کنیم. با توجه به مثبت بودن طرفین نامساوی، طرفین را به توان دو می‌رسانیم و نامعادله را حل می‌کنیم.

$$(۲x+۱)^۲\geq ۹\Rightarrow ۴x^۲+۴x+۱\geq ۹\Rightarrow ۴x^۲+۴x-۸\geq ۰\Rightarrow x^۲+x-۲\geq ۰$$
$$\Rightarrow (x+۲)(x-۱)\geq ۰$$

برای حل نامعادلهٔ اخیر از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم.

x		-۲		۱	
$P=(x+۲)(x-۱)$	+	۰	−	۰	+
$۰\leq P$	جواب	جواب		جواب	جواب

مجموعه جواب $=(-\infty,-۲]\cup[۱,+\infty)$

توجه داشته باشید که برای دو عدد مثبت a و b شرط $a\leq b$ معادل با آن است که $a^۲\leq b^۲$.

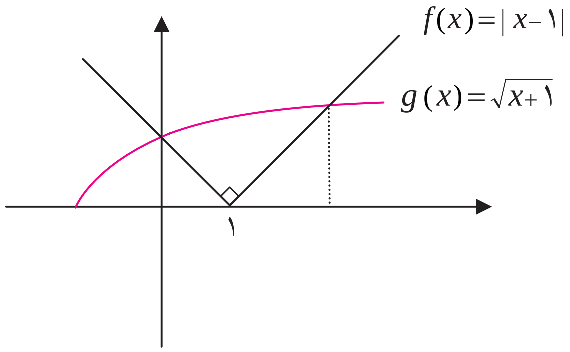
تمرین در کلاس

مجموعه جواب هریک از نامعادلات زیر را مشخص کنید.

الف) $|x-۱|\leq\sqrt{x+۱}$ ب) $|۲-۳x|>۵$

حل نامعادلات از طریق نموداری (هندسی)

فعالیت ۱۰



در شکل روبه‌رو نمودار توابع $f(x)=|x-۱|$ و $g(x)=\sqrt{x+۱}$ رسم شده است.

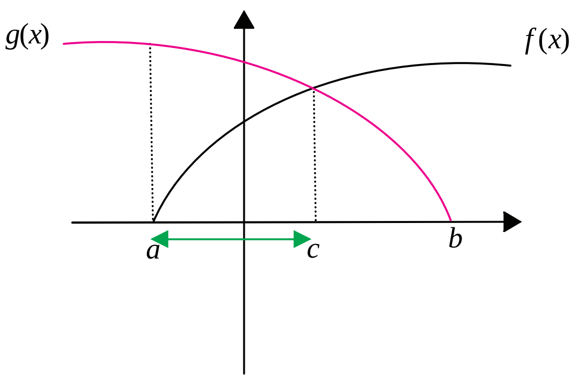
۱ــ نقاط x که $f(x)<g(x)$ را از طریق شکل مشخص کنید.

۲ــ مجموعهٔ نقاط x که در آن نقاط نمودار f زیر نمودار g قرار می‌گیرد را مشخص کنید.

۳ــ مجموعه نقاط بند (۲) با نقاط بند (۱) چه رابطه‌ای دارند؟

یک نامعادلهٔ دلخواه را می‌توان به شکل $f(x)<g(x)$ نوشت که f و g دو تابع می‌باشند. در حالت کلی حل جبری چنین نامعادله‌ای ممکن است بسیار پیچیده و حتی ناممکن باشد. اما اگر بتوانیم نمودارهای این توابع را رسم کنیم، مجموعه جواب این نامعادله دقیقاً برابر مجموعه نقاطی مانند x است که در این نقاط نمودار f زیر نمودار g قرار می‌گیرد.

برای مشخص کردن مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(x)<g(x)$ پس از رسم توابع f و g مقادیری از دامنه مشترک دو تابع را مشخص می‌کنیم که عرض نقاط نمودار تابع f از عرض نقاط نمودار تابع g کمتر باشد. در شکل زیر دامنهٔ مشترک دو تابع $[a, b]$ می‌باشد. فقط در بازهٔ (a, c)، عرض نقاط نمودار f از عرض نقاط نمودار g کمتر است، پس جواب نامعادله بازهٔ (a, c) می‌باشد.



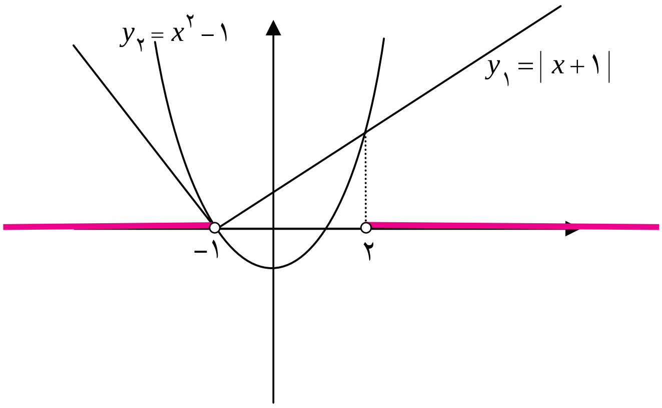
مثال

نامعادلهٔ $|x+۱| < x^۲ - ۱$ را با استفاده از روش نموداری (هندسی) حل می‌کنیم.

نمودار توابع $y_۱ = |x+۱|$ و $y_۲ = x^۲ - ۱$ را رسم می‌کنیم.

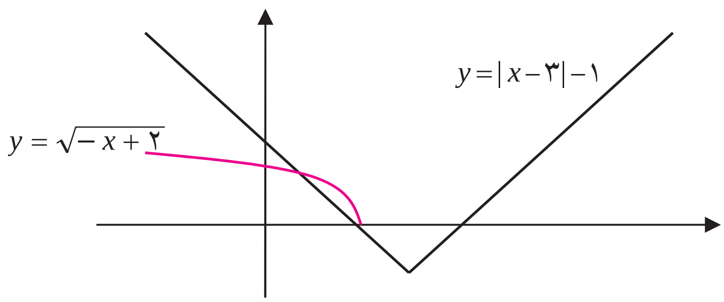
باید مجموعه نقاطی را تعیین کنیم که در آن نقاط نمودار $y_۱$ زیر نمودار $y_۲$ واقع شده باشد.

اجتماع دو بازه $(-\infty, -۱)$ و $(۲, \infty)$ مجموعه جواب نامعادله است.



تمرین در کلاس

با توجه به نمودارهای رسم شده، نامعادلهٔ $\sqrt{-x+۲} \geq |x-۳| - ۱$ را حل کنید.



مسائل

نامعادلات زیر را با روش جبری حل کنید.

۱) $x^۳ - ۲x^۲ + x \geq ۰$

۲) $\frac{۲x-۱}{x} > ۱$

۳) $\frac{x+۱}{x} - \frac{x}{x-۱} \leq ۲$

۴) $|x-۲| \leq x$

نامعادلات زیر را با روش هندسی حل کنید و مجموعه جواب آن‌ها را مشخص کنید.

۵) $x^۲ \leq ۲^x$

۶) $\sqrt{x-۱} < |x-۱|$

۷) $\frac{۱}{x} < \sqrt{x}$

نامعادلات زیر را با روش هندسی و جبری حل کنید.

۸) $x+۱ < |x|$

۹) $|x^۲ - ۱| \leq |x+۱|$

۱۰) $|x| + |x-۱| \leq ۵$

برق تولید شده توسط توربین‌های بادی تابعی از سرعت باد است.

$$P(v) = \frac{8v^3}{125}$$

تابع

۱. تابع: یادآوری وتکمیل
۲. رسم نمودار توابع
۳. اعمال جبری روی توابع
۴. ترکیب توابع
۵. توابع زوج و توابع فرد و توابع صعودی و توابع نزولی
۶. توابع یک به یک و توابع وارون
۷. توابع چند جمله‌ای و توابع متناوب
۸. توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

تابع : یادآوری و تکمیل

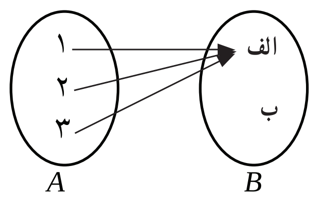
در سال گذشته با مفهوم تابع و برخی از انواع آن و نیز کاربردهایی از تابع آشنا شدید. همان گونه که دیدید یک تابع از مجموعه A به مجموعه B رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که به هر عضو A دقیقاً یک عضو از B را نسبت می‌دهد. در اینجا تعریف تابع را با دقت بیشتری توضیح می‌دهیم.

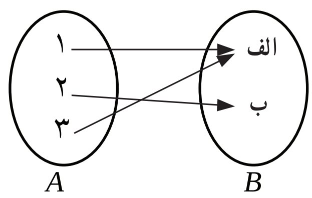
تمرین در کلاس

فرض کنید محصولات یک کارخانه از نظر کیفیت در دو نوع «الف» و «ب» دسته بندی شوند.

الف) چرا رابطه‌ای که به هر محصول، کیفیت آن را نسبت می‌دهد یک تابع است؟

ب) فرض کنید سه محصول ۱، ۲ و ۳ از تولیدات این کارخانه را اختیار کرده‌ایم. در زیر دو تا از توابعی که از A به B می‌تواند برقرار شود را نشان داده‌ایم.





بردهای این دو تابع با هم چه تفاوتی دارند؟

ج) همه توابع ممکن از A به B را با نمودار ون نشان دهید. در کدام‌یک از این توابع برد تابع همان مجموعه B می‌شود؟

تذکر :

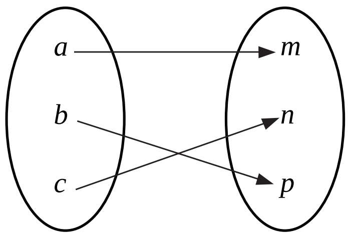
از تعریف تابع نتیجه می‌شود که اگر تابعی از A به B با نمودار ون نمایش داده شده باشد،

الف) از هر عضو A باید دقیقاً یک پیکان خارج شود.

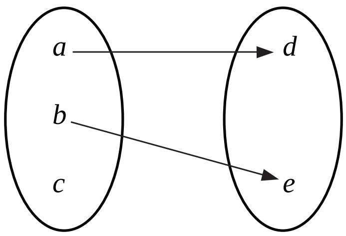
ب) لازم نیست که به هر عضو B دقیقاً یک پیکان وارد شود. ممکن است به یک عضو B یک پیکان، یا بیش از یک پیکان وارد شود یا آن که اصلاً پیکانی وارد نشود.

تمرین در کلاس

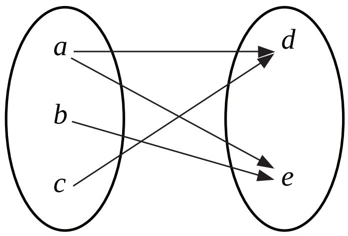
کدام‌یک از نمودارهای زیر یک تابع را مشخص می‌کنند؟



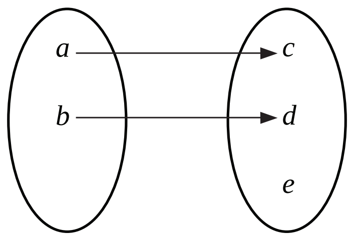
(الف)



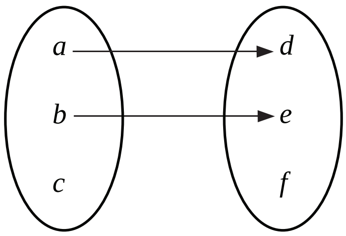
(ب)



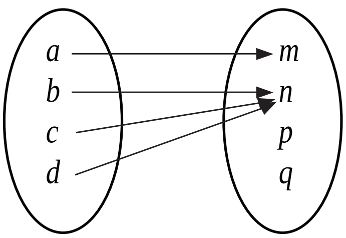
(ج)



(د)



(هـ)



(و)

تذکر :

اگر f تابعی از A به B باشد، دامنهٔ آن A است ولی لزومی ندارد که برد آن همان مجموعهٔ B باشد. مجموعهٔ B را هم دامنه یا مقصد تابع f می‌نامند. برد یک تابع زیر مجموعه‌ای از هم دامنهٔ آن است و ممکن است مساوی هم دامنه نیز بشود.

فعالیت ۱

۱ــ جدول زیر را کامل کنید و نمودار توابع داده شده را رسم کنید.

تابع	$s(x)=x-2$	$t(x)=x-2$	$h(x)=4x+1$	$g(x)=x^2$	$f(x)=x^2$
دامنه	$[2,3]$	IR	IR	اعداد حقیقی منفی	اعداد حقیقی مثبت
برد					

۲ــ شباهت‌ها و تفاوت‌های این توابع را مشخص کنید.

به طور کلی اگر f تابعی از مجموعه A به مجموعه B باشد، می‌نویسیم : $f:A \longrightarrow B$

این نمادگذاری نشان می‌دهد که f تابعی با دامنه A و مقادیر در B است، ولی ضابطه f در این نمادگذاری مشخص نمی‌شود و جداگانه باید ارائه شود. به طورمثال تابع g داده شده در فعالیت صفحهٔ قبل را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر نمایش داد :

الف) $g:IR^- \longrightarrow IR^+$ ، $g(x)=x^۲$ یا   ب) $g:IR^- \longrightarrow IR$ ، $g(x)=x^۲$

در هر دو نمایش دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی منفی(IR^-) است و در طرف چپ پیکان آمده است. اما در نمایش (الف) هم دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی مثبت (IR^+) است که در طرف راست پیکان آمده است و در نمایش (ب) هم دامنه تابع، مجموعه اعداد حقیقی است که در طرف راست پیکان آمده است. در نمایش دوم به جای مجموعه اعداد حقیقی هر مجموعه دیگری را که شامل برد تابع باشد را نیز می‌توان نوشت.

در هر تابع سه ویژگی زیر اهمیت دارند :

۱ــ دامنه   ۲ــ هم دامنه   ۳ــ دستور یا قانونی که نحوه ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد.

هنگامی که دستور یا قانون تابع در قالب یک عبارت جبری قابل بیان باشد، آن را یک ضابطه جبری می‌نامیم.

مثال

۱ : همه توابع داده شده در فعالیت قبل دارای ضابطه جبری هستند. توجه داشته باشید که ضابطه یک تابع مشخص نمی‌کند که دامنه آن تابع چه باید باشد و دامنه تابع مستقلاً باید ارائه شود.

۲ : تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{۲-x}$ را اگر با دامنه $[۰,۱]$ در نظر بگیریم، مقدارهای آن نیز در اعداد مثبت می‌باشند، در این صورت می‌توانیم بنویسیم :

$$f:[۰,۱] \longrightarrow (۰,\infty)$$
$$f(x)=\sqrt{۲-x}$$

برد این تابع مجموعه $\left[۱,\sqrt{۲}\right]$ است.

موارد زیادی پیش می‌آید که توابع را صرفاً با ارائه ضابطه معرفی می‌کنند و اشاره‌ای به دامنه نمی‌شود در این موارد طبق قرارداد دامنه تابع، بزرگترین مجموعه‌ای است که ضابطه ارائه شده، روی آن مجموعه تعریف شده است.

۳ : اگر $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ به عنوان تابع ارائه شده باشد و مستقیماً دامنه ارائه نشده باشد، طبق قرارداد دامنه آن بازه $[-۲,۲]$ است. زیرا این بازه بزرگترین مجموعه‌ای است که ضابطه $\sqrt{۴-x^۲}$ روی آن تعریف شده است.

همچنین دامنه تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{۲-x}$ بازه $(-\infty,۲]$ است.

مسائل

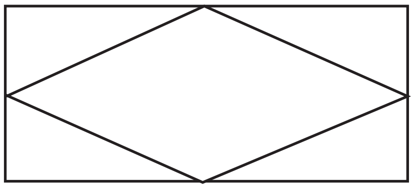
۱ــ اگر $A=\{a,b,c,d\}$ و $B=\{p,q\}$ چند تابع از A به B وجود دارد؟

۲ــ اگر مجموعه A دارای m عضو و مجموعه B دارای n عضو باشد، چند تابع از A به B وجود دارد؟

۳ــ تابعی مثال بزنید که دامنه آن $[-۲\,,+\infty)$ باشد.

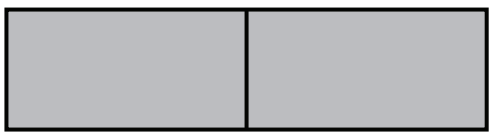
۴ــ دو تابع مانند f و g بسازید که دامنه هر دو برابر $[۲,۵]$ و برد هر دو $[۰,۴]$ و f یک به یک باشد ولی g یک به یک نباشد.

۵ــ در مستطیلی به عرض w و محیط ۴۰ متر یک لوزی محاط شده است. هر رأس لوزی دقیقاً بر وسط یکی از اضلاع منطبق است. مساحت لوزی را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیان کنید.



۶ــ اختلاف دو عدد برابر ۱۲ است. حاصل ضرب دو عدد را به عنوان تابعی از عدد کوچکتر بیان کنید.

۷ــ با ۱۵۰ متر نرده یک زمین مستطیل شکل را محصور و از وسط با نرده مانند شکل آن را به دو قسمت مساوی تقسیم کرده‌ایم. مساحت ناحیه محصور شده را به عنوان تابعی از عرض مستطیل بیابید.



۸ــ توابع زیر را رسم کنید.

ب) $g:[-۵,۵]\to IR$، $g(x)=|x|$

الف) $f:[۱,۲]\to IR$، $f(x)=۳x-۱$

۹ــ مساحت مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲۵ سانتی‌متر مربع است. طول وتر این مثلث را به عنوان تابعی از یک ضلع آن به دست آورید.

۱۰ــ اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=|x|$ درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $f(۲x)=۲f(x)$ ب) $g(۲x)=۲g(x)$

ج) $f(x+۲)=f(x)+۲$ د) $g(x+۲)=g(x)+۲$

تساوی دو تابع

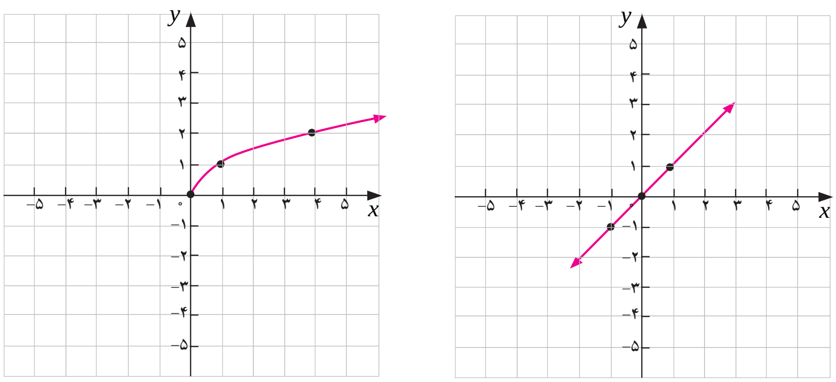
چه وقت دو تابع را مساوی می‌دانیم؟ برای مثال آیا دو تابع $f(x)=x$ و $g(x)=\frac{x^2}{x}$ با هم مساویند؟ اگر نمودار این دو تابع را رسم کنیم متوجه می‌شویم از هر نظر بر هم منطبقند غیر از آن که تابع g در صفر تعریف نشده است. همین تفاوت نشان‌دهنده آن است که این دو تابع دامنه یکسانی ندارند، پس نمی‌توانند مساوی باشند.

با توجه به ویژگی‌های مشخص کننده یک تابع، دو تابع وقتی با هم برابرند که نمودارهای آن‌ها دقیقاً بر هم منطبق باشند. به عبارت دیگر هیچ نقطه‌ای یافت نشود که به یکی از نمودارها تعلق داشته باشد ولی روی دیگری واقع نباشد.

با توجه به این تعریف، اگر دو تابع به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشند هنگامی با هم برابرند که مجموعه‌های زوج‌های مرتب داده شده با هم مساوی باشند.

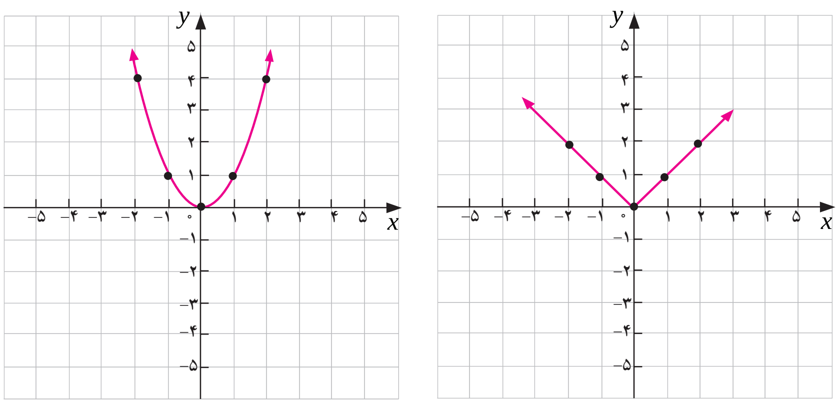
مثال

۱ : دو تابع که نمودار آن‌ها در زیر داده شده است مساوی نیستند.



به روشنی دیده می‌شود که این نمودارها یکی نیستند و حتی دامنه و برد این دو تابع با هم فرق می‌کنند.

۲ : دو تابع که نمودار آن‌ها در زیر داده شده است مساوی نیستند.



اگر چه دامنه و برد این دو تابع مساوی هستند، ولی نمودارهای این دو تابع با هم تفاوت دارند که نشان می‌دهد ضابطه آن‌ها با هم فرق می‌کنند. توجه داشته باشید که اگر دو تابع دارای دامنه‌ها و بردهای یکسان باشند، لزوماً با هم برابر نیستند.

تعریف :

دو تابع f و g را مساوی نامیم هرگاه :

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از دامنه f (یا g) $\qquad f(x)=g(x)$

تمرین در کلاس

در کدام سطر دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف)	$f=\{(1,2),(5,9)\}$	$g=\{(1,5),(2,9)\}$
ب)	$f:IR\longrightarrow IR$, $f(x)=x$	$g:IR\longrightarrow IR$, $g(x)=x^2$
ج)	$f:[1,2]\longrightarrow[1,4]$, $f(x)=x^2$	$g:IR\longrightarrow IR$, $g(x)=x^2$
د)	$f=\{(a,b),(c,d),(e,f)\}$	$g=\{(e,f),(a,b),(c,d)\}$
هـ)	$f(x)=x+1$	$g(x)=\dfrac{2x+2}{2}$
و)	$f(x)=\tan x$	$g(x)=\dfrac{\sin x}{\cos x}$
ز)	$f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$	$g(x)=x+2$

توابع چند ضابطه‌ای

فعالیت ۲

یک شرکت حمل و نقل کالا برای محاسبه هزینه حمل کالا، به شکل زیر عمل می‌کند. این شرکت در صورتی که وزن کل از ۲ تن کمتر باشد، به ازای هر کیلوگرم دو تومان کرایه دریافت می‌کند، اگر وزن کالا حداقل ۲ تن ولی از ۳ تن کمتر باشد، شرکت به ازای هر کیلوگرم ۳ تومان و در صورتی که وزن کالا لااقل ۳ تن و حداکثر ۵ تن باشد، شرکت برای هر کیلوگرم ۴ تومان دریافت می‌کند.

الف)کرایه حمل کالایی که ۲/۵ تن وزن دارد چقدر است؟

ب) جدول زیر را کامل کنید :

کرایه حمل	وزن کالا x
$۲x$	$۰ \le x < ۲۰۰۰$
...	...
...	...

ج) این جدول تابعی را مشخص می‌کند. نمودار این تابع را با انتخاب مقیاس مناسب رسم کنید.

د) اگر این تابع را f بنامیم با استفاده از (ب) ضابطه تابع را به طور کامل بنویسید.

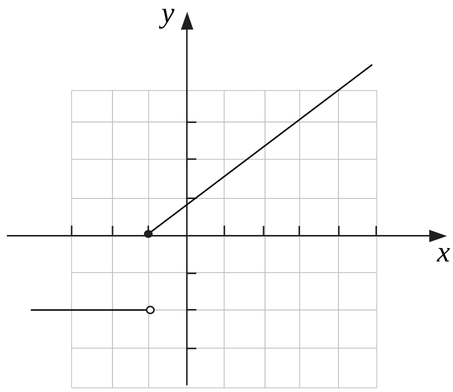
$$f(x)=\begin{cases} ۲x & ۰ \le x < ۲۰۰۰ \\ ..... & ۲۰۰۰ \le x < ۳۰۰۰ \\ ..... & ۳۰۰۰ \le x \le ۵۰۰۰ \end{cases}$$

توابعی که در بخش‌های مختلف از دامنه آن، با ضابطه‌های مختلف تعریف می‌شوند توابع چند ضابطه‌ای می‌نامند. قبلاً با نمونه‌هایی از این توابع برخورد داشته‌اید. برای مثال تابع قدر مطلق $f(x)=|x|$ یک تابع چند ضابطه‌ای است که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت.

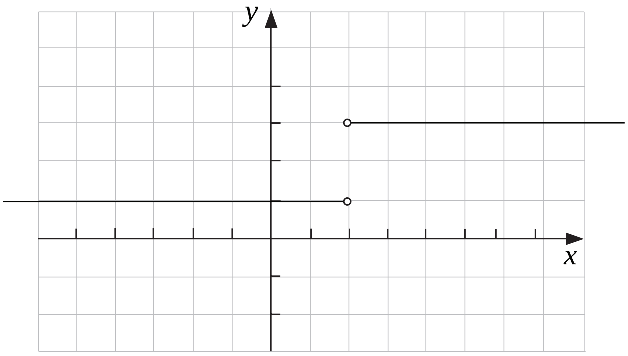
$$f(x)=\begin{cases} -x & x < ۰ \\ x & ۰ \le x \end{cases}$$

تمرین در کلاس

۱ــ در زیر نمودارهای دو تابع داده شده است. ضابطه‌های آن‌ها را بیابید و دامنه و برد هر یک را مشخص کنید.

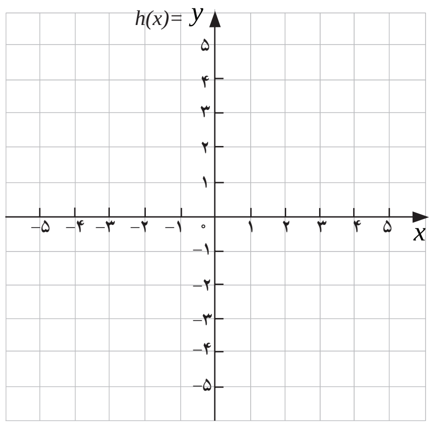


(الف)



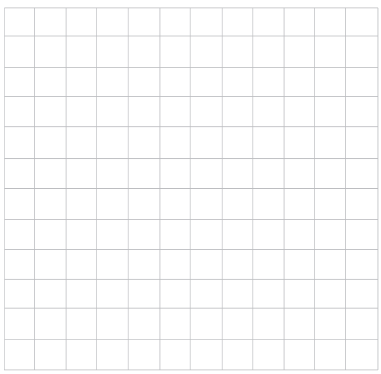
(ب)

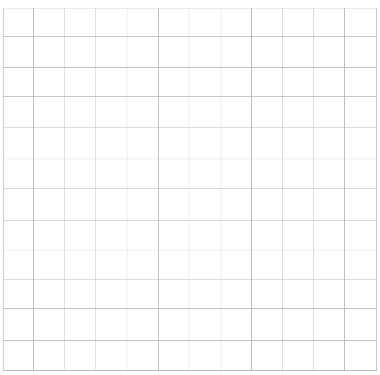
۲ــ نمودار توابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید و دامنه و برد هر یک را بیابید.



$$h(x)=\begin{cases}-2x-3 & x<1\\ x-4 & 1\le x\le 2\\ x+2 & 2<x\end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases}2+x^2 & x\le 0\\ x^2 & 0<x\end{cases}$$





معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x,y هستند، یک رابطه را نشان می‌دهند. برخی از این روابط، ضابطهٔ تابعی را معلوم می‌کنند. بسیاری از توابع از طریق یک معادله ارائه می‌شوند اما توجه داشته باشید این‌طور نیست که یک معادله دو متغیره بر حسب x,y حتماً ضابطهٔ یک تابع را نشان بدهد.

مثال

۱ : معادله $x^۲ + y = ۱$ یک تابع y بر حسب x را نشان می‌دهد. در این‌گونه موارد مناسب است که y را برحسب x به‌دست آوریم :

$$x^۲ + y = ۱ \Rightarrow y = ۱ - x^۲$$

می‌بینیم که برای مقدار دلخواه x دقیقاً یک مقدار برای y وجود دارد و در نتیجه y به صورت تابعی از x به دست می‌آید.

۲ : معادله $-x + y^۲ = ۱$ یک تابع y برحسب x را نشان نمی‌دهد. زیرا با حل این معادله و با یافتن y بر حسب x مقدار یکتایی برای y به دست نمی‌آید.

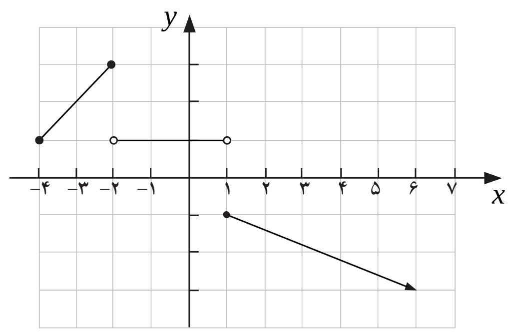
$$-x + y^۲ = ۱ \Rightarrow y^۲ = ۱ + x \Rightarrow y = \pm\sqrt{۱ + x}$$

برای مثال به ازای $x = ۸$ داریم $y = \pm ۳$ یعنی زوج‌های مرتب $(۸,۳)$ و $(۸,-۳)$ روی نمودار این معادله قرار دارند. بنابراین این معادله نمی‌تواند ضابطه یک تابع را نشان دهد (چرا؟).

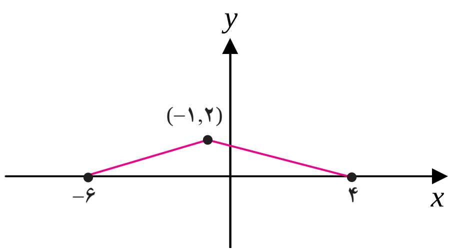
مسائل

۱ـ تابع $f(x) = |x + ۱| + |x - ۱|$ را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای بنویسید و نمودار آن را رسم کنید. به کمک نمودار برد تابع را معلوم کنید.

۲ـ دامنه و برد هر یک از توابع چند ضابطه‌ای زیر را بیابید و ضابطه هر کدام را بنویسید.



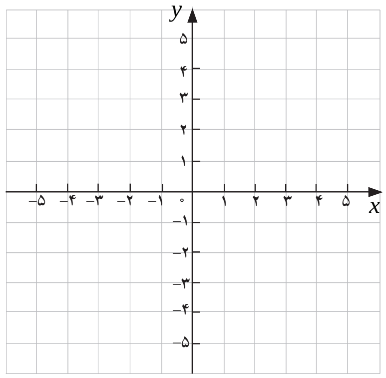
(الف)



(ب)

۳ــ اگر

$$f(x)=\begin{cases}-۵x-۸ & x<-۲\\ \frac{۱}{۲}x+۵ & -۲\le x\le ۴\\ ۱۰-۲x & ۴<x\end{cases}$$



مقدارهای $f(۶)$, $f(۴)$, $f(-۴)$, $f(۰)$ را حساب کنید و نمودار تابع را رسم کنید.

۴ــ تابعی چند ضابطه‌ای مانند f بنویسید که در تمام شرایط زیر صدق کند، سپس نمودار f را رسم کنید.

الف) دامنه $f=[-۳,۵]$ و برد $f=[-۲,۷]$

ب) $f(۰)=۳$

ج) f یک به یک نباشد.

۵ــ کدام‌یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می‌کند.

الف) $x^۲+y^۲=۲۵$

ب) $y=\begin{cases}x+۳ & x\le ۰\\ x-۱ & x>۰\end{cases}$

ج) $y=|x|+۱$

د) $x=|y|+۱$

هـ) $y^۲=x^۲$

و) $x=۱$

۶ــ تابع f با مشخصات زیر داده شده است.

الف) $f(-۵)=-۲$ و $f(۲)=۳$

ب) دامنه f برابر همه اعداد حقیقی است.

ج) تابع f در بازه $[۰,۲]$ ثابت است.

د) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

هـ) روی اعداد منفی، تابع خطی است و نمودار تابع محور xها را در نقطه ۳- قطع می‌کند.

تابع f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

۷ــ کدام‌یک از زوج توابع داده شده با هم مساویند؟

الف) $f(x)=\sqrt{x^۲}\quad , \quad g(x)=|x|$

ب) $f(x)=\begin{cases}\frac{x^۲-۹}{x-۳} & x\ne ۳\\ ۵ & x=۳\end{cases}\quad , \quad g(x)=x+۳$

ج) $f(x)=\begin{cases} x & x\neq ۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$ ، $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲-۲x}{x-۲} & x\neq ۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$

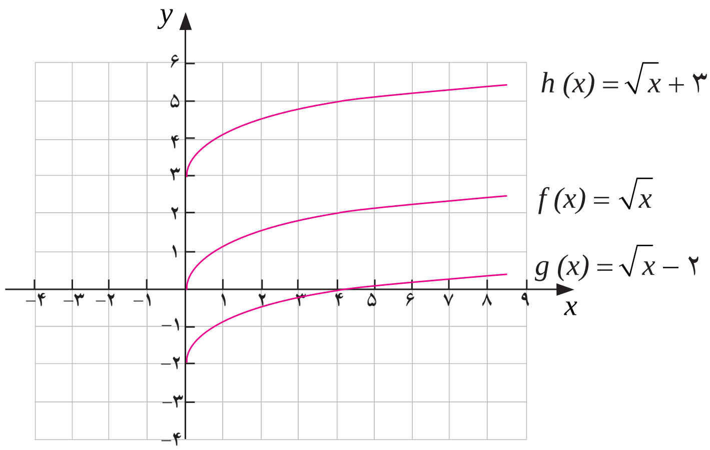
د) $f(x)=\dfrac{x^۲}{۱+\sqrt{۱+x^۲}}$ ، $g(x)=\sqrt{۱+x^۲}-۱$

رسم نمودار توابع

سال قبل دیدیم که با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$ می‌توانیم نمودار تابع $f(x)+a$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازه a واحد در امتداد محور yها به دست آورد. اگر $a>۰$، انتقال در جهت مثبت و اگر $a<۰$، انتقال در جهت منفی خواهد بود.

مثال

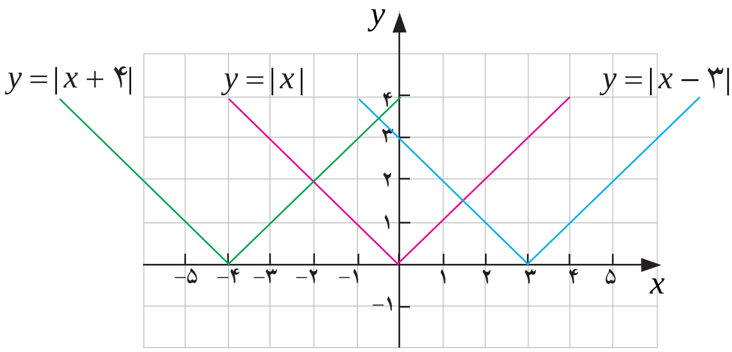
۱ : در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $h(x)=\sqrt{x}+۳$ و $g(x)=\sqrt{x}-۲$ رسم شده است.



همچنین به کمک مثال‌هایی مشاهده کردید که برای رسم نمودار تابع $y=f(x-a)$ کافی است که نمودار $y=f(x)$ را a واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم. اگر $a>۰$ ، انتقال در جهت مثبت و اگر $a<۰$ انتقال در جهت منفی خواهد بود.

مثال

۲ : نمودار توابع $y=|x|$ و $y=|x+4|$ و $y=|x-3|$ در شکل زیر رسم شده‌اند.



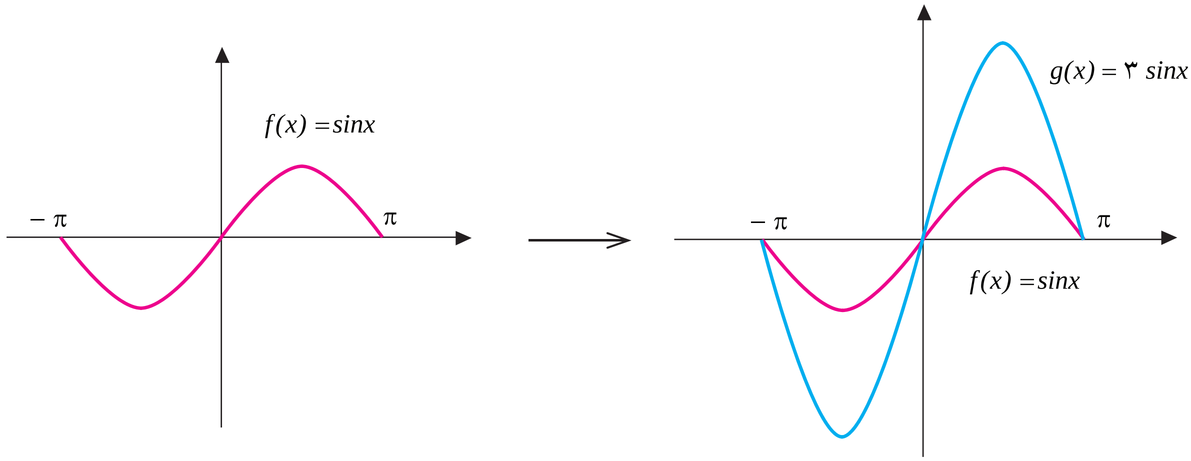
در این‌جا می‌خواهیم با رسم نمودار توابع دیگری که از یک تابع داده شده مانند $f(x)$ ساخته شده‌اند آشنا شویم.

رسم نمودار $af(x)$

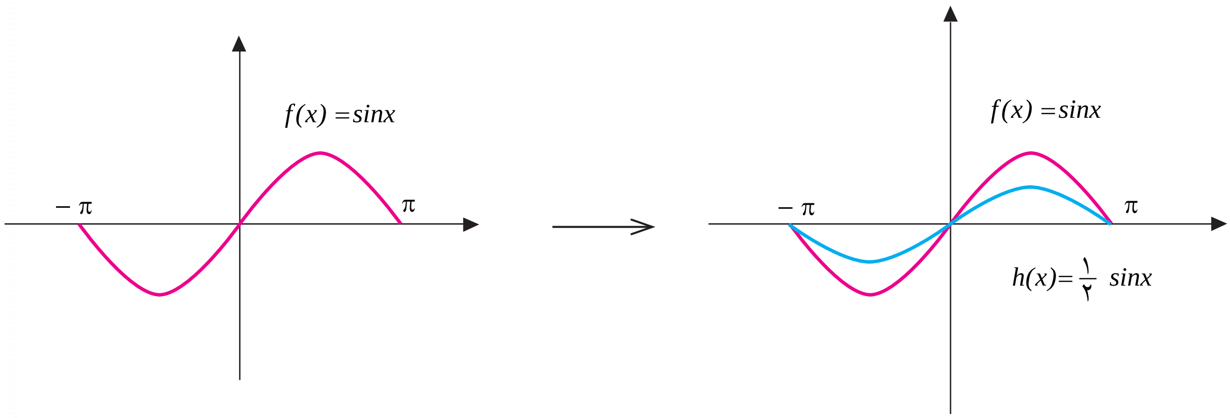
فعالیت ۳

۱ــ تابع $f(x)=\sin x$ داده شده است. تابع $g(x)$ را به صورت $g(x)=3f(x)$ تعریف می کنیم. نمودارهای این دو تابع در شکل‌های زیر در بازه $[-\pi, \pi]$ رسم شده‌اند. با تکمیل جدول توضیح دهید که نمودارها چگونه رسم شده‌اند. دامنه‌ها و بردهای دو تابع را با هم مقایسه کنید.

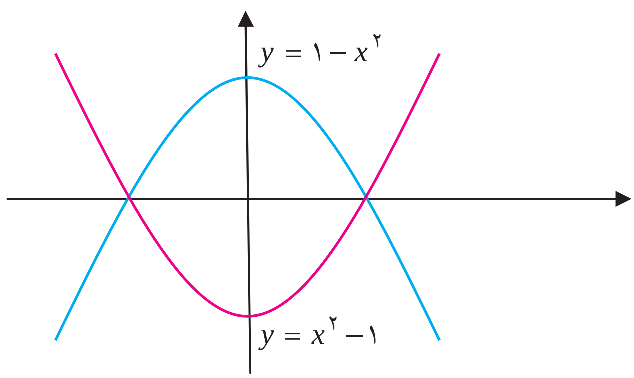
x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	۰	$\frac{\pi}{2}$	π
sinx			۰	۱	
۳sinx			۰	۳	



۲ــ نمودار تابع $h(x)=\frac{۱}{۲}f(x)$ نیز در بازه $[-\pi , \pi]$ رسم شده است. نمودار $h(x)$ چگونه از نمودار $f(x)$ به دست می‌آید؟



نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=-f(x)$ نسبت به محور xها قرینه یکدیگرند. برای مثال نمودار دو تابع زیر قرینه یکدیگرند.



عمارت ایل گلی ــ تبریز

تذکر :

نمودار تابع $y=af(x)$ به کمک نمودار تابع $y=f(x)$ به روش زیر به دست می‌آید :

الف) اگر $a>1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب a کشیده می‌شود (انبساط عمودی).

ب) اگر $0<a<1$ نمودار $f(x)$ در امتداد محور yها با ضریب a جمع می‌شود (انقباض عمودی).

ج) اگر $a<0$، ابتدا نمودار f نسبت به محور xها آینه‌وار منعکس می‌شود، سپس با ضریب $|a|$ به‌طور عمودی منبسط یا منقبض می‌شود.

تمرین در کلاس

۱ــ دامنه‌های دو تابع $y=f(x)$ و $y=af(x)$ یکی است. در مورد بردهای این دو تابع چه می‌توانید بگویید؟

۲ــ نمودار تابع $f(x)=|x+2|$ را در بازه $[-4,3]$ رسم کنید و به کمک آن نمودار توابع $f(x)=-|x+2|$ و $f(x)=\frac{1}{4}|x+2|$ و $f(x)=-2|x+2|$ را رسم کنید.

رسم نمودار $f(ax)$

فعالیت ۴

۱ــ تابع $f(x)=1-|x|$ را با دامنه $[-1,1]$ در نظر بگیرید و نمودار آن را رسم کنید.

الف) دامنهٔ تابع $f(2x)$ را به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

ب) دامنهٔ توابع $f(3x)$ و $f(\frac{1}{3}x)$ را به دست آورید و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

۲ــ اگر $a>0$ در مورد رابطهٔ بین دامنه و نمودار تابع $f(ax)$ با دامنه و نمودار تابع $f(x)$ چه حدس می‌زنید؟

مثال

تابع $f(x)=x+4$ را با دامنه $[-4,0]$ در نظر می‌گیریم و چگونگی توابع $f(2x)$ و $f(\frac{x}{2})$ را بررسی می‌کنیم.

روشن است که $f(2x)=2x+4$. برای تشخیص دامنه تابع جدید $f(2x)=2x+4$ مقدار x باید به گونه‌ای باشد که $-4\leq 2x\leq 0$ ، یعنی $-2\leq x\leq 0$. در نتیجه دامنه تابع $f(2x)$ بازه $[-2,0]$ می‌باشد.

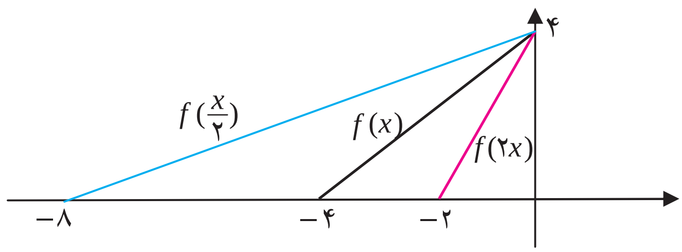
برای تابع $f(\frac{x}{۲})$ داریم $f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۴$ و دامنه این تابع آن مقدارهایی برای x است که داشته باشیم $-۴\le\frac{x}{۲}\le ۰$ ، یعنی $-۸\le x\le ۰$. در نتیجه دامنه تابع $f(\frac{x}{۲})$ بازه $[-۸,۰]$ می‌باشد.

جدول این سه تابع (برای برخی از نقاط) و نمودارهای آن‌ها به شکل زیر است :

x	-۴	-۳	-۲	-۱	۰
$f(x)=x+۴$	۰	۱	۲	۳	۴

x	-۲	$-۱/۵$	-۱	$-۰/۵$	۰
$f(۲x)=۲x+۴$	۰	۱	۲	۳	۴

x	-۸	-۶	-۴	-۲	۰
$f(\frac{x}{۲})=\frac{x}{۲}+۴$	۰	۱	۲	۳	۴



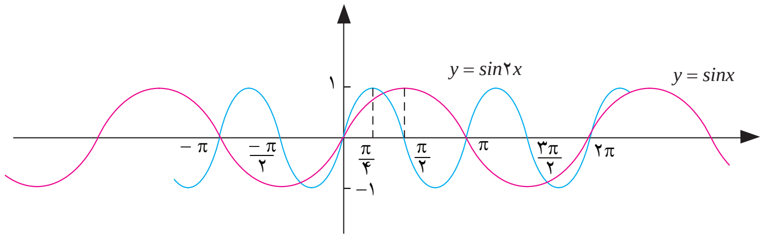
همان‌طور که در شکل دیده می‌شود نمودار $f(۲x)$ با انقباض نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها (با ضریب ۱/۲) و نمودار $f(\frac{x}{۲})$ با انبساط نمودار $f(x)$ در امتداد محور xها (با ضریب ۲) به دست آمده است.

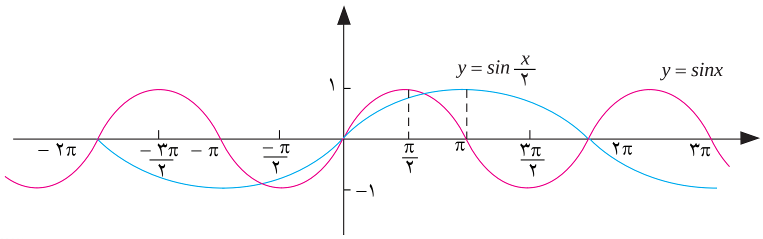
تذکر :

اگر $a>۰$، نمودار $y=f(ax)$ را می‌توان با انبساط یا انقباض نمودار $y=f(x)$ در امتداد محور xها به دست آورد. در حالتی که $a>۱$ نمودار $y=f(x)$ منقبض با ضریب $\frac{۱}{a}$، و در حالتی که $۰<a<۱$ نمودار $y=f(x)$ منبسط با ضریب $\frac{۱}{a}$ خواهد شد.

مثال

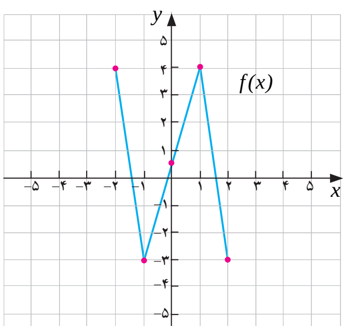
درشکل‌های زیر نمودارهای تابع $y=\sin ۲x$ و $y=\sin\frac{x}{۲}$ به کمک نمودار $y=\sin x$ رسم شده‌اند.
همان‌طور که دیده می‌شود نمودار $y=\sin ۲x$ با فشرده‌شدن (انقباض) نمودار $y=\sin x$ در امتداد محور xها و نمودار $y=\sin\frac{x}{۲}$ با کشیده‌شدن (انبساط) نمودار $y=\sin x$ در امتداد محور xها به دست آمده است.

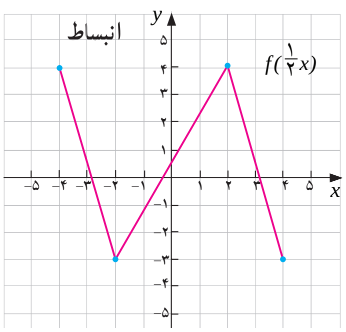


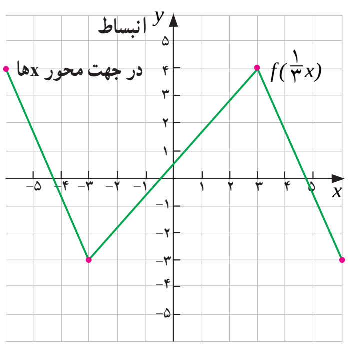


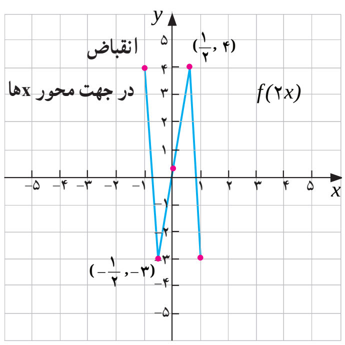
مثال

نمودار تابع $f(x)$ و توابع $f(۲x)$ ، $f(\frac{۱}{۲}x)$ ، $f(\frac{۱}{۳}x)$ در زیر رسم شده‌اند.









همان‌طور که در نمودارها دیده می‌شود برد توابع $f(۲x)$ ، $f(\frac{۱}{۲}x)$ ، $f(\frac{۱}{۳}x)$ همان برد تابع $f(x)$ است، اما دامنه‌ها کشیده‌تر (منبسط) یا جمع تر (منقبض) شده است.

فعالیت ۵

۱ــ با در نظرگیری $f(x)=x+۱$ ، ضابطه تابع $f(-x)$ را به دست آورید و نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

۲ــ نمودار این دو تابع چه وضعیتی با هم دارند.

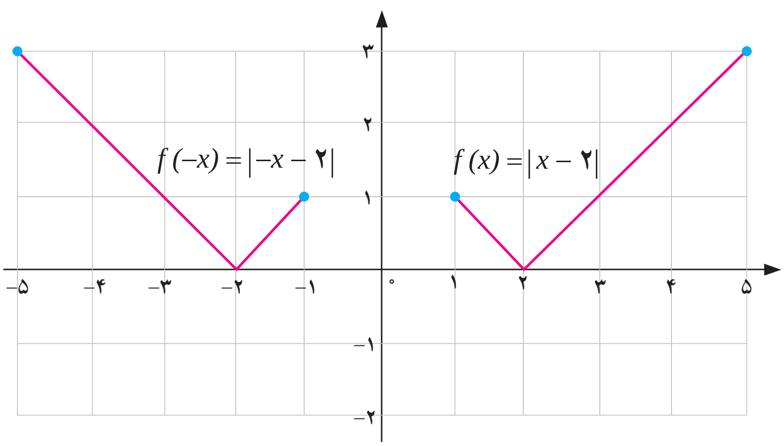
۳ــ برای تابع $g(x)=x^۲-x$ نیز تابع $g(-x)$ را بسازید و نمودار این دو تابع را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و وضعیت این دو نمودار را نسبت به هم بسنجید.

قضیه :

نمودار تابع $f(-x)$ قرینه نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور yها است.

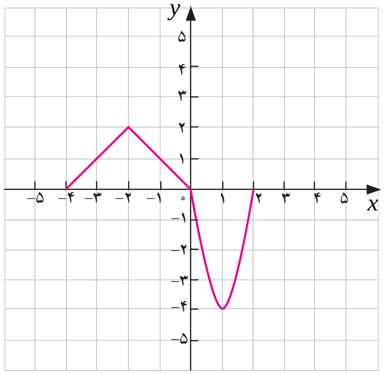
مثال

نمودار تابع $f(x)=|x-۲|$ در بازه $[۱,۵]$ در سمت راست و نمودار $f(-x)=|-x-۲|$ در سمت چپ شکل زیر رسم شده است.(توجه داریم که $|x+۲|=|-x-۲|$)



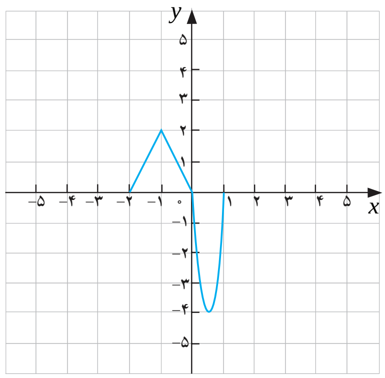
همان‌طور که دیده می‌شود نمودار $f(x)$ و $f(-x)$ نسبت به محور yها قرینه یکدیگرند.

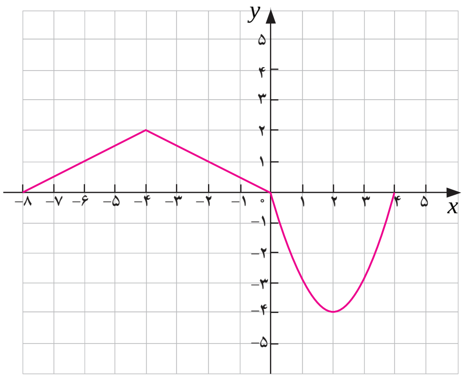
تمرین در کلاس

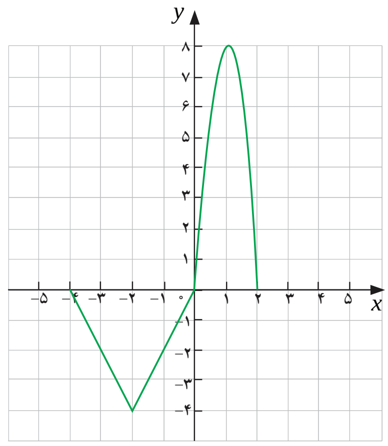


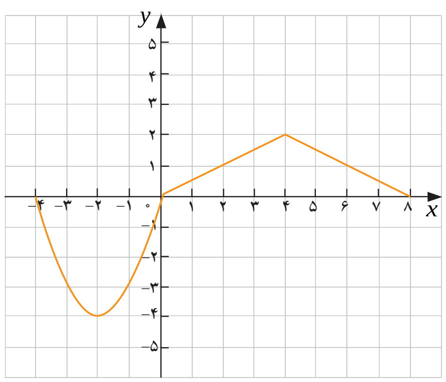
۱ــ نمودار تابع $g(x)$ به شکل مقابل داده شده است.

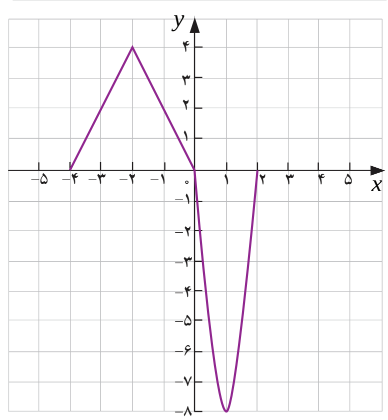
به کمک این نمودار، نمودار توابع $2g(x)$، $g(2x)$ و $g(\frac{1}{2}x)$، $g(-\frac{1}{2}x)$ و $-2g(x)$ رسم شده‌اند. تعیین کنید که هر یک از نمودارهای زیر نمودار کدام‌یک از این توابع هستند؟



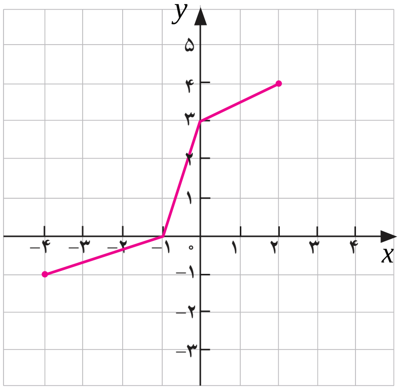




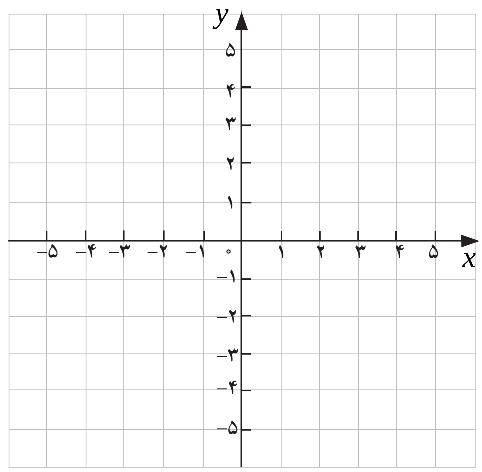




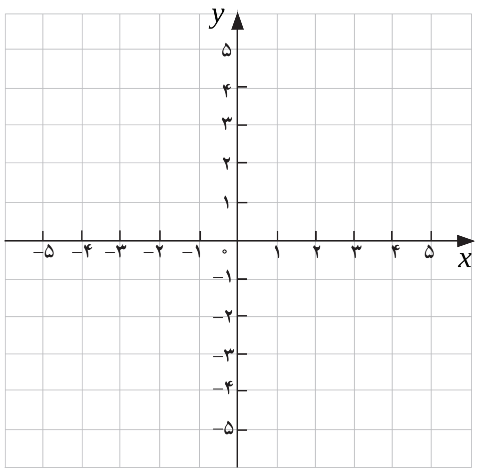
۲ــ نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل مقابل داده شده است.



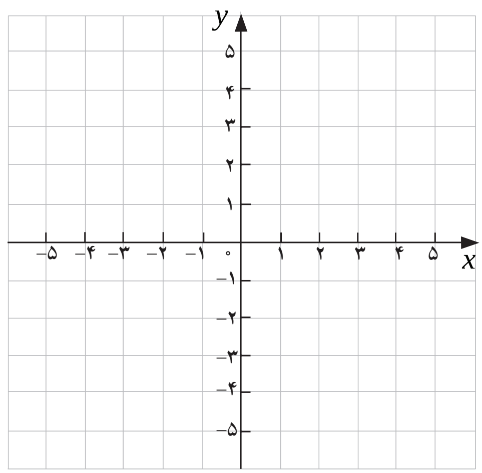
نمودار توابع داده شده زیر را رسم کنید.



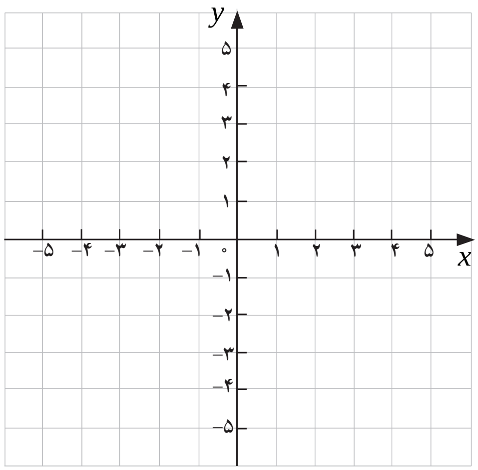
$y=f(\frac{1}{2}x)$



$y=-f(x-1)$



$y=f(-\frac{1}{2}x)$

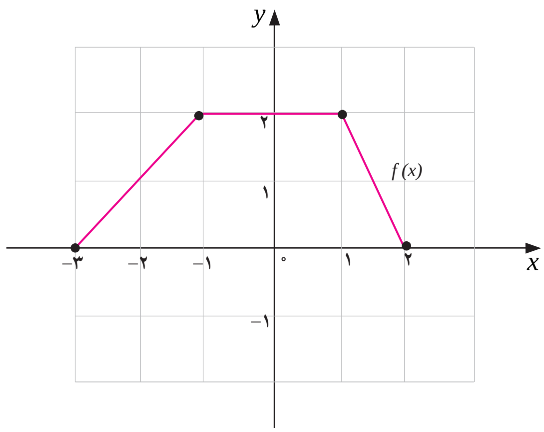


$y=f(2x)$

مسائل

۱ــ ابتدا نمودار $f(x)=|x|$ را رسم کنید و به کمک آن نمودار $y=-۳|x-۱|+۲$ را رسم کنید.

۲ــ نمودار تابع $y=f(x)$ به شکل زیر داده شده است. به کمک این نمودار، نمودار تابع داده شده را رسم کنید.



الف) $g(x)=\frac{۱}{۲}f(x)$

ب) $g(x)=f(-x)$

ج) $g(x)=f(۳x)$

د) $g(x)=f(-\frac{۱}{۲}x)$

هـ) $g(x)=-۲f(x)$

و) $g(x)=f(x+۲)$

۳ــ نمودار تابع زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}|x| & -۱\leq x\leq ۱\\ \sqrt{x-۱} & x>۱\end{cases}$$

به کمک نمودار $f(x)$ نمودار توابع $y=f(۲x)$ و $y=f(-۲x)$ و $y=-f(۲x)$ را رسم کنید.

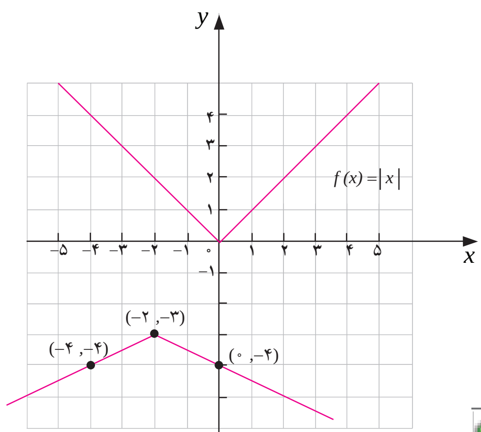
۴ــ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر $f(x)=|x|$ و $g(x)=|x+۳|-۳$ ، نمودار g را می‌توان از نمودار f با انتقال سه واحد به سمت راست و سپس انتقال سه واحد به پایین به دست آورد.

ب) $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\sqrt{-x}$ دارای نمودارهای یکسانی هستند.

ج) اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=-(x-۲)^۲+۴$ آن‌گاه نمودار g را می‌توان از نمودار f با یک تغییر مکان به میزان دو واحد به راست، سپس انعکاس نسبت به محور xها و ۴ واحد تغییر مکان به سمت بالا به دست آورد.

۵ــ در شکل روبه‌رو نمودار توابع g و f در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند. اگر g از طریق تعدادی عملیات (انبساط و انقباض و انتقال و قرینه) روی f به دست آمده باشد معادله‌ای برای g بیابید.



۶ــ نمودار $y=\sqrt{x}$ را نسبت به محور yها، انعکاس داده‌ایم، سپس آن را سه واحد در جهت راست و بعد ۵ واحد به پایین حرکت داده‌ایم. ضابطه تابع به دست آمده را بنویسید.

۷ــ نقطه $(-۸,۶)$ روی نمودار $y=f(x)$ قرار دارد. این نقطه با چه نقطه‌ای از نمودار توابع زیر متناظر می‌شود؟

الف) $g(x)=\frac{۱}{۲}f(x)$ ب) $g(x)=f(-x)$

ج) $g(x)=f(x)-۳$ د) $g(x)=۳f(x)$

۸ــ در هر مورد توضیح دهید که نمودار g چگونه از نمودار f به دست می‌آید.

الف) $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=-\frac{۱}{۲}\sqrt{x-۱}+۳$

ب) $f(x)=x^۲$, $g(x)=-۲(x+۴)^۲-۳$

ج) $f(x)=|x|$, $g(x)=-۲\left|x-\frac{۱}{۳}\right|+۱$

۹ــ اگر $f(x)=\cos x$ مطلوب‌است نمودار $f(-x), -f(x), f(\frac{۱}{۲}x), f(۲x)$.

۱۰ــ نمودار دو تابع $\sqrt{x}$ و $\sqrt{-x}$ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ دامنه این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ برد این دو تابع چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟ جواب به این سؤالات در مورد دو تابع $f(x)$ و $f(-x)$ چه خواهد بود؟

۱۱ــ اگر $a<۰$ ، نمودار تابع $f(ax)$ از روی نمودار تابع $f(x)$ چگونه ساخته می‌شود؟

اعمال جبری روی توابع

فعالیت ۶

یک حوض آب با دو شیر آب متفاوت پر می‌شود. از شیر اول در هر ثانیه $\frac{۱}{۲}$ لیتر و از شیر دوم در هر ثانیه ۱ لیتر آب خارج می‌شود. در لحظه $t=۰$ حوض خالی است و دو شیر را با هم باز می‌کنیم.

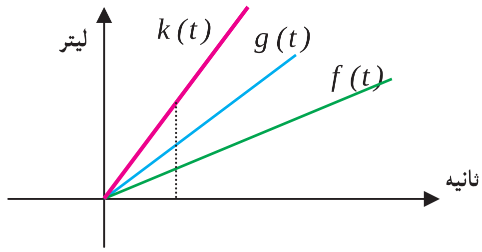
۱ــ جدول زیر را که حجم آب موجود در حوض و آب‌های خارج شده از دو شیر را در برخی لحظات نشان می‌دهد تکمیل کنید. زمان بر حسب ثانیه و حجم بر حسب لیتر است.

۵	۴	$\frac{۷}{۲}$	۳	۲	$\frac{۱}{۲}$	t
						حجم آب خارج شده از شیر اول
						حجم آب خارج شده از شیر دوم
						حجم آب موجود در حوض

۲ــ توابعی را بنویسید که حجم آب خارج شده از شیر اول و شیر دوم و حجم آب حوض را در هر لحظه دلخواه t نشان دهد. این توابع را به ترتیب f و g و k بنامید.

۳ــ در هر لحظه t بین $f(t)$ و $g(t)$ و $k(t)$ چه رابطه‌ای وجود دارد؟

۴ــ نمودار سه تابع f و g و k در زیر رسم شده‌اند. رابطه بین این توابع را از روی نمودار توضیح دهید.



در سال‌های قبل با جمع اعداد و جمع ماتریس‌ها و جمع چند جمله‌ای‌ها آشنا شدید. توابع را نیز می‌توان با هم جمع کرد و تابع جدیدی به دست آورد. در فعالیت قبل با جمع دو تابع روبرو شدیم و جمع دو تابع را به دست آوردیم.

اگر f و g دو تابع باشند که روی دامنه یکسانی مانند A تعریف شده‌اند، به ازای هر مقدار x در A مقدارهای $f(x)$ و $g(x)$ به دست می‌آیند و می‌توانیم مقدار $f(x)+g(x)$ را بسازیم. تابعی که به هر مقدار x در A مقدار $f(x)+g(x)$ را نظیر می‌سازد جمع f و g نامیده می‌شود. جمع f و g را با $f+g$ نشان می‌دهند.

تعریف :

برای دو تابع f و g که روی یک مجموعه A تعریف شده‌اند، $f+g$ تابعی است که روی A تعریف شده است و برای هر مقدار x در A داریم :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

مثال

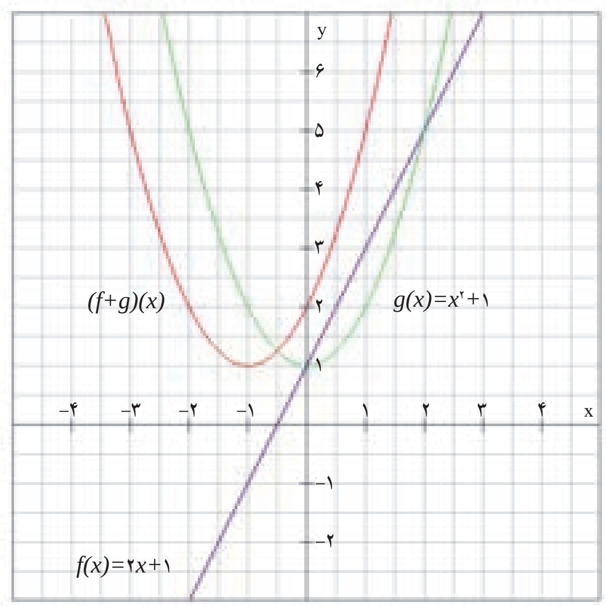
فرض کنید $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=x^۲+۱$. این دو تابع روی IR تعریف شده‌اند، بنابراین $f+g$ نیز روی IR تعریف شده است و برای مثال مقدار این تابع در $x=۳$ به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$(f+g)(۳)=f(۳)+g(۳)=۷+۱۰=۱۷$$

اما برای یک مقدار دلخواه x مقدار تابع $f+g$ به شکل زیر خواهد بود.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=۲x+۱+x^۲+۱=x^۲+۲x+۲$$

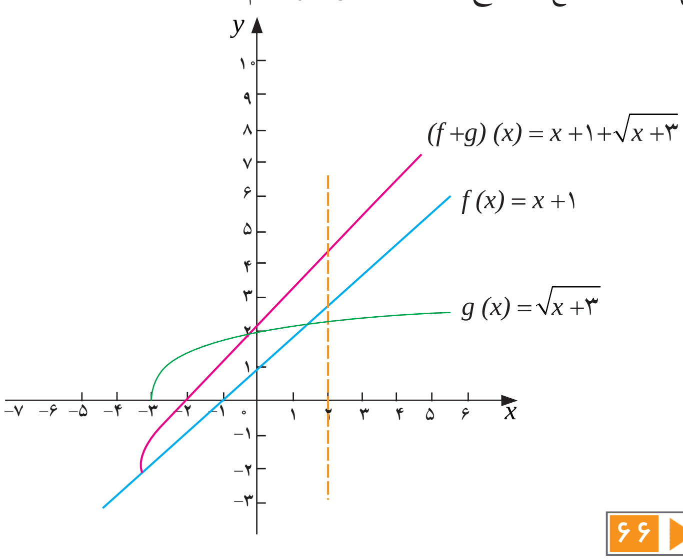
روشن است که چند جمله‌ای صفحهٔ قبل به ازای $x=۳$ برابر ۱۷ خواهد شد. نمودار این دو تابع و نمودار تابع مجموع آن‌ها در شکل رسم شده‌اند.



بحث در کلاس

چرا مجموع دو تابع خطی، یک تابع خطی است؟

آیا می‌توانیم دو تابع $f(x)=x+۱$ و $g(x)=\sqrt{x+۳}$ را با هم جمع کنیم؟ این دو تابع دامنه یکسانی ندارند ولی به ازای xهایی که در دامنه هر دو تابع باشند مقدارهای $f(x)$ و $g(x)$ قابل محاسبه‌اند و می‌توانیم مجموع $f(x)+g(x)$ را حساب کنیم.
بنابراین می‌توانیم تابع $f+g$ را روی $D_f \cap D_g$ مانند قبل تعریف کنیم.
در این مثال دامنه $D_f = IR$ و $D_g=[-۳,\infty)$ بنابراین $f+g$ روی $[-۳,\infty)$ تعریف شده است و برای هر x در این مجموعه داریم $(f+g)(x)=x+۱+\sqrt{x+۳}$. نمودار این دو تابع و نمودار تابع مجموع آن‌ها در شکل زیر رسم شده‌اند.



تعریف :

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، $f+g$ تابعی است که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

توجه داشته باشید که در اینجا، عملاً دامنه‌های دو تابع f و g به مجموعه $A = D_f \cap D_g$ محدود می‌شوند و سپس به عنوان دو تابع با دامنه یکسان جمع می‌شوند.

مثال

اگر $f = \{(۱,۲),(-۲,۵),(۰,۷),(۳,-۴)\}$ و $g = \{(۱,۴),(۲,۹),(-۲,۳)\}$ تابع $f+g$ فقط برای $x=-۲$ و $x=۱$ تعریف می‌شود و داریم :

$$(f+g)(۱) = f(۱) + g(۱) = ۲+۴ = ۶$$

$$(f+g)(-۲) = f(-۲) + g(-۲) = ۵+۳ = ۸$$

بنابراین $f+g = \{(۱,۶),(-۲,۸)\}$.

اعمال تفاضل و ضرب و تقسیم توابع به شکل مشابه تعریف می‌شوند.

تعریف :

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، تفاضل g از f تابعی است که با $f-g$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هرمقدار x در این مجموعه داریم :

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، حاصل‌ضرب f و g تابعی است که با $f \circ g$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ تعریف شده است و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم :

$$(f \circ g)(x) = f(x) . g(x)$$

برای دو تابع f و g که روی دامنه‌های دلخواهی تعریف شده‌اند، تقسیم f بر g تابعی است که با $\frac{f}{g}$ نشان می‌دهیم که روی $D_f \cap D_g$ برای xهایی تعریف شده است که $g(x) \neq ۰$، و برای هر مقدار x در این مجموعه داریم :

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

در اینجا نیز، ابتدا دامنه‌های دو تابع f و g به یک مجموعه یکسان مناسب محدود می‌شوند و سپس به‌عنوان دو تابع با دامنه یکسان تفاضل، ضرب، یا تقسیم می‌شوند.

مثال

۱ : برای دو تابع $f(x) = x^۲ + ۲x - ۱$ و $g(x) = ۳x + ۲$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $f \circ g$ و $\frac{f}{g}$ را به همراه دامنه آن‌ها مشخص می‌کنیم :

دامنه‌های f و g تمام IR هستند، بنابراین دامنه توابع $f+g$ و $f-g$ نیز برابر IR هستند.

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=x^۲+۲x-۱+۳x+۲=x^۲+۵x+۱$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=x^۲+۲x-۱-۳x-۲=x^۲-x-۳$$

$$(f\circ g)(x)=f(x).g(x)=(x^۲+۲x-۱)(۳x+۲)$$

$$=۳x^۲+۲x^۲+۶x^۲+۴x-۳x-۲=۳x^۳+۸x^۲+x-۲$$

تابع g فقط در $x=-\frac{۲}{۳}$ صفر است، بنابراین دامنه $\frac{f}{g}$ برابر $IR-\left\{-\frac{۲}{۳}\right\}$ است و

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲+۲x-۱}{۳x+۲} \qquad x\neq\frac{۲}{۳}$$

۲ : برای دو تابع $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=\frac{۱}{x-۳}$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $f\circ g$ و $\frac{f}{g}$ را به همراه دامنه آن‌ها مشخص می‌کنیم.

ابتدا دامنه‌های f و g را مشخص می‌کنیم.

$$D_f=\{x|x+۲\geq ۰\}=[-۲,+\infty) \qquad D_g=IR-\{۳\}$$

دامنه‌های توابع $f+g$ و $f-g$ و fg مجموعه $D_f\cap D_g$ است و داریم :

$$D_f\cap D_g=[-۲,\infty)\cap IR-\{۳\}=[-۲,۳)\cup(۳,\infty)$$

$$(f+g)(x)=\sqrt{x+۲}+\frac{۱}{x-۳}$$

$$(f-g)(x)=\sqrt{x+۲}-\frac{۱}{x-۳}$$

$$(f\circ g)(x)=\frac{\sqrt{x+۲}}{x-۳}$$

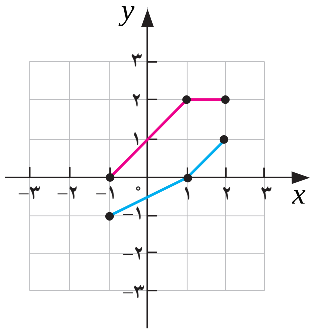
از آن‌جا که g در هیچ نقطه‌ای از دامنه خود صفر نمی‌شود، دامنه $\frac{f}{g}$ همان $D_f\cap D_g$ است.

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{\sqrt{x+۲}}{\frac{۱}{x-۳}}=(x-۳)\sqrt{x+۲}$$

تمرین در کلاس

۱ــ اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=x+۱$ ، دامنه‌های توابع $f+g$ و $f\circ g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید و ضابطه این توابع را مشخص کنید.

۲ــ نمودار توابع g و f در شکل مقابل رسم شده است.



الف) $(f+g)(۱)$, $(f+g)(۲)$ را حساب کنید.

ب) با استفاده از نمودارهای g و f، نمودار $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

ج) معادله‌ای برای g و f و $f+g$ بیابید.

د) نمودار $f+g$ را به کمک معادلهٔ آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.

ترکیب توابع

فعالیت ۷

سنگی به داخل آب یک دریاچه آرام پرتاب می‌شود و باعث ایجاد موج‌هایی به شکل دایره‌های هم مرکز می‌شود. شعاع بزرگ‌ترین دایره تابعی از زمان است و فرض کنید این تابع به صورت $r(t)=۲t$ باشد. t برحسب ثانیه است و زمان پس از برخورد سنگ با آب را نشان می‌دهد و r برحسب سانتی‌متر است. مساحت دایره تابعی از شعاع آن است و به صورت $A(r)=\pi r^۲$ می‌باشد.

سی‌و سه پل ــ اصفهان

۱ـ جدول زیر را کامل کنید.

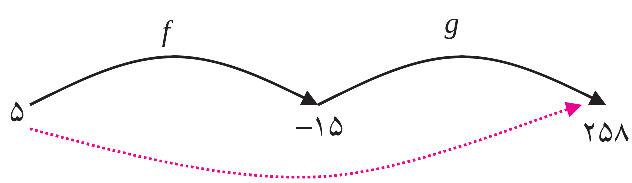
t	۵	۴	۳	۲	۱	t (زمان)
$r(t)=۲t$			۶			r (شعاع دایره در لحظهٔ t)
$A(r(t))=\pi(۲t)^۲=۴\pi t^۲$			۳۶π			A (مساحت دایره در لحظهٔ t)

۲ـ تابعی که مساحت دایره را در هر لحظهٔ t به دست می‌دهد، چگونه از طریق دو تابع $r(t)$ و $A(r)$ ساخته شده است؟

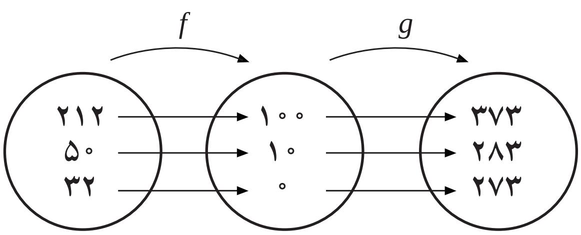
در فعالیت بالا با دو تابع $r(t)$ و $A(r)$ روبرو شدیم. مقدارهای تابع $r(t)$ به صورت ورودی تابع $A(r)$ قرار گرفتند و تابع جدید $A(r(t))$ را به وجود آوردند. این تابع جدید را ترکیب دو تابع می‌نامند.

مثال

۱ : تابع $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجهٔ فارنهایت را به درجهٔ سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. مثلاً $f(۳۲)=۰$ یعنی ۳۲ درجه فارنهایت معادل صفر درجه سانتی‌گراد است. تابع $g(x)=x+۲۷۳$ درجه سانتی‌گراد را به درجه کلوین تبدیل می‌کند. برای مثال $g(۰)=۲۷۳$ یعنی صفر درجه سانتی‌گراد معادل ۲۷۳ درجه کلوین است. اگر بخواهیم بدانیم ۵ درجه فارنهایت معادل چند درجه کلوین است، ابتدا به کمک تابع f داریم $f(۵)=-۱۵$ یعنی ۵ درجه فارنهایت معادل ۱۵− درجه سانتی‌گراد است و سپس به کمک تابع g داریم $g(-۱۵)=۲۵۸$ ، بنابراین ۵ درجه فارنهایت معادل ۲۵۸ درجه کلوین است. به عبارت دیگر $g(f(۵))=g(-۱۵)=۲۵۸$. نمودار روبه‌رو این فرآیند را نشان می‌دهد.



در نمودار روبه‌رو تبدیل برخی دیگر از درجات فارنهایت به درجات کلوین نمایش داده شده است.



اگر $k(x)$ تابعی باشد که مستقیماً درجه‌های فارنهایت را به درجه‌های کلوین تبدیل می‌کند داریم :

$$k(x)=g(f(x))=g(\frac{۵}{۹}(x-۳۲))=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)+۲۷۳=\frac{۱}{۹}(۵x+۲۲۹۷)$$

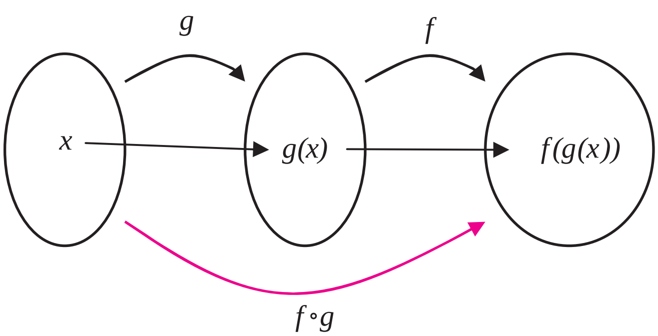
برای مثال از طریق این تابع دیده می‌شود $k(۲۱۲)=۳۷۳, k(۳۲)=۲۷۳$.

در این مثال تابع k از ترکیب دو تابع f و g ساخته شده است. به خاطر شیوه محاسبه تابع k آن را با $g\circ f$ (بخوانید جی او اف) نشان می‌دهند. بنابراین $g\circ f$ تابعی است که در هر مقدار x به صورت $(g\circ f)(x)=g(f(x))$ محاسبه می‌شود.

تعریف :

فرض کنید f و g دو تابع باشند که برد g زیر مجموعه‌ای از دامنهٔ f باشد، در این صورت $f\circ g$ تابعی است که دامنهٔ آن همان دامنهٔ g است و برای هر مقدار x در این دامنه داریم :

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$



مثال

۲ : برای دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=۱+x^۲$ ، برد g زیر مجموعه‌ای از دامنهٔ f است و می‌توانیم تابع مرکب $f\circ g$ را بسازیم. دامنهٔ $f\circ g$ برابر دامنهٔ g است که تمام IR است و ضابطهٔ آن به شکل زیر است.

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(۱+x^۲)=\sqrt{۱+x^۲}$$

تابع مرکب $g\circ f$ نیز قابل ساخت است زیرا برد f زیر مجموعه‌ای از دامنهٔ g می‌باشد. دامنهٔ $g\circ f$ همان دامنهٔ f است که بازهٔ $[۰,\infty)$ است. ضابطهٔ $g\circ f$ به شکل زیر است.

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=۱+(\sqrt{x})^۲=۱+x$$

توجه داشته باشید که اگر چه ضابطهٔ $g\circ f$ به گونه‌ای است که برای مقدارهای منفی x هم معنا دارد ولی به عنوان تابعی که از ترکیب دو تابع ساخته شده است دامنهٔ آن فقط بازهٔ $[۰,\infty)$ است.

این مثال هم‌چنین نشان می‌دهد که دو تابع $g\circ f$ و $f\circ g$ در حالت کلی مساوی نیستند.

تذکر :

برای دو تابع f و g ممکن است که برد g زیرمجموعه‌ای از دامنهٔ f نباشد، در این صورت $f\circ g$ تابعی است که دامنهٔ آن تمام دامنهٔ g نخواهد بود. برای آن که $f(g(x))$ معنادار باشد لازم است که $x\in D_g$ و $g(x)\in D_f$ ، بنابراین در حالت کلی دامنهٔ $f\circ g$ به شکل زیر است.

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

در اینجا نیز، عملاً دامنهٔ تابع g به زیر مجموعه کوچکتری محدود می‌شود، تا شرط زیر مجموعه بودن برد تابع تحدید یافته در دامنهٔ تابع f برقرار گردد و سپس ترکیب دو تابع انجام می‌شود.

مثال

۳ : برای دو تابع $f=\{(۱۱,۷),(-۲,۴),(۳,-۵),(۲,-۵)\}$ و $g=\{(۲,۱۱),(۴,-۲),(۶,۳),(۳,۲)\}$ توابع $f\circ g$ و $g\circ f$ را می‌سازیم و با نمودار ون نمایش می‌دهیم.

برای محاسبه $f\circ g$ ابتدا مشاهده می‌کنیم برد g زیر مجموعه‌ای از دامنه f است، پس $D_{f\circ g}=D_g$. مقدار تابع $f\circ g$ را در نقاط دامنه g حساب می‌کنیم.

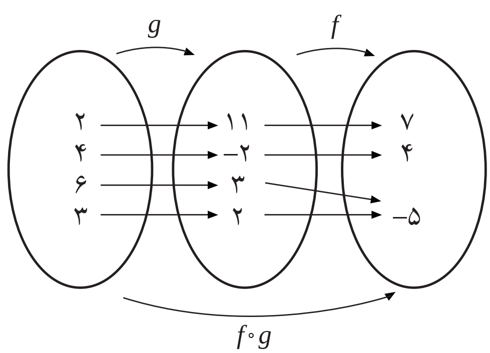
$$(f\circ g)(۲)=f(g(۲))=f(۱۱)=۷$$

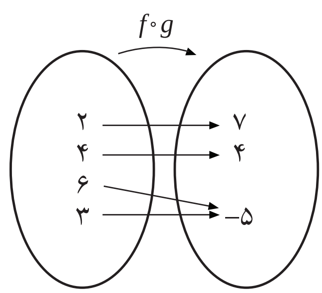
$$(f\circ g)(۴)=f(g(۴))=f(-۲)=۴$$

$$(f\circ g)(۶)=f(g(۶))=f(۳)=-۵$$

$$(f\circ g)(۳)=f(g(۳))=f(۲)=-۵$$

بنابراین $f\circ g=\{(۲,۷),(۴,۴),(۶,-۵),(۳,-۵)\}$.





برای محاسبه $g\circ f$ ابتدا مشاهده می‌کنیم که برد f زیر مجموعه‌ای از دامنه g نیست، بنابراین دامنه $g\circ f$ تمام دامنه f نخواهد بود. یکی یکی اعضای دامنه f را بررسی می‌کنیم تا معلوم شود که آیا شرط قرار گرفتن در دامنه $g\circ f$ را دارند یا نه.

$$f(۱۱)=۷\notin D_g$$

$$f(-۲)=۴\in D_g$$

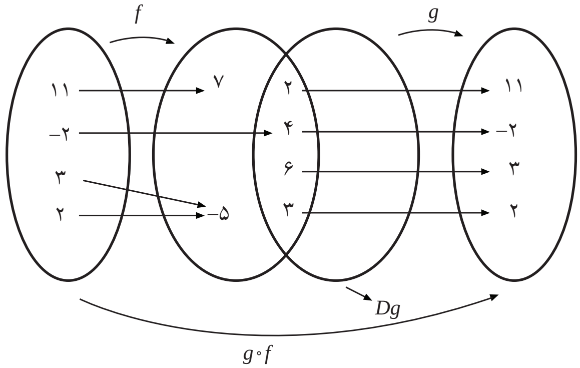
$$f(۳)=-۵\notin D_g$$

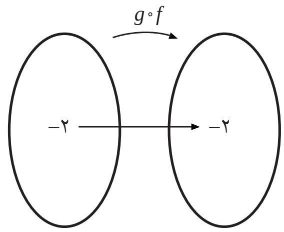
$$f(۲)=-۵\notin D_g$$

بنابراین فقط -۲ در دامنه $g\circ f$ قرار دارد و از آن‌جا که

$$(g\circ f)(-۲)=g(f(-۲))=g(۴)=-۲$$

داریم : $g\circ f=\{(-۲,-۲)\}$





۴ : برای دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{۴}{x}$ تابع $f\circ g$ و دامنه آن را محاسبه می‌کنیم.
برای محاسبه دامنه $f\circ g$ ابتدا دامنه g را بررسی می‌کنیم که $IR-\{۰\}$ دامنه f نیز $IR-\{۳\}$ است. مقدار $g(x)$ نباید ۳ شود. معادل $g(x)=۳$ دارای جواب $x=\frac{۴}{۳}$ است، یعنی $\frac{۴}{۳}$ نقطه‌ای است که $g(\frac{۴}{۳})$ در دامنه f قرار ندارد. در نتیجه

$$D_{f\circ g}=\left\{x\in D_g \middle| g(x)\in D_f\right\}=\left\{x\in IR \middle| x\neq ۰ , x\neq \frac{۴}{۳}\right\}$$

$$=IR-\left\{۰,\frac{۴}{۳}\right\}$$

ضابطه $f\circ g$ را حساب می‌کنیم.

$$(f\circ g)(x)=f(\frac{۴}{x})=\frac{۱}{\frac{۴}{x}-۳}=\frac{۱}{\frac{۴-۳x}{x}}=\frac{x}{۴-۳x}$$

عبارت بالا اگر چه به ازای $x=۰$ با معنا است، ولی صفر در دامنه تابع ترکیب یافته نیست زیرا به هنگام محاسبه مشاهده می‌کنید که عبارت $\frac{۴}{x}$ در محاسبه وجود دارد که به ازای $x=۰$ تعریف نشده است.

تمرین در کلاس

۱ــ اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x+۵$ ، توابع $g\circ f$ و $f\circ g$ را حساب کنید و نشان دهید که $g\circ f \neq f\circ g$.

۲ــ اگر $f(x)=x^۲$ و $g(x)=\sqrt{۷-x^۲}$ ، تابع $g\circ f$ و دامنهٔ آن را حساب کنید.

مسائل

۱ــ اگر $f(x)=\frac{۵x}{۳x-۷}$ و $g(x)=\frac{x^۵-۱}{۵x-۱۵}$ ، تابع $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ و دامنه آن را بیابید.

۲ــ در هر یک از موارد زیر دامنه توابع زیر و ضابطه آن‌ها را به دست آورید.

$f-g$، ff ، $\frac{g}{f}$

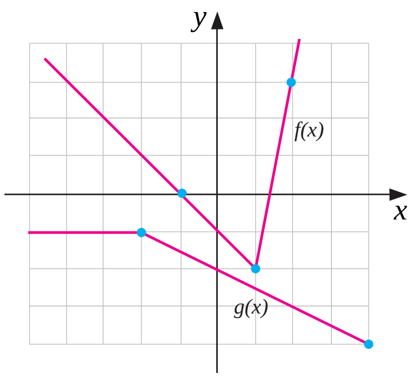
الف) $f(x)=۴x$ ، $g(x)=۲-x$

ب) $f(x)=\frac{۴}{x-۲}$ ، $g(x)=\frac{۱}{۶-x}$

ج) $f(x)=\sqrt{x-۲}$ ، $g(x)=\sqrt{x+۲}$

د) $f(x)=\sqrt{x+۳}$ ، $g(x)=\frac{۲}{x}$

۳ــ با استفاده از نمودارهای f و g که در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند، عبارات داده شده را (در صورت امکان) محاسبه کنید.



الف) $(f+g)(-۴)$

ب) $(f-g)(۳)$

ج) $(\frac{f}{g})(۰)$

د) $(fg)\left(\frac{۱}{۳}\right)$

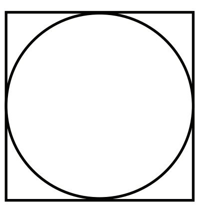
هـ) $(f\circ g)(-\frac{۱}{۲})$

و) $(f\circ f)(۷)$

۴ــ فرض کنیم $g:\mathrm{IN}\longrightarrow\mathrm{IN}$ تابعی با ضابطه $g(n)=۲n$ باشد، اگر $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و تابع $f:A\to IN$ به صورت $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷)\}$ تعریف شود، توابع $۲f+g$ ، $g\circ f$ را محاسبه کنید.

۵ــ دو تابع $f(x)=\frac{۱+x^۲}{۱-x^۲}$ و $g(x)=\sqrt{x(۱-x)}$ مفروضند. دامنه تابع $f\circ g$ را بدون محاسبه $(f\circ g)(x)$ بدست آورید.

۶ــ یک پی (فونداسیون) بتنی مربع شکل به عنوان پایه‌ای برای یک مخزن گازوئیل استوانه‌ای استفاده می‌شود. (شکل مقابل)



الف) شعاع مخزن، r را به عنوان تابعی از x (ضلع مربع) بنویسید.

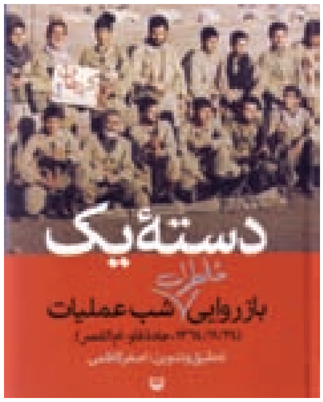
ب) مساحت A پایه دایره‌ای شکل را به عنوان تابعی از r بنویسید.

ج) $(A\circ r)(x)$ را بیابید و تعبیر کنید.

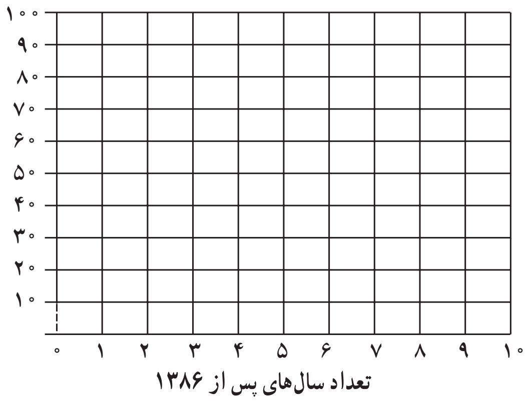
۷ــ فرض کنیم : $f=\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),(\frac{۵}{۲},۰),(۳,-۵)\}$ و $g=\{(-۴,-۷),(-۲,-۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\}$ ، توابع زیر را حساب کنید.

$f+g$ ، $f-g$ ، fg ، $\frac{f}{g}$

۸ــ یک رمان پرفروش درباره دفاع مقدس در سال ۱۳۸۶، ۲۷ میلیون تومان فروش کرد. رمان دیگری درباره دفاع مقدس در همین سال ۱۲ میلیون تومان فروش کرد.



دسته یک : یک رمان پرفروش دربارهٔ دفاع مقدس



اگر رمان اول در هر سال به میزان ۳ میلیون تومان نسبت به سال قبل افزایش فروش داشته باشد، تابعی بنویسید که میزان فروش در هر سال پس از سال ۱۳۸۶ را برحسب زمان نشان دهد. اگر افزایش فروش برای رمان دوم در هر سال ۲ میلیون تومان نسبت به سال قبل باشد، تابعی بنویسید که مجموع فروش این دو رمان را در هر سال پس از سال ۱۳۸۶ نشان دهد. این دو رمان در سال ۱۳۹۶ در مجموع چه میزان فروش خواهند کرد؟ هر سه تابع مرتبط را در نموداری رسم کنید.

۹ــ اگر $f(x)=x^{۲}+۲x+۲$ تابع $g(x)$ را به گونه‌ای بیابید که

$$(f\circ g)(x)=x^{۲}-۴x+۵$$

۱۰ــ توابع f ،g با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{۱-x^{۲}}$ و $g(x)=\sqrt{x}$ مفروضند. بدون تشکیل ضابطه، دامنه تعریف $(f+g)\circ f$ را به دست آورید.

۱۱ــ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) $f(x)=x^{۲}-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^{۲}-۴}$ آن‌گاه

$$(f\circ g)(x)=-x^{۲},\quad (f\circ g)(۵)=-۲۵$$

ب) اگر $g(۴)=۷$ و $f(۷)=۵$ آن‌گاه $(f\circ g)(۴)=۳۵$

ج) اگر $g(x)=۲x-۱$ و $f(x)=\sqrt{x}$ آن‌گاه $(f\circ g)(۵)=g(۲)$

د) برای هر دو تابع f ، g داریم : $f\circ g=g\circ f$

۱۲ــ اگر $h(x)=۴x^۲+۴x+۷$ ، $g(x)=۲x+۱$ ، تابعی مانند f بیابید به قسمتی که $f \circ g=h$.

۱۳ــ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۵}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ ، توابع $g \circ f$ و $f \circ g$ و دامنه آن‌ها را به‌دست آورید.

۱۴ــ جدول زیر را در نظر بگیرید.

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
f(x)	۳	۱	۴	۲	۲	۵
g(x)	۶	۳	۲	۱	۲	۳

۱۵ــ مقدارهای زیر را حساب کنید.

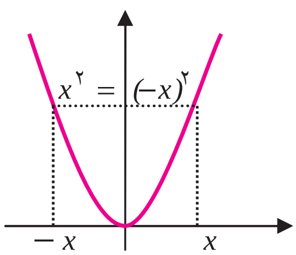
الف) $f(g(۱))$ ب) $g(f(۱))$ ج) $f(f(۱))$

د) $g(g(۱))$ هـ) $(g \circ f)(۳)$ و) $(f \circ g)(۶)$

۱۶ــ اگر $f=\{(۴,۵),(۶,۵),(۸,۱۲),(۱۰,۲)\}$ و $g=\{(۴,۶),(۲,۴),(۶,۸),(۸,۱۰)\}$ توابع $g \circ f$ ، $f \circ g$ را حساب کنید.

توابع زوج و توابع فرد و توابع صعودی و توابع نزولی

باغ دولت آباد ــ یزد



وجود تقارن در خلقت و آفرینش مناظر چشم‌نوازی را پدید آورده است. انسان در ساخته‌های خود از این نکته فراوان بهره برده است. نمودار برخی از توابع متقارن است و همین موضوع کار با آن‌ها را ساده‌تر می‌کند. تابع آشنای $f(x)=x^۲$ نمونه‌ای از این گونه توابع است. این تابع نسبت به محور yها متقارن است. علت این تقارن در آن است که برای هر x در دامنه آن، $-x$ نیز در دامنه آن است و علاوه بر آن $f(x)=x^۲=(-x)^۲=f(-x)$

تمام توابعی که این دو خاصیت را دارا هستند، به عنوان توابع زوج می‌شناسیم. به بیان دقیق‌تر :

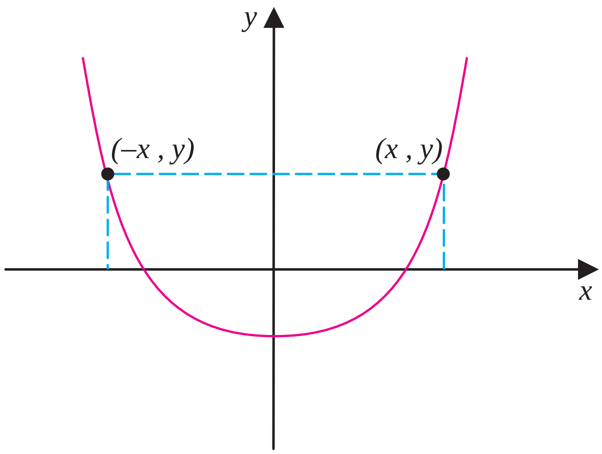
تعریف :

تابع f را زوج نامیم هرگاه :

الف) دامنهٔ آن متقارن باشد، یعنی برای هر $x \in D_f$، $-x \in D_f$

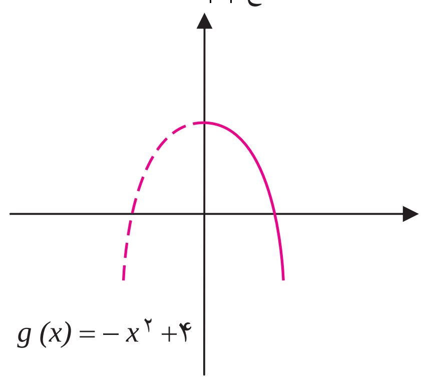
ب) برای هر x در دامنهٔ آن، $f(-x) = f(x)$

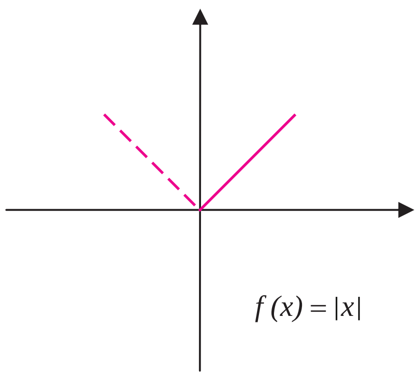
در رسم نمودار توابع زوج از این نکته که نمودار آن‌ها نسبت به محور yها متقارن است استفاده می‌شود.



مثال

۱ : توابع $f(x)-|x|$ ، $g(x) = -x^{۲} + ۴$ زوج هستند :





شرط متقارن بودن دامنه برای هر دو تابع برقرار است، هم‌چنین داریم :

$$f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$$

$$g(-x) = -(-x)^{۲} + ۴ = -x^{۲} + ۴ = g(x)$$

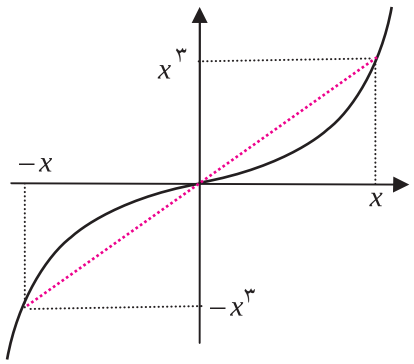
تقارن نسبت به محور yها نیز در نمودارهای این دو تابع دیده می‌شود.

تقارن نمودار توابع نسبت به مبدأ مختصات نیز در بسیاری از توابع دیده می‌شود. برای مثال نمودار تابع $f(x) = x^{۳}$ نسبت به مبدأ متقارن است.

علت این تقارن در آن است که برای هر x در دامنه f،
$-x$ نیز در دامنه f است و

$$f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$$

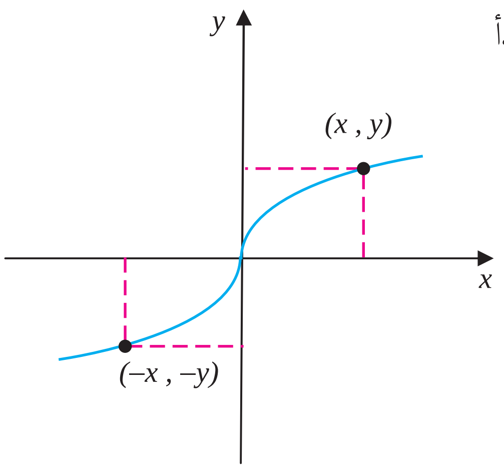
این خاصیت باعث می‌شود هر نقطه روی نمودار این تابع که به صورت (x,x^3) است قرینه آن نسبت به مبدأ یعنی $(-x,-x^3)$ نیز روی نمودار این تابع باشد. توابعی که چنین خاصیتی دارند، تابع فرد نامیده می‌شوند.



تعریف :

تابع f را فرد نامیم هرگاه دامنه آن متقارن باشد و برای هر x در دامنه آن، $f(-x)=-f(x)$

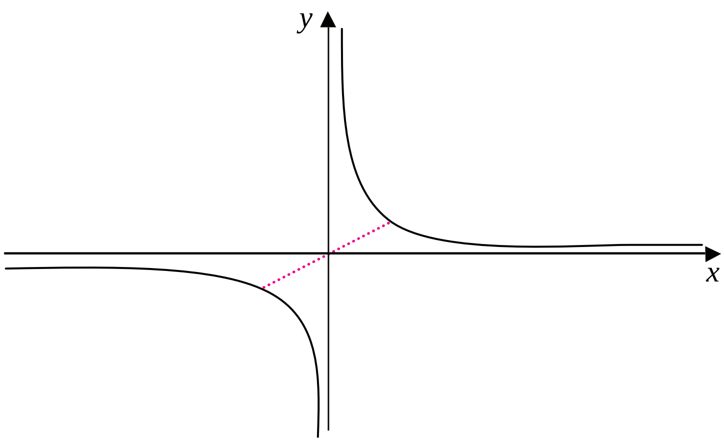
در رسم نمودار توابع فرد از این نکته که نمودار آن‌ها نسبت به مبدأ مختصات متقارن است استفاده می‌شود.



مثال

۲ : $f(x)=\frac{1}{x}$ تابعی فرد است.
زیرا دامنه آن متقارن است و داریم :

$$f(-x)=\frac{1}{-x}=-\frac{1}{x}=-f(x)$$



تمرین در کلاس

۱ــ توابع زیر را در نظر بگیرید.

الف) $y=\dfrac{1}{x-x^2}$ ب) $y=1-x^2$ ج) $y=\sqrt{x}$

د) $y=\sqrt[3]{x}$ هـ) $y=x-|x|$ و) $y=x\sqrt{|x|}$

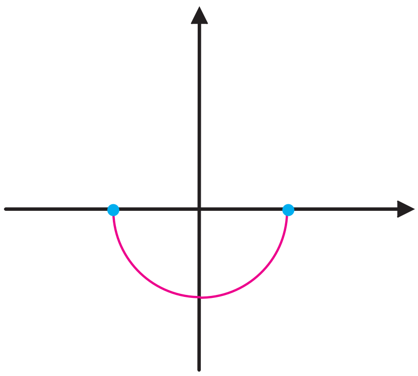
(۱) دامنه کدام‌یک از توابع داده شده متقارن است؟

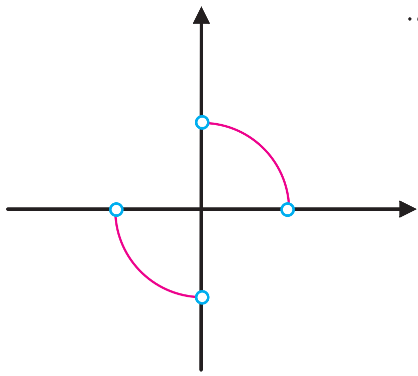
(۲) کدام‌یک از این توابع زوج هستند؟

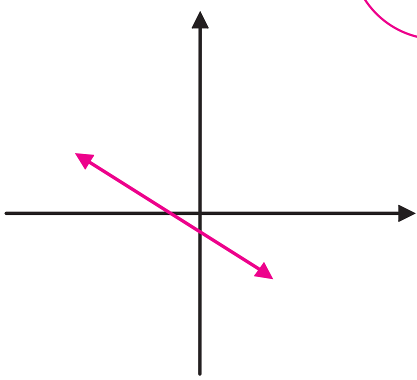
(۳) کدام‌یک از این توابع فرد هستند؟

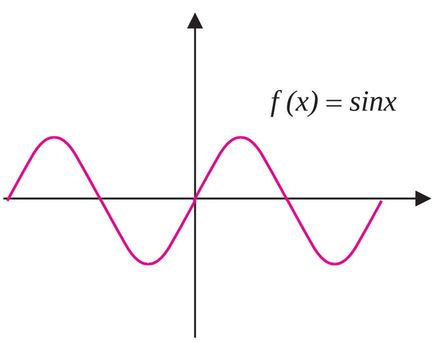
(۴) کدام‌یک از این توابع نه زوج هستند و نه فرد؟

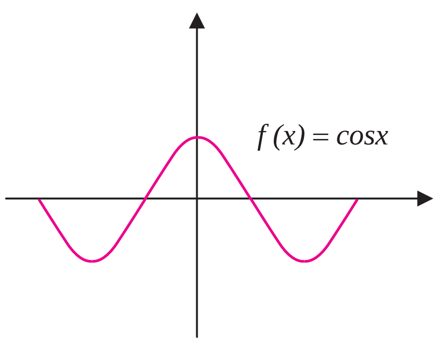
۲ــ تنها با استفاده از نمودارهای توابع داده شده زوج یا فرد بودن آن‌ها یا نه زوج بودن و نه فرد بودن آن‌ها را معلوم کنید.









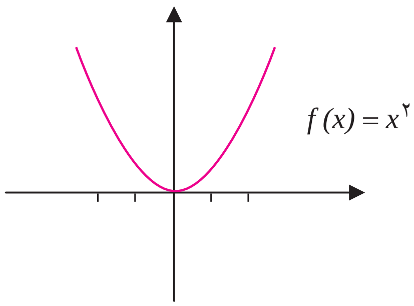


بحث در کلاس

آیا نمودار یک تابع می‌تواند نسبت به محور xها متقارن باشد؟

یکی از سؤالاتی که در مورد توابع مطرح است این است که با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع چه تغییری می‌کند؟ گاهی اوقات با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع افزایش می‌یابد. همچنین برخی مواقع با افزایش مقدار متغیر مقدار تابع کاهش می‌یابد. این ویژگی‌ها را صعودی بودن یا نزولی بودن تابع می‌نامند.

برای مثال تابع $f(x)=x^۲$ را در بازه $[-۲،۲]$ در نظر بگیرید.



در بازه $[-۲،۰]$ همان گونه که از سمت چپ به سمت راست حرکت می‌کنیم، مقادیر متناظر تابع کمتر می‌شوند، یعنی با افزایش مقادیر x، مقادیر y کمتر می‌شوند. در این حالت گوییم تابع در بازه $[-۲،۰]$ نزولی است. اما در بازه $[۰،۲]$ با افزایش مقادیر x، مقادیر y نیز افزایش می‌یابند. در این بازه تابع $f(x)=x^۲$ را صعودی نامیم.

تعریف :

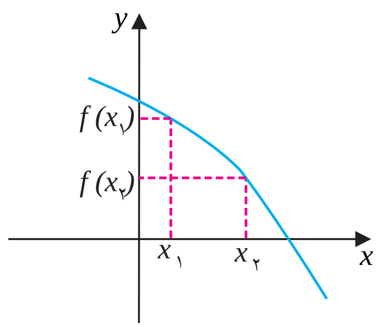
تابع $f(x)$ را صعودی نامیم هرگاه برای هر $x_۱, x_۲$ از دامنه f که $x_۱<x_۲$، داشته باشیم : $f(x_۱)\leq f(x_۲)$.

تابع $f(x)$ را نزولی نامیم هرگاه برای هر $x_۱, x_۲$ از دامنه f که $x_۱<x_۲$، داشته باشیم : $f(x_۲)\leq f(x_۱)$.

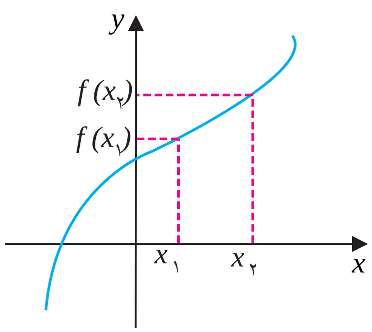
تابع $f(x)$ را صعودی اکید نامیم هرگاه برای هر $x_۱, x_۲$ از دامنه f که $x_۱<x_۲$، داشته باشیم: $f(x_۱)<f(x_۲)$.

تابع $f(x)$ را نزولی اکید نامیم هرگاه برای هر $x_۱, x_۲$ از دامنه f که $x_۱<x_۲$، داشته باشیم : $f(x_۲)<f(x_۱)$.

تابع $f(x)$ را ثابت نامیم هرگاه برای هر دو عضو $x_۱, x_۲$ از دامنه f ، داشته باشیم : $f(x_۱)=f(x_۲)$.



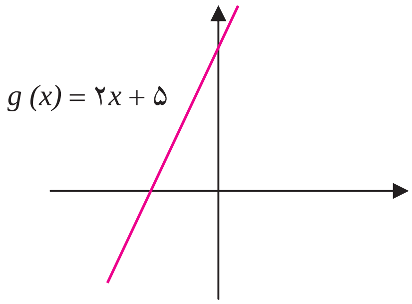
تابع نزولی



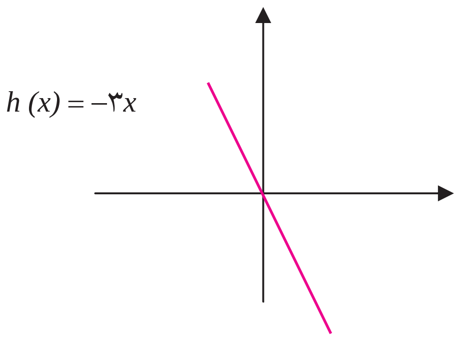
تابع صعودی

مثال

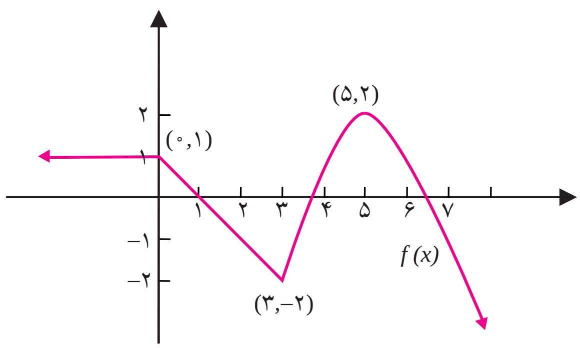
۱ : تابع $g(x)=۲x+۵$ صعودی اکید است. همان‌گونه که از نمودار $g(x)$ پیداست این تابع یک به یک است. این موضوع برای تمام توابع صعودی اکید برقرار است.



۲ : تابع $h(x)=-۳x$ نزولی اکید است. این تابع (با توجه به نمودار آن) یک به یک است. این ویژگی برای هر تابع نزولی اکید برقرار است.



ممکن است یک تابع در دامنه‌اش نه صعودی باشد نه نزولی، ولی در بازه‌هایی از دامنه‌اش صعودی و در بازه‌هایی نزولی باشد. برای مثال تابع $f(x)$ را با نمودار زیر در نظر بگیرید.



همان‌گونه که در شکل دیده می‌شود، تابع $f(x)$ در بازه $(-\infty,۰]$ ثابت و در بازه $[۰،۳]$ نزولی (اکید) و در بازه $[۳،۵]$ صعودی(اکید) و در بازه $[۵,\infty)$ نزولی اکید است.

تمرین در کلاس

توابع زیر را رسم کنید و با استفاده از نمودار آن‌ها تعیین کنید که در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی و در چه بازه‌هایی ثابت هستند.

الف) $f(x)=|x+۲|-۳$

ب) $g(x)=x^{۲}-۶x+۱۰$

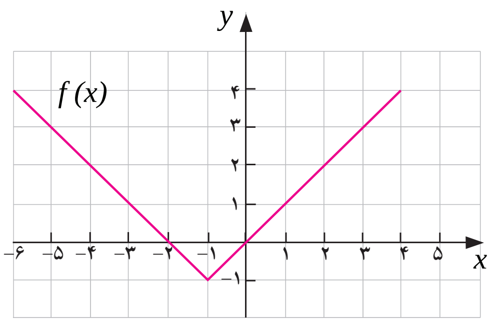
ج) $h(x)=\sqrt{۱-x}$

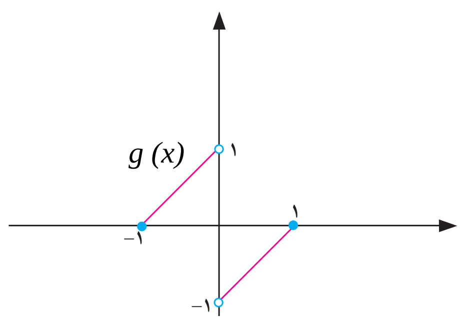
د) $t(x)=\begin{cases} x^{۲} & x\leq -۲ \\ ۴ & -۲\leq x\leq ۱ \\ -x^{۲}-۲ & x>۱ \end{cases}$

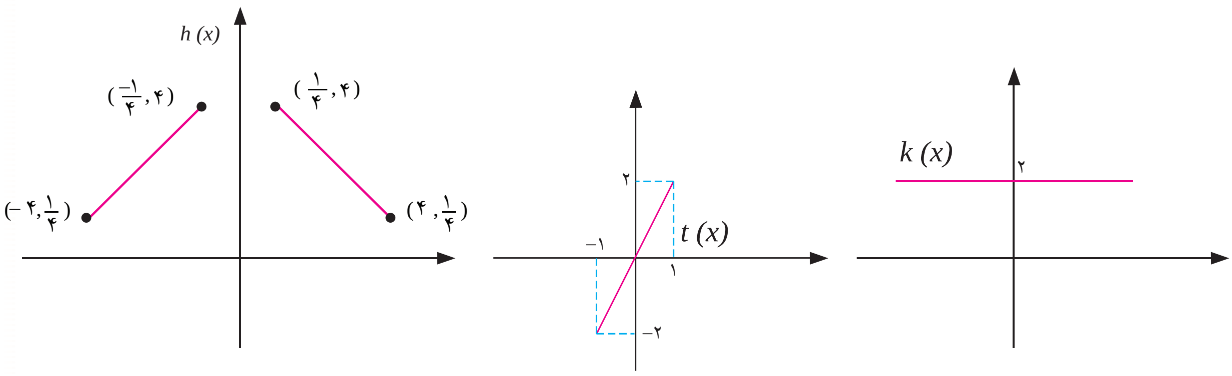
مسائل

۱ـ نمودار توابع f، g، h، k و t در زیر داده شده‌اند.

به کمک این نمودارها تعیین کنید که کدام یک از آن‌ها زوج، کدام‌یک فرد و کدام‌یک نه زوج و نه فرد هستند.







۲ــ زوج یا فرد بودن توابع زیر را معلوم کنید :

الف) $f(x)=x\sqrt{۵-x^{۲}}$ د) $f(x)=|x|$

ب) $f(x)=\frac{x^{۲}-۳}{x^{۳}-۱}$ هـ) $f(x)=۲x+\sin x$

ج) $f(x)=\begin{cases} ۱\ , & x\geq ۰ \\ -۱\ , & x<۰ \end{cases}$ و) $f(x)=x^{۲}+۲x^{۸}$

۳ــ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) مجموع دو تابع زوج، تابعی زوج است.

ب) حاصل ضرب دو تابع زوج، تابعی زوج است.

ج) حاصل ضرب دو تابع فرد، تابعی فرد است.

د) حاصل ضرب یک تابع فرد و یک تابع زوج ، تابعی زوج است.

۴ــ فرض کنید f تابعی با دامنه متقارن باشد، ثابت کنید :

الف) $g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{۲}$ تابعی زوج است.

ب) $h(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{۲}$ تابعی فرد است.

ج) f را می‌توان به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

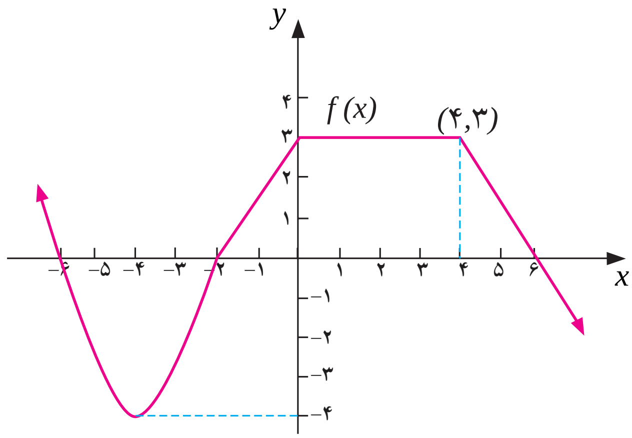
د) تابع $f(x)=۲x^{۳}-۱۰x^{۲}+۲\sqrt{۱+x^{۲}}-۵$ را به صورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد بنویسید.

۵ــ آیا تابعی یافت می‌شود که هم زوج باشد و هم فرد؟ چند تابع با این ویژگی داریم؟

۶ــ در هر یک از حالت‌های زیر نقطه‌ای از نمودار یک تابع داده شده است. نقطه دیگری از نمودار تابع را بیابید در صورتی که : (۱) تابع زوج باشد.   (۲) تابع فرد باشد.

الف) $(-۷،۲)$ ب) $(a،b)$ ج) $(\frac{-۲}{۷},-۷)$ د) $(۵،۳)$

۷ــ با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ که در شکل زیر رسم شده است ، بازه‌هایی که تابع در آن‌ها صعودی، نزولی یا ثابت است را معلوم کنید.



۸ــ تعیین کنید توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی یا نزولی هستند.

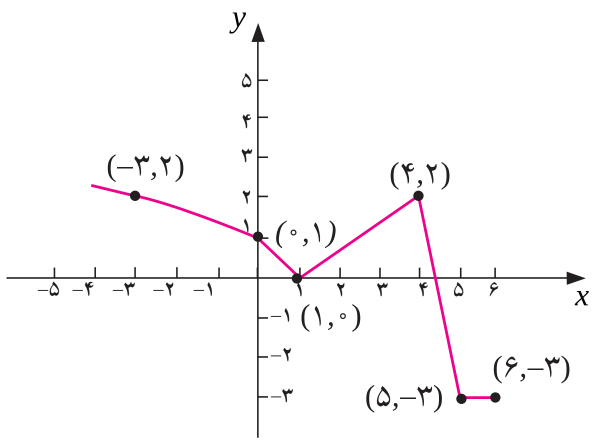
الف) $f(x)=\sqrt{x-۲}$

ب) $f(x)=\frac{۱}{x}$

ج) $f(x)=-|x-۲|+۵$

د) $f(x)=\begin{cases}-۳x-۱۸ & x<-۵\\ ۱ & -۵\le x<۱\\ x+۲ & x\ge ۱\end{cases}$

۹ــ نمودار تابع $f(x)$ در زیر آمده است.



با استفاده از نمودار تابع $f(x)$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) دامنه و برد f را پیدا کنید.

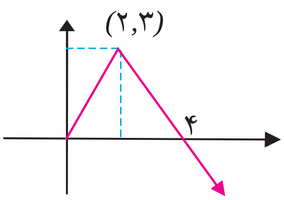
ب) بازه‌هایی که در آن‌ها $f(x) < ۰$ یا $f(x) > ۰$ را بیابید.

ج) بازه‌هایی که f در آن‌ها صعودی یا نزولی است را بیابید.

د) معادله‌ای برای f بیابید (تابع برای مقادیر کمتر از ۱ یک تابع رادیکالی به شکل $\sqrt{ax+b}$ است).

هـ) $f(\frac{۷}{۲})$ ، $f(۵/۳)$ و $f(-۴)$ را بیابید.

۱۰ــ نمودار تابع h در شکل روبه‌رو داده شده است.



الف) نمودار را به گونه‌ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع زوج را نمایش دهد.

ب) نمودار را به گونه‌ای تکمیل کنید که نمودار جدید یک تابع فرد را نمایش دهد.

۱۱ــ مقدار a را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=log(x+\sqrt{x^۲+۴a^۲})$ یک تابع فرد باشد.

۱۲ــ زوج یا فرد بودن توابع f و g را که در زیر آمده است تعیین کنید.

$$f=\{(-۲,۵),(-۱,۴),(۰,۳),(۱,۴),(۲,۵)\}$$

$$g=\{(-۲,۱),(-۱,۲),(۰,۰),(۱,-۲),(۲,-۱)\}$$

توابع یک به یک و توابع وارون

فعالیت ۸

۱ــ محیط هر مربع تابعی از اندازه یک ضلع آن است. محیط را با P و طول ضلع را با l نشان دهید و P را به‌صورت تابعی از l بنویسید. آیا این تابع یک به یک است؟

۲ــ اندازه ضلع هر مربع تابعی از محیط آن است. با نمادهای بالا l را به صورت تابعی از P بنویسید.

۳ــ این دو تابع را بر حسب یک متغیر x به صورت $y=f(x)$ و $y=g(x)$ بنویسید.

۴ــ با توجه به دامنه و برد این دو تابع، نمودار آن‌ها را در یک دستگاه مختصات رسم کنید و نشان دهید که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند.

(توجه داشته باشید که قرینه نقطه $A(a,b)$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم نقطه $B(b,a)$ است.)

توابع یک به یک

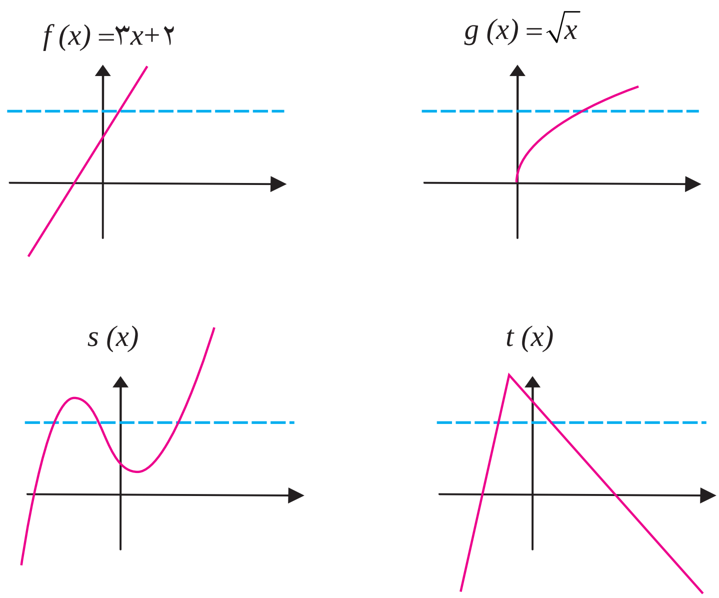
همان‌طور که در درس ریاضی ۲ دیده‌اید وارون هر تابع ، لزوماً یک تابع نمی‌باشد. تنها، توابعی وارون پذیر هستند که یک به یک باشند. این از جمله دلایلی است که باعث می‌شود توابع یک به یک را با دقت بیشتری مطالعه کنیم.

از قبل می‌دانید که تابع f یک به یک است هر گاه دو عضو متمایز x_1, x_2 در دامنه به دو عضو متمایز $f(x_1), f(x_2)$ در برد نظیر شوند به بیان ریاضی می‌توان نوشت :

تعریف :

تابع f یک به یک است هرگاه $x_1, x_2 \in D_f \ , x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

اگر نمودار تابع f داده شده باشد، f در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند. در شکل‌های داده شده توابع f و g یک به یک و در نتیجه وارون پذیر می‌باشند. توابع t و s یک به یک نیستند و در نتیجه وارون پذیر هم نیستند.



یک به یک بودن تابع به این معنی است که هیچ دو نقطه متمایزی مانند x_1, x_2 یافت نمی‌شود که برای آن‌ها : $f(x_1) = f(x_2)$.
به بیان دیگر اگر برای دو نقطه x_1, x_2 داشته باشیم $f(x_1) = f(x_2)$ آن گاه $x_1 = x_2$. تابع یک به یک را به روش زیر نیز می‌توان مشخص کرد.

تذکر :

تابع f یک به یک است، اگر برای هر دو نقطه x_1, x_2 از دامنه f داشته باشیم :

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

مثال

۱ : نشان می‌دهیم تابع $f(x)=3x+2$ یک به یک است.

به کمک نمودار تابع دیده می‌شود که هر خط موازی محور xها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می کند.

از طریق جبری نیز با فرض $f(x_1)=f(x_2)$ ثابت می‌کنیم $x_1=x_2$.

$$\begin{aligned} f(x_1)=f(x_2) &\Rightarrow 3x_1+2=3x_2+2\\ &\Rightarrow 3x_1=3x_2\\ &\Rightarrow x_1=x_2 \end{aligned}$$

روش جبری در جاهایی که نمودار تابع شناخته شده نیست یا رسم آن دشوار است مناسب است.

۲ : ثابت می‌کنیم تابع $f(x)=\dfrac{2x+1}{x-1}$ یک به یک است.

$$\begin{aligned} f(x_1)=f(x_2) &\Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1}=\frac{2x_2+1}{x_2-1}\\ &\Rightarrow 2x_1x_2-2x_1+x_2-1=2x_1x_2-2x_2+x_1-1\\ &\Rightarrow -2x_1-x_1=-2x_2-x_2\\ &\Rightarrow -3x_1=-3x_2\\ &\Rightarrow x_1=x_2 \end{aligned}$$

بنابراین f یک به یک است و در نتیجه وارون‌پذیر است.

۳ : تابع $g(x)=\sqrt{x}$ یک به یک است. این موضوع به سه روش قابل اثبات است.

الف) استفاده از آزمون خط افقی، یعنی هر خط به موازات محور x ها نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.

ب) در حقیقت $g(x)=\sqrt{x}$ یک تابع اکیداً صعودی است، در نتیجه اگر $x_1\neq x_2$ اطمینان داریم که $g(x_1)\neq g(x_2)$. این خاصیت برای تمام توابع اکیداً صعودی برقرار است یعنی، توابع اکیداً صعودی یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر هستند. توابع نزولی اکید نیز یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر هستند.

ج) روش محاسبه جبری : $g(x_1)=g(x_2)\Rightarrow\sqrt{x_1}=\sqrt{x_2}\Rightarrow x_1=x_2$

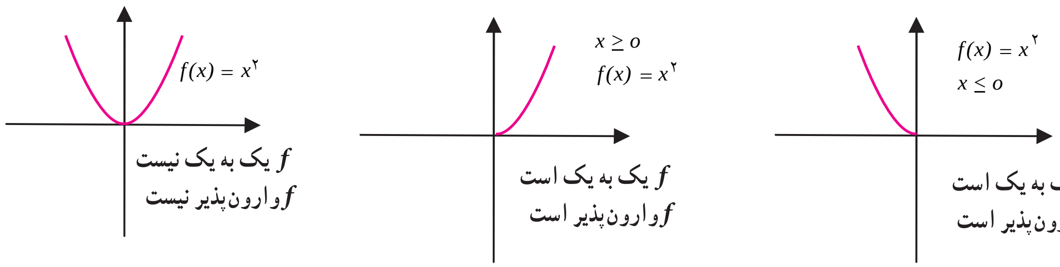
تمرین در کلاس

کدام‌یک از توابع زیر یک به یک است. در مورد (الف) و (ب) موضوع را با رسم نمودار توابع نیز بررسی کنید.

الف) $f(x)=1-x^2$ ب) $g(x)=\sqrt{2x-3}$ ج) $h(x)=\dfrac{x+6}{3x-4}$

اگر تابعی یک به یک نباشد وارون‌پذیر هم نیست، اما با کوچکتر کردن دامنه یک تابع ممکن است بتوانیم تابعی یک به یک بسازیم.

مثلاً تابع $f(x)=x^2$ یک به یک نیست اما می‌توانیم دامنه تابع را به بازه $(-\infty, 0]$ محدود کنیم و در این صورت تابعی یک به یک به‌دست آوریم. همچنین می‌توانیم دامنه آن را به بازه $[0,\infty)$ محدود کنیم و تابعی یک به یک به دست آوریم.



محدود کردن دامنه یک تابع را تحدید کردن تابع می‌نامند. این عمل، از روی تابع داده شده، تابع جدیدی می‌سازد و ممکن است تابع جدید خواصی داشته باشد که تابع قبلی نداشته باشد. در جمع و ضرب و تقسیم توابعی که دامنه یکسان ندارند، ابتدا این توابع روی دامنه یکسان تحدید می‌شوند و سپس این توابع تحدید یافته هستند که با هم جمع، ضرب، یا تقسیم می‌شوند.

تمرین در کلاس

۱. کدام‌یک از توابع زیر یک به یک هستند.

الف) $x \geq 0$ $\quad f(x)=x^2-2x$

ب) $x>0$ $\quad f(x)=\dfrac{x^2-4}{2x^2}$

۲. با محدود کردن دامنه هر یک از توابع زیر روی یک بازه، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y=|x-2|$ ب) $y=(x+3)^2$ ج) $y=sinx$ د) $y=cosx$

اگر f تابعی وارون پذیر باشد و وارون آن تابع g باشد، g تابعی است که برعکس f عمل می‌کند، یعنی اگر $f(a)=b$ آنگاه $g(b)=a$.
این ویژگی باعث می‌شود نمودار g قرینه نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم شود. به خاطر این ویژگی با در دست داشتن نمودار یک تابع وارون پذیر می‌توانیم نمودار تابع وارون آن را رسم کنیم.

بحث در کلاس

اگر f تابعی وارون‌پذیر و وارون آن تابع g باشد، آیا g نیز وارون‌پذیر خواهد بود؟ وارون g چه تابعی خواهد بود؟

محاسبه تابع وارون

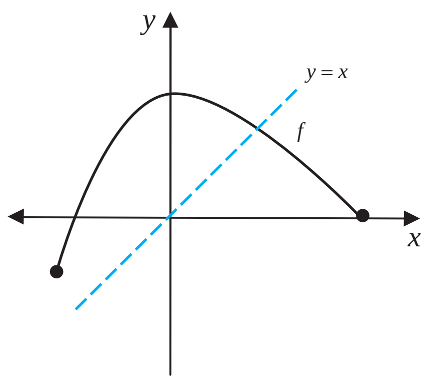
در ریاضی ۲ یادگرفته‌اید که اگر تابعی یک به یک مانند f به صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب داده شده باشد، برای بدست آوردن f^{-1}، جای مؤلفه‌های اول و دوم هر زوج مرتب را عوض می‌کنیم به عبارت دیگر برای هر تابع یک به یک f تابع f^{-1} به صورت زیر تعریف می‌شود :

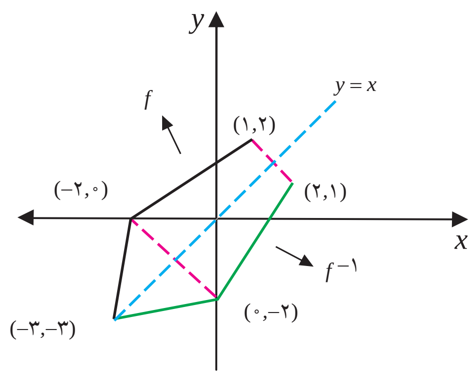
$$f^{-1}=\{(y,x)|(x,y)\in f\}$$

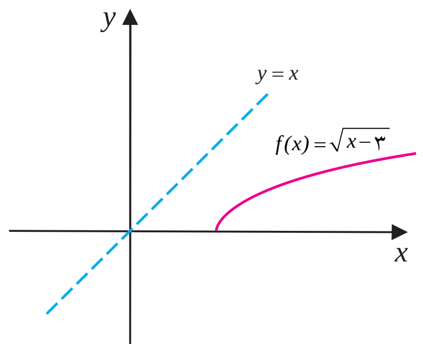
با توجه به تعریف f^{-1} ، هنگامی که نمودار یک تابع یک به یک f داده شده باشد برای به دست آوردن نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه نمودار f را نسبت به خط $y=x$ به دست آوریم.

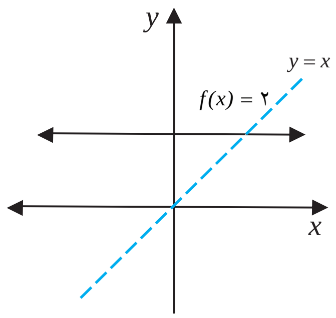
تمرین در کلاس

ابتدا تعیین کنید که کدام‌یک از توابع زیر یک به یک هستند، سپس وارون هر کدام که یک به یک هستند را مانند نمونه در همان دستگاه مختصات رسم کنید. از خط $y=x$ برای سهولت استفاده کنید.





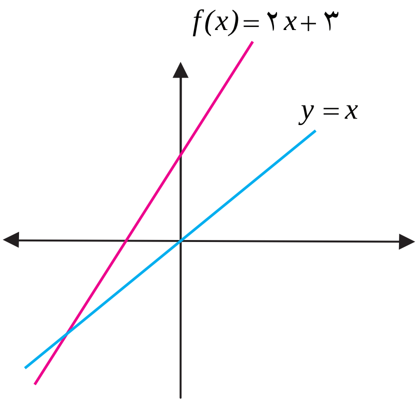




یافتن ضابطهٔ تابع وارون

فعالیت ۹

نمودار تابع خطی $f(x) = ۲x + ۳$ داده شده است.



۱ــ وارون این تابع را در همان دستگاه مختصات رسم کنید.

۲ــ معادله‌ای برای وارون این تابع به دست آورید. می‌توانید از این نکته استفاده کنید که نقاط $(۱,۵),(۰,۳)$ روی نمودار f قرار دارند. پس نقاط $(۵,۱),(۳,۰)$ روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارند و نمودار $f^{-۱}$ یک خط راست است.

پیدا کردن ضابطهٔ $f^{-۱}$ در فعالیت قبل چندان دشوار نبود زیرا f یک تابع خطی بود. اما اگر f خطی نباشد کار چندان ساده نیست. اکنون با روش دیگری وارون f را به دست می‌آوریم که بتوان آن را هنگامی که تابع داده شده خطی هم نیست به کار برد.
تابع $f(x) = ۲x + ۳$ را در نظر می‌گیریم. در جدول زیر برخی از مقادیر از دامنه و مقادیر نظیر آن از برد داده شده‌اند. همان طور که می‌دانید f یک به یک است اگر شبیه همین جدول را برای تابع وارون f در نظر بگیریم جدولی به دست می‌آید که در آن جای مقادیر متناظر y,x تغییر کرده است.

جدول تابع f

x	y
۲	۷
۱	۵
$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱۱}{۳}$
۰	۳
-۱	۱
-۲	-۱

جدول تابع $f^{-۱}$

x	y
۷	۲
۵	۱
$\frac{۱۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$
۳	۰
۱	-۱
-۱	-۲

y	$\frac{y-۳}{۲}=x$
۷	۲
۵	۱
$\frac{۱۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$
۳	۰
۱	-۱
-۱	-۲

زوج مرتب $(۱,۵)$ به f تعلق دارد و زوج $(۵,۱)$ به وارون آن. عدد ۱ توسط قانون تابع به ۵ نظیر شده است یعنی ۱ در ۲ ضرب شده و ۳ واحد به آن اضافه شده است اما چه قانونی ۵ را به ۱ نظیر می‌کند؟ پاسخ برگشت از همین مسیر است. یعنی ابتدا سه واحد از ۵ کم کنیم و سپس مقدار به دست آمده را بر ۲ تقسیم کنیم جدول روبه‌رو این فرآیند را بهتر توصیف می‌کند. اگر تابع وارون f را با g نمایش دهیم، ضابطه آن به صورت : $g(y)=\frac{y-۳}{۲}$ می‌باشد. مشخص است که yها از برد f اختیار می‌شوند.

همان طور که می‌دانید g را به صورت‌های زیر هم می‌توان نمایش داد :

$$g(a)=\frac{a-۳}{۲} \quad , \quad g(b)=\frac{b-۳}{۲} \quad , \quad g(t)=\frac{t-۳}{۲}$$

آن چه که مهم است این است که دامنهٔ g همان برد f است بنابراین می‌توان نوشت :

$$g(x)=\frac{x-۳}{۲} \qquad x\in R_f$$

از آنجا که g را معمولاً با $f^{-۱}$ نمایش می‌دهیم داریم : $f^{-۱}(x)=\frac{x-۳}{۲}$

اکنون آن چه بیان شده را به عنوان یک روش به کار می‌بریم.

تذکر :

برای به‌دست‌آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع وارون‌پذیر مانند f در معادلهٔ $y=f(x)$ ، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x تابع $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

مثال

ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=۲x+۳$ را به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} f(x)=۲x+۳ &\Rightarrow y=۲x+۳ \\ &\Rightarrow ۲x=y-۳ \\ &\Rightarrow x=\frac{y-۳}{۲} \\ &\Rightarrow g(y)=\frac{y-۳}{۲} \\ &\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x-۳}{۲} \end{aligned}$$

تمرین در کلاس

نشان دهید توابع زیر یک به یک هستند و دامنه و برد و ضابطه تابع وارون آن‌ها را به دست آورید.

الف) $f(x)=\sqrt{x-۲}$ ب) $g(x)=\dfrac{x-۵}{۲x+۳}$

فعالیت ۱۰

۱ــ اگر $f(x)=۲x+۳$ دیدیم که وارون آن، تابع $g(x)=\dfrac{x-۳}{۲}$ است. توابع $(f\circ g)(x), (g\circ f)(x)$ را محاسبه کنید.

۲ــ اگر $f(x)=\sqrt{۲x-۱}$ ثابت کنید که f وارون‌پذیر است و وارون آن تابع $g(x)=\dfrac{x^۲+۱}{۲}$ است. توابع $(f\circ g)(x), (g\circ f)(x)$ را محاسبه کنید.

۳ــ به طور کلی اگر تابع f دارای تابع وارون g باشد در مورد توابع $(f\circ g)(x), (g\circ f)(x)$ چه حدس می‌زنید؟ توجه کنید که تابع و تابع وارون عکس یکدیگر عمل می‌کنند.

خاصیت تابع و تابع وارون نشان می‌دهد که قضیه زیر برقرار است.

قضیه :

اگر دو تابع f و g وارون یکدیگر باشند داریم :

$$D_g=R_f \quad , \quad R_g=D_f$$

و برای هر x در دامنهٔ f داریم :

$$g(f(x))=x$$

و برای هر x در دامنهٔ g داریم :

$$f(g(x))=x$$

تذکر : توجه داریم که $f^{-۱}$ یک نماد است و نباید آن را با $\dfrac{۱}{f(x)}$ اشتباه گرفت.

تمرین در کلاس

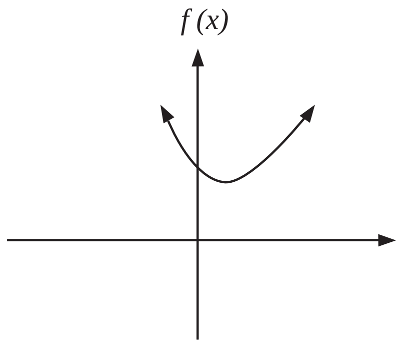
۱ــ اگر $f(x)=\frac{۷}{x}+۳$ ، $g(x)=\frac{۷}{x-۳}$ ، $h(x)=\frac{x-۳}{۷}$ ثابت کنید که f و g وارون یکدیگرند ولی g و h وارون یکدیگر نمی‌باشند.

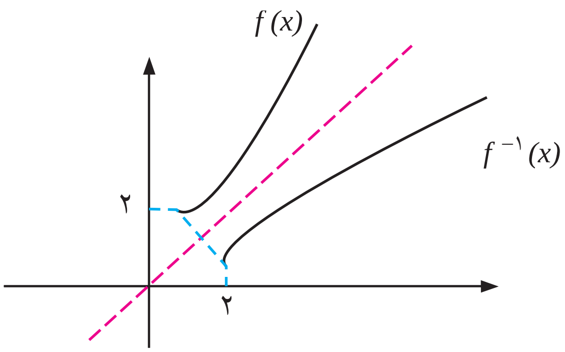
۲ــ آیا دو تابع $f(x)=\frac{۲}{۵}$ ، $g(x)=\frac{۵}{۲}$ وارون یکدیگرند؟

۳ــ اگر $y=m_۱x+b_۱$ و $y=m_۲x+b_۲$ معادله دو خط باشند که نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه‌اند، نشان دهید $m_۱m_۲=۱$.

مثال

تابع $f(x)=x^۲-۲x+۳$ یک به یک نیست. زیرا $f(۰)=f(۳)$ ولی $۳\neq۰$ یک به یک نبودن f از روی نمودار آن نیز به سادگی دیده می‌شود.





اما تحدید این تابع روی بازهٔ $[۱,\infty)$ تابعی یک به یک است و می‌توانیم معادله‌ای برای $f^{-۱}$ به دست آوریم. نمودار بالا یک‌به یک بودن تحدید f روی بازهٔ $[۱,\infty)$ را نشان می‌دهد و با روش جبری نیز می‌توانیم این مطلب را ثابت کنیم.

$$f(x_۱)=f(x_۲)\Rightarrow x_۱^۲-۲x_۱+۳=x_۲^۲-۲x_۲+۳$$
$$\Rightarrow(x_۱-۱)^۲+۲=(x_۲-۱)^۲+۲$$
$$\Rightarrow(x_۱-۱)^۲=(x_۲-۱)^۲$$
$$\Rightarrow x_۱-۱=x_۲-۱$$
$$\Rightarrow x_۱=x_۲$$

توجه داشته باشید که در نتیجه‌گیری‌های بالا از این که $۱\leq x_۱$ و $۱\leq x_۲$ استفاده کرده‌ایم (چگونه؟). برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون داریم :

$$f(x)=x^{۲}-۲x+۳ \Rightarrow y=(x-۱)^{۲}+۲ \Rightarrow y-۲=(x-۱)^{۲} \Rightarrow x-۱=\pm\sqrt{y-۲}$$

جواب منفی قابل قبول نیست (چرا؟) بنابراین $x-۱=\sqrt{y-۲}$ در نتیجه

$$x=\sqrt{y-۲}+۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۲}+۱$$

به کمک نمودارها و نیز از ضابطه توابع دیده می‌شود که :

$$D_f=[۱,+\infty)=R_{f^{-۱}}$$
$$R_f=[۲,+\infty)=D_{f^{-۱}}$$

بنابراین :

$$f^{-۱}:[۲,+\infty)\to[۱,+\infty)$$
$$f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۲}+۱$$

درستی تساوی $f(f^{-۱}(x))=x$ با محاسبه زیر روشن می‌شود.

$$f(f^{-۱}(x))=f(\sqrt{x-۲}+۱)=(\sqrt{x-۲}+۱-۱)^{۲}+۲=(\sqrt{x-۲})^{۲}+۲=x-۲+۲=x$$

اثبات درستی رابطهٔ $f^{-۱}(f(x))=x$ به طریق مشابه است.

بحث در کلاس

وارون یک تابع صعودی (اکید)، صعودی است یا نزولی؟ وارون یک تابع نزولی (اکید) چگونه است؟

مسائل

۱ــ تحقیق کنید که توابع $f(x)=\frac{۱}{x}+۲$ ، $g(x)=\frac{۱}{x-۲}$ وارون یکدیگرند. برای کدام مقادیر x داریم $f(g(x))=x$ و برای کدام مقادیر x داریم $g(f(x))=x$ ؟

۲ــ فرض کنید تابع f دارای وارون است. اگر نمودار f در ربع اول واقع شود، نمودار $f^{-۱}$ درکدام ناحیه قرار می‌گیرد؟

۳ــ نشان دهید تابع $f(x)=|x-۲|+۳$ یک به یک نیست. با محدود کردن دامنه f یک تابع یک به یک بسازید و وارون آن را به دست آورید.

۴ــ در هر یک از حالت‌های زیر نشان دهید که توابع f و g وارون یکدیگرند.

الف) $f(x)=x^{۳}-۵$, $g(x)=\sqrt[۳]{x+۵}$

ب) $f(x)=\sqrt{x-۲}$, $g(x)=x^۲+۲$ ، $x\geq ۰$

۵ــ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همه شرایط زیر صدق کند.

الف) f وارون پذیر نباشد.

ب) برای هر عددحقیقی x ، $x < f(x)$.

۶ــ وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند به دست آورید.

الف) $f(x)=(x+۵)^۲$ ، $x\geq -۵$

ب) $f(x)=-|x-۱|+۱$ ، $x\geq ۱$

ج) $f(x)=(x-۳)^۲$

د) $f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

۷ــ نشان دهید که تابع $f(x)=\dfrac{۳x-۲}{۵x-۳}$ وارون خودش است.

۸ ــ تابع $f(x)=ax+b$ $a\neq ۰$ داده شده است همهٔ مقادیر b,a را که به ازای آن‌ها $f^{-۱}(x)=f(x)$ را بیابید.

۹ــ در مورد وارون پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲+۲ & x\leq -۱ \\ x^۲ & -۱< x < ۱ \\ x+۱ & ۱\leq x \end{cases}$ تحقیق کنید.

۱۰ــ اگر $f(x)=x+۳$ ، $g(x)=۳x-۷$ با محاسبه نشان دهید $g^{-۱}\circ f^{-۱}=(f\circ g)^{-۱}$.

۱۱ــ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t)=۱۰۰-\dfrac{۴۹}{۱۰}t^۲$ به دست می‌آید.،

الف) دامنه و برد تابع $h(t)$ را به دست آورید.

ب) چرا $h(t)$ تابعی یک به یک است و معنای فیزیکی آن چیست؟

ج) تابع وارون h را به دست آورید.

د) معنای فیزیکی تابع وارون h چیست و چه مقدارهایی را به چه مقدارهایی تبدیل می‌کند؟

توابع چند جمله‌ای و توابع متناوب

قبلاً با توابع خطی آشنا شده‌اید. هر تابع به صورت $f(x)=ax+b$ را یک تابع خطی می‌نامیم. اگر $a=0$، تابع به صورت $f(x)=b$ درمی‌آید که آن را تابع ثابت می‌نامند. توابع خطی حالت خاصی از توابعی هستند که آن‌ها را توابع چندجمله‌ای می‌نامند. توابع درجه دوم نیز حالت خاصی از توابع چندجمله‌ای هستند.

تعریف :

هر تابع به‌صورت : $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ که در آن $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n$ اعدادی حقیقی و n یک عدد صحیح نامنفی و $a_n\neq 0$ را یک تابع چندجمله‌ای از درجهٔ n می‌نامند.

درجدول زیر مثال‌هایی از توابع چندجمله‌ای ارائه شده است.

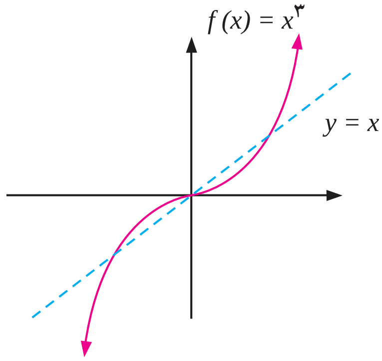
مثال	شکل کلی	درجهٔ چندجمله‌ای
$f(x)=3$	$f(x)=a$	۰ (توابع ثابت)
$f(x)=\frac{2}{3}x-5$	$f(x)=a_1x+a_0$	۱(خط با شیب a_1)
$f(x)=-3x^2+2x+1$	$f(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$	۲(سهمی‌ها)
$f(x)=7x^3-\sqrt{2}x^2+2x-5$	$f(x)=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$	۳
$f(x)=x^4-x^3+x$	$f(x)=a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$	۴

با رسم نمودار توابع چندجمله‌ای از درجه ۰، ۱ ، ۲ و یافتن دامنه و برد آن‌ها آشنا شده‌اید. دراین‌جا نمودار تابع چندجمله‌ای $f(x)=x^3$ و برخی از توابع چندجمله‌ای دیگر درجه سوم که به‌کمک تابع $y=x^3$ می‌توان نمودار آن‌ها را رسم کرد مورد بررسی قرار می‌دهیم.

دامنهٔ تابع $f(x)=x^3$ برابر IR است و تابعی فرد است، بنابراین نمودار آن نسبت به مبدأ مختصات متقارن است . با توجه به ضابطه تابع برای مقادیر مثبت x، مقدار تابع مثبت است بنابراین کافی است نمودار تابع در ربع اول را رسم کنیم و سپس قرینه آن را نسبت به مبدأ مختصات رسم کنیم. این تابع صعودی است زیرا اگر $x_1<x_2$ می‌توان نتیجه گرفت $x_1^3<x_2^3$.

برای $0<x<1$ داریم : $0<x^3<x$ و برای $x>1$ داریم $x<x^3$ ، بنابراین نمودار این تابع دربازهٔ $(0,1)$ زیر خط $y=x$ و در بازهٔ $(1,\infty)$ بالای خط $y=x$ قرار دارد .

اکنون با کمک نقطه‌یابی رسم نمودار تقریبی $f(x)=x^{۳}$ به سادگی انجام می‌شود.



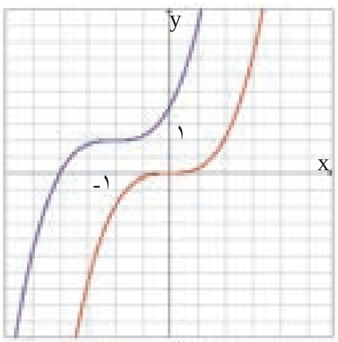
x	$f(x)$
۰	۰
$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲۷}$
$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۸}$
۱	۱
$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۲۷}{۸}$
۲	۸

باتوجه به یک به یک بودن، این تابع وارون‌پذیر است و $f^{-۱}(x)=\sqrt[۳]{x}$.

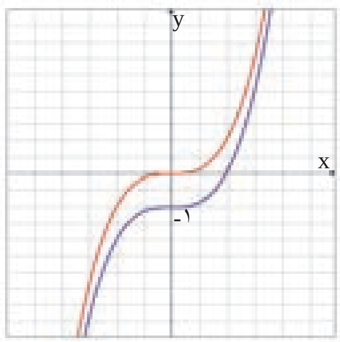
تمرین در کلاس

۱ــ نمودار $y=\sqrt[۳]{x}$ را در همان دستگاه مختصات به همراه نمودار $y=x^{۳}$ رسم کنید.

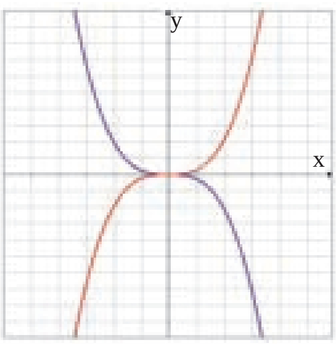
۲ــ در هریک از شکل‌های زیر نمودار تابع $y=x^{۳}$ و نمودار یک تابع دیگر که به کمک آن به دست آمده است در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند. ضابطه نمودار تابع جدید را بنویسید.



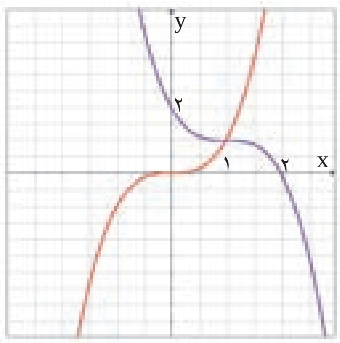
(الف)



(ب)



(ج)



(د)

۳ــ نمودار توابع $y=(x+\frac{۳}{۲})^{۳}$ و $y=(x-۱)^{۳}+۲$ و $y=۲x^{۳}$ را به کمک نمودار تابع $y=x^{۳}$ رسم کنید.

حرکت‌هایی که الگوی خاصی را تکرار می‌کنند حرکت متناوب می‌نامند. حرکت زمین دور خورشید، تغییر فصل‌ها، حرکت عقربه‌های ساعت از این نوع حرکت‌ها هستند. این نوع حرکت در تنظیم بلند مدت وقت و محاسبه زمان به انسان کمک می‌کند. حرکت دیگر تناوبی گردش ماه به دور زمین است که در طی یک دوره تقریباً ۲۸ روزه صورت می‌گیرد و ما را در محاسبه تعداد ماه‌ها یاری می‌نماید. بسیاری از پدیده‌های طبیعی دیگر در عالم خلقت نیز دارای رفتار تناوبی هستند. انسان‌ها از این‌گونه رفتارها در ساخت مصنوعات بشری مانند ساعت هم استفاده کرده‌اند.

توابعی که بیان کننده این حرکات تناوبی هستند شکل خاصی دارند و آن‌ها را تابع‌های متناوب می‌نامند. سال قبل با توابع متناوبی مانند $y = sinx$ و $y = cosx$ و دوره تناوب برخی از توابع مثلثاتی آشنا شده‌اید. در اینجا به طور دقیق‌تری توابع متناوب را تعریف می‌کنیم.

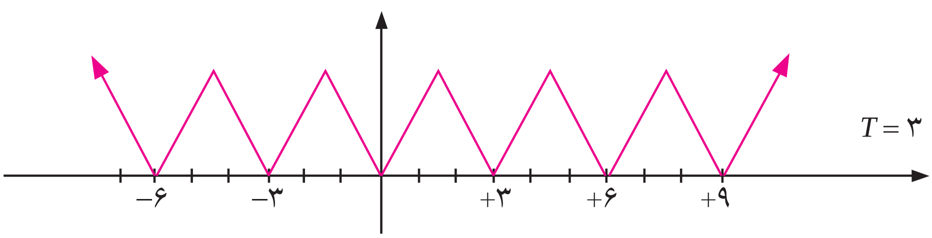
تعریف :

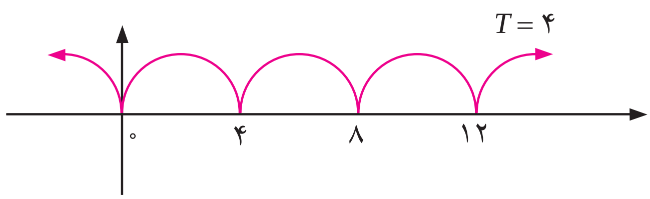
تابع f را متناوب نامیم هرگاه یک عدد حقیقی مثبت مانند T موجود باشد که برای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $x\pm T\in D_f$ و $f(x+T)=f(x)$. کوچک‌ترین عدد T با خاصیت بالا را دورهٔ تناوب f می‌نامند.

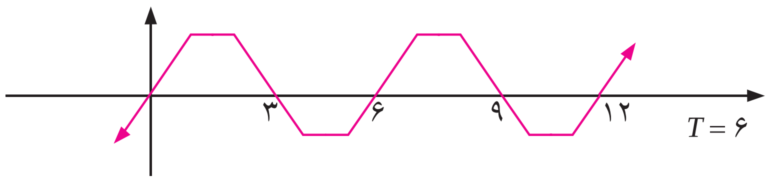
مثال

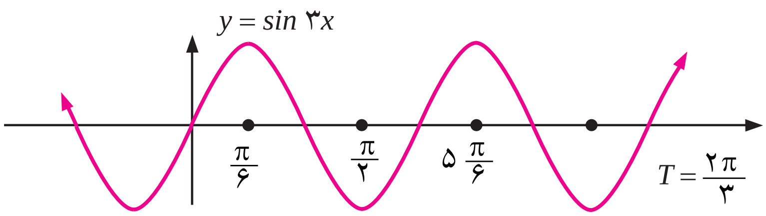
۱ : توابع $y = sinx$ و $y = cosx$ توابعی متناوب با دورهٔ تناوب ۲π هستند.

۲ : توابعی که نمودار آن‌ها در زیر آمده است توابعی متناوب با دورهٔ تناوب‌های مختلف هستند.



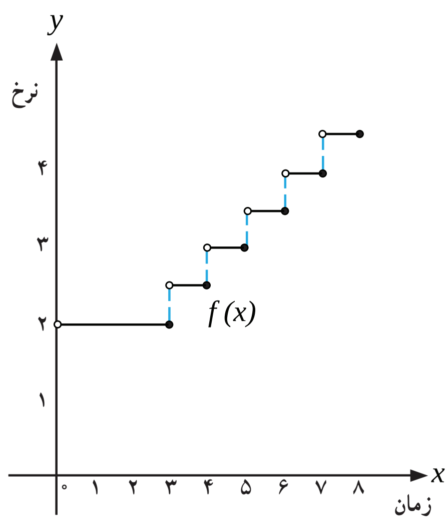






توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

نرخ ارسال بسته‌های پستی به طور معمول تابعی از وزن آن‌ها است. همچنین نرخ توقف در پارکینگ‌ها برحسب ساعت توقف اتومبیل‌ها در آن جا تعیین می‌شود، یعنی نرخ پارکینگ تابعی از زمان توقف است. فرض کنید پارکینگ یک مجتمع تفریحی و ورزشی برای سه ساعت اول توقف ۲ هزارتومان و برای هر ساعت اضافه یا زمانی کمتر از یک ساعت ۵۰۰ تومان دریافت کند. اگر حداکثر زمان توقف در این پارکینگ ۸ ساعت باشد، نمودار تابعی که نرخ توقف را به ازای همه ساعات ممکن نشان دهد به شکل زیر است.



x (ساعات توقف)	f(x) = نرخ برحسب هزار تومان
$۰ < x \leq ۳$	۲
$۳ < x \leq ۴$	۲/۵
$۴ < x \leq ۵$	۳
$۵ < x \leq ۶$	۳/۵
$۶ < x \leq ۷$	۴
$۷ < x \leq ۸$	۴/۵

دامنه این تابع [۰, ۸] و برد آن مجموعه {۲,۲/۵,۳,۳/۵,۴,۴/۵} می‌باشد. برای مثال برای توقف ۵ ساعت و ۲۰ دقیقه‌ای باید مبلغ ۳۵۰۰ تومان پرداخت کرد.

توابعی که نمودار آن‌ها شبیه تابع بالا هستند به توابع پله‌ای معروف هستند.

تعریف :

هر تابعی که بتوان دامنه آن را به تعدادی بازه تقسیم‌بندی کرد که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها تابع ثابت باشد یک تابع پله‌ای می‌نامند.

گونه خاصی از توابع پله‌ای تابع جزء صحیح می‌باشد. ابتداجزء صحیح یک عدد را تعریف می‌کنیم و بعد تابع جزء صحیح را تعریف می‌کنیم.

تعریف :

برای هر عدد حقیقی x جزء صحیح آن، بزرگترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نیست. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم.

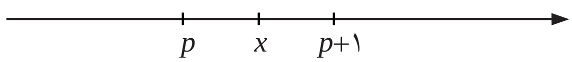
برای مثال داریم :

$$[\sqrt{۳}]=۱ \qquad [۷]=۷ \qquad [۴/۹]=۴ \qquad [۳/۲]=۳$$

$$[-۲/۹۵]=-۳ \qquad [-۲]=-۲ \qquad [۱-\sqrt{۲}]=-۱ \qquad [-۱/۵]=-۲$$

جزء صحیح یک عدد به شکل زیر نیز مشخص می‌شود.

برای هر عدد حقیقی x، یک عدد صحیح p موجود است که $p \le x < p+۱$. p همان جزء صحیح x است.

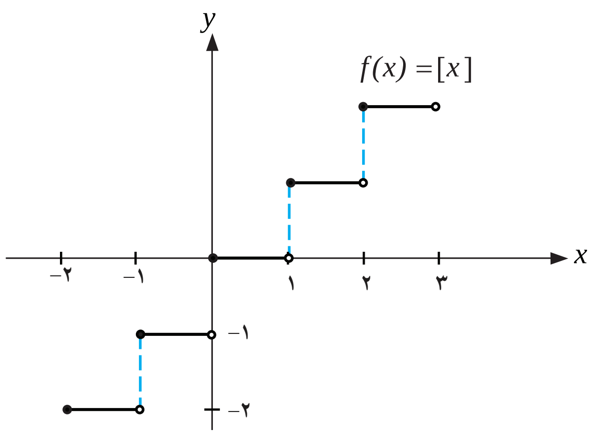


تعریف :

تابعی که به‌هر عدد حقیقی، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد، تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و با $f(x) = [x]$ نمایش داده می‌شود.

دامنه تابع جزء صحیح مجموعه‌اعداد حقیقی و برد آن مجموعه اعداد صحیح می‌باشد. نمودار این تابع با توجه به جدول، در بازه $[-۲ ، ۳)$ رسم شده‌است.

x	$[x]$
$-۲ \le x < -۱$	-۲
$-۱ \le x < ۰$	-۱
$۰ \le x < ۱$	۰
$۱ \le x < ۲$	۱
$۲ \le x < ۳$	۲



تمرین در کلاس

یک شرکت خدماتی برای هر ساعت کار، یا کسری از ساعت ۵ هزار تومان هزینه دریافت می‌کند. تابعی بنویسید که هزینه x ساعت کار را محاسبه کند. نمودار این تابع را نیز رسم کنید.

مثال : تابع $f(x)=[۲x]$ را در بازه $[-۱ ، ۲]$ رسم می‌کنیم.

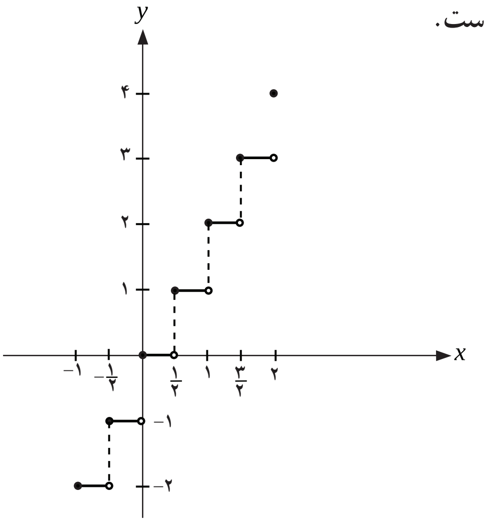
می‌دانیم که نمودار این تابع از انقباض نمودار تابع $[x]$ با ضریب $\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید. اگر $-۱\le x\le ۲$ آنگاه $-۲\le ۲x\le ۴$ و با توجه به تعریف جزء صحیح، $[۲x]$ مقدارهای ۲− و ۱− و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را اختیار خواهد کرد.

$$[۲x]=-۲\Rightarrow -۲\le ۲x<۱\Rightarrow -۱\le x<-\frac{۱}{۲}$$

با استدلال مشابه داریم :

$$[۲x]=-۱\Rightarrow -\frac{۱}{۲}\le x<۰ , [۲x]=۰\Rightarrow ۰\le x<\frac{۱}{۲}$$

بنابراین تابع در بازه‌های متوالی به طول $\frac{۱}{۲}$ که‌از نقطه ۱− شروع می‌شود به‌ترتیب مقدارهای۲− و ۱− و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ را اختیار خواهد کرد. نمودار این تابع به شکل زیر است.



مسائل

۱ــ تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۵ & x\le -۳ \\ -۱ & -۱\le x<۴ \\ ۲ & ۴\le x \end{cases}$$

۲ــ نمودار تابع $y=[\frac{۱}{۳}x]$ را در بازه $[-۶ ، ۶]$ رسم کنید.

۳ــ وارون پذیری تابع $y = [x]$ را بررسی کنید.

۴ــ نمودار توابع زیر را در بازه $[-۲ ، ۲]$ رسم کنید .

الف) $y = ۲[x]$ ب) $y = [-x]$

۵ــ نشان دهید تابع $y = x - [x]$ متناوب است و با به دست آوردن دوره تناوب آن، نمودار آن را رسم کنید.

۶ــ نمودار توابع زیر را به کمک نمودار $[x]$ رسم کنید.

الف) $y = [x] - \frac{۱}{۲}$ ب) $y = ۲[x] + ۱$

۷ــ نمودارهای دو تابع $y = [x - ۳]$ و $y = [x] - ۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟

۸ــ یک شرکت پستی برای ارسال بسته‌های پستی تا کمتر از یک کیلوگرم ۲ هزار تومان و برای ارسال بسته‌های از ۱ تا کمتر از ۲ کیلوگرم ۴ هزار تومان و از ۲ تا کمتر از ۳ کیلوگرم ۶ هزار تومان و برای بسته‌های بیشتر نیز به‌همین ترتیب دریافت می‌کند. اگر $f(x)$ هزینه‌ارسال یک بسته پستی x کیلوگرمی می‌باشد، نمودار آن را رسم کنید و معادله‌ای برای آن بیابید.

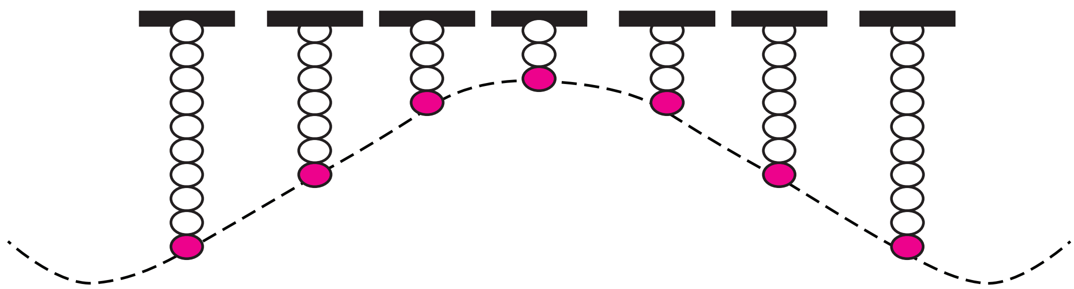
طول روز در طی یک سال کم و زیاد می‌شود. تصویر بالا علت این امر را نشان می‌دهد می‌توان دید که طول روز را تقریباً می‌توان به صورت یک تابع مثلثاتی از روزهای سال نوشت.

مثلثات

توابع مثلثاتی

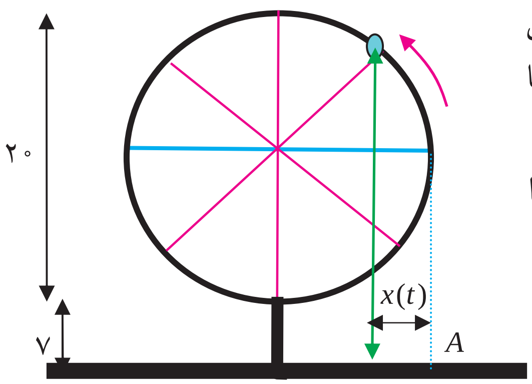
بیان ریاضی بسیاری از حرکت‌های متناوب در طبیعت، با توابع مثلثاتی انجام می‌شود. مثلاً حرکت رفت و برگشتی یک آونگ، حرکت سیارات به دور خورشید، نوسانات یک فنر همگی از طریق توابع مثلثاتی قابل بیان هستند.

مثال : فرض کنید وزنه‌ای را از یک فنر آویزان کرده‌ایم و فنر به حال تعادل رسیده است.
اگر وزنه به یک مقدار اندک کشیده و رها شود با فرض کم بودن اصطکاک وزنه یک حرکت نوسانی انجام خواهد داد. اگر مبدأ محاسبه ارتفاع وزنه را حالت تعادل وزنه بگیریم، و لحظه $t=0$ را لحظه رد شدن وزنه از حالت تعادل بگیریم تابعی که ارتفاع وزنه را در هر لحظه مشخص می کند به صورت $y(t) = A\sin(Bt)$ است.



تمرین در کلاس

فرض کنید چرخ وفلکی به قطر ۲۰ متر داریم که هر ۲ دقیقه یک دور در جهت مثبت می‌چرخد. فرض کنید پایین‌ترین نقطه چرخ و فلک ۷ متر بالای زمین باشد، و کابین خاصی از چرخ و فلک را در نظر گرفته باشیم که در لحظه $t=0$ با زمین ۱۷ متر فاصله دارد و رو به بالا در حال حرکت است.
می‌خواهیم در هر لحظه ارتفاع این کابین از سطح زمین را مشخص کنیم.



۱ــ پس از گذشت t ثانیه، کمانی که کابین طی می‌کند چند رادیان است؟

۲ــ پس از گذشت t ثانیه، کابین چند متر بالای قطر افقی قرار دارد؟ (اگر کابین زیر قطر افقی باشد این عدد را منفی حساب کنید.)

۳ــ تابعی که ارتفاع کابین را (بر حسب متر) نسبت به زمان (بر حسب ثانیه) نشان می‌دهد بنویسید.

۴ــ اگر در لحظه t فاصله سایه این کابین روی زمین تا نقطه A را با $x(t)$ نشان دهیم، این تابع را به دست آورید.

مثال

می‌دانیم که تغییرات طول روز در هر سال مشابه سال قبل تکرار می‌شود. اگر از اول فروردین طول هر روز را یادداشت کنیم این مقدارها تا اول تابستان در حال افزایش هستند. بعد از اولین روز تابستان طول روزها کاهش می‌یابند تا به روز اول زمستان برسیم و مجدداً بعد از روز اول زمستان طول روزها افزایش می‌یابند. این یک حرکت تناوبی است و می‌توانیم با یک تابع مثلثاتی طول روزها را بیان کنیم.

فرض کنیم t نشان دهنده روزهای سال باشد و $t=۰$ نشان دهنده روز اول فروردین و $t=۳۶۴$ نشان دهنده روز آخر سال باشد. طول روز امt (بر حسب ساعت) را با $L(t)$ نشان می‌دهیم و فرض کنید به ازای برخی اعداد مانند A و B و C داریم $L(t)=A\sin(Bt)+C$. با داشتن اطلاعات زیر سعی می‌کنیم A و B و C را به دست آوریم.

روز	اول فروردین	اول تیر	اول دی
طول روز(ساعت)	۱۲/۲۵	۱۵/۵	۹

تمرین در کلاس

۱ ــ با توجه به آن که دوره تناوب تابع $L(t)$، $\frac{2\pi}{B}$ است نشان دهید $B \approx ۰/۰۲$.

۲ــ نشان دهید بیشترین مقدار $L(t)$ برابر $A+C$ و کمترین مقدار آن $-A+C$ است و نتیجه بگیرید $A=۳/۲۵$، $C=۱۲/۲۵$.

۳ــ تابع $L(t)$ را بنویسید و طول روز را در ۵ آذر حساب کنید.

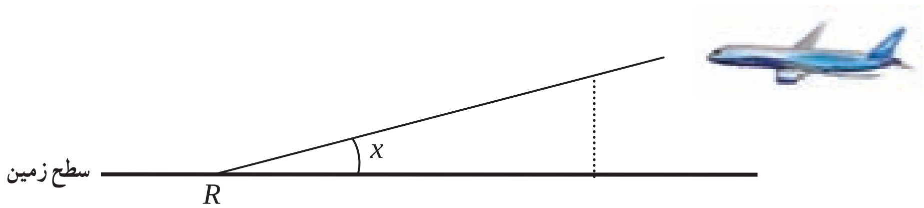
توابع تانژانت و کتانژانت

یکی از توابع مثلثاتی تابع تانژانت است. به ازای هر مقدار $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ (k عدد صحیح)بنا به تعریف :

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

تمرین در کلاس

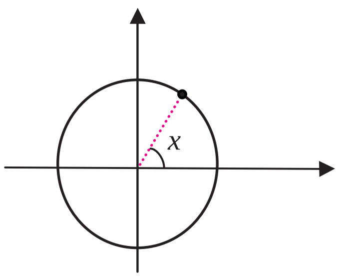
هواپیمایی در ارتفاع ۳ کیلومتری پرواز می‌کند و در حال نزدیک شدن به فرودگاه در محل R است.



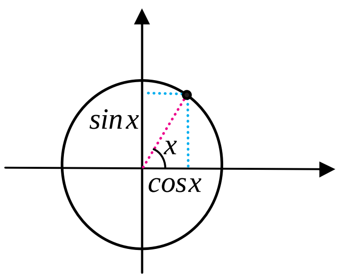
۱ــ فاصله افقی هواپیما با فرودگاه را بر حسب زاویه‌ای که رادار طبق شکل به دست می‌آورد حساب کنید.

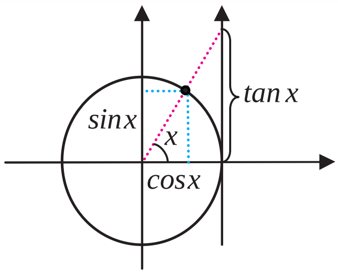
۲ــ اگر رادار زاویه ۴۵ درجه را نشان دهد، فاصله افقی هواپیما با فرودگاه چقدر است؟

مقدار $\tan x$ را می‌توان در دایره مثلثاتی به شکل هندسی نمایش داد. با رسم یک دستگاه مختصات و دایره واحد به مرکز مبدأ، هر مقدار x که به عنوان زاویه‌ای بر حسب رادیان در نظر گرفته شود نقطه‌ای از دایره مثلثاتی را معین می‌کند.

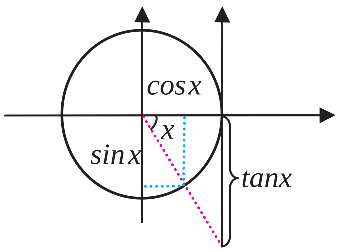


با رسم خط‌هایی عمود بر دو محور، از این نقطه مقدارهای $\cos x$ و $\sin x$ مشخص می‌شوند.





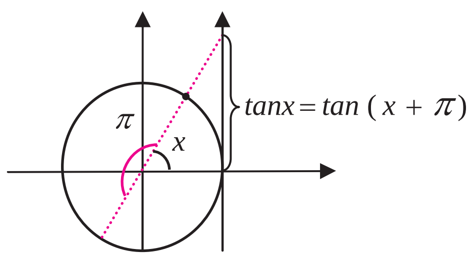
با رسم خط مماس بر دایره مثلثاتی در نقطه (۱,۰) و ساختن محوری جدید، اگر خطی را که مبدأ را به نقطه روی دایره وصل می‌کند ادامه دهیم تا این محور جدید را قطع کند، عرض نقطه برخورد مقدار $tanx$ را نشان می‌دهد.



درستی این مطلب از طریق رابطه تشابه در مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که ساخته شده‌اند قابل بررسی است. درستی علامت مقدار تانژانت نیز با بررسی آن، وقتی زاویه در ربع‌های دیگری قرار می‌گیرد قابل انجام است. مثلاً وقتی که زاویه در ربع چهارم قرار می‌گیرد مقدار کسینوس مثبت و مقدار سینوس منفی است، پس مقدار تانژانت منفی است.

از آنجا که محورهای بالا مقدارهای سینوس و کسینوس و تانژانت را نمایش می‌دهند، در دایره مثلثاتی این محورها را محورسینوس‌ها و محور کسینوس‌ها و محور تانژانت‌ها می‌نامند. از روی شکل مشخص است که برای زاویه‌هایی که مضرب صحیح و فردی(مثبت یا منفی) از $\frac{\pi}{۲}$ هستند مقدار تانژانت تعریف نمی‌شود، زیرا در این نقاط خط واصل از مبدأ به نقطه روی دایره با محور تانژانت‌ها موازی است و آن را قطع نمی‌کند. از طریق جبری نیز مشاهده می‌کنیم که در این زاویه‌ها کسینوس صفر است و کسر $\frac{\sin x}{\cos x}$ معنا ندارد. بنابراین دامنه تعریف تابع $tanx$ اعداد به صورت $(۲k+۱)\frac{\pi}{۲}$ را (k اعداد صحیح هستند) در بر ندارد.

از روی شکل هم‌چنین مشاهده می‌کنیم که برای دو زاویه x و $x+\pi$ مقدار تانژانت مساوی است.



به طور جبری نیز می‌توان این رابطه را به دست آورد.

$$tan(x+\pi)=\frac{sin(x+\pi)}{cos(x+\pi)}=\frac{-\sin x}{-\cos x}=\frac{\sin x}{\cos x}=\tan x$$

از این تساوی نتیجه می‌شود $tanx$ تابعی متناوب است و π یک دوره تناوب آن است.

فعالیت ۱

در این فعالیت می‌خواهیم چگونگی تابع تانژانت را در یک دوره تناوب آن، مانند بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ ، بررسی کنیم.

۱ــ از طریق شکل و محور تانژانت‌ها توضیح دهید که وقتی مقدارهای x از صفر شروع شوند و به طور مداوم افزایش یابند تا به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک شوند، مقدارهای $tanx$ چگونه تغییر می‌کنند.

۲ــ آیا تابع تانژانت روی بازه $(۰,\frac{\pi}{۲})$ صعودی است؟

۳ــ از طریق شکل و محور تانژانت‌ها توضیح دهید که وقتی مقدارهای x از صفر شروع شوند و به طور مداوم کاهش یابند تا به $-\frac{\pi}{۲}$ نزدیک شوند، مقدارهای $tanx$ چگونه تغییر می‌کنند.

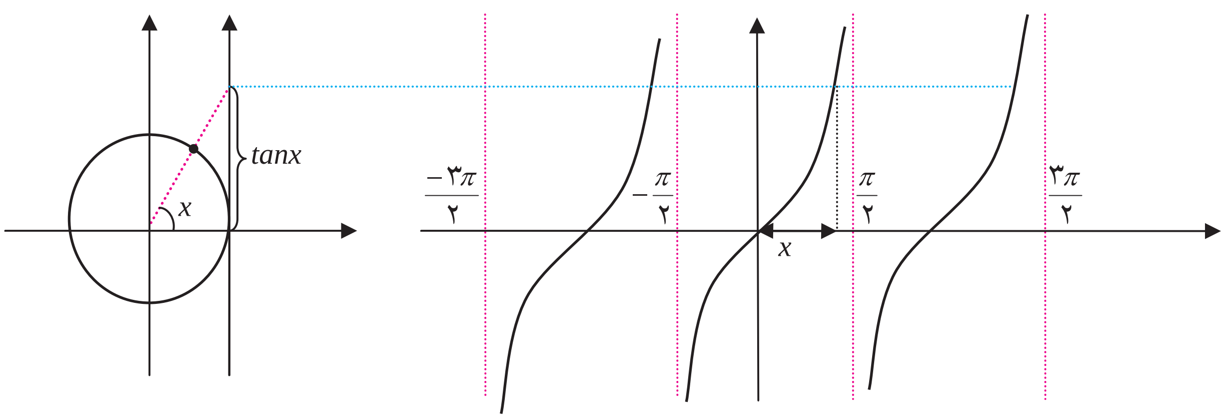
۴ــ آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{۲},۰)$ صعودی است؟ آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ صعودی است؟

۵ ــ آیا تابع تانژانت روی بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ تابعی زوج یا فرد می‌باشد؟

۶ــ با تکمیل جدول زیر و یافتن مقدار $tanx$ در چند نقطه خاص نمودار تقریبی این تابع را در کل دامنه آن رسم کنید.

x	$-\frac{\pi}{۳}$	$-\frac{\pi}{۴}$	$-\frac{\pi}{۶}$	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$
$tanx$							

با توجه به اطلاعاتی که در فعالیت قبل نسبت به تابع تانژانت به دست آورده‌اید، نمودار تقریبی آن به شکل زیر خواهد بود.



یکی دیگر از توابع مهم مثلثاتی تابع کتانژانت است که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad (x \neq k\pi)$$

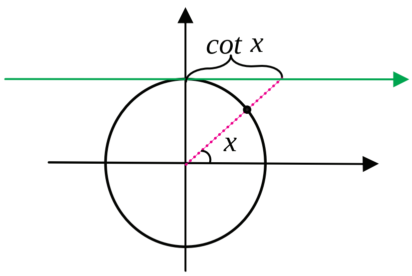
در زاویه‌هایی که تابع تانژانت ناصفر است مقدار کتانژانت وارون مقدار تانژانت است. یعنی $\cot x = \frac{1}{\tan x}$.

تمرین در کلاس

۱ــ نشان دهید دامنه تابع کتانژانت همه اعداد، غیر از اعداد به صورت $k\pi$ است که k عددی صحیح است.

۲ــ نشان دهید π یک دوره تناوب تابع کتانژانت است.

۳ــ نشان دهید مقدار $cotx$ از طریق محوری که در زیر رسم شده است و آن را محور کتانژانت‌ها می‌نامند به دست می‌آید.



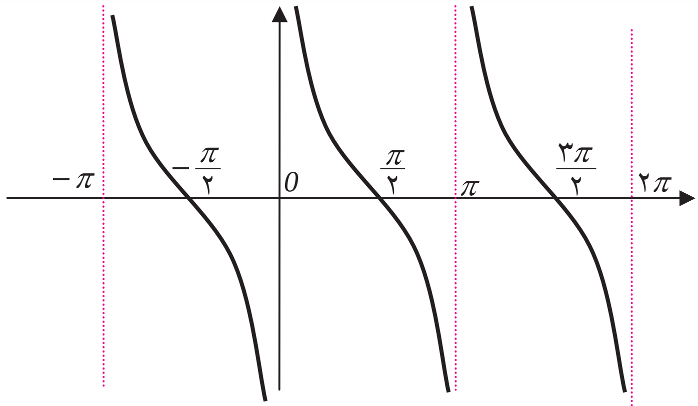
۴ــ از طریق محور کتانژانت‌ها توضیح دهید که وقتی مقدارهای x از یک زاویه مثبت نزدیک صفر شروع شوند و به طور مداوم افزایش یابند تا به π نزدیک شوند، مقدارهای $cotx$ چگونه تغییر می‌کنند.

۵ــ وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع کتانژانت در بازه $(0 , \pi)$ چگونه است؟

۶ــ با یافتن مقدار $cotx$ در چند نقطه خاص نمودار تقریبی این تابع را در کل دامنه آن رسم کنید.

۷ــ درستی تساوی $\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$ را به دست آورید و از طریق آن چگونگی ارتباط نمودارهای دو تابع $cotx$ و $tanx$ را توضیح دهید.

با توجه به نتایجی که از تمرین بالا به دست می‌آید نمودار تابع کتانژانت در صفحهٔ بعد رسم شده است.



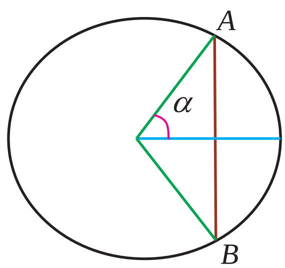
اتحادهای مثلثاتی

حل یک مسئله

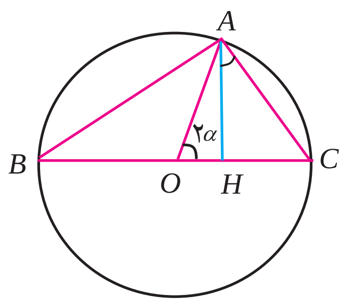
اگر زاویه‌ای دو برابر شود، نسبت‌های مثلثاتی آن چگونه تغییر می‌کنند؟

کسی که اولین بار به این سؤال پاسخ گفت ابوالوفای بوزجانی از دانشمندان ایرانی بود که نقش زیادی در گسترش علم مثلثات در آن دوره داشته است. فعالیت زیر بر اساس روش بوزجانی برای یافتن $sin۲\alpha$ بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α می‌باشد.

فعالیت ۲



۱ــ از طریق شکل مقابل نشان دهید که اگر AB وتری در دایره واحد باشد که زاویه کمان روبروی آن ۲α باشد، طول وتر $۲sin\alpha$ است.



۲ــ در شکل مقابل O مرکز دایره واحد و زاویه بین دو شعاع OA و OC برابر ۲α است و AH عمود بر BC است. ابتدا استدلال کنید $\hat{B} = \alpha$ و $\hat{A} = \frac{\pi}{۲}$ و $\widehat{HAC} = \alpha$.

۳ــ استدلال کنید که $AC = ۲\sin\alpha$ و $AH = \sin ۲\alpha$ و در مثلث قائم‌الزاویه AHC داریم $\cos\alpha = \frac{AH}{AC}$.

۴ــ نتیجه بگیرید : $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$.

۵ــ از تساوی‌های $OH + HC = ۱$ و $OH = \cos ۲\alpha$ و $\sin\alpha = \frac{HC}{AC}$ ، نتیجه بگیرید :
$\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha$.

اگرچه استدلال بالا فقط برای حالتی که $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$ اعتبار دارد، ولی برای سایر زاویه‌ها نیز، با استفاده از خواص توابع سینوس و کسینوس، می‌توان درستی این تساوی‌ها را به دست آورد.

مثال

۱ : برای زاویه $\alpha = \frac{\pi}{۴}$ داریم : $۲\sin\frac{\pi}{۴}\cos\frac{\pi}{۴} = ۲\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱ = \sin ۲\times\frac{\pi}{۴} = \sin\frac{\pi}{۲}$

۲ : برای زاویه $\frac{\pi}{۶}$ داریم :

$$۲\sin\frac{\pi}{۶}\cos\frac{\pi}{۶} = ۲\frac{۱}{۲}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \sin ۲\times\frac{\pi}{۶} = \sin\frac{\pi}{۳}$$

به کمک روابط بالا می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های دیگری غیر از $\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{\pi}{۴}$ را هم با دقت حساب کنیم.

۳ : سینوس زاویه ۱۵ درجه را حساب می‌کنیم.

$$\cos ۳۰^\circ = \cos ۲\times۱۵^\circ = ۱ - ۲\sin^۲ ۱۵^\circ \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱ - ۲\sin^۲ ۱۵^\circ \Rightarrow \sin ۱۵^\circ = \frac{\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}}{۲}$$

تمرین در کلاس

۱ــ با توجه به درستی تساوی $\sin ۲\alpha = ۲\sin\alpha\cos\alpha$ برای زاویه‌های حاده، درستی این تساوی را برای زاویه منفرجه β ثابت کنید. (از زاویه حاده $\alpha = \pi - \beta$ کمک بگیرید.)

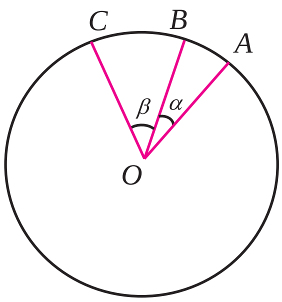
۲ــ نشان دهید برای هر زاویه α داریم :

$$\cos ۲\alpha = ۱ - ۲\sin^۲\alpha = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha = ۲\cos^۲\alpha - ۱$$

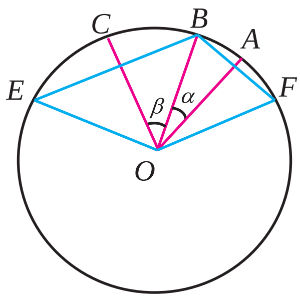
۳ــ نشان دهید برای هر زاویه α داریم :

$$\cos^۲\alpha=\frac{۱+\cos ۲\alpha}{۲} \qquad , \qquad \sin^۲\alpha=\frac{۱-\cos ۲\alpha}{۲}$$

۴ــ سینوس و کسینوس زاویه $۲۲/۵^\circ$ را حساب کنید.



مسئله مهم‌تر دیگری که بوزجانی به حل آن پرداخت یافتن نسبت‌های مثلثاتی مجموع دو زاویه مانند α و β بود. روشی که در زیر برای حل این مسئله می‌آید بر اساس روش بوزجانی است.
در دایره واحد دو زاویه α و β را به مرکز مبدأ پهلوی هم رسم می‌کنیم. حالتی را در نظر می‌گیریم که $\alpha+\beta$ حاده باشد.



اگر زاویه‌های مرکزی ۲αو ۲β و $۲(\alpha+\beta)$ را بسازیم وتر روبروی آن‌ها مقدارهای $۲\sin\alpha$ و $۲\sin\beta$و $۲\sin(\alpha+\beta)$ را نشان خواهند داد. برای این کار از B به OC و OA عمودی رسم می‌کنیم تا دایره را به ترتیب در نقاط E و F قطع کنند.

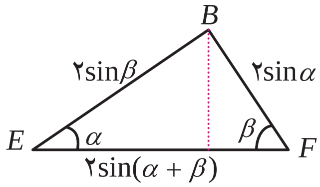
ادامه روش بوزجانی را در فعالیت زیر دنبال می‌کنیم.

فعالیت ۳

۱ــ با رسم پاره‌خط EF نتیجه بگیرید $EF=۲\sin(\alpha+\beta)$.

۲ــ نشان دهید زاویه‌های $\widehat{EFB}$ و $\widehat{FEB}$ به ترتیب برابر β و α می‌باشند.

۳ــ مثلث EFB را جداگانه در صفحه بعد رسم کرده‌ایم و ارتفاع وارد بر ضلع EF را نیز رسم کرده‌ایم. با توجه به آن که طول اضلاع و زاویه‌های این مثلث معلوم شده‌اند، نتیجه بگیرید :



$$sin(\alpha + \beta) = sin\alpha cos\beta + cos\alpha sin\beta$$

اگرچه استدلال بالا فقط برای حالتی که $\alpha + \beta$ حاده باشد اعتبار دارد، ولی با استفاده از خواص توابع سینوس و کسینوس می‌توان درستی آن را برای تمام زاویه‌ها به دست آورد. مثلاً در حالتی که α و β حاده هستند ولی $\alpha + \beta$ منفرجه است، می‌توانیم برای دو زاویه $\alpha' = \frac{\pi}{۲} - \alpha$ و $\beta' = \frac{\pi}{۲} - \beta$ که هر دو حاده هستند و $\alpha' + \beta' = \pi - (\alpha + \beta)$ نیز حاده است بنویسیم :

$$sin(\alpha' + \beta') = sin\alpha' cos\beta' + cos\alpha' sin\beta'$$

در نتیجه :

$$sin(\alpha + \beta) = sin(\pi - (\alpha + \beta)) = sin(\alpha' + \beta') = sin\alpha' cos\beta' + cos\alpha' sin\beta'$$

$$= sin(\frac{\pi}{۲} - \alpha)cos(\frac{\pi}{۲} - \beta) + cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha)sin(\frac{\pi}{۲} - \beta)$$

$$= cos\alpha sin\beta + sin\alpha cos\beta$$

برای بقیه حالت‌ها نیز می‌توان محاسبات مشابهی را انجام داد.

مثال

سینوس زاویه ۷۵° را حساب می‌کنیم.

$$sin۷۵^\circ = sin(۴۵^\circ + ۳۰^\circ) = sin۴۵^\circ cos۳۰^\circ + cos۴۵^\circ sin۳۰^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶} + \sqrt{۲}}{۴}$$

تمرین در کلاس

۱ــ فرمول سینوس مجموع دو زاویه برای هر دو زاویه دلخواهی برقرار است. در این فرمول β را به $-\beta$ تبدیل کنید و نتیجه بگیرید برای هر دو زاویه α و β داریم :

$$sin(\alpha - \beta) = sin\, \alpha\, cos\, \beta - cos\, \alpha\, sin\, \beta$$

۲ــ با توجه به آن که $cos(\alpha+\beta)=sin(\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta))=sin((\frac{\pi}{2}-\alpha)-\beta)$ ، نتیجه بگیرید برای هر دو زاویه α و β داریم :

$$cos(\alpha+\beta)=cos\,\alpha\,cos\,\beta-sin\,\alpha\,sin\,\beta$$

۳ــ ثابت کنید برای هر دو زاویه α و β داریم :

$$tan(\alpha+\beta)=\frac{tan\alpha+tan\beta}{1-tan\alpha\,tan\beta}$$

۴ــ ثابت کنید برای هر زاویه α داریم :

$$sin3\alpha=-4sin^3\alpha+3sin\alpha \quad , \quad cos3\alpha=4cos^3\alpha-3cos\alpha$$

به کمک روابط بالا می‌توانیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های بیشتری را با دقت حساب کنیم.

مثال

۱ : تانژانت زاویه 105° را حساب می‌کنیم.

$$tan105^\circ=tan(45^\circ+60^\circ)=\frac{tan45^\circ+tan60^\circ}{1-tan45^\circ\,tan60^\circ}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{1-1\times\sqrt{3}}=-\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2}$$

۲ : کسینوس زاویه $67/5^\circ$ را حساب می‌کنیم.

داریم $67/5^\circ=3\times22/5^\circ=3\times\frac{45^\circ}{2}$. ابتدا کسینوس $22/5^\circ$ را حساب می‌کنیم.

$$cos^2 22/5^\circ=\frac{1+cos45^\circ}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}\Rightarrow cos22/5^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

حال کسینوس $67/5^\circ$ را حساب می‌کنیم.

$$cos67/5^\circ=4cos^3(22/5^\circ)-3cos22/5^\circ=4\times\frac{(\sqrt{2+\sqrt{2}})^2}{8}-3\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}(\sqrt{2}-1)$$

روابط به دست آمده در محاسبات نسبت‌های مثلثاتی مجموع و تفاضل زاویه‌ها موجب می‌شود روابط جدید دیگری بین توابع مثلثاتی به دست آیند. مثلاً برای هر دو زاویه α و β داریم :

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$

با جمع طرفین تساوی نتیجه می‌شود :

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{۱}{۲}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$$

اتحاد بالا یک عمل ضرب نسبت‌های مثلثاتی را به یک عمل جمع نسبت‌های مثلثاتی دیگر تبدیل می‌کند.

تمرین در کلاس

۱ــ با استفاده از فرمول محاسبه $\cos(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ نتیجه بگیرید :

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{۱}{۲}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{۱}{۲}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$$

۲ــ با استفاده از روابط بند (۱) و نتایج قبل با قرار دادن $A=\alpha+\beta$ و $B=\alpha-\beta$ نتیجه بگیرید :

$$\sin A+\sin B=۲\sin\frac{A+B}{۲}\cos\frac{A-B}{۲}$$

$$\cos A+\cos B=۲\cos\frac{A+B}{۲}\cos\frac{A-B}{۲}$$

$$\cos A-\cos B=-۲\sin\frac{A+B}{۲}\sin\frac{A-B}{۲}$$

این اتحادهای مثلثاتی کمک زیادی در ساده‌سازی عبارت‌های مثلثاتی می‌کنند و از آن‌ها در جهت تبدیل جمع‌ها به ضرب‌ها و برعکس تبدیل ضرب‌ها به جمع‌ها استفاده می‌شود.

مثال

۱ : نشان دهید $\cos 2x + \cos 4x = 2\cos x \cos 3x$.

$$\cos 2x + \cos 4x = 2\cos\frac{2x+4x}{2}\cos\frac{2x-4x}{2}$$

$$= 2\cos 3x \cos(-x) = 2\cos x \cos 3x$$

۲ : عبارت $\sin(x+h) - \sin x$ را به صورت حاصل ضربی تبدیل می‌کنیم.

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin(x+h) + \sin(-x) = 2\sin\frac{x+h+(-x)}{2}\cos\frac{x+h-(-x)}{2}$$

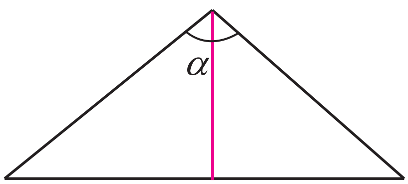
$$= 2\sin\frac{h}{2}\cos(x+\frac{h}{2})$$

مسائل

۱ــ اگر α زاویه‌ای در ربع اول و β زاویه‌ای در ربع سوم باشد که $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ و $\cos\beta = -\frac{5}{13}$ ، مقدارهای $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$ و $\tan(\alpha+\beta)$ را تعیین کنید.

۲ــ با استفاده از مثلث متساوی‌الساقین زیر که طول ساق‌های آن واحد است و زاویه رأس آن α است، با محاسبه مساحت آن از دو طریق نتیجه بگیرید :

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$



۳ــ نمودار تابع $y = 3 - 6\sin^2 x$ را در بازه $[0, 2\pi]$ رسم کنید. دوره تناوب این تابع چقدر است؟

۴ــ فرمول محاسبه $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ را از طریق فرمول محاسبه $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha+\beta)$ به دست آورید.

۵ــ برای یک زاویه دلخواه α که برای آن $\tan 2\alpha$ تعریف شده است درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

۶ــ اگر α زاویه‌ای در بازه $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ باشد که $\sin\alpha = -\frac{12}{13}$ ، مقدار $\tan\frac{\alpha}{2}$ را حساب کنید.

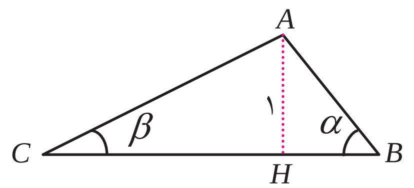
۷ــ درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

الف) $\sin x+\cos x=\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})$ ب) $۱+\sin ۲x=(\sin x+\cos x)^۲$

ج) $\sin ۲x=\frac{۲\tan x}{۱+\tan^۲ x}$ د) $\cos ۲x=\frac{۱-\tan^۲ x}{۱+\tan^۲ x}$

هـ) $\cos ۴x=۸\cos^۴ x-۸\cos^۲ x+۱$

۸ــ در این مسئله روش دیگری برای محاسبه فرمول $\sin(\alpha+\beta)$ در حالتی که α و β حاده هستند ارائه می‌شود. مثلث ABC را به گونه‌ای می‌سازیم که زاویه رأس B برابر α و زاویه رأس C برابر β باشد و ارتفاع وارد بر ضلع BC ۱ واحد باشد. چگونگی ساختن این مثلث را توضیح دهید.

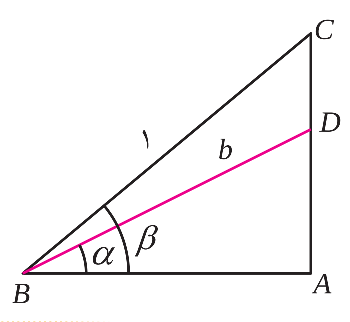


با محاسبه طول پاره خط‌های AB و AC و CH و BH بر حسب نسبت‌های مثلثاتی α و β و محاسبه مساحت مثلث ABC از دو طریق، یا با استفاده از رابطه سینوس‌ها در مثلث ABC، فرمول محاسبه $\sin(\alpha+\beta)$ را به دست آورید.

۹ــ در این مسئله روش دیگری برای محاسبه فرمول $\sin(\beta-\alpha)$ در حالتی که α و β حاده هستند و $\alpha<\beta$، ارائه می‌شود. در شکل زیر زاویه $\hat{A}$ قائمه است و ضلع BC واحد است. طول پاره خط BD را عددی مانند b فرض کنید. با محاسبه طول پاره خط‌های دیگری که در شکل دیده می‌شود و محاسبه مساحت مثلث‌هایی که در شکل دیده می‌شوند، با استفاده از تساوی:

(مساحت BDC) = (مساحت ABC) − (مساحت ADB)

ثابت کنید: $\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$



معادلات مثلثاتی

حل یک مسئله

آیا می‌توان مثلثی رسم کرد که طول دو ضلع آن ۲ و ۶ سانتی‌متر باشد و مساحت آن ۳ سانتی‌متر مربع شود؟ چند مثلث با این خاصیت موجودند و با چه روشی می‌توان آن‌ها را ساخت؟

معلم از دانش‌آموزان پرسید : چگونه می‌توانیم این مسئله را حل کنیم.

زهرا : باید طول ضلع سوم را هم بیابیم تا مثلث مشخص شود و طول این ضلع باید مقداری باشد تا مساحت مثلث ۳ سانتی‌متر مربع شود.

صدیقه : ولی ما رابطه‌ای که مساحت مثلث را بر حسب طول اضلاع بیان کند، نمی‌شناسیم پس راهی برای به دست آوردن ضلع سوم نخواهیم داشت.

معلم : البته چنین رابطه‌ای وجود دارد ولی می‌توانیم دنبال راه حل دیگری بگردیم. اما نکته‌ای که زهرا بیان کرد آن است که ما باید با روشی مثلث جواب را مشخص کنیم. اگر راهی برای مشخص کردن ضلع سوم نداریم باید دنبال چیز دیگری بگردیم.

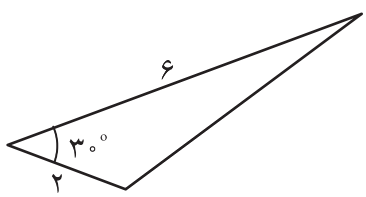
زینب : چطور است که زاویه بین آن دو ضلع را بیابیم؟

معلم : فکر بسیار خوبی است، چه راهی برای تعیین این زاویه داریم؟

زهرا : ما می‌توانیم مساحت یک مثلث را از طریق طول دو ضلع و زاویه بین آن‌ها به دست آوریم. اگر این زاویه را θ بنامیم باید داشته باشیم :

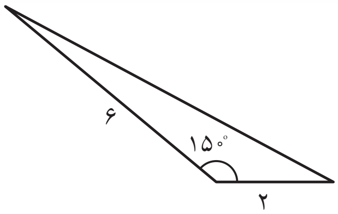
$$\frac{۱}{۲}\times ۶\times ۲\times \sin\theta = ۳$$

زینب : از این معادله نتیجه می‌شود $\sin\theta=\frac{۱}{۲}$ یعنی θ، ۳۰ درجه است. پس جواب مسئله مثلث زیر است.



معلم : بله شما توانستید یک جواب برای این مسئله بیابید. اما آیا این معادله جواب دیگری ندارد؟

صدیقه : برای زاویه ۱۵۰ درجه نیز داریم $sin150^\circ = \frac{1}{2}$ ، پس مثلث دیگری هم با شرایط مورد نظر مسئله وجود دارد.



معلم : آیا جواب دیگری هم می‌توانید پیدا کنید؟

زهرا : نه، جواب دیگری وجود ندارد زیرا زاویه‌های دیگری که سینوس آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است نمی‌توانند زاویه یک مثلث باشند.

در برخی از مسائل مجهول یک زاویه است که اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی آن در دست است. اگر این اطلاعات را به صورت یک معادله بنویسیم، آن را یک معادله مثلثاتی می‌نامند.

مثال

در مثلثی که طول اضلاع آن ۱، ۳، $\sqrt{7}$ است، زاویه روبروی ضلع به طول $\sqrt{7}$ چقدر است؟

اگر این زاویه را θ بنامیم طبق رابطه کسینوس‌ها داریم :

$$(\sqrt{7})^2 = 1^2 + 3^2 - 2\times1\times3\cos\theta$$

این یک معادله مثلثاتی بر حسب θ است و با حل آن داریم : $\cos\theta = \frac{1}{2}$ تنها زاویه‌ای که بتواند زاویه یک مثلث باشد و کسینوس آن $\frac{1}{2}$ باشد ۶۰ درجه است.

حل معادلات مثلثاتی

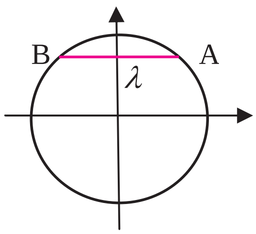
شیوه کلی حل معادلات مثلثاتی به این صورت است که پس از محاسبات جبری معادله را به یکی از شکل‌های $sin\alpha = sin\beta$ یا $cos\alpha = cos\beta$ یا $tan\alpha = tan\beta$ در بیاوریم.

در مثال بالا، معادله مثلثاتی پس از محاسبات جبری به صورت $\cos\theta = \frac{1}{2}$ در آمد یعنی $\cos\theta = \cos60^\circ$.

همچنین در مسئله مطرح شده، معادله به صورت $\sin\theta = \frac{1}{2}$ در آمد و این یعنی $\sin\theta = \sin30^\circ$.

حل یک مسئله

اگر α و β دو زاویه باشند که $\sin\alpha = \sin\beta$ ، این دو زاویه چه رابطه‌ای با هم دارند؟



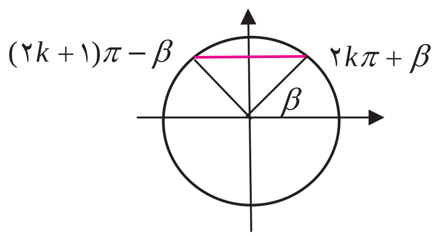
مناسب است که این مسئله را از طریق دایره مثلثاتی بررسی کنیم. اگر $sin\alpha = sin\beta = \lambda$، λ عددی در بازه $[-۱,۱]$ است و زاویه‌هایی که سینوس آن‌ها λ است، طبق شکل زیر آن‌هایی هستند که نقطه متناظر آن‌ها در دایره مثلثاتی در نقطه A یا B قرار گیرد.

اگر نقطه‌های متناظر α و β روی دایره مثلثاتی هر دو در A یا هر دو در B قرار گیرند، معنای آن این است که $\alpha = \beta + ۲k\pi$ که k عددی صحیح است. و اگر نقطه‌های متناظر α و β روی دایره مثلثاتی یکی در A و دیگری در B قرار گیرند معنای آن این است که α و $\pi - \beta$ در مضرب صحیحی از ۲π اختلاف دارند، یعنی $\alpha = \pi - \beta + ۲k\pi$ که k عددی صحیح است.

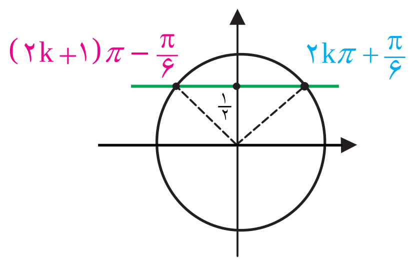
بنابراین اگر α و β دو زاویه باشند که $sin\alpha = sin\beta$ می‌توان نتیجه گرفت که $\alpha = \beta + ۲k\pi$ یا $\alpha = \pi - \beta + ۲k\pi$ که k عددی صحیح است. به عبارت دیگر :

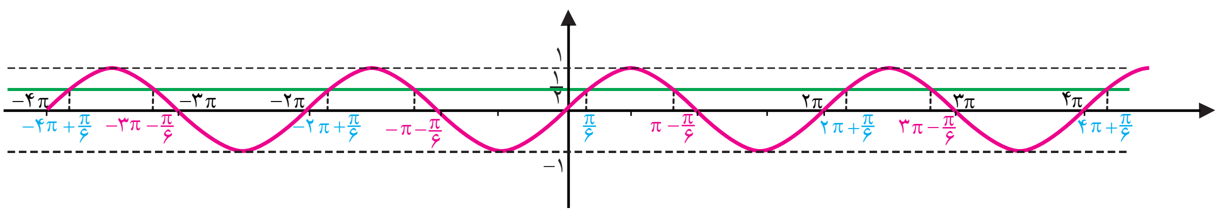
قضیه :

معادله $\sin\alpha = \sin\beta$ دارای جواب‌هایی به صورت $\alpha = ۲k\pi + \beta$ و $\alpha = (۲k + ۱)\pi - \beta$ است که k عددی صحیح است.



به‌عنوان نمونه وضعیت معادله $\sin\theta = \frac{۱}{۲}$ را همزمان روی دایره مثلثاتی و نمودار سینوسی در شکل بعد مشخص شده است.





$$\sin\theta = \frac{۱}{۲} \nearrow \theta = \dots, -۴\pi + \frac{\pi}{۶}, -۲\pi + \frac{\pi}{۶}, \frac{\pi}{۶}, ۲\pi + \frac{\pi}{۶}, ۴\pi + \frac{\pi}{۶}, \dots \rightarrow \theta = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶}$$

$$\sin\theta = \frac{۱}{۲} \searrow \theta = \dots, -۳\pi - \frac{\pi}{۶}, -\pi - \frac{\pi}{۶}, \pi - \frac{\pi}{۶}, ۳\pi - \frac{\pi}{۶}, \dots \rightarrow \theta = (۲k + ۱)\pi - \frac{\pi}{۶}$$

مثال

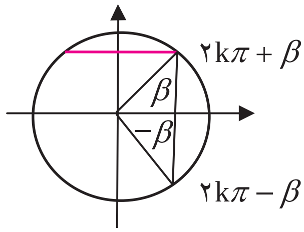
۱ : معادله $sin۲x = sin۳x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل $۳x = ۲k\pi + ۲x$ و $۲x = (۲k+۱)\pi - ۳x$ هستند. در نتیجه $x = ۲k\pi$ و $x = \frac{۲k+۱}{۵}\pi$ جواب‌های این معادله‌اند.

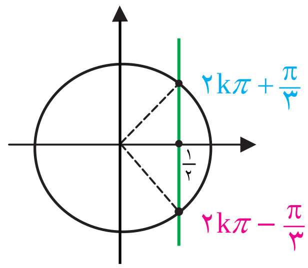
با استدلالی مشابه از طریق دایره مثلثاتی می‌توان نتیجه گرفت که اگر α و β دو زاویه باشند که $cos\alpha = cos\beta$ آنگاه $\alpha = \beta + ۲k\pi$ یا $\alpha = -\beta + ۲k\pi$ که k عددی صحیح است. به عبارت دیگر :

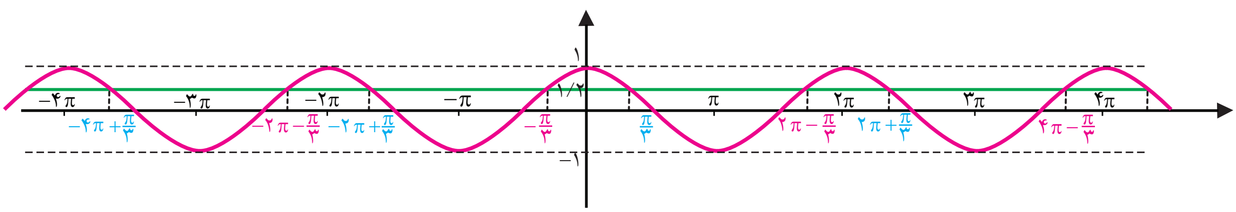
قضیه :

معادله $cos\,\alpha = cos\,\beta$ دارای جواب‌هایی به صورت $\alpha = ۲k\pi \pm \beta$ است که k عددی صحیح است.



به‌عنوان نمونه وضعیت معادله $cos\,\theta = \frac{۱}{۲}$ در تصویر زیر مشخص می‌باشد.





$$cos\,\theta = \frac{۱}{۲} \nearrow \theta = \dots, -۴\pi + \frac{\pi}{۳}, -۲\pi + \frac{\pi}{۳}, \frac{\pi}{۳}, ۲\pi + \frac{\pi}{۳}, \dots \to \theta = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$$

$$cos\,\theta = \frac{۱}{۲} \searrow \theta = \dots, -۲\pi - \frac{\pi}{۳}, -\frac{\pi}{۳}, ۲\pi - \frac{\pi}{۳}, ۴\pi - \frac{\pi}{۳}, \dots \to \theta = ۲k\pi - \frac{\pi}{۳}$$

مثال

۲ : معادله $cosx = cos2x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل $x = 2k\pi \pm 2x$ هستند. در نتیجه $x = 2k\pi$ و $x = \frac{2k\pi}{3}$ جواب‌های این معادله‌اند. البته جواب‌های به صورت $x = \frac{2k\pi}{3}$ خود به خود جواب‌های به صورت $x = 2k\pi$ را در بر دارد.

اگر α و β دو زاویه باشند که $tan\alpha = tan\beta$ می‌توان نتیجه گرفت که $\alpha = k\pi + \beta$ که k عددی صحیح است. به عبارت دیگر :

قضیه :

معادله $tan\alpha = tan\beta$ دارای جواب‌هایی به صورت $\alpha = k\pi + \beta$ است که k عددی صحیح است.

مثال

۳ : معادله $tanx = tan5x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل $5x = k\pi + x$ هستند. پس $x = k\frac{\pi}{4}$. البته مقدارهای $tanx$ و $tan5x$ نیز باید قابل محاسبه باشند، پس همچنین x و $5x$ نباید مضرب فردی از $\frac{\pi}{2}$ باشند.

۴ : معادله $sinx + cosx = 1$ را حل می‌کنیم.

باید سعی کنیم که با محاسبات جبری، این معادله را به یکی از سه شکل صفحهٔ قبل درآوریم. مثلاً می‌توانیم محاسبات زیر را انجام دهیم.

$$\sin x + \cos x = 1 \Rightarrow \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} + \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = 1$$

$$\Rightarrow 2\tan\frac{x}{2} + 1 - \tan^2\frac{x}{2} = 1 + \tan^2\frac{x}{2} \Rightarrow \tan\frac{x}{2}(1-\tan\frac{x}{2}) = 0$$

بنابراین معادله دارای دو دسته جواب $\tan\frac{x}{2} = 0$ و $\tan\frac{x}{2} = 1$ است. اولی به صورت $\tan\frac{x}{2} = \tan 0$ و دومی به صورت $\tan\frac{x}{2} = \tan\frac{\pi}{4}$ است. از اولی جواب‌های $\frac{x}{2} = k\pi + 0$ و از دومی جواب‌های $\frac{x}{2} = k\pi + \frac{\pi}{4}$ به دست می‌آیند. در نهایت کلیه جواب‌ها به صورت $x = 2k\pi$ و $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ خواهد بود.

یک راه حل دیگر آن است که در تمرینات دیدید که $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$، بنابراین معادله به صورت $\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})=1$ در می‌آید. در نتیجه $\sin(x+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}=\sin\frac{\pi}{4}$. از این معادله جواب‌های $x+\frac{\pi}{4}=2k\pi+\frac{\pi}{4}$ و $x+\frac{\pi}{4}=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4}$ به دست می‌آیند که نهایتاً همان جواب‌های $x=2k\pi$ و $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ می‌باشند.

۵ : کلیه جواب‌های معادله $\cos t(2\cos t-9)=5$ را به دست آورید.

ابتدا معادله را به صورت $2\cos^2 t-9\cos t-5=0$ می‌نویسیم. این یک معادله درجه دوم بر حسب $\cos t$ است. یعنی اگر قرار دهیم $x=\cos t$، معادله به شکل $2x^2-9x-5=0$ در می‌آید. با حل این معادله درجه دوم جواب‌های $x=5$ و $x=-\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آیند. حال باید معادلات $\cos t=5$ و $\cos t=-\frac{1}{2}$ را حل کنیم. اولین معادله جواب ندارد(چرا؟) و دومین معادله به شکل $\cos t=\cos\frac{2\pi}{3}$ نوشته می‌شود پس کلیه جواب‌ها به صورت $t=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}$ می‌باشند که k عددی صحیح است.

تمرین در کلاس

۱ــ اگر θ_0 زاویه حاده‌ای باشد که $\sin\theta_0=\frac{3}{5}$، کلیه جواب‌های معادله $6\cos x+8\sin x=5$ را بر حسب θ_0 به‌دست آورید و آن جواب‌هایی که در بازهٔ $\pi<x<2\pi$ می‌باشند را تعیین کنید.

۲ــ کلیه جواب‌های معادله $\frac{\sqrt{3}}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}=4$ را تعیین کنید.

۳ــ کلیه جواب‌های معادله $\tan x-\cot x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ را تعیین کنید.

مسائل

۱ــ معادلات زیر را حل کنید و جواب‌هایی که در بازه $[-\pi,\pi]$ هستند را تعیین کنید.

الف) $\sin x-\cos x=1$ ب) $\sin 2\theta+\sqrt{2}\cos\theta=0$ ج) $\tan x\tan 2x=1$

د) $2\sin^2 t+\sin t-1=0$ هـ) $\cos 2x-\cos x+1=0$ و) $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$

۲ــ مثلثی رسم کرده‌ایم که طول اضلاع آن ۲ و $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}+1$ است. زاویه‌های این مثلث را به دست آورید.

وارون توابع مثلثاتی

حل یک مسئله

اگر طول وتر یک دایره را بدانیم، زاویه مرکزی روبری آن چقدر است؟

در فعالیت زیر سعی خواهیم کرد این مسئله را حل کنیم.

فعالیت ۴

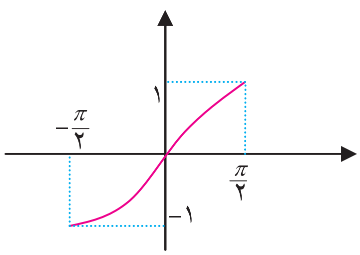
۱ــ در دایره واحد وتر دلخواهی به طول x رسم کنید. x در چه بازه‌ای تغییر می‌کند.

۲ــ زوایه مرکزی روبروی این وتر را روی شکل نمایش دهید و آن را θ بنامید. θ در چه بازه‌ای تغییر می‌کند.

۳ــ آیا x تابعی از θ است؟ این تابع چیست و دامنه و برد آن چیست؟ آیا این تابع یک به یک است؟

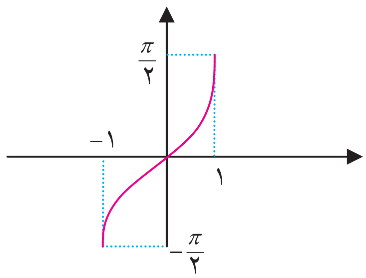
۴ــ آیا θ تابعی از x است؟ آیا می‌توانید فرمولی برای این تابع بنویسید؟

در فعالیت بالا متوجه می‌شویم که لازم است وارونی برای تابع $sinx$ داشته باشیم، اما این تابع یک به یک نیست و در کل دامنه آن وارون پذیر نیست. اما این تابع روی دامنه‌های کوچک‌تر می‌تواند یک به یک و در نتیجه وارون‌پذیر باشد. بنا به قرارداد تابع $sinx$ را روی بازه $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ محدود می‌کنند که در این بازه صعودی و یک به یک است.



با این عمل تابعی یک به یک به دست می‌آید که دامنه آن $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ و برد آن $[-۱ , ۱]$ است. وارون این تابع را با $sin^{-۱} x$ نشان می‌دهند که تابعی صعودی با دامنه $[-۱ , ۱]$ و برد $\left[-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲}\right]$ است و نمودار آن با قرینه‌یابی نمودار تابع $sinx$ نسبت به نیمساز

ربع اول به شکل زیر درمی‌آید.



توجه داشته باشید که $sin^{-1}x$ را با $\frac{1}{\sin x}$ اشتباه نگیرید. اولی به معنای مقدار تابع وارون $sinx$ در نقطه x است و دومی به معنای وارون مقدار $sinx$ است و این‌ها با هم متفاوتند.

مثال

۱ : $sin^{-1}(\frac{1}{2})=\frac{\pi}{6}$ ، زیرا $\frac{\pi}{6}$ زاویه‌ای در بازه $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ است و $sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

۲ : مقدار $sin^{-1}(sin\frac{4\pi}{3})$ را حساب می‌کنیم.

ابتدا داریم $sin\frac{4\pi}{3}=sin(\pi+\frac{\pi}{3})=-sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. بنابراین مقدار $sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ را باید حساب کنیم.

$sin^{-1}(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ زاویه‌ای است که سینوس آن $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ است و این زاویه در بازه $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ قرار دارد. این زاویه $-\frac{\pi}{3}$ است، پس $sin^{-1}(sin\frac{4\pi}{3})=-\frac{\pi}{3}$.

۳ : مقدار $cos(sin^{-1}(\frac{3}{5}))$ را حساب می‌کنیم.

فرض کنید α آن زاویه‌ای باشد که در بازه $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ قرار دارد و $sin\alpha=\frac{3}{5}$ ، یعنی $sin^{-1}(\frac{3}{5})=\alpha$.

بنابراین باید $cos\alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $sin\alpha=\frac{3}{5}$ و α در بازه $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ قرار دارد، داریم :

$$\cos\alpha=\sqrt{1-sin^2\alpha}=\sqrt{1-\frac{9}{25}}=\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}$$

بنابراین : $cos(sin^{-1}(\frac{3}{5}))=\frac{4}{5}$.

تمرین در کلاس

۱ــ مقدار $sin^{-1}\ x$ را با زبان فارسی بیان کنید.

۲ــ در دایره مثلثاتی مقدارهای x و $sin^{-1}\ x$ را نشان دهید و روی شکل دامنه و برد این تابع را توضیح دهید.

۳ــ مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $sin^{-1}(1)$ ب) $sin^{-1}(\frac{3}{5})+sin^{-1}(\frac{4}{5})$

ج) $sin^{-1}(sin\frac{5\pi}{4})$ د) $sin^{-1}(cos\frac{\pi}{12})$

۴ــ تابعی که زاویه مرکزی روبروی یک وتر را بر حسب طول وتر به دست می‌دهد بنویسید.

به طور مشابه برای تابع $cosx$ نیز لازم است تابع وارونی به دست آوریم. در فعالیت زیر سعی خواهیم کرد این تابع وارون را بسازیم.

فعالیت ۵

۱ــ آیا تابع $cosx$ در کل دامنه آن وارون پذیر است؟

۲ــ با محدود کردن تابع $cosx$ به بازه $[0\ ,\ \pi]$، آیا تابع جدید یک به یک می‌شود؟ نظر خود را از طریق دایره مثلثاتی توضیح دهید.

۳ــ وارون این تابع محدود شده از $cosx$ را با $cos^{-1}\ x$ نشان می‌دهند. دامنه و برد $cos^{-1}\ x$ را تعیین کنید و نمودار آن را رسم کنید.

۴ــ مقدار $cos^{-1}\ x$ را به زبان فارسی بیان کنید.

مثال

۱ : $cos^{-1}(-\frac{1}{2})=\frac{2\pi}{3}$ ، زیرا $\frac{2\pi}{3}$ زاویه‌ای در بازه $[0\ ,\ \pi]$ است و $cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$.

۲ : مقدار $cos^{-1}(cos(-\frac{4\pi}{3}))$ را حساب می‌کنیم.

ابتدا داریم $cos(-\frac{4\pi}{3})=cos(-2\pi+\frac{2\pi}{3})=cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}$. بنابراین مقدار $cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ را باید حساب کنیم. $cos^{-1}(-\frac{1}{2})$ زاویه‌ای است که کسینوس آن $-\frac{1}{2}$ است و این زاویه در بازه $[0\ ,\ \pi]$ قرار دارد. این زاویه $\frac{2\pi}{3}$ است،

پس $cos^{-1}(cos(-\frac{۴\pi}{۳}))=\frac{۲\pi}{۳}$.

۳ : مقدار $sin(cos^{-1}(\frac{۳}{۵}))$ را حساب می‌کنیم.

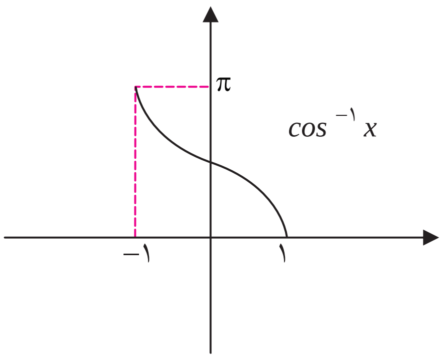
فرض کنید α آن زاویه‌ای باشد که در بازه $[۰ , \pi]$ قرار دارد و $cos\,\alpha=\frac{۳}{۵}$ ، یعنی $cos^{-1}\frac{۳}{۵}=\alpha$. بنابراین باید $sin\alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $cos\,\alpha=\frac{۳}{۵}$ و α در بازه $[۰ , \pi]$ قرار دارد، داریم :

$$sin\,\alpha=\sqrt{۱-cos^{۲}\alpha}=\sqrt{۱-\frac{۹}{۲۵}}=\sqrt{\frac{۱۶}{۲۵}}=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین :

$$sin(cos^{-۱}(\frac{۳}{۵}))=\frac{۴}{۵}$$

$cos^{-۱}x$ تابعی نزولی با دامنه $[-۱ , ۱]$ و برد $[۰ , \pi]$ است و نمودار آن به شکل زیر خواهد بود.



تمرین در کلاس

۱ــ در دایره مثلثاتی x و $cos^{-۱}x$ را نمایش دهید و روی شکل دامنه و برد تابع $cos^{-۱}x$ را توضیح دهید.

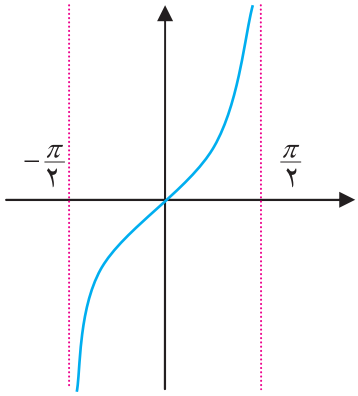
۲ــ مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $cos^{-۱}(-۱)$ ب) $sin^{-۱}(\frac{۳}{۵})+cos^{-۱}(\frac{۳}{۵})$

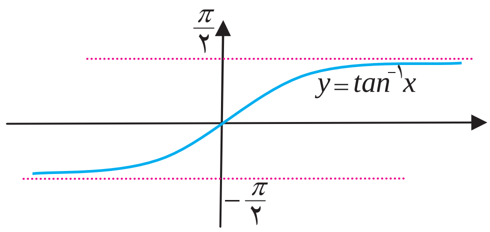
ج) $cos^{-۱}(cos\frac{۵\pi}{۴})$ د) $cos^{-۱}(sin\frac{\pi}{۸})$

۳ــ در مثلثی که طول دو ضلع آن به طور ثابت ۳ و ۵ است، زاویه بین این دو ضلع تابعی از طول ضلع سوم است. این تابع را به دست آورید. دامنه و بُرد این تابع چیست؟

تابع تانژانت نیز به خاطر متناوب بودن در کل دامنه خود یک به یک نیست ولی اگر آن را به بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ محدود کنیم تابعی صعودی به دست می‌آید که یک به یک نیز خواهد بود و دارای وارون می‌باشد.



وارون این تابع را با $tan^{-۱}x$ نشان می‌دهند. دامنه این تابع کل IR است و برد آن بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ می‌باشد. با قرینه‌یابی نمودار $tanx$ نسبت به نیمساز ربع اول، نمودار $tan^{-۱}x$ به شکل زیر خواهد بود.



برای هر x، $tan^{-۱}x$ زاویه‌ای را نشان می‌دهد که در بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ قرار دارد و تانژانت آن برابر x است.

مثال

۱ : $tan^{-۱}(-۱)=-\frac{\pi}{۴}$ ، زیرا $-\frac{\pi}{۴}$ زاویه‌ای در بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ است و $tan(-\frac{\pi}{۴})=-۱$.

۲ : مقدار $tan^{-۱}(tan\frac{۴\pi}{۳})$ را حساب می‌کنیم.

ابتدا داریم $tan\frac{۴\pi}{۳}=tan(\pi+\frac{\pi}{۳})=tan\frac{\pi}{۳}=\sqrt{۳}$. بنابراین مقدار $tan^{-۱}(\sqrt{۳})$ را باید حساب کنیم.

$tan^{-۱}(\sqrt{۳})$ زاویه‌ای است که تانژانت آن $\sqrt{۳}$ است و این زاویه در بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ قرار دارد. این زاویه $\frac{\pi}{۳}$

است، پس $\tan^{-۱}(\tan\frac{۴\pi}{۳})=\frac{\pi}{۳}$.

۳ : مقدار $\cos(\tan^{-۱}(\frac{۳}{۴}))$ را حساب می‌کنیم.

فرض کنید α آن زاویه‌ای باشد که در بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ قرار دارد و $\tan\alpha=\frac{۳}{۴}$ ، یعنی $\tan^{-۱}\frac{۳}{۴}=\alpha$. بنابراین باید $\cos\alpha$ را حساب کنیم. از آنجا که $\tan\alpha=\frac{۳}{۴}$ و α در بازه $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ قرار دارد، داریم :

$$\cos\alpha=\frac{۱}{\sqrt{۱+\tan^{۲}\alpha}}=\frac{۱}{\sqrt{۱+\frac{۹}{۱۶}}}=\frac{۱}{\sqrt{\frac{۲۵}{۱۶}}}=\frac{۱}{\frac{۵}{۴}}=\frac{۴}{۵}$$

بنابراین : $\cos(\tan^{-۱}(\frac{۳}{۴}))=\frac{۴}{۵}$.

تمرین در کلاس

۱ــ برای هر x، در دایره مثلثاتی x و $\tan^{-۱}x$ را نمایش دهید و روی شکل دامنه و برد تابع $\tan^{-۱}x$ را توضیح دهید.

۲ــ مقدارهای زیر را حساب کنید.

الف) $\tan^{-۱}(-\sqrt{۳})$ ب) $\tan^{-۱}(\sqrt{۳})+\tan^{-۱}(\frac{۱}{\sqrt{۳}})$

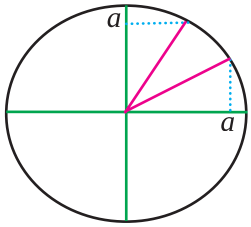
ج) $\tan^{-۱}(\tan\frac{۵\pi}{۴})$ د) $\sin^{-۱}(\tan\frac{۳\pi}{۴})$

۳ــ راجع به وضعیت وارون‌پذیری و نیز تابع وارون $y=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$ بحث کنید.

مسائل

۱ــ برای هر عدد $۰<a<۱$ از طریق شکل زیر استدلال کنید که

$$\sin^{-۱}a+\cos^{-۱}a=\frac{\pi}{۲}$$



در حالت $-۱ < a < ۰$ با استدلال مشابه درستی تساوی صفحهٔ قبل را ثابت کنید.

۲ــ از طریق دایره مثلثاتی نشان دهیدکه برای هر $-۱ \leq x \leq ۱$ داریم :

$$sin^{-۱}(-x) = -sin^{-۱}x$$

$$cos^{-۱}(-x) = \pi - cos^{-۱}x$$

۳ــ برای هر $-۱ \leq x \leq ۱$ از طریق دایره مثلثاتی نشان دهید :

$$sin(cos^{-۱}x) = cos(sin^{-۱}x) = \sqrt{۱-x^۲}$$

۴ــ برای هر x نشان دهید :

$$sin(tan^{-۱}x) = \frac{x}{\sqrt{۱+x^۲}} \quad , \quad cos(tan^{-۱}x) = \frac{۱}{\sqrt{۱+x^۲}}$$

۵ــ در مورد فرد یا زوج بودن توابع $sin^{-۱}x$, $cos^{-۱}x$, $tan^{-۱}x$ چه می‌توان گفت؟

۶ــ برای هر عدد مثبت x نشان دهید $tan^{-۱}x + tan^{-۱}\frac{۱}{x}$ زاویه‌ای در بازه $(۰ , \pi)$ است و با محاسبه سینوس یا کسینوس این زاویه نتیجه بگیرید :

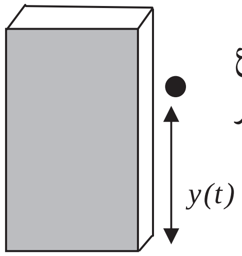
$$tan^{-۱}x + tan^{-۱}\frac{۱}{x} = \frac{\pi}{۲}$$

طبق نظریه انفجار بزرگ ، عالم در اثر یک انفجار بزرگ که در یک نقطه روی داده است به وجود آمده است. اگر در زمان به عقب بازگردیم رفته رفته به این نقطه نزدیک می‌شویم.

حد و پیوستگی توابع

حد توابع

اگر سنگی را از بالای یک ساختمان ۱۶ متری رها کنیم طبق قوانین فیزیکی ارتفاع آن در هر لحظه t به‌صورت $y(t) = ۱۶ - ۵t^۲$ است که t برحسب ثانیه و $y(t)$ برحسب متر است.



حل یک مسئله

چگونه می‌توان سرعت سقوط این سنگ را در هر لحظه حساب کرد؟

این سؤالی بود که نیوتون از خود پرسید. نیوتون فیزیکدانی بود که حدود ۳۰۰ سال پیش می‌زیسته است و با طرح چنین مسائلی و حل آن‌ها علم حسابان را پایه‌ریزی نمود.

معلم از دانش‌آموزان پرسید: آیا می‌دانید سرعت یک متحرک چیست و آن را چگونه حساب می‌کنند؟

سعید: من ورزشکار هستم و در تمرین‌ها زیاد می‌دوم. معمولاً موقع دویدن در هر ثانیه ۲ متر جلو می‌روم، یعنی سرعت من ۲ متر بر ثانیه است.

معلم: بله اگر متحرکی با سرعت ثابت حرکت کند، در هر ثانیه مسافت یکسانی طی می‌کند و اگر این مسافت v متر باشد، گوییم سرعت آن v متر بر ثانیه است. به طور کلی متحرک‌هایی که با سرعت ثابت حرکت می‌کنند در هر فاصله زمانی (برحسب ثانیه) $[t_۱ , t_۲]$ اگر a متر طی کرده باشند مقدار $\frac{a}{t_۲ - t_۱}$ ثابت است و همان سرعت متحرک برحسب متر بر ثانیه است.

علی: اما اگر متحرکی سرعت ثابت نداشته باشد و سرعت آن در حال تغییر باشد در هر لحظه سرعت آن را چگونه حساب کنیم؟

محسن: من هر وقت سوار ماشین می‌شوم، ماشین از حالت ایستاده شروع به حرکت می‌کند و سرعت خود را از صفر تا ۵۰ کیلومتر بر ساعت افزایش می‌دهد و در هر لحظه عقربه سرعت‌شمار مقدار سرعت را نشان می‌دهد که از صفر تا ۵۰ افزایش می‌یابد.

معلم: بله ماشین در هر لحظه سرعتی دارد و این سرعت در حال افزایش است ولی آن‌چه که ما از ماشین می‌توانیم ببینیم آن است که در هر لحظه چند متر به جلو رفته است. آیا با دانستن این مطلب ما می‌توانیم تشخیص دهیم سرعت ماشین در هر لحظه چقدر است؟

سعید: اگر در هر لحظه ما بدانیم متحرک چقدر حرکت کرده است، از یک لحظه $t_۱$ تا چند لحظه بعد مانند $t_۲$ می‌توانیم حساب کنیم چند متر حرکت کرده است. اگر مسافت طی شده بین این دو لحظه a متر باشد مقدار $\frac{a}{t_۲ - t_۱}$ را می‌توان سرعت متحرک در فاصله زمانی $[t_۱ , t_۲]$ بدانیم.

محسن : ولی ما می‌خواهیم بدانیم سرعت متحرک در هر لحظه چقدر است، عددی که سعید به دست آورده است بستگی به بازه زمانی $[t_۱ , t_۲]$ دارد و چیزی در مورد سرعت در هر لحظه نمی‌گوید.

معلم : محسن درست می‌گوید ولی سعید گام مهمی را در حل مسئله برداشته است. مقدار $\frac{a}{t_۲ - t_۱}$ سرعتی را نشان می‌دهد که اگر متحرک در فاصله زمانی $[t_۱ , t_۲]$ به‌طور ثابت با آن سرعت حرکت می‌کرد به همان جایی می‌رسید که اکنون رسیده است. این مقدار را در فیزیک سرعت متوسط متحرک در فاصله زمانی $[t_۱ , t_۲]$ می‌نامند.

محسن : ما چگونه می‌توانیم از طریق سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای برسیم؟

سعید : اگر $t_۲$ به $t_۱$ نزدیک باشد، مقدار متوسط سرعت نیز باید به سرعت لحظه‌ای نزدیک باشد. بنابراین بهتر است ببینیم وقتی که $t_۲$ به $t_۱$ نزدیک می‌شود، سرعت متوسط به چه عددی نزدیک می‌شود؟

معلم : نکات خوبی را مطرح کردید، بیایید ببینیم که آیا با این روش می‌توانیم سرعت سقوط سنگ را در هر لحظه حساب کنیم.

فعالیت ۱

۱ــ در مسئله سقوط سنگ، پس از گذشت ۱ ثانیه سنگ در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟

۲ــ اگر h عددی کوچک باشد در لحظه $۱ + h$ سنگ در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟

۳ــ بین دو لحظه ۱ و $۱ + h$ سنگ چند متر حرکت کرده و این حرکت در چند ثانیه انجام شده است؟

۴ــ اگر h ناصفر باشد، سرعت متوسط سنگ بین دو لحظه ۱ و $۱ + h$ چقدر است؟

۵ــ اگر h منفی باشد لحظه $۱ + h$ چه معنایی دارد؟

۶ــ جدول زیر را تکمیل کنید.

h	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$-۰/۰۰۱$	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	$۰/۰۰۱$	$۰/۰۱$	$۰/۱$
سرعت متوسط				$\rightarrow$	?	$\leftarrow$			

۷ــ اگر h ناصفر باشد و آن را به‌تدریج کوچک و کوچک‌تر کنیم و به صفر نزدیک کنیم، سرعت متوسط سنگ به چه عددی نزدیک می‌شود؟ این عدد چه چیزی را نشان می‌دهد؟

در فعالیت بالا سرعت متوسط سنگ بین دو لحظه ۱ و $۱ + h$ وابسته به مقدار h است و تابعی برحسب h می‌باشد که اگر آن را با $g(h)$ نشان دهیم داریم :

$$g(h) = \frac{(۱۶ - ۵ \times ۱^۲) - (۱۶ - ۵(۱ + h)^۲)}{h} = ۵h + ۱۰$$

توجه کنید که $g(h)$ فقط برای hهای ناصفر تعریف شده است و ما حق نداریم به‌جای h صفر قرار دهیم، با این حال ما دقیقاً می‌خواهیم بدانیم مقدار این تابع در $h=0$ چقدر باید باشد. (چرا؟).

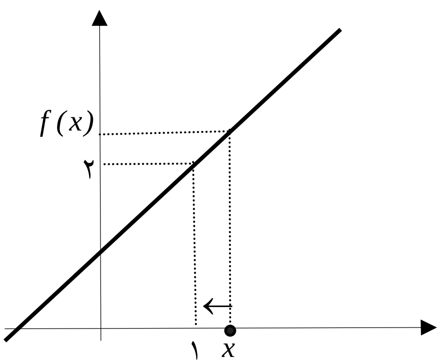
اگرچه ما حق نداریم جای h صفر قرار دهیم ولی می‌توانیم مقدارهای ناصفر کوچک جای h قرار دهیم و هر چقدر دلمان بخواهد آن را کوچک‌تر کنیم و بررسی کنیم مقدارهای $g(h)$ چگونه تغییر می‌کنند و آیا به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟

تمرین در کلاس

۱ــ برای تابع $f(x) = x + ۱$ جدول زیر را تکمیل کنید و سپس حدس بزنید که اگر مقدارهای x را به ۱ نزدیک کنیم مقدارهای $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

x	۰/۹ ۰/۹۹ ۰/۹۹۹ $\rightarrow$ ۱ $\leftarrow$ ۱/۰۰۱ ۱/۰۱ ۱/۱
$f(x)$	$\rightarrow$? $\leftarrow$

۲ــ نمودار تابع $f(x) = x + ۱$ در زیر رسم شده است. از روی نمودار توضیح دهید وقتی مقدارهای x به ۱ نزدیک می‌شوند، مقدارهای $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند.



۳ــ برای توابع $g(x)=\frac{x^۲-۱}{x-۱}$ و $k(x)=\begin{cases} x+۱ & x\neq ۱ \\ ۵ & x=۱ \end{cases}$ نیز با رسم جدول و نمودار آن‌ها بررسی کنید وقتی مقدارهای x به ۱ نزدیک می‌شوند، مقدارهای $g(x)$ و $k(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند.

۴ــ سه تابع $f(x)$ و $g(x)$ و $k(x)$ با هم مساوی نیستند. این سه تابع چه تفاوت‌ها و چه شباهت‌هایی دارند و چه چیز باعث شده است که همهٔ آن‌ها با نزدیک شدن x به ۱ به عدد یکسانی نزدیک شوند.

۵ــ جدول صفحهٔ بعد را تکمیل کنید و سپس حدس بزنید که وقتی مقدار x به صفر نزدیک می‌شود مقدار تابع $g(x)=\frac{\sin x}{x}$ به چه عددی نزدیک می‌شود؟

x	$-0/1$ $-0/01$ $-0/001$ $\rightarrow$ 0 $\leftarrow$ $0/001$ $0/01$ $0/1$
$\sin x$	$0/000999999$ $0/009999$ $0/09983$
$\frac{\sin x}{x}$	$\rightarrow$? $\leftarrow$

در تمرین‌های بالا با تابعی مانند $f(x)$ روبه‌رو بودیم که متغیر x (در دامنه f) به عددی مانند a نزدیک می‌شد و این سؤال مطرح بود که آیا مقدارهای $f(x)$ نیز به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ این مفهوم را حدگیری از تابع f در نقطه a می‌نامند.

تعریف :

برای یک تابع f اگر مقدارهای x (در دامنه f) به عددی مانند a نزدیک شوند و مشاهده شود که مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک می‌شوند، گوییم تابع f در نقطه a حد دارد و حد آن برابر L است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

عبارت بالا را به صورت «حد $f(x)$ در نقطه a برابر L است» بخوانید.

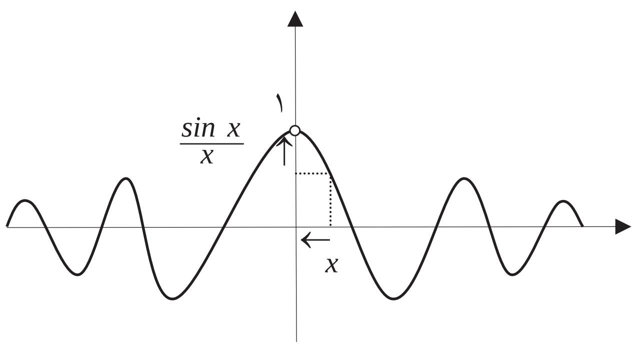
تذکر :

به‌طور دقیق‌تر، $\lim_{x\to a} f(x)=L$ به معنای آن است که اگر x (در دامنه f) به اندازه کافی به a نزدیک شود آن‌گاه فاصله $f(x)$ تا L از هر مقداری که انتخاب کرده باشیم کوچک‌تر می‌شود.

مثال

۱ : حد تابع $\frac{x^2-1}{x-1}$ در نقطه ۱ برابر ۲ است، $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=2$.

۲ : با محاسبه مقدارهای تقریبی تابع $\frac{\sin x}{x}$ برای مقدارهای x نزدیک صفر می‌توان حدس زد که حد آن در نقطه صفر برابر ۱ است، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

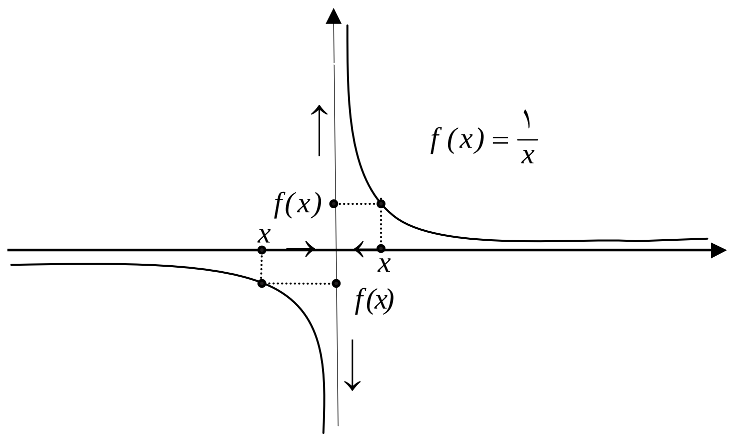


فعالیت ۲

۱ــ برای تابع $\frac{۱}{x}$ جدول زیر را تکمیل کنید و حد این تابع را در صفر بررسی کنید.

x	$-۰/۱ \quad -۰/۰۱ \quad -۰/۰۰۱ \quad \rightarrow \quad ۰ \quad \leftarrow \quad ۰/۰۰۱ \quad ۰/۰۱ \quad ۰/۱$
$\frac{۱}{x}$	$\rightarrow \quad ? \quad \leftarrow$

۲ــ آیا مقدارهای $\frac{۱}{x}$ وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ جواب خود را از طریق نمودار تابع $\frac{۱}{x}$ که در زیر آمده است توضیح دهید.



فعالیت بالا نشان می‌دهد این طور نیست که هر تابعی در هر نقطه‌ای حتماً حد داشته باشد. توابعی هستندکه مقدارهای آن‌ها، با نزدیک شدن x (در دامنه تابع) به عددی مانند a به هیچ عددی نزدیک نمی‌شوند. گوییم این‌گونه توابع در آن نقطه حد ندارند.

مثال

تابع $f(x)=\frac{x}{x^{۲}-۱}$ در نقاط ۱ و ۱− حد ندارد، زیرا با نزدیک شدن x به ۱ یا ۱− مقدارهای $\frac{x}{x^{۲}-۱}$ به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند و از لحاظ قدرمطلق مرتباً افزایش می‌یابند.

حد چپ و حد راست

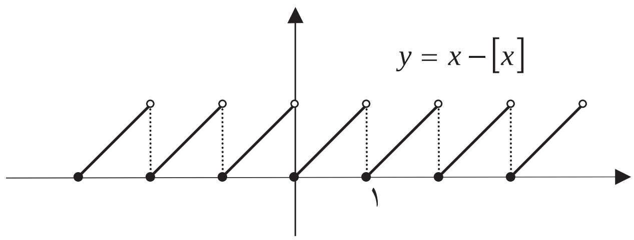
فعالیت ۳

۱ــ جدول زیر را برای تابع $x-[x]$ تکمیل کنید.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	→ ۱ ←	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$x-[x]$				→ ? ←			

۲ــ اگر x با مقدارهای بزرگ‌تر از ۱ به ۱ نزدیک شود، آیا مقدارهای $x-[x]$ به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ اگر x با مقدارهای کوچک‌تر از ۱ به ۱ نزدیک شود، آیا مقدارهای $x-[x]$ به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟ آیا این دوعدد یکی هستند؟

۳ــ نتایج خود را روی نمودار تابع $x-[x]$ که در زیر آمده است توضیح دهید.



۴ــ آیا تابع $x-[x]$ در ۱ حد دارد؟

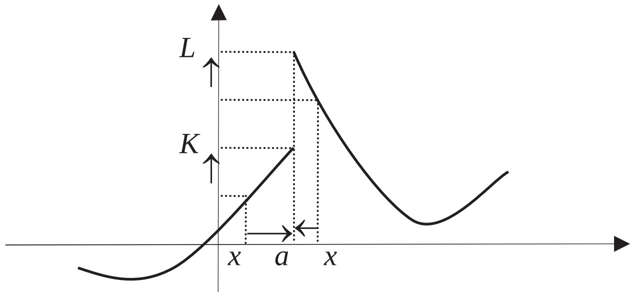
تعریف :

در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقدارهای بزرگتر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه a حد راست دارد و مقدار این حد L است. این مطلب را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

در یک تابع f اگر متغیر x (در دامنه f) با مقدارهای کوچکتر از عددی مانند a به a نزدیک شود و مقدارهای $f(x)$ به عددی مانند K نزدیک شوند، گوییم تابع f در نقطه a حد چپ دارد و مقدار این حد K است. این مطلب را به صورت زیر نشان می‌دهیم.

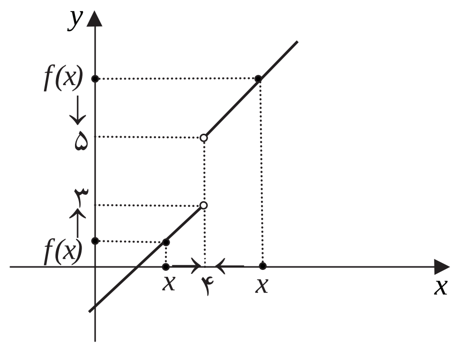
$$\lim_{x\to a^-} f(x)=K$$



مثال

۱ : نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-۱ & x<۴ \\ x+۱ & ۴<x \end{cases}$ در زیر رسم شده است.

$$f(x)=\begin{cases} x-۱ & x<۴ \\ x+۱ & ۴<x \end{cases}$$



این تابع در نقطه $x=۴$ تعریف نشده است و دیده می‌شود که با نزدیک شدن x به ۴ با مقدارهای بزرگ‌تر از ۴، مقدارهای $f(x)$ به ۵ نزدیک می‌شوند، یعنی

$$\lim_{x\to ۴^+} f(x)=۵$$

هم‌چنین با نزدیک شدن x به ۴ با مقدارهای کوچکتر از ۴، مقدارهای $f(x)$ به ۳ نزدیک می‌شوند، یعنی $\lim_{x\to ۴^-} f(x)=۳$.
بنابراین، این تابع در ۴ حد ندارد.

تذکر : در علامت‌گذاری حد راست و چپ نمادهای «+» و «−» معنای راست و چپ دارند، نه مثبت و منفی.

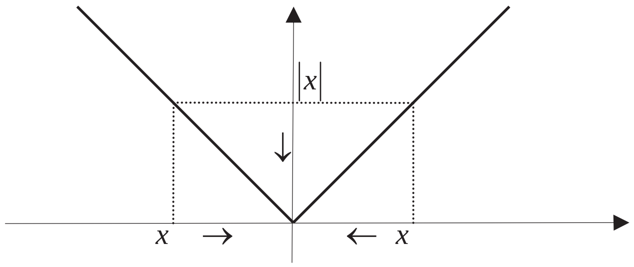
با توجه به مفهوم حدهای چپ و راست، قضیه زیر برقرار خواهد بود.

قضیه :

اگر تابعی در دو طرف نقطه‌ای تعریف شده باشد و در این نقطه حدهای چپ و راست متفاوت داشته باشد، در آن نقطه حد ندارد. اما اگر حدهای چپ و راست تابع در این نقطه موجود و مساوی باشند، تابع در آن نقطه حد دارد و حد آن همان مقدار مشترک حدهای چپ و راست است.

مثال

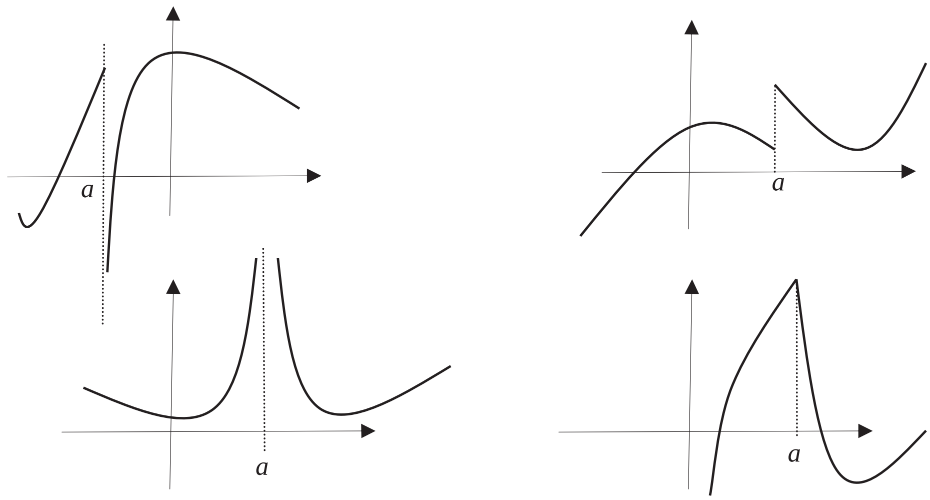
۲ : حد تابع $|x|$ را در صفر بررسی می‌کنیم.



با نزدیک شدن x به صفر چه از چپ و چه از راست $|x|$ به صفر نزدیک می‌شود، یعنی حد چپ و حد راست هر دو موجودند و برابر صفر می‌باشند، پس $\lim\limits_{x\to ۰} |x| = ۰$.

تمرین در کلاس

۱ــ در زیر نمودار چند تابع داده شده است. در هر کدام از نمودارهای داده شده در نقطه مشخص شده وجود حدهای چپ و راست و وجود حد تابع را بررسی کنید.



۲ــ با رسم جدول و نمودار توابع زیر وجود حدهای چپ و راست و حد تابع را در نقطه داده شده بررسی کنید و مقدار این حدها را به‌دست آورید.

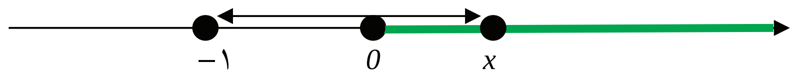
الف) $a = ۳ \; , \; y = \sqrt{۱ + x}$

ب) $a = ۰ \; , \; y = \dfrac{x}{|x|}$

ج) $a = ۲ \; , \; y = \begin{cases} x^۲ - ۱ & x < ۲ \\ x + ۱ & ۲ < x \end{cases}$

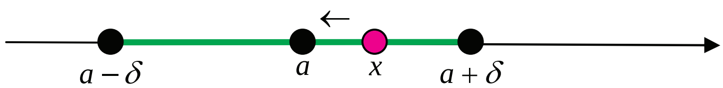
همسایگی‌های یک نقطه

آیا می‌توان از حد تابع $\sqrt{x}$ در نقطه ۱− صحبت کرد؟ شرط اصلی در بررسی حد یک تابع در یک نقطه مانند a آن است که بتوان از نقاط دامنه آن تابع به نقطه a نزدیک شد. اما دامنه تابع $\sqrt{x}$ بازه $[0, \infty)$ است و نمی‌توان از نقاط این بازه به ۱− نزدیک شد.



منظور از نزدیک شدن مقدارهای یک متغیر به یک نقطه مانند a آن است که بتوان مقدارهایی برای متغیر قرار داد که فاصله آن تا a از هر عدد انتخاب شده‌ای کمتر شود.

برای آن‌که بتوان از داخل دامنه تابعی، به نقطه‌ای مانند a از دو طرف (راست و چپ) نزدیک شد، دامنه آن تابع باید شامل یک بازه به صورت $(a-\delta, a+\delta)$ باشد. البته خود a لزومی ندارد در دامنه آن تابع باشد.



تعریف :

بازه‌های به صورت $(a-\delta, a+\delta)$ که δ عددی مثبت است را یک همسایگی a می‌نامند. اگر a را از این همسایگی حذف کنیم آن را یک همسایگی محذوف a می‌نامند.

تذکر :

شرط آن که بتوان از حد (دوطرفه) یک تابع در یک نقطه a صحبت کنیم آن است که آن تابع در یک همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این حالت گوییم تابع در اطراف a تعریف شده است.

مثال

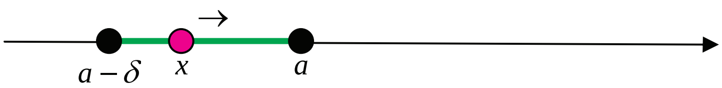
۱ : تابع $\sqrt{1-x^2}$ در اطراف صفر و خود صفر تعریف شده است. زیرا در همسایگی $(-1, 1)$ از صفر تعریف شده است.

۲ : تابع $\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ در اطراف صفر تعریف شده است اما در خود صفر تعریف نشده است زیرا دامنه تعریف آن یک همسایگی محذوف صفر را در بر دارد.

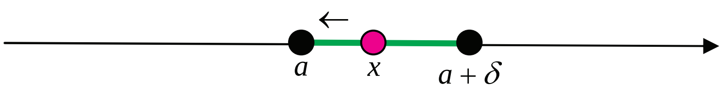
بحث در کلاس

آیا می‌توان از حد چپ یا راست تابع $\sqrt{۱-x^۲}$ در نقطه ۱ صحبت کرد؟

برای بررسی حد چپ یک تابع f در نقطه‌ای مانند a، متغیر x (در دامنه f) باید بتواند از چپ به a نزدیک شود. این به معنای آن است که دامنه f باید شامل بازه‌ای به‌صورت $(a-\delta\,,\,a)$ باشد. چنین بازه‌هایی را یک همسایگی چپ a نامیم و در این حالت گوییم تابع f در یک همسایگی چپ a تعریف شده است.



به‌طور مشابه، بازه‌های به‌صورت $(a\,,\,a+\delta)$ را یک همسایگی راست a نامیم و اگر دامنه تابعی شامل یک همسایگی راست a باشد، گوییم آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده است.



مثال

۱ : تابع $\sqrt{۱-x^۲}$ در یک همسایگی چپ ۱ و در یک همسایگی راست ۱− تعریف شده است، اما دراطراف این دو نقطه تعریف نشده است.

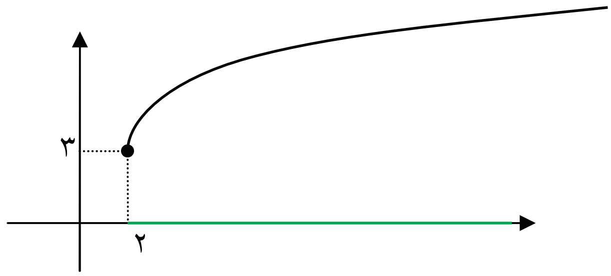
تذکر :

شرط آن که بتوان از حد چپ یک تابع در نقطه‌ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد.

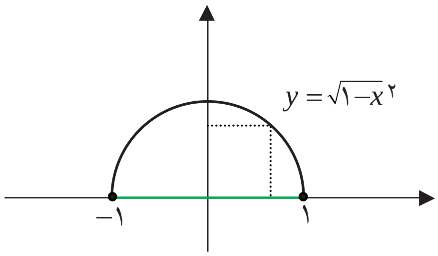
به‌طور مشابه، شرط آن که بتوان از حد راست یک تابع در نقطه‌ای مانند a صحبت کرد آن است که آن تابع در یک همسایگی راست a تعریف شده باشد.

مثال

۲ : تابع $\sqrt{x-۲}+۳$ در اطراف ۲ تعریف نشده است ولی در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده است و می‌توانیم حد راست آن را در ۲ حساب کنیم که برابر ۳ است.



۳ : تابع $\sqrt{۱-x^۲}$ در اطراف ۱ تعریف نشده است ولی در یک همسایگی چپ ۱ تعریف شده است و می‌توانیم حد چپ آن را در ۱ حساب کنیم که برابر صفر است.



تمرین در کلاس

برای تابع $y=\frac{\sqrt{۹-x^۲}}{x-[x]}$ به سؤالات زیر جواب دهید.

۱ــ این تابع در همسایگی کدام نقاط تعریف شده است؟

۲ــ این تابع در همسایگی محذوف کدام نقاط تعریف شده است که در خود آن نقاط تعریف نشده است؟

۳ــ این تابع در یک همسایگی چپ کدام نقاط تعریف شده است که در هیچ همسایگی راست آن نقاط تعریف نشده است؟

۴ــ این تابع در یک همسایگی راست کدام نقاط تعریف شده است که در هیچ همسایگی چپ آن نقاط تعریف نشده است؟

تذکر :

اگر تابعی مانند f فقط در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، آنگاه نزدیک شدن به a از داخل دامنه f فقط از راست امکان‌پذیر است، بنابراین منظور از حد f در a همان حد راست f در a است و نماد $\lim\limits_{x\to a} = f(x)$ به معنای $\lim\limits_{x\to a^+} = f(x)$ خواهد بود.

به‌طور مشابه اگر f فقط در یک همسایگی چپ نقطه a تعریف شده باشد، آنگاه نزدیک شدن به a از داخل دامنه f فقط از چپ امکان‌پذیر است، بنابراین منظور از حد f در a همان حد چپ f در a است و نماد $\lim\limits_{x\to a} = f(x)$ به معنای $\lim\limits_{x\to a^-} = f(x)$ خواهد بود.

مثال

۱ : برای تابع $y=\sqrt{x}$ که نسبت به صفر فقط در یک همسایگی راست صفر تعریف شده است داریم :

$$\lim_{x\to ۰}\sqrt{x} = \lim_{x\to ۰^+}\sqrt{x} = ۰$$

۲ : برای تابع $y=\frac{۱}{[x]-۲}$ که نسبت به ۲ فقط در یک همسایگی چپ ۲ تعریف شده است داریم :

$$\lim_{x\to ۲}\frac{۱}{[x]-۲} = \lim_{x\to ۲^-}\frac{۱}{[x]-۲} = \lim_{x\to ۲^-} -۱ = -۱$$

مسائل

۱ــ با رسم جدول مقدارهای توابع زیر در اطراف نقطه داده شده (در صورت لزوم از ماشین حساب استفاده کنید) بررسی کنید که آیا حد این توابع در آن نقطه موجود است؟ در صورت وجود مقدار حد را تعیین کنید و به زبان ریاضی بنویسید.

الف) $a=۰\ ,\ y=\frac{x^۲-x}{x}$ ‌‌ ‌ ب) $a=-۱\ ,\ y=\begin{cases} x^۲+۱ & x<-۱ \\ x^۳+۳ & -۱<x \end{cases}$

ج) $a=۲\ ,\ y=x[x]$ ‌ ‌ د) $a=۰\ ,\ y=\sqrt{۱-x^۲}$

هـ) $a=۱, y=\frac{\sqrt{|x(x-۱)|}}{x^۲-۱}$ ‌ ‌ و) $a=۰, y=\frac{۱-\cos x}{x^۲}$

۲ــ با رسم نمودار توابع زیر در اطراف نقطه داده شده وجود حد راست و حد چپ و مقدار حد را در آن نقاط بررسی کنید.

الف) $a = 1/2\ ,\ y = [x]$

ب) $a = 2, y = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 2 \\ 6 & x = 2 \\ -x^2 + 9 & 2 < x \end{cases}$

ج) $a = 2\ ,\ y = x - [x]$

د) $a = -3, y = 1 - \sqrt{1 - x}$

هـ) $a = 0, y = \dfrac{x}{|x|}$

۳ــ اگر دو تابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a بر هم منطبق باشند، توضیح دهید که چرا حد آن‌ها در نقطه a مانند یکدیگر است، یعنی اگر یکی از آن‌ها در a حد داشته باشد، دیگری هم حد دارد و حد آن‌ها مساوی است. همچنین اگر دو تابع f و g در یک همسایگی چپ (یا راست) نقطه‌ای برهم منطبق باشند، توضیح دهید که چرا حد چپ (راست) این دو تابع در این نقطه مانند یکدیگر است.

۴ــ در هر یک از حالت‌های زیر نمودار تابعی را رسم کنید که شرایط گفته شده را داشته باشد.

الف) تابع در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

ب) تابع در ۱ تعریف نشده باشد ولی در یک همسایگی محذوف ۱ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

ج) تابع در یک همسایگی صفر تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن غیر از مقدار تابع در صفر باشد.

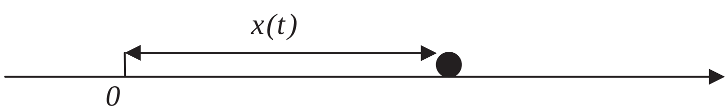
د) تابع در یک همسایگی ۱− تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد و حد تابع برابر مقدار تابع در ۱− باشد.

هـ) تابع در یک همسایگی راست ۲ تعریف شده باشد ولی در هیچ همسایگی چپ ۲ تعریف نشده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

و) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ و راست متفاوت داشته باشد.

ز) تابع در یک همسایگی محذوف صفر تعریف شده باشد و در صفر حد چپ داشته باشد ولی حد راست نداشته باشد.

۵ــ متحرکی روی محور xها به گونه‌ای حرکت می‌کند که در هر لحظه t $(0 \le t)$ در مکان $x(t)$ قرار دارد و $x(t) = t^2 - t$.



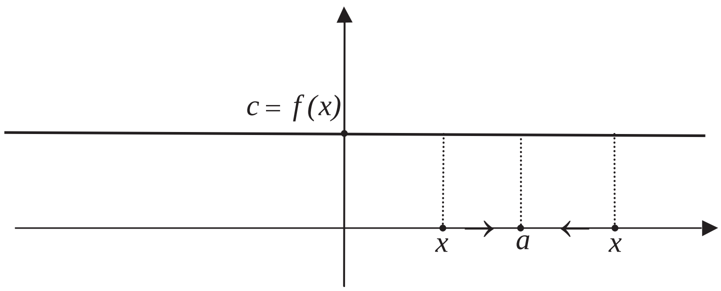
با رسم نمودار این تابع در دامنه داده شده چگونگی حرکت این متحرک را توصیف کنید و سرعت لحظه‌ای آن را در لحظه $t = 2$ به‌دست آورید.

قضایای حد توابع

حد برخی توابع خاص را به‌سادگی می‌توان به‌دست آورد.

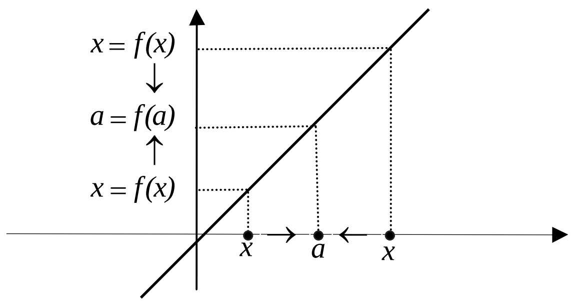
مثال

۱ : تابع ثابت $f(x) = c$ در همه نقاط حد دارد و حد آن در همه نقاط c است.



$$\lim_{x \to a} c = c$$

۲ : تابع $f(x) = x$ در همه نقاط حد دارد و حد آن در هر نقطه مانند a برابر a است.



$$\lim_{x \to a} x = a$$

بحث در کلاس

اگر دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ در اطراف نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشند و در این نقطه حد داشته باشند، آیا تابع $f(x) + g(x)$ نیز در a حد دارد؟ حد آن‌چه می‌تواند باشد؟ در مورد تابع $f(x)g(x)$ چه می‌توان گفت؟

فعالیت ۴

۱ــ دو تابع $f(x)=۲x+۳$ و $g(x)=۲-x$ را در نظر بگیرید و توابع $f(x)+g(x)$ و $f(x)g(x)$ را بسازید.

۲ــ برای بررسی حد این چهار تابع در صفر جدول زیر را تکمیل کنید.

x	$-۰/۱$ $-۰/۰۱$ $-۰/۰۰۱$ $\to$ ۰ $\leftarrow$ $۰/۰۰۱$ $۰/۰۱$ $۰/۱$
$f(x)$	$\to$? $\leftarrow$
$g(x)$	$\to$? $\leftarrow$
$f(x)+g(x)$	$\to$? $\leftarrow$
$f(x)g(x)$	$\to$? $\leftarrow$

۳ــ حد توابع $f(x)$ و $g(x)$ در صفر چیست؟

۴ــ حد توابع $f(x)+g(x)$ و $f(x)g(x)$ در صفر چیست؟

۵ــ چه ارتباطی بین حد توابع $f(x)+g(x)$ و $f(x)g(x)$ و حد توابع $f(x)$ و $g(x)$ می‌یابید؟

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=L$ و $\lim_{x\to a} g(x)=K$ با نزدیک شدن مقدارهای x به a مقدارهای $f(x)$ به L و مقدارهای $g(x)$ به K نزدیک می‌شوند، پس مقدارهای $f(x)+g(x)$ به $L+K$ نزدیک می‌شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقداری می‌تواند کمتر شود. پس تابع $f(x)+g(x)$ در a حد دارد و حد آن $L+K$ است. همچنین مقدارهای $f(x)g(x)$ به LK نزدیک می‌شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقداری می‌تواند کمتر شود. پس تابع $f(x)g(x)$ در a حد دارد و حد آن LK است. به عبارت دیگر قضایای زیر برقرارند.

قضیه :

اگر دو تابع f و g روی دامنه یکسانی تعریف شده باشند و در نقطه a حد داشته باشند آن‌گاه توابع $f+g$ و $f.g$ نیز در a حد دارند و

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a} f(x)g(x)=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

مثال

۱ : تابع $y=x$ در هر نقطه‌ای مانند a حد دارد و حد آن a است بنابراین تابع $y=x^۲$ نیز در a حد دارد و حد آن $a^۲$ است، زیرا

$$\lim_{x\to a} x^۲ = (\lim_{x\to a} x)(\lim_{x\to a} x) = a.a = a^۲$$

۲ : دو تابع $y=x$ و $y=x^۲$ در هر عددی مانند a حد دارند و حد آن‌ها به ترتیب a و $a^۲$ است، بنابراین

$$\lim_{x\to a}(x^۲+x) = \lim_{x\to a} x^۲ + \lim_{x\to a} x = a^۲ + a$$

۳ : حد تابع $y=(x^۲+\frac{x}{۲})(x-۱)$ را در نقطهٔ ۴ به‌دست می آوریم.

$$\lim_{x\to ۴}(x^۲+\frac{x}{۲})(x-۱) = \lim_{x\to ۴}(x^۲+\frac{x}{۲}).\lim_{x\to ۴}(x-۱) = (۴^۲+\frac{۴}{۲})(۴-۱) = ۵۴$$

توجه داشته باشید که اگر دو تابع با دامنه‌های غیر یکسان را جمع یا ضرب کنیم، ابتدا این دو تابع را روی دامنه‌های یکسان تحدید می‌کنیم و سپس در صورت امکان قضیه قبل را برای توابع تحدید یافته به‌کار می‌بریم.

تمرین در کلاس

۱ــ با استقرا ثابت کنید برای هر عدد طبیعی n داریم :

$$\lim_{x\to a} x^n = a^n$$

۲ــ ثابت کنید برای هر تابع چندجمله‌ای مانند $P(x)$ داریم :

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

در بالا دیدیم که توابع چندجمله‌ای به‌گونه‌ای هستند که در هر نقطه حد دارند و حد آن‌ها همان مقدار تابع در آن نقاط است. بسیاری از توابع مهمی که تا این‌جا دیده‌ایم این خاصیت را دارند که بدون اثبات برخی از آن‌ها را در این‌جا بیان می کنیم. با رسم نمودار این توابع می‌توانید درستی حدهای زیر را توجیه کنید.

$$\lim_{x\to a} \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{a}$$

$$\lim_{x\to a} \sin x = \sin a$$

$$\lim_{x\to a} \cos x = \cos a$$

$$\lim_{x\to a} b^x = b^a$$

در حدگیری‌های بالا، a نقطه‌ای از دامنه تابع است.

بحث در کلاس

اگر تابع $f(x)$ در اطراف نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و در a حد داشته باشد، آیا تابع $\frac{1}{f(x)}$ نیز در a حد دارد؟ حد آن چه می‌تواند باشد؟

فعالیت ۵

۱ــ تابع $f(x) = 2x - 1$ را در نظر بگیرید. برای بررسی حد دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در نقطه ۲ جدول زیر را تکمیل کنید.

x	۱/۹ ۱/۹۹ ۱/۹۹۹ $\rightarrow$ $\leftarrow$ ۲/۰۰۱ ۲/۰۱ ۲/۱
$f(x)$	$\rightarrow$? $\leftarrow$
$\frac{1}{f(x)}$	$\rightarrow$? $\leftarrow$

۲ــ حدهای دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در نقطه ۲ چه مقدار هستند و چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۳ــ برای بررسی حد دو تابع $f(x)$ و $\frac{1}{f(x)}$ در نقطه $\frac{1}{2}$ جدول زیر را تکمیل کنید.

x	۰/۴ ۰/۴۹ ۰/۴۹۹ $\rightarrow$ $\leftarrow$ ۰/۵۰۱ ۰/۵۱ ۰/۶
$f(x)$	$\rightarrow$? $\leftarrow$
$\frac{1}{f(x)}$	$\rightarrow$? $\leftarrow$

۴ــ آیا حدی برای $\frac{1}{f(x)}$ می‌یابید؟ دلیل آن را چه می‌دانید؟

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ به معنای آن است که با نزدیک شدن مقدارهای x (در دامنه f) به a مقدارهای $f(x)$ به L نزدیک می‌شوند.

اگر $L = 0$ مقدارهای $\frac{1}{f(x)}$ از لحاظ قدرمطلق در حال افزایش هستند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند و تابع $\frac{1}{f(x)}$ در a حد نخواهد داشت . اما اگر $L \neq 0$ مقدارهای $\frac{1}{f(x)}$ به عدد $\frac{1}{L}$ نزدیک می‌شوند و میزان نزدیک شدن از هر مقداری می‌تواند کمتر

شود. پس در این حالت تابع $\frac{1}{f(x)}$ در a حد دارد و حد آن $\frac{l}{L}$ است. بنابراین می‌توانیم قضیه زیر را بیان کنیم.

قضیه :

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

مثال

۱ : حد تابع $y=\frac{1}{\sin x}$ را در $\frac{\pi}{4}$ حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$$

۲ : حد تابع $y=\frac{x}{x^2+1}$ را در $x=-1$ حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2+1}=\lim_{x\to -1} x\frac{1}{x^2+1}=\lim_{x\to -1} x\lim_{x\to -1}\frac{1}{x^2+1}=-1\times\frac{1}{\lim\limits_{x\to -1} x^2+1}=-\frac{1}{2}$$

۳ : حد تابع $f(x)=\frac{1}{1+\cos x}$ را در π بررسی می‌کنیم. از آن‌جا که $\lim\limits_{x\to\pi}(1+\cos x)=0$ تابع $f(x)$ در $x=\pi$ حد ندارد.

تمرین در کلاس

۱ــ حد توابع زیر را در نقطه داده شده در صورت وجود بیابید.

الف) $y=\cos^2 x+x^2$ در π ب) $y=\frac{\sqrt{x-3}}{2-\sqrt{x}}$ در ۴

ج) $y=\frac{x\sin x}{(1+x)\cos x}$ در π د) $y=2^{x+1}-3^{2x}$ در ۲

۲ــ اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ دامنه یکسانی داشته باشند و در a حد داشته باشند، نشان دهید تابع $f(x) - g(x)$ نیز در a حد دارد و

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$$

۳ــ اگر توابع $f(x)$ و $g(x)$ دامنه یکسانی داشته باشند و در a حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq 0$ نشان دهید تابع $\frac{f(x)}{g(x)}$ نیز در a حد دارد و

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

محاسبه حد در توابع کسری

در محاسبه بسیاری از حدهای مهم به حالتی برخورد می‌کنیم که تابع به‌صورت $\frac{f(x)}{g(x)}$ است و حد صورت و مخرج در نقطه موردنظر صفر است. قضایای بالا هیچ کمکی برای محاسبه حد این‌گونه توابع نمی‌کنند. این حالت را اصطلاحاً حالت $\frac{0}{0}$ می‌نامند. برای محاسبه حد این‌گونه توابع (در صورت وجود) یکی از راه‌ها، ساده‌سازی این کسر و تبدیل آن به حالتی است که عمل محاسبه حد طبق قضایای بالا امکان‌پذیر باشد.

مثال

۱ : حد تابع $y=\frac{\sin 2x}{\sin x}$ را در ۰ بررسی می‌کنیم.
در حالت $\frac{0}{0}$ قرار داریم و لازم است ابتدا یک ساده‌سازی از کسر به عمل آوریم.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x\cos x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}2\cos x=2$$

۲ : حد تابع $y=\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$ را در ۱ بررسی می‌کنیم.

محاسبه این حد به‌طور مستقیم امکان‌پذیر نیست، ولی می‌توانیم آن را به شکل زیر ساده کنیم و سپس حد را حساب کنیم.

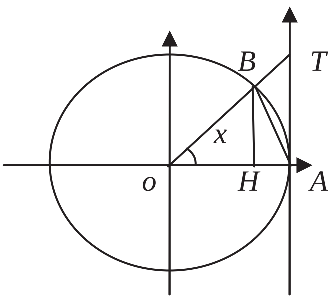
$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1)=2$$

اگر $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و در محاسبه حد $\frac{P(x)}{Q(x)}$ در نقطه a در حالت $\frac{0}{0}$ باشیم، این به معنای آن است که $P(a)=0$ و $Q(a)=0$. یعنی صورت و مخرج بر $x-a$ بخش‌پذیرند و می‌توان کسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را ساده کرد و عامل $x-a$ را از صورت و مخرج حذف کرد. با ادامه این عملیات در صورت وجود حد، می‌توان آن را محاسبه کرد.

یکی از حدهای مهم حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ در ۰ است. این حد نیز از حالات $\frac{0}{0}$ است ولی نمی‌توان با ساده کردن معمولی این کسر، حد آن را حساب کرد. قبلاً با محاسبات تقریبی تابع $\frac{\sin x}{x}$ در نزدیکی‌های صفر حدس زده‌ایم که حد آن ۱ است ولی در این‌جا می‌خواهیم استدلال دقیق‌تری برای آن بیابیم.

فعالیت ۶

شکل مقابل یک دایره مثلثاتی را نشان می‌دهد.



۱ــ مساحت‌های مثلث‌های OBA و OTA و قطاع OBA از دایره را برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه (مثبت) x (برحسب رادیان) و خود زاویه x محاسبه کنید و نشان دهید :

$$\frac{۱}{۲}\sin x \leq \frac{۱}{۲}x \leq \frac{۱}{۲}\tan x$$

۲ــ نتیجه بگیرید برای مقدارهای کوچک و مثبت x داریم :

$$۱ \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{۱}{\cos x}$$

۳ــ با نزدیک شدن x به صفر $\frac{۱}{\cos x}$ به چه عددی نزدیک می‌شود؟ با نزدیک شدن x به صفر برای تابع $\frac{x}{\sin x}$ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ حد راست $\frac{x}{\sin x}$ در صفر چقدر است؟

۴ــ با توجه به زوج بودن تابع $\frac{x}{\sin x}$ حد چپ آن در صفر چیست؟ حد این تابع در صفر چقدر است؟

۵ــ نتیجه بگیرید $\lim\limits_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x} = ۱$.

مثال

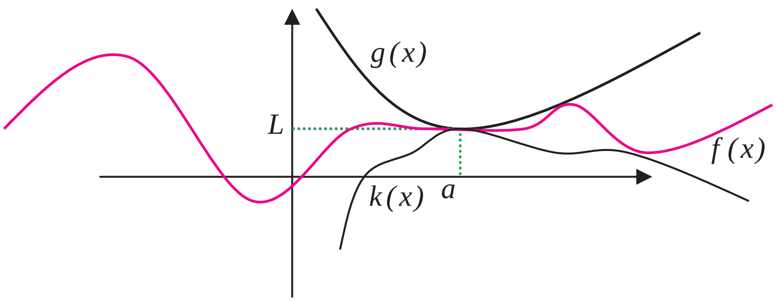
۱ : حد تابع $y = \frac{۱-\cos ۲x}{x^۲}$ را در ۰ حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos ۲x}{x^۲} = \lim_{x\to ۰}\frac{۲\sin^۲ x}{x^۲} = \lim_{x\to ۰} ۲\left(\frac{\sin x}{x}\right)^۲ = ۲$$

در فعالیت قبل برای یافتن حد تابع $\frac{x}{\sin x}$ دیدیم که این تابع بین تابع $\frac{۱}{\cos x}$ و تابع ثابت ۱ قرار گرفته است و این دو تابع در صفر حد یکسان ۱ دارند. از این نکته نتیجه می‌شود که تابع $\frac{x}{\sin x}$ نیز به ناچار با نزدیک شدن x به صفر باید به ۱ نزدیک شود. این مطلب در حالت کلی هم درست است که آن را قضیه افشردگی می‌نامند.

قضیه :

اگر تابعی مانند $f(x)$ در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a بین دو تابع $g(x)$ و $k(x)$ قرار گیرد، مثلاً $k(x) \leq f(x) \leq g(x)$، و g و k در نقطه a دارای حد یکسان L باشند، نتیجه می‌شود $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.



مثال

۲ : حد تابع $x\cos\frac{۱}{x}$ را در صفر حساب می‌کنیم.

از آن‌جا که $-۱ \leq \cos\frac{۱}{x} \leq ۱$ برای مقدارهای مثبت x داریم $-x \leq x\cos\frac{۱}{x} \leq x$ و برای مقدارهای منفی x داریم $x \leq x\cos\frac{۱}{x} \leq -x$. توابعی که در دو طرف نامساوی هستند در صفر حد یکسان صفر دارند، پس $\lim\limits_{x \to ۰} x\cos\frac{۱}{x} = ۰$

مسائل

۱ــ حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۴} \frac{x-۴}{\sqrt{x}-۲}$

ب) $\lim\limits_{x \to ۱} \frac{x^n-۱}{x-۱}$

ج) $\lim\limits_{x \to ۰} \frac{x^۲+\sin^۲ x}{x^۲}$

د) $\lim\limits_{x \to -۱} \frac{x^۳+x+۲}{x^۲-۱}$

هـ) $\lim\limits_{x\to ۰} x^{۲} \sin\sqrt{x+۱}$

و) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{\sin^{۲} x}{۱-\cos x}$

ز) $\lim\limits_{x\to ۰} \dfrac{۱-\cos x}{x}$

ح) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sqrt{۱-\cos x}}{\sin\frac{x}{۲}}$

ط) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \dfrac{\cos ۲x}{\sin x-\cos x}$

۲ــ ثابت کنید که $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ معادل با آن است که $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=۰$.

۳ــ با توجه به ایده شهودی حد تابع توضیح دهید که چرا دو شرط $\lim\limits_{x\to a} f(x)=۰$ و $\lim\limits_{x\to a}|f(x)|=۰$ با یکدیگر معادلند.

۴ــ اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابعی باشند که در اطراف نقطه a تعریف شده‌اند و f در a حد دارد ولی g در a حد ندارد، نشان دهید $f+g$ در a حد ندارد.

۵ــ دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف صفر تعریف شده‌اند و هیچ‌کدام در صفر حد ندارند ولی $f+g$ در صفر حد دارد.

۶ــ دو تابع f و g مثال بزنید که در اطراف a تعریف شده‌اند و f در a حد داشته باشد ولی g در a حد نداشته باشد، با این‌حال fg در a حد داشته باشد.

۷ــ اگر دو تابع f و g در اطراف نقطه a تعریف شده باشند و در این نقطه حد داشته باشند، حتی اگر دامنه‌های f و g یکسان نباشند، با تحدید f و g روی یک دامنه یکسان نتیجه بگیرید $f+g$ نیز در a حد دارد و

$$\lim_{x\to a} =(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

۸ــ آیا تابع $\sin\frac{۱}{x}$ در اطراف صفر تعریف شده است؟ آیا این تابع در صفر حد دارد؟ درستی نامساوی زیر را ثابت کنید.

$$\left|x\sin\frac{۱}{x}\right|\le|x|$$

با توجه به این نامساوی در مورد حد تابع $x\sin\frac{۱}{x}$ در صفر اظهارنظر کنید و دلیل درستی نظر خود را توضیح دهید.

پیوستگی توابع

فعالیت ۷

۱ــ نمودار دو تابع $f(x)=x+1$ و $g(x)=\begin{cases} x+1 & x\neq 2 \\ 1 & x=2 \end{cases}$ را رسم کنید.

۲ــ حد این دو تابع را در نقطه ۲ به‌دست آورید.

۳ــ این دو تابع چه شباهت‌ها و چه تفاوت‌هایی دارند و چرا حد آن‌ها در نقطه ۲ با هم مساوی است؟

۴ــ حد این دو تابع در نقطه ۲ با مقدارهای این دو تابع در نقطه ۲ چه رابطه‌ای دارند؟

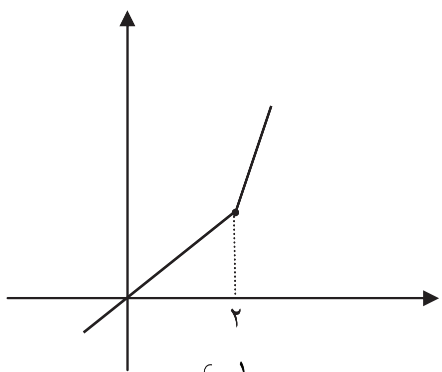
۵ــ یکسانی حد f و مقدار f در نقطه ۲ و تفاوت حد g و مقدار g در نقطه ۲، موجب پیدایش کدام ویژگی در نمودار این دو تابع شده است.

در بررسی حد یک تابع در یک نقطه، لزومی ندارد تابع در آن نقطه تعریف شده باشد، اما اگر تابع در آن نقطه تعریف شده باشد در صورت وجود حد، دو حالت ممکن است رخ دهد.

الف) حد تابع در آن نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه است.

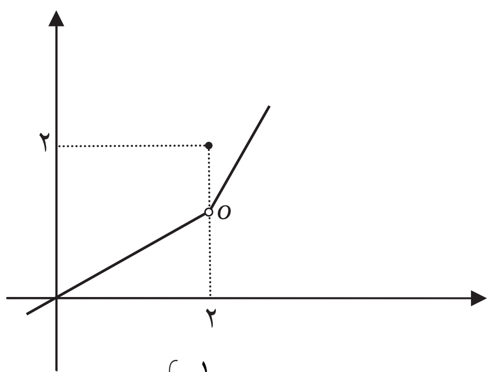
ب) حد تابع در آن نقطه مساوی مقدار تابع در آن نقطه نیست.

برای مثال، این دو حالت در نمودار توابع زیر نشان داده شده‌اند.



$$y=\begin{cases} \frac{1}{2}x & x<2 \\ 1 & x=2 \\ 2x-3 & 2<x \end{cases}$$

حالت (الف)



$$y=\begin{cases} \frac{1}{2}x & x<2 \\ 2 & x=2 \\ 2x-3 & 2<x \end{cases}$$

حالت (ب)

همان‌طور که مشاهده می‌شود در حالت (الف) نمودار تابع یک‌پارچه و به هم پیوسته است ولی در حالت (ب) نمودار تابع از هم گسسته شده است. علت این موضوع آن است که در حالت (الف) حد تابع در هر نقطه برابر مقدار تابع در همان نقطه است ولی در حالت (ب) در نقطه ۲ حد تابع و مقدار تابع مساوی نیستند. به همین خاطر تعریف زیر بنا می‌شود.

تعریف :

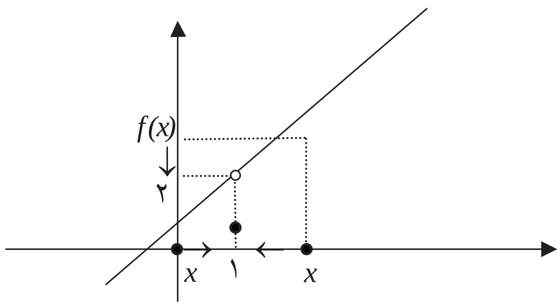
فرض کنید تابع f در نقطه a و در یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) a تعریف شده باشد. اگر حد این تابع در a موجود و برابر $f(a)$ باشد، یعنی $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$، گوییم تابع f در a پیوسته است.

مثال

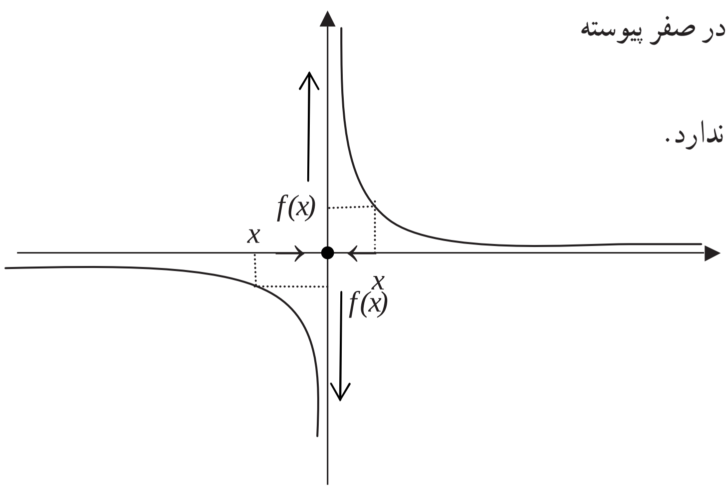
۱ : توابع چندجمله‌ای در هر نقطه‌ای پیوسته‌اند، زیرا قبلاً دیدیم که برای هر تابع چندجمله‌ای $P(x)$ در هر نقطه a داریم : $\lim_{x\to a} P(x)=P(a)$.

۲ : توابع $\sqrt[k]{x}, \sin x, \cos x, b^x$ در همه نقاط دامنه خود پیوسته‌اند.

۳ : تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-۱}{x-۱} & x\neq ۱\\ ۱ & x=۱\end{cases}$ در نقطه ۱ پیوسته نیست، زیرا حد آن در نقطه ۱ برابر ۲ است ولی $f(۱)=۱$.



۴ : تابع $f(x)=\begin{cases}\dfrac{۱}{x} & x\neq ۰\\ ۰ & x=۰\end{cases}$ در صفر پیوسته نیست، زیرا این تابع در صفر حد ندارد.



۵ : تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ در نقطه ۱ پیوسته است. زیرا در نقطه ۱ حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در ۱ است.

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\sqrt{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\sqrt{x-1}=0=f(1)$$

توجه داشته باشید که پیوستگی توابع در نقاط انتهایی دامنه خود به‌معنای آن است که حد چپ یا راست تابع در آن نقطه برابر مقدار تابع در آن نقطه باشد.

آیا تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ در ۱ پیوسته است؟ از پیوستگی این تابع در ۱ نمی‌توانیم صحبت کنیم چون این تابع در ۱ تعریف نشده است. شرط صحبت از پیوستگی یا ناپیوستگی یک تابع در یک نقطه آن است که تابع در آن نقطه و یک همسایگی چپ یا راست (یا هر دو) آن نقطه تعریف شده باشد.

تمرین در کلاس

با رسم نمودار توابع زیر، پیوستگی آن‌ها را در نقطه داده شده بررسی کنید.

۱ـ $y=\frac{1}{x}$ در نقطه دلخواه $a\neq 0$

۲ـ $y=\begin{cases} x^2+x & x\leq 0 \\ x^2-x & 0<x \end{cases}$ در نقطه $a=0$

۳ـ $y=\begin{cases} \frac{1}{x} & x\leq -1 \\ x+1 & -1<x \end{cases}$ در نقطه $a=-1$

۴ـ $y=[x]$ با دامنه $[-1, 1]$ در نقطه $a=-1$

تعریف :

اگر تابعی در تمام نقاط دامنه خود پیوسته باشد، آن را تابعی پیوسته می‌نامند.

مثال

۱ : توابع چندجمله‌ای و $\sqrt[k]{x}$, $\sin x$, $\cos x$, b^x در همه نقاط دامنه خود پیوسته‌اند و در نتیجه توابعی پیوسته‌اند.

۲ : تابع $y=\frac{1}{x}$ پیوسته است زیرا در تمام نقاط دامنه خود پیوسته است. (صفر در دامنه این تابع نیست)

۳ : تابع $y=[x]$ که روی IR تعریف شده است در نقاط صحیح ناپیوسته است. اما اگر تابع $y=[x]$ را با دامنه $[0,2]$ درنظر بگیریم، این تابع در نقطه صفر پیوسته است ولی در نقاط ۱ و ۲ هم‌چنان ناپیوسته است.

اگر $f(x)$ تابعی با مقدارهای مثبت باشد و تابع $\sqrt{f(x)}$ را بسازیم و $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a حدی برابر L داشته باشد، آیا تابع $\sqrt{f(x)}$ نیز در a حد دارد؟ آیا حد آن $\sqrt{L}$ می شود؟

$\sqrt{t}$ تابعی پیوسته است و اگر مقدارهای t به عددی مانند L نزدیک شوند مقدارهای $\sqrt{t}$ نیز به $\sqrt{L}$ نزدیک می‌شوند. با نزدیک شدن مقدارهای x به a، مقدارهای $f(x)$ به L نزدیک می‌شوند، در نتیجه مقدارهای $\sqrt{f(x)}$ به $\sqrt{L}$ نزدیک می‌شوند، یعنی تابع $\sqrt{f(x)}$ در a حد دارد و حد آن $\sqrt{L}$ است. به عبارت دیگر :

قضیه :

اگر $f(x)$ تابعی با مقدارهای نامنفی باشد و در نقطه‌ای مانند a حد داشته باشد، آنگاه $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a}f(x)}$.

علت درستی رابطه بالا پیوستگی تابع $y=\sqrt{x}$ است و مطلب بالا برای هر تابع پیوسته دیگری هم برقرار است. اگر $g(x)$ تابعی پیوسته و $f(x)$ تابعی باشد که در نقطه‌ای مانند a حدی برابر L داشته باشد و ترکیب $g(f(x))$ قابل انجام باشد (برد f داخل دامنه g باشد) و L در دامنه g باشد، آنگاه تابع $g(f(x))$ نیز در a حد دارد و حد آن $g(L)$ است. به عبارت دیگر با شرایط بالا داریم :

$$\lim_{x\to a} g(f(x))=g(\lim_{x\to a} f(x))$$

مثال

۴ : حد تابع $y=\sqrt{\sin x}$ را در نقطه $\frac{\pi}{6}$ می‌یابیم.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sqrt{\sin x}=\sqrt{\lim_{x\to\frac{\pi}{6}}\sin x}=\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

۵ : حد تابع $\sin\sqrt{\pi^2-x^2}$ را در نقطه $a=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$ می‌یابیم.

$$\lim_{x\to a}\sin\sqrt{\pi^2-x^2}=\sin(\lim_{x\to a}\sqrt{\pi^2-x^2})=\sin\sqrt{\lim_{x\to a}(\pi^2-x^2)}$$

$$=\sin\sqrt{\pi^2-\frac{8\pi^2}{9}}=\sin\sqrt{\frac{\pi^2}{9}}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مسائل

۱ــ با رسم نمودار توابع زیر تعیین کنید کدام‌یک از آن‌ها ناپیوستگی دارند و در چه نقاطی ناپیوسته‌اند؟

الف) $y=|x-1|+2$ ب) $y=x+[x]$

ج) $y=x+|x|$ د) $y=\begin{cases}x(x-1) & x\le 1\\ -x+2 & 1<x\end{cases}$

۲ــ در تابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که تابع پیوسته باشد.

$$y=\begin{cases}x^2-ax+1 & x\le 1\\ x-2a & 1<x\end{cases}$$

۳ــ ثابت کنید به ازای هیچ مقداری برای a تابع زیر پیوسته نخواهد بود.

$$y=\begin{cases}\frac{ax}{|x|} & x\ne 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

۴ــ نمودار یک تابع را رسم کنید که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

۵ــ نمودار یک تابع را رسم کنید که در دو نقطه صفر و ۱ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

۶ــ اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع پیوسته‌ای با دامنه یکسان باشند، نشان دهید توابع $f(x)+g(x)$ و $f(x)g(x)$ نیز پیوسته‌اند. در مورد پیوستگی $\frac{f(x)}{g(x)}$ چه می‌توان گفت؟

۷ــ اگر f و g توابع پیوسته‌ای با دامنه IR باشند در مورد پیوستگی تابع $g\circ f$ چه می‌توان گفت؟

وقتی هواپیما موشکی را شلیک می‌کند، موشک خط مستقیمی را طی می‌کند که مماس بر مسیر حرکت هواپیما است.

مشتق توابع

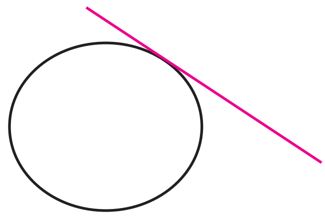
۱. خط مماس بر منحنی‌ها و مشتق توابع
۲. روش‌های محاسبهٔ مشتق توابع
۳. آهنگ تغییرات
۴. مشتق توابع مثلثاتی
۵. مشتق تابع وارون و توابع مرکب

خط مماس بر منحنی‌ها و مشتق توابع

حل یک مسئله

چگونه خط مماس بر یک منحنی را به دست آوریم؟

قبلاً با مفهوم خط مماس بر یک دایره آشنا شده‌ایم.



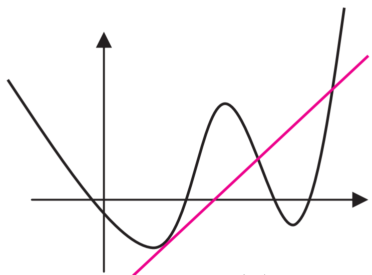
برای آن که خطی در نقطه‌ای بر دایره‌ای مماس باشد کافی است یکی از دو ویژگی‌های زیر برقرار باشد.

الف) خط و دایره فقط و فقط در آن نقطه برخورد داشته باشند.

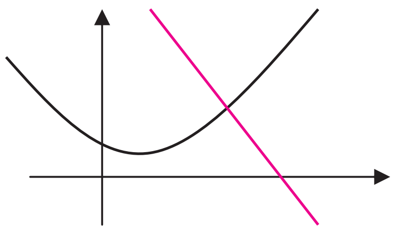
ب) خط و دایره در آن نقطه برخورد داشته باشند و کل دایره در یک طرف خط قرار بگیرد.

آیا از این ویژگی‌ها می‌توان برای به دست آوردن خط مماس بر منحنی‌های دیگر هم استفاده کرد؟

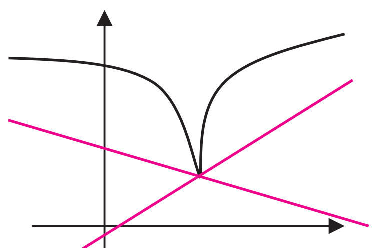
به شکل‌های زیر توجه کنید و در هر مورد حدس بزنید که آیا خط داده شده در نقطه تقاطع با منحنی، مماس بر آن منحنی محسوب می‌شود یا نه، و کدام یک از دو ویژگی بالا را دارد.



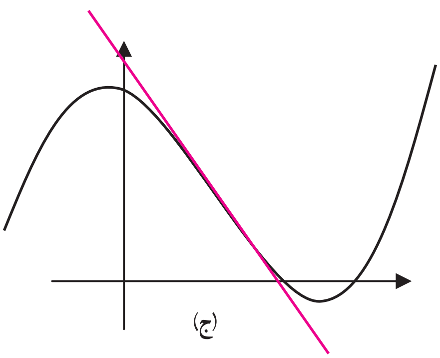
(ب)



(الف)



(د)

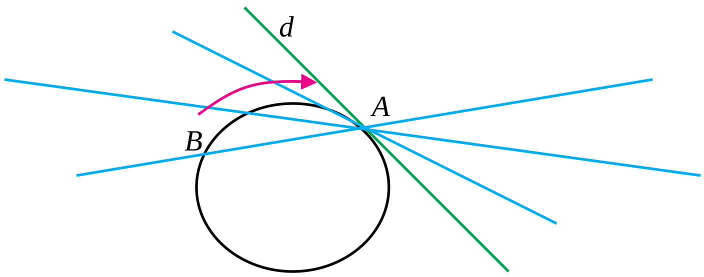


(ج)

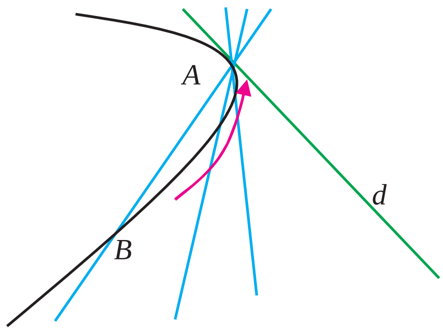
در تجربهٔ صفحهٔ قبل ممکن است حدس‌هایی درست یا نادرست زده باشید. اما این تجربه نشان می‌دهد که شرایط مماس بودن یک خط بر یک منحنی دلخواه با شرایط مماس بودن یک خط بر دایره فرق می‌کند، زیرا دایره منحنی خاصی است و لزومی ندارد برای یک منحنی دلخواه شرایط مماس بودن خط بر منحنی مانند حالت دایره باشد. باید مفهوم خط مماس بر دایره را به شکل دیگری به دست آوریم که برای یک منحنی دلخواه هم قابل قبول باشد.

فعالیت ۱

۱ــ نقطهٔ A را روی دایرهٔ زیر به‌طور ثابت در نظر بگیرید. نقطهٔ دیگری روی دایره مانند B در نظر بگیرید و خط AB را رسم می‌کنیم. نقطهٔ B را روی دایره به نقطهٔ A نزدیک می‌کنیم. خط AB به چه خطی نزدیک می‌شود؟



۲ــ در منحنی دلخواه زیر، نقطه‌ای مانند A به طور ثابت در نظر بگیرید. نقطهٔ دیگری روی منحنی مانند B در نظر بگیرید و خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه B را روی منحنی به نقطه A نزدیک می‌کنیم. خط AB به چه خطی نزدیک می‌شود؟



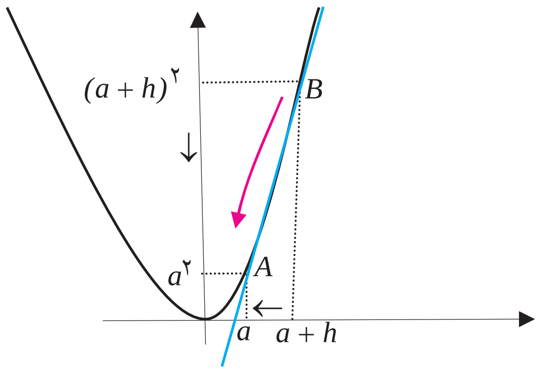
فعالیت بالا نشان می‌دهد که برای یافتن خط مماس بر یک منحنی در نقطه‌ای مانند A باید نقطه‌ای مانند B روی منحنی در نزدیکی A در نظر بگیریم و با رسم خط AB، نقطهٔ B را به نقطهٔ A نزدیک کنیم و ببینیم که آیا این خط‌ها به خط خاصی نزدیک می‌شوند. این عمل دقیقاً یک عمل حدگیری است.

از خط مماس بر یک منحنی در یک نقطه، یک نقطه از خط مشخص است (همان نقطه‌ای که خط در آن نقطه بر منحنی مماس

می‌شود.)، پس برای مشخص کردن این خط، کافی است شیب آن را مشخص کنیم و شیب با یک عمل حدگیری به دست می‌آید.

فعالیت ۲

روی نمودار تابع $f(x)=x^2$ نقطهٔ ثابت $A(a,a^2)$ را در نظر بگیرید. برای یک عدد حقیقی کوچک و ناصفر h (مثبت یا منفی) نقطهٔ $B(a+h,(a+h)^2)$ را روی نمودار تابع در نزدیکی A در نظر بگیرید.



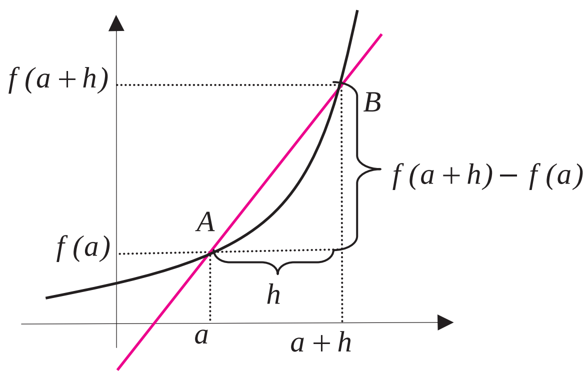
۱ــ شیب خط AB را حساب کنید که تابعی از h است.

۲ــ با نزدیک شدن h به صفر نقطهٔ B به چه نقطه‌ای نزدیک می‌شود؟

۳ــ با نزدیک شدن h به صفر شیب خط AB به چه مقداری نزدیک می‌شود؟

۴ــ شیب خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^2$ در نقطهٔ $A(a,a^2)$ چقدر است؟

محاسبات فعالیت بالا را در مورد هر تابع دیگری هم می‌توانیم انجام دهیم. تابع دلخواه $f(x)$ و نقطهٔ ثابت $A(a,f(a))$ را روی نمودار آن در نظر می‌گیریم. برای یک عدد حقیقی کوچک و ناصفر h (مثبت یا منفی) نقطهٔ $B(a+h,f(a+h))$ را روی نمودار تابع در نزدیکی A در نظر می‌گیریم.



شکل صفحهٔ قبل نشان می‌دهد که شیب خط AB برابر است با $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
اگر با نزدیک شدن h به صفر این کسر به عدد خاصی نزدیک شود، این عدد همان شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطهٔ $A(a,f(a))$ خواهد بود به عبارت دیگر :

$$\text{شیب خط مماس} = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مقدار بالا را (در صورت وجود) مشتق تابع f در a می‌نامند و با $f'(a)$ نشان می‌دهند.

تعریف :

اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطهٔ a تعریف شده است، در این صورت حد زیر را (در صورت وجود)، مشتق تابع f در a می‌نامند و با $f'(a)$ نشان می‌دهند.

$$f'(a) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

اگر حد بالا موجود نباشد، گوییم f در a مشتق پذیر نیست.

مثال

۱ : مشتق تابع $f(x)=x^۳$ را در نقطه دلخواه a حساب می‌کنیم و به کمک آن معادله خط مماس بر نمودار تابع را در نقطهٔ $A(۱,۱)$ به‌دست می‌آوریم.

$$f'(a) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{(a+h)^۳-a^۳}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰}\frac{۳a^۲h+۳ah^۲+h^۳}{h} = \lim_{h\to ۰}(۳a^۲+۳ah+h^۲) = ۳a^۲$$

از آنجا که $f'(۱)=۳$ ، شیب خط مماس بر نمودار این تابع در نقطهٔ $A(۱,۱)$ برابر ۳ می‌باشد و معادله خط مماس عبارت است از : $y-۱=۳(x-۱)$.

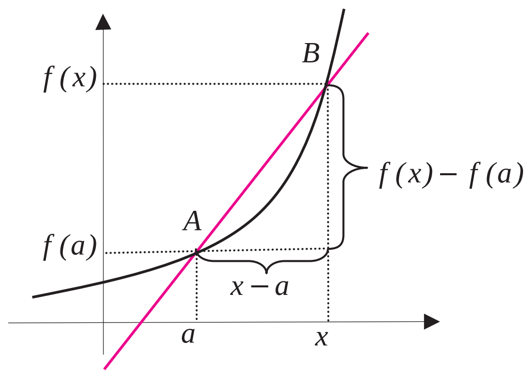
۲ : مشتق تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ را در نقطهٔ دلخواه $a\neq ۰$ حساب می‌کنیم و به کمک آن معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع را در نقطهٔ $A(۲,\frac{۱}{۲})$ به دست می‌آوریم.

$$f'(a) = \lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{a+h}-\frac{۱}{a}}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰}\frac{\frac{-h}{a(a+h)}}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{a(a+h)} = \frac{-۱}{a^۲}$$

از آنجا که $f'(۲)=\frac{-۱}{۴}$ ، شیب خط مماس بر نمودار این تابع در نقطهٔ $A(۲,\frac{۱}{۲})$ برابر $\frac{-۱}{۴}$ می‌باشد و معادلهٔ خط مماس عبارت است از : $y-\frac{۱}{۲}=\frac{-۱}{۴}(x-۲)$.

برای محاسبهٔ مشتق یک تابع گاهی مناسب‌تر است نقطهٔ B نزدیک نقطهٔ $A(a,f(a))$ را به صورت $B(x,f(x))$ در نظر بگیریم.



در این حالت شیب خط AB برابر است با $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ و برای محاسبه مشتق f در a باید حد این کسر را در $x=a$ بیابیم، یعنی

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

۳ : مشتق تابع $y(x)=\sqrt{x}$ را در نقطهٔ $a>۰$ حساب می‌کنیم.

$$y'(a)=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{x-a}{(x-a)(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{۱}{۲\sqrt{a}}$$

تعریف :

اگر f تابعی باشد که در تمام نقاط دامنه خود مشتق‌پذیر است، $f'(x)$ یک تابع را نشان می‌دهد که آن را تابع مشتق می‌نامند.

مثال

۴ : اگر $f(x)=x^۲$ آنگاه تابع مشتق آن به صورت $f'(x)=۲x$ است.

برخی توابع در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر نیستند، در این صورت دامنه تابع مشتق فقط از نقاطی تشکیل

می‌شود که تابع در آن نقاط مشتق پذیر باشد.

۵ : تابع $y(x)=\sqrt{x}$ در همهٔ نقاط بازه $(0,\infty)$ مشتق پذیر است و تابع مشتق آن $y'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ است.

تمرین در کلاس

مشتق‌پذیری و مشتق تابع $f(x)=|x|$ را در همه نقاط بررسی کنید و تابع مشتق آن را به دست آورید.

برای محاسبه مشتق یک تابع f در نقطه‌ای مانند a باید حد زیر را (در صورت وجود) حساب کنیم.

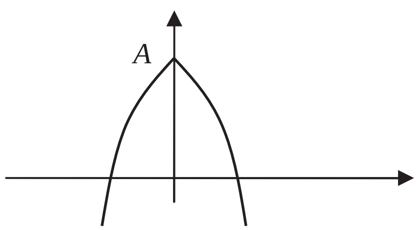
$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

در برخی موارد ممکن است حد بالا موجود نباشد ولی حدهای چپ و راست آن موجود باشند.

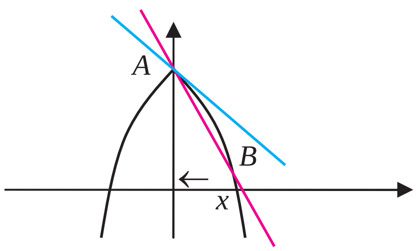
فعالیت ۳

تابع زیر را در نظر بگیرید.

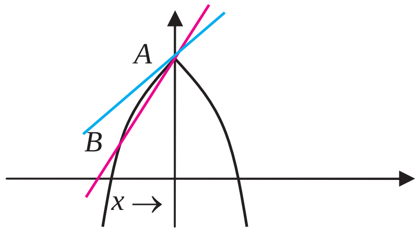
$$y(x)=\begin{cases}-(x-1)^2+4 & x\le 0\\ -(x+1)^2+4 & 0<x\end{cases}$$



۱ـ نقطهٔ $A(0,3)$، و نقطهٔ $B(x,f(x))$ را سمت راست A در نظر بگیرید و حد شیب خط AB را وقتی B به A نزدیک می‌شود حساب کنید.



۲ــ نقطهٔ B را سمت چپ A در نظر بگیرید و حد شیب خط AB را وقتی B به A نزدیک می‌شود حساب کنید.



۳ــ آیا این تابع در $x=0$ مشتق‌پذیر است؟ خط‌هایی که از نقطهٔ A می‌گذرند و شیب آن‌ها اعدادی است که در بندهای قبل به دست آورده‌اید چه وضعیتی نسبت به نمودار تابع دارند؟

تعریف :

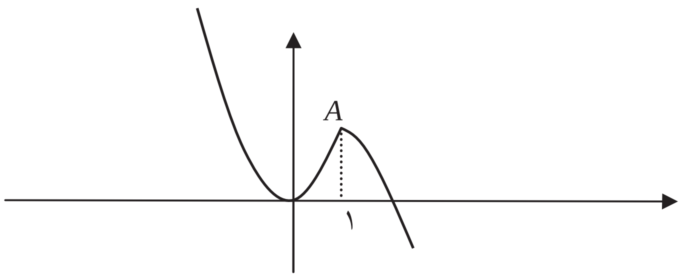
اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، حد راست $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در $x=a$ را (در صورت وجود) مشتق راست f در a می‌نامند و با $f'_+(a)$ نشان می‌دهند.

به‌طور مشابه، اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد، حد چپ $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ در $x=a$ را (در صورت وجود) مشتق چپ f در a می‌نامند و با $f'_-(a)$ نشان می‌دهند.

مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطه درونی مانند a معادل با آن است که مشتق‌های چپ و راست تابع در آن نقطه موجود و با هم مساویند. برای یک تابع مانند $f:[a,b]\to IR$ ، طبق قرارداد مشتق‌پذیری f در a به معنای وجود مشتق راست f در a و مشتق‌پذیری f در b به معنای وجود مشتق چپ f در b است.

مثال

نمودار تابع $k(x)=\begin{cases}2x^2 & x\le 1\\ -x^2+3 & 1<x\end{cases}$ در زیر رسم شده است. پیوستگی و مشتق‌پذیری آن را در $x=1$ بررسی می‌کنیم.



از روی شکل می‌توان حدس زد که تابع در $x=۱$ باید پیوسته باشد. برای بررسی درستی این حدس، حد تابع را در $x=۱$ بررسی می‌کنیم. از آنجا که وضعیت تابع در سمت چپ و راست ۱ متفاوت است حدهای چپ و راست تابع را در $x=۱$ جداگانه حساب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱^+} k(x) = \lim_{x\to ۱^+} -x^۲+۳ = -۱+۳ = ۲$$

$$\lim_{x\to ۱^-} k(x) = \lim_{x\to ۱^-} ۲x^۲ = ۲$$

دیده می‌شود که حد تابع $k(x)$ در $x=۱$ موجود است و برابر $k(۱)$ است، پس تابع $k(x)$ در $x=۱$ پیوسته است.

برای بررسی مشتق پذیری از روی شکل می‌توان حدس زد نمودار تابع در سمت چپ و راست نقطهٔ $A(۱,۲)$ متفاوت است و مماس‌های متفاوت دارد. بنابراین مشتق‌های چپ و راست تابع $k(x)$ را جداگانه محاسبه می‌کنیم.

$$k'_+(۱) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{k(x)-k(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{-x^۲+۳-۲}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{-x^۲+۱}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^+} -(x+۱) = -۲$$

$$k'_-(۱) = \lim_{x\to ۱^-} \frac{k(x)-k(۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۲x^۲-۲}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^-} \frac{۲(x-۱)(x+۱)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱^-} ۲(x+۱) = ۴$$

دیده می‌شود که مشتق‌های چپ و راست تابع $k(x)$ در $x=۱$ موجودند ولی مساوی نیستند. بنابراین این تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست و خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه موجود نیست.

تمرین در کلاس

۱ــ مشتق تابع $g(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ را در نقطه -۱ حساب کنید و به کمک آن، معادله خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطه $A(-۱,۰)$ بنویسید. تابع مشتق g را بیابید و دامنه آن را تعیین کنید.

۲ــ تابعی بسازید که در $x=۲$ پیوسته باشد و در این نقطه مشتق‌های چپ و راست متفاوت داشته باشد.

۳ــ فرض کنید $f(x)$ تابعی باشد و به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x)$ را به صورت $g(x)=f(x-b)$ تعریف می‌کنیم.

الف) از طریق نموداری نشان دهید که اگر خط مماس بر نمودار تابع g در نقطه a وجود داشته باشد، آنگاه خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $a-b$ موجود است و این دو خط با هم موازیند.

ب) با محاسبه جبری نشان دهید که اگر g در نقطهٔ a مشتق پذیر باشد آنگاه f در نقطهٔ $a-b$ مشتق پذیر است و $g'(a)=f'(a-b)$.

ج) با محاسبه جبری نشان دهید که اگر $f(x)$ در همه نقاط دامنه خود مشتق پذیر باشد، آنگاه $g(x)$ نیز در همه نقاط دامنه خود مشتق‌پذیر است و برای هر مقدار x (در دامنهٔ g) داریم : $g'(x)=f'(x-b)$.

مثال

۱ : مشتق تابع $y(x)=\frac{1}{x+b}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x)=\frac{1}{x}$ داریم $y(x)=f(x+b)$ بنابراین

$$y'(x)=f'(x+b)=-\frac{1}{(x+b)^2}$$

۲ : مشتق تابع $y(x)=\sqrt{x-b}$ را حساب می کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x)=\sqrt{x}$ داریم $y(x)=f(x-b)$. محاسبه نشان می‌دهد که $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ بنابراین

$$y'(x)=f'(x-b)=\frac{1}{2\sqrt{x-b}}$$

شاید این سؤال برای شما مطرح شده باشد که مشتق‌پذیری و پیوستگی چه فرقی با هم دارند. آیا هر تابع پیوسته‌ای مشتق‌پذیر است؟ آیا هر تابع مشتق‌پذیری پیوسته است؟

پیوستگی به معنای مشتق‌پذیری نیست. در مثال‌ها دیدید که یک تابع ممکن است در نقطه‌ای پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد. اما از مشتق‌پذیری یک تابع در یک نقطه می‌توان پیوستگی آن تابع در آن نقطه را نتیجه گرفت. در فصل قبل دیدیم که پیوستگی یک تابع مانند f در نقطه‌ای مانند a به معنای آن است که $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$. این تساوی معادل با آن است که $\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=0$ و ما می‌توانیم درستی این تساوی را از شرط مشتق پذیری f در a به دست آوریم.

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times(x-a)$$

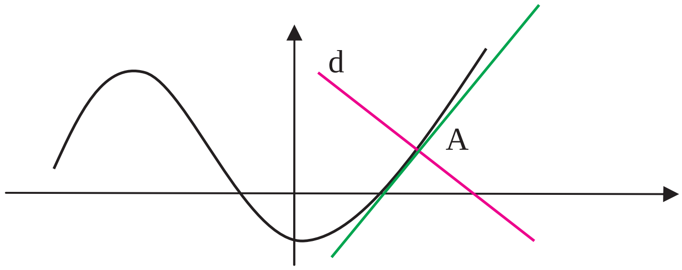
$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\lim_{x\to a}(x-a)=f'(a)\times 0=0$$

با این استدلال می‌توانیم قضیهٔ صفحهٔ بعد را به دست آوریم.

قضیه :

اگر تابعی در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد در آن نقطه پیوسته نیز خواهد بود.

فرض کنید خطی مانند d نمودار تابعی مانند f را در نقطه‌ای مانند $A(a\ ,\ f(a))$ قطع کند.



گوییم این خط بر نمودار تابع در نقطهٔ A عمود است، هرگاه d بر خط مماس بر نمودار تابع در A عمود باشد. اگر شیب خط d برابر m باشد، شرط عمود بودن معادل با آن است که $m=-\dfrac{1}{f'(a)}$.

مثال

معادلهٔ خط قائم بر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{1}{x}$ که در نقطهٔ $A(2,\dfrac{1}{2})$ این منحنی را قطع می‌کند به‌دست می‌آوریم.

شیب این خط $-\dfrac{1}{f'(2)}$ است. از آنجا که $f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$ داریم $f'(2)=-\dfrac{1}{4}$ ، پس شیب خط قائم برابر است با ۴. نقطه A روی این خط است، بنابراین معادله این خط عبارت است از :

$$y-\frac{1}{2}=4(x-2)$$

مسائل

۱ــ مشتق توابع زیر را در یک نقطهٔ دلخواه a از دامنهٔ آن‌ها تعیین کنید.

الف) $f(x)=c$ ب) $g(x)=3x+5$ ج) $x(t)=t^4$

د) $y(u)=\dfrac{u}{1+u}$ هـ) $k(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$

۲ــ معادلهٔ خط مماس و خط عمود بر نمودار توابع زیر را در نقطهٔ داده شده به‌دست آورید.

الف) $y(x)=\dfrac{1}{1+x^2}\ ,\ x=1$ ب) $y(x)=\sqrt{4-x^2}\ ,\ x=-1$

۳ــ نمودار توابع زیر را رسم کنید و حدس بزنید این توابع در چه نقاطی مشتق‌پذیر نیستند و در این نقاط مشتق‌های چپ و راست را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $y(x)=2|x+1|$

ب) $y(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\leq 0 \\ -x^2+1 & 0<x \end{cases}$

ج) $y(x)=|1-x^2|$

د) $y(x)=-|x|+|x-1|$

۴ــ نمودار تابع $y(x)=\sqrt{x}$ را رسم کنید. اگر خط y=۲x را به موازات خود در صفحه بالا و پایین ببریم آیا جایی پیدا می‌شود که خط جا به جا شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می‌افتد؟

۵ــ فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق پذیر در نقطه‌ای مانند a باشد. به ازای عدد دلخواهی مانند b تابع $g(x)$ را به صورت $g(x)=f(x)+b$ تعریف می‌کنیم. از طریق نموداری و وجود خط مماس بر نمودار f در نقطه به طول a نشان دهید g نیز در a مشتق پذیر است و $g'(a)=f'(a)$. از طریق حدگیری و محاسبه نیز درستی این تساوی را به دست آورید.

۶ــ از مبدأ به نقاط مختلف نمودار تابع $f(x)=x^2+1$ خط رسم می‌کنیم. آیا نقطه یا نقاطی یافت می‌شوند که خط رسم شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می‌افتد؟ درستی محاسبات خود را با رسم نمودار این تابع بررسی کنید.

۷ــ فرض کنید $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر باشد و a عددی حقیقی باشد، با محاسبه و حدگیری نشان دهید تابع $g(x)=f(ax)$ نیز مشتق‌پذیر است و $g'(x)=af'(ax)$.

روش‌های محاسبهٔ مشتق توابع

در مثال‌ها و تمرین‌ها صفحات قبل مشتق برخی از توابع را حساب کرده‌ایم. برای مثال مشتق برخی توابع خاص را در زیر محاسبه می‌کنیم.

۱ــ اگر $f(x)=c$ تابع ثابت باشد، مشتق آن در هر نقطه صفر است، یعنی برای هر مقداری از x، $f'(x)=0$.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{c-c}{h}=\lim_{h\to 0} 0=0$$

۲ــ اگر $f(x)=x^n$ که n عددی طبیعی است، مشتق آن برای هر مقدار x به صورت $f'(x)=nx^{n-1}$ است.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1})}{x-a}$$

$$= \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}) = a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots + a^{n-1} = na^{n-1}$$

۳ــ اگر $f(x) = \sqrt{x}$ در مثال‌های قبل دیدیم که برای هر مقدار مثبت x داریم $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

فعالیت ۴

۱ــ مشتق دو تابع $f(x) = x$ و $g(x) = x^2$ را در یک نقطه دلخواه مانند a می‌شناسید. مشتق تابع $f + g$ را در همین نقطه a حساب کنید.

۲ــ چه ارتباطی بین $(f+g)'(a)$ و $f'(a)$ و $g'(a)$ مشاهده می‌کنید.

۳ــ آیا این ارتباط برای هر دو تابع دیگری هم برقرار است؟

فرض کنید دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق پذیر باشند. می‌خواهیم بررسی کنیم که آیا تابع $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است.

$$(f+g)'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{(f+g)(a+h) - (f+g)(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) + g(a+h) - f(a) - g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) + g(a+h) - g(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{g(a+h) - y(a)}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = f'(a) + g'(a)$$

محاسبهٔ بالا نشان می‌دهد که $f + g$ نیز در a مشتق پذیر است و مشتق آن مجموع مشتق‌های f و g در a است. بنابراین قضیه زیر برقرار است.

قضیه :

اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیر باشند، تابع $f+g$ نیز در a مشتق‌پذیر است و

$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

مثال

۱ : مشتق تابع $y=x^{۳}+\sqrt{x}$ را در یک عدد مثبت x حساب می کنیم.

$$(x^{۳}+\sqrt{x})'=(x^{۳})'+(\sqrt{x})'=۳x^{۲}+\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

۲ : مشتق تابع $y=\frac{x^{۵}+۱}{x}$ را در یک عدد ناصفر x حساب می‌کنیم.

$$(\frac{x^{۵}+۱}{x})'=(x^{۴}+\frac{۱}{x})'=(x^{۴})'+(\frac{۱}{x})'=۴x^{۳}-\frac{۱}{x^{۲}}$$

تمرین در کلاس

۱ــ مشتق تابع $y=\frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$ را در یک عدد مثبت a حساب کنید.

۲ــ اگر f تابع مشتق پذیری در نقطهٔ a باشد و c عدد دلخواهی باشد، با محاسبه نشان دهید تابع cf نیز در نقطهٔ a مشتق‌پذیر است و $(cf)'(a)=cf'(a)$.

۳ــ اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیر باشند، نشان دهید تابع f-g نیز در a مشتق‌پذیر است و $(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$.

۴ــ برای سه تابع f و g و k که همگی در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیرند، نشان دهید $f+g+k$ نیز در a مشتق‌پذیر است و $(f+g+k)'(a)=f'(a)+g'(a)+k'(a)$. آیا این تساوی برای جمع تعداد بیشتری از توابع نیز درست است؟

دیدیم که اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق پذیر باشند، تابع $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است. یک سؤال مهم آن است که آیا fg نیز در a مشتق‌پذیر است و مشتق آن چه خواهد بود؟ شاید اولین حدس این باشد که fg در a مشتق‌پذیر است و $(fg)'(a)=f'(a)g'(a)$. اما نادرستی این تساوی را در یک مثال می‌توانید مشاهده کنید. مثلاً برای دو تابع $f(x)=۱$ ، $g(x)=x$ نادرستی آن تساوی را بررسی کنید. برای یافتن مشتق تابع fg در a بهتر است مستقیماً آن را محاسبه کنیم.

$$(fg)'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)g(x)-f(a)g(x)+f(a)g(x)-f(a)g(a)}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(f(x)-f(a))g(x)+f(a)(g(x)-g(a))}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}g(x)+f(a)\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\lim_{x\to a}g(x)+f(a)\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}$$

$$= f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

این محاسبه نشان می‌دهد که قضیهٔ زیر برقرار است.

قضیه :

اگر دو تابع f و g در نقطه‌ای مانند a مشتق‌پذیر باشند، تابع fg نیز در a مشتق‌پذیر است و

$$(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$$

مثال

۱ : مشتق تابع $x^۳\sqrt{x}$ را در یک عدد مثبت x حساب می کنیم.

$$(x^۳\sqrt{x})'=(x^۳)'\sqrt{x}+x^۳(\sqrt{x})'=۳x^۲\sqrt{x}+x^۳\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$$

۲ : مشتق تابع $\frac{۱}{x^۲}$ را در یک عدد ناصفر x حساب می‌کنیم.

$$(\frac{۱}{x^۲})'=(\frac{۱}{x}.\frac{۱}{x})'=\frac{-۱}{x^۲}.\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x}.\frac{-۱}{x^۲}=\frac{-۲}{x^۳}$$

تمرین در کلاس

۱ــ اگر $f(x)$ تابع مشتق‌پذیری باشد، با استفاده از فرمول مشتق حاصلضرب دو تابع نشان دهید $((f(x))^۲)'=۲f(x)f'(x)$. در حالت کلی‌تر(با استقرا) برای یک عدد طبیعی n نشان دهید :

$$((f(x))^n)'=nf(x)^{n-۱}f'(x)$$

۲ــ اگر $f(x)$ و $g(x)$ توابع مشتق‌پذیری باشند و بتوانیم تابع $k(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ را تشکیل دهیم داریم $k(x)g(x)=f(x)$. با فرض آن که می‌دانیم $k(x)$ تابعی مشتق پذیر است، با استفاده از فرمول مشتق حاصلضرب دو تابع نشان دهید :

$$k'(x)=\frac{f'(x)g(x)-g'(x)f(x)}{g^۲(x)}$$

در مسائل آخر این بخش ثابت خواهید کرد که $k(x)$ حتماً مشتق‌پذیر است.

مثال

۱ : مشتق تابع $f(x)=\frac{x^{۲}}{x-۱}$ را در یک مقدار دلخواه $x\neq ۱$ حساب می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{(x^{۲})'(x-۱)-(x-۱)'x^{۲}}{(x-۱)^{۲}}=\frac{۲x(x-۱)-x^{۲}}{(x-۱)^{۲}}=\frac{x^{۲}-۲x}{(x-۱)^{۲}}$$

۲ : تابع مشتق تابع $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x+۱}}$ را حساب می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{(x)'\sqrt{x+۱}-(\sqrt{x+۱})'x}{(\sqrt{x+۱})^{۲}}=\frac{\sqrt{x+۱}-\frac{۱}{۲\sqrt{x+۱}}x}{x+۱}=\frac{۲(x+۱)-x}{۲(x+۱)\sqrt{x+۱}}$$

$$=\frac{x+۲}{۲(x+۱)\sqrt{x+۱}}$$

مسائل

۱ــ مشتق توابع زیر را در یک نقطه دلخواه حساب کنید.

الف) $y=x^{۴}-\frac{۱}{x^{۴}}-\sqrt{۳}$ ب) $y=(x^{۳}-x^{۲}-۱)(x-\sqrt{x}+۵)$

ج) $y=(۲x+۱)(۴-۳x)(x^{۲}+x+۵)$ د) $y=\frac{۲}{x^{۳}-۱}$ هـ) $y=\frac{x}{\sqrt{x}+۲}$

۲ــ نقاطی از نمودار تابع $y(x)=x^{۳}-۲x-۶$ را معین کنید که مماس بر نمودار تابع در این نقاط موازی نیمساز ربع اول و سوم باشد. در چند نقطه این اتفاق می‌افتد؟

۳ــ نمودار تابع $y(x)=-۴x^{۲}+۱۶x+۱$ را رسم کنید. به کمک مشتق تابع معین کنید در چه نقاطی از این نمودار، مماس بر نمودار تابع موازی محور x ها است. در چند نقطه این اتفاق می‌افتد؟ این نقطه چه ویژگی خاصی دارد؟

۴ــ نمودار تابع $y=x^{۲}$ را رسم کنید. اگر خط دلخواهی را که موازی محور y ها نیست به موازات خود در صفحه بالا و پایین ببریم آیا جایی پیدا می‌شود که خط جا به جا شده بر نمودار این تابع مماس شود؟ در چند نقطه این اتفاق می‌افتد؟ جواب را از طریق هندسی حدس بزنید و حدس خود را با محاسبات جبری ثابت کنید. همین مسئله را برای تابع $y(x)=\sqrt{|x|}$ تکرار کنید.

۵ــ نقطه‌ای در صفحه بیابید که از آن نقطه دو خط مماس بر سهمی $y=x^{۲}$ بتوان رسم کرد و این خط‌ها بر هم عمود باشند. این مسئله چند جواب دارد؟ مجموعه جواب‌های این مسئله را ترسیم کنید.

۶ــ اگر f تابعی باشد که در یک همسایگی نقطهٔ a تعریف شده باشد و ناصفر باشد و f در a مشتق‌پذیر باشد، با استفاده از تعریف نشان دهید که $\frac{1}{f}$ نیز در a مشتق‌پذیر است و $(\frac{1}{f})'(a)=-\frac{f'(a)}{f^2(a)}$. نتیجه بگیرید که برای دو تابع f و g که در a مشتق‌پذیرند و $g(a)\neq 0$، تابع $\frac{f}{g}$ در a مشتق‌پذیر است.

۷ــ برای تابع $f(x)=\sqrt[k]{x}=x^{\frac{1}{k}}$ روی دامنه $(0,\infty)$ داریم $(f(x))^k=x$. با فرض آن که می‌دانیم $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر است، با محاسبهٔ مشتق طرفین ثابت کنید $f'(x)=\frac{1}{k}x^{\frac{1}{k}-1}$.

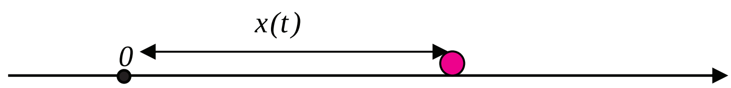
۸ــ اگر r عدد گویای مثبتی باشد به کمک مسئلهٔ قبل نشان دهید تابع $y(x)=x^r$ که روی اعداد مثبت تعریف شده است، مشتق پذیر است و $y'(x)=rx^{r-1}$. سپس درستی این رابطه را برای اعداد گویای منفی هم به دست آورید.

۹ــ مشتق تابع $y=6\sqrt[3]{x}-3\sqrt[4]{x}$ را حساب کنید.

آهنگ تغییرات

فعالیت ۵

متحرکی روی محور xها طبق ضابطهٔ $x(t)=t^2-t$ حرکت می‌کند. یعنی متحرک در لحظه t در مکان $x(t)$ قرار دارد. $x(t)$ را تابع حرکت متحرک می نامند.



۱ــ لحظه t_0 را به طور ثابت در نظر بگیرید. سرعت متوسط متحرک بین دو زمان t_0 و t_0+h (h عددی ناصفر و کوچک) را بنویسید.

۲ــ با نزدیک کردن h به صفر مقدار بالا به چه عددی نزدیک می‌شود؟

۳ــ عدد بالا با مشتق تابع $x(t)$ چه رابطه‌ای دارد؟

۴ــ سرعت این متحرک در هر لحظه با مشتق تابع $x(t)$ چه رابطه‌ای دارد؟

اگر متحرکی روی یک محور طبق تابع حرکت $x(t)$ حرکت کند، سرعت متوسط آن بین دو لحظه t_0 و t_0+h برابر است با

$$\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$$

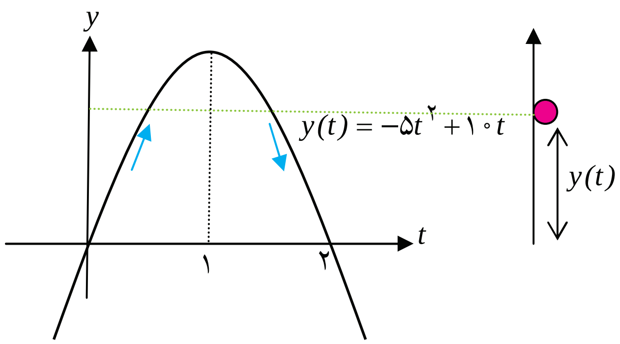
با نزدیک کردن h به صفر، اگر کسر بالا به عددی نزدیک شود، این عدد همان سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظهٔ $t_\circ$ است. از طرف دیگر، این عدد همان حد کسر بالا در $h=\circ$ است که قبلاً آن را مشتق $x(t)$ در $t_\circ$ نامیده‌ایم. بنابراین :

قضیه :

اگر $x(t)$ تابع حرکت متحرکی روی محور باشد، سرعت آن در هر لحظه t برابر است با $x'(t)$.

مثال

مثال : اگر سیبی را در راستای عمودی به بالا پرتاب کنیم، ابتدا رو به بالا حرکت می‌کند و سپس به زمین باز می‌گردد. تابع حرکت این سیب می‌تواند به شکل $y(t)=-\text{۵}t^\text{۲}+\text{۱۰}t$ باشد. t را بر حسب ثانیه و $y(t)$ را بر حسب متر در نظر بگیرید.



نمودار $y(t)$ نشان می‌دهد که سیب در لحظه‌های صفر و ۲ در زمین قرار دارد و بین این دو لحظه از زمین به طرف بالا رفته و پس از مدتی به زمین برگشته است. دامنه اعتبار تابع $y(t)$ فاصله $[\circ,\text{۲}]$ است، زیرا خارج از این فاصله حرکت سیب با این تابع انجام نمی‌شود.

مشتق $y(t)$ در یک لحظه دلخواه به‌صورت $y'(t)=-\text{۱۰}t+\text{۱۰}$ است. از آنجا که $y'(\circ)=\text{۱۰}$ ، سرعت سیب در شروع حرکت ۱۰ متر بر ثانیه است. با افزایش t مقدار $y'(t)$ کم می‌شود تا در لحظه $t=\text{۱}$ صفر می‌شود. یعنی سیب در این لحظه یک ایست آنی دارد. این همان لحظه‌ای است که سیب به بالاترین ارتفاع خود رسیده است.

برای $t>\text{۱}$، $y'(t)$ منفی می‌شود که به معنای آن است که سیب رو به پایین در حال حرکت است. از آنجا که $y'(\text{۲})=-\text{۱۰}$ ، سرعت سیب در موقع برخورد با زمین همان ۱۰ متر بر ثانیه است ولی جهت حرکت رو به پایین است.

تمرین در کلاس

۱ــ تابع حرکت متحرکی روی محورxها به صورت $x(t)=\text{۱}$ است. شیوهٔ حرکت متحرک را توصیف کنید. سرعت حرکت متحرک در هر لحظه چقدر است؟ مشتق $x(t)$ در هر لحظه چقدر است؟

۲ــ تابع حرکت متحرکی روی محور xها به صورت $x(t)=۲t+۱$ است. شیوهٔ حرکت متحرک را توصیف کنید. سرعت حرکت متحرک در هر لحظه چقدر است؟ مشتق $x(t)$ در هر لحظه چقدر است؟

۳ــ تابع حرکت متحرکی روی محور xها در فاصله زمانی $[۰,۴]$ به صورت $x(t)=-t^۲+۴t+۱$ است. با رسم نمودار این تابع، شیوهٔ حرکت متحرک را توصیف کنید. با استفاده از مشتق‌گیری تعیین کنید سرعت متحرک در هر لحظه چقدر است. متحرک حداکثر چقدر از مبدأ فاصله می‌گیرد؟ سرعت متحرک در نقطه‌ای که حداکثر فاصله از مبدأ را دارد چقدر است؟

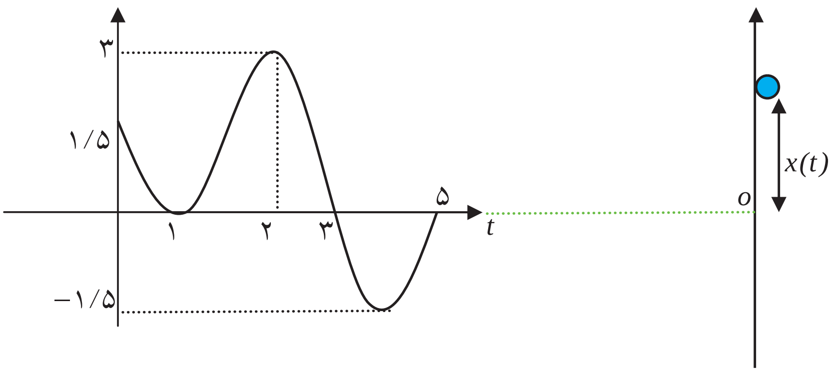
۴ــ تابع حرکت متحرکی $x(t)$ است. واحد زمان را ثانیه و واحد مکان را متر در نظر بگیرید. نمودار $x(t)$ در شکل زیر داده شده است. چگونگی حرکت این متحرک را از لحاظ مدت زمان حرکت و مکان‌هایی که رفته است و سرعت آن توصیف کنید.

الف) از چه نقطه‌ای حرکت شروع شده است و در چه نقطه‌ای حرکت پایان یافته است؟

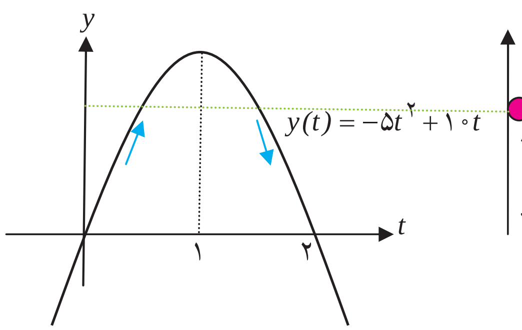
ب) در چه نقاطی سرعت صفر شده است و جهت حرکت تغییر کرده است؟

ج) چند بار در مبدأ قرار گرفته است و در چه زمان‌هایی قرار گرفته است؟

د) حداکثر فاصله آن از مبدأ در چه زمانی رخ داده است و این فاصله چقدر بوده است؟



در یکی از مثال‌ها دیدیم که اگر سیبی را در راستای عمودی به بالا پرتاب کنیم، ابتدا رو به بالا حرکت می‌کند و سپس به زمین باز می‌گردد. تابع حرکت این سیب را به صورت $y(t)=-۵t^۲+۱۰t$ در نظر گرفته بودیم که t برحسب ثانیه و $y(t)$ برحسب متر بوده است.



فعالیت ۶

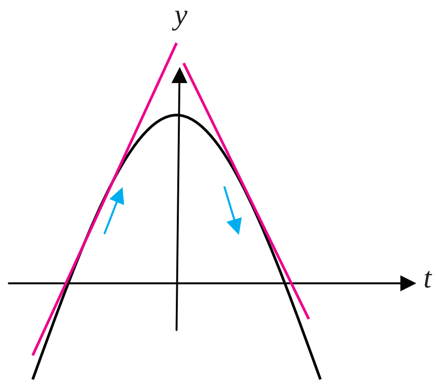
۱ــ در دو لحظه $t_1=\frac{1}{2}$ و $t_2=\frac{3}{2}$ سیب در چه ارتفاعی از سطح زمین قرار دارد؟

۲ــ سرعت سیب را در این دو لحظه حساب کنید. چرا علامت سرعت در این دو لحظه متفاوت است؟

۳ــ علامت سرعت با افزایش یا کاهش ارتفاع سیب چه رابطه‌ای دارد؟

۴ــ اندازهٔ سرعت در لحظه $t=1$ از بقیه لحظات کمتر است و صفر است و اندازهٔ سرعت در لحظات صفر و ۲ از بقیه لحظات بیشتر است. اندازهٔ سرعت با چگونگی افزایش یا کاهش ارتفاع سیب چه رابطه‌ای دارد؟

در زیر نمودار تابع $y(x)=4-x^2$ و چند خط مماس بر آن رسم شده است.



مشتق این تابع به صورت $y'(x)=-2x$ است. در x های منفی مشتق تابع، مثبت است که یعنی شیب خط مماس مثبت است. این نکته نشان دهنده آن است که در این نقاط، تابع در حال افزایش است و صعودی است. البته هر چه به نقطه به طول صفر نزدیک می‌شویم اندازهٔ مشتق کم می‌شود که به معنای آن است که میزان افزایش یا صعود تابع کم می‌شود. در xهای مثبت مشتق تابع، منفی است که یعنی شیب خط مماس منفی است. این نکته نشان دهنده آن است که در این نقاط، تابع در حال کاهش است و نزولی است. هرچه در اعداد مثبت مقدارهای x بزرگتری انتخاب کنیم مشتق تابع هم‌چنان منفی است ولی از لحاظ اندازه بزرگتر می‌شود. این به معنای آن است که میزان کاهش و نزول تابع مرتباً در حال افزایش است.

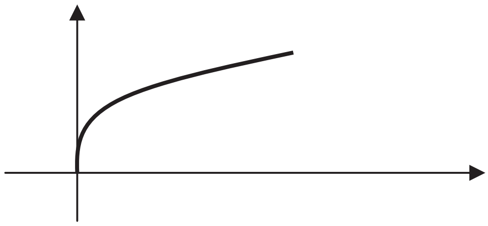
نکته :

نامنفی‌بودن مشتق یک تابع در یک بازه به معنای آن است که تابع در آن بازه صعودی است و اندازهٔ مشتق در نقاط آن بازه نشان می‌دهد شدت صعود تابع در آن نقاط چقدر است.

نامثبت‌بودن مشتق یک تابع در یک بازه به معنای آن است که تابع در آن بازه نزولی است و اندازهٔ مشتق در نقاط آن بازه نشان می‌دهد شدت نزول تابع در آن نقاط چقدر است.

مثال

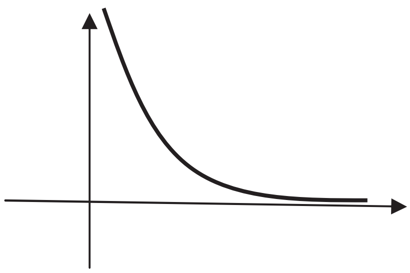
۱ : برای تابع $y=\sqrt{x}$ که دامنهٔ آن بازه $[0,\infty)$ است



داریم $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. مقدار مشتق مثبت است، پس تابع همواره در حال افزایش است ولی با افزایش x مقدار مشتق کم می‌شود و این به معنای آن است که شدت افزایش تابع در حال کم شدن است.

نمودار بالا نیز این مطلب را به خوبی نشان می‌دهد که اگرچه تابع در حال افزایش است اما شدت افزایش در حال کاهش است.

۲ : تابع $y=\frac{1}{x}$ را روی بازه $(0,\infty)$ در نظر می‌گیریم. مشتق این

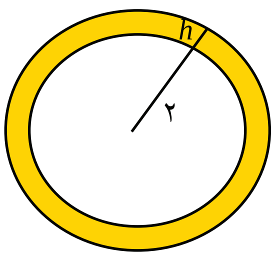


تابع به صورت $y'=-\frac{1}{x^2}$ است و مقدار آن همواره منفی است. پس این تابع همواره نزولی است. برای x های نزدیک صفر مقدار مشتق از لحاظ قدر مطلق بسیار بزرگ است، یعنی برای x های نزدیک صفر تابع به شدت در حال نزول است. ولی برای x های بزرگ مقدار مشتق منفی و بسیار کوچک می شود، یعنی تابع در حال نزول است ولی بسیار آهسته نزول می کند. نمودار تابع این حقیقت را به‌خوبی نشان می‌دهد.

فعالیت ۷

مساحت یک دایره تابعی از شعاع آن است. دایره به شعاع r دارای مساحت $S(r)=\pi r^2$ است.

۱ــ اگر دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر داشته باشیم و شعاع آن را h سانتی‌متر افزایش دهیم، مساحت آن چقدر افزایش می‌یابد (بر حسب h به دست می‌آید)؟



۲ــ نسبت افزایش مساحت دایره به افزایش شعاع چقدر است؟ این مقدار را آهنگ تغییرات متوسط مساحت دایره بین دو شعاع ۲ و $2+h$ می‌نامند.

۳ــ آهنگ تغییرات متوسط مساحت دایره بین دو شعاع ۲ و $۲+h$ وقتی h را به‌صفر نزدیک می‌کنیم به چه عددی نزدیک می‌شود؟ این عدد را آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به شعاع، در شعاع ۲ سانتی‌متر می‌نامند.

۴ــ آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به شعاع، با مشتق $S(r)$ چه رابطه‌ای دارد؟

اگر کمیتی مانند A تابعی از کمیت دیگری مانند r باشد و این تابع را به صورت $A(r)$ نشان دهیم، یک سؤال مهم این است که تغییرات در مقدار r چه مقدار تغییرات در A ایجاد می‌کند؟ نسبت افزایش مقدار $A(r)$ به افزایش مقدار r چقدر است؟

اگر مقدار کمیت r برابر $r_۰$ باشد و آن را h واحد افزایش دهیم، مقدار A از $A(r_۰)$ به $A(r_۰+h)$ تغییر می‌کند و نسبت افزایش مقدار A به افزایش مقدار r برابر است با :

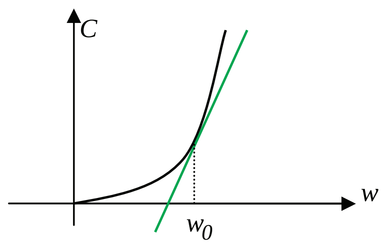
$$\frac{A(r_۰+h)-A(r_۰)}{h}$$

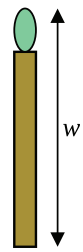
این کسر را آهنگ تغییرات متوسط کمیت A به کمیت r در دو مقدار $r_۰$ و $r_۰+h$ می‌نامند. حد این کسر در $h=۰$ را آهنگ تغییرات کمیت A به کمیت r در $r=r_۰$ می‌نامند که همان مشتق تابع $A(r)$ در $r_۰$ است.

مثال

۱ : مساحت هر دایره‌ای تابعی از محیط آن است. اگر مساحت را با S و محیط را با P نشان دهیم داریم $S(P)=\frac{۱}{۴\pi}P^۲$. آهنگ تغییرات مساحت دایره نسبت به محیط آن برای دایره‌ای به‌محیط ۳π برابر است با $S'(۳\pi)$. از آنجا که $S'(P)=\frac{۱}{۲\pi}P$، خواهیم داشت $S'(۳\pi)=\frac{۳}{۲}$.

۲ : هزینهٔ ساخت هر برجی تابعی از ارتفاع آن برج است. هزینه را با C و ارتفاع را با w نشان می‌دهیم و فرض کنید تابع $C(w)$ نموداری به شکل زیر داشته باشد.





آهنگ تغییرات C نسبت به w در ارتفاع $w_۰$ همان شیب خط مماس بر نمودار تابع $C(w)$ درنقطه به طول $w_۰$ است. اندازه این شیب نشان می‌دهد که برای اضافه کردن یک واحد به ارتفاع برجی که ارتفاع آن $w_۰$ است، تقریباً چقدر باید هزینه شود.

همان‌طورکه دیده می‌شود برای مقدارهای کم $w_۰$، شیب خط مماس کم است، یعنی هزینه بالابردن برج از ارتفاع‌های پایین زیاد نیست. ولی با زیاد شدن $w_۰$ شیب خط مماس زیاد می‌شود، یعنی هر چه ارتفاع برج بالاتر می‌رود هزینه اضافه کردن ارتفاع برج هم بالاتر می‌رود.

تمرین در کلاس

۱ــ آهنگ تغییرات مساحت یک مربع را نسبت به محیط آن برای مربعی که محیط آن ۸ واحد است به دست آورید.

۲ــ آهنگ تغییرات محیط یک مربع را نسبت به مساحت آن برای مربعی که مساحت آن ۴ واحد است به دست آورید.

۳ــ آهنگ تغییرات مکان متحرکی که روی یک محور حرکت می‌کند نسبت به زمان چه معنایی دارد؟

مسائل

۱ــ محیط هر دایره‌ای تابعی از مساحت آن است. آهنگ تغییرات محیط دایره را نسبت به مساحت آن برای دایره‌ای به مساحت π حساب کنید.

۲ــ بادکنکی کروی توسط تلمبه‌ای در لحظه $t=۰$ شروع به باد شدن می‌کند. هر ثانیه ۴ سانتی‌متر مکعب هوا وارد بادکنک می‌شود. حداکثر حجمی که این بادکنک تحمل می‌کند ۴۵۰۰π سانتی‌متر مکعب است.

الف) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چقدر است؟

ب) آهنگ تغییرات مساحت سطح بادکنک نسبت به زمان در هر لحظه چقدر است؟

ج) آهنگ تغییرات شعاع بادکنک نسبت به سطح بادکنک (در هر مقداری از سطح بادکنک) چقدر است؟

د) در آخرین لحظه که بادکنک می ترکد، آهنگ تغییرات سطح بادکنک نسبت به شعاع بادکنک چقدر است؟

۳ــ ماشینی که با سرعتی ثابت در حال حرکت است در لحظه $t=۰$ ترمز می‌کند تا این که متوقف می‌شود. فاصله مکان ماشین از نقطه‌ای که ترمز گرفته است را با s نشان می دهیم. فرض کنید s (برحسب متر) به عنوان تابعی از t (برحسب ثانیه) به صورت $s(t)=۲۵t-\frac{۵}{۲}t^{۲}$ باشد.

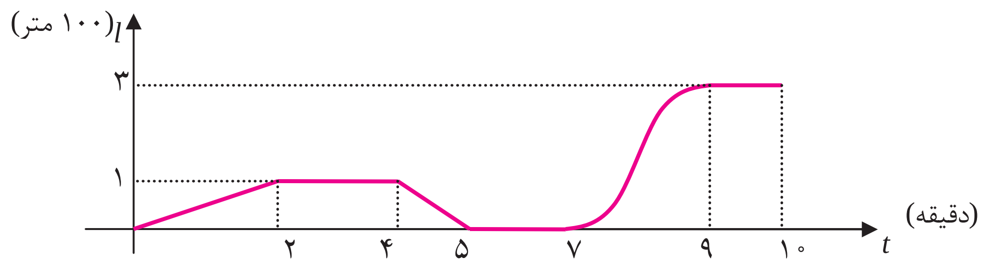
الف) نمودار $s(t)$ را رسم کنید و دامنه اعتبار آن را مشخص کنید.

ب) سرعت ماشین در لحظه شروع ترمز چقدر بوده است؟

ج) سرعت ماشین پس از چند ثانیه صفر می‌شود؟

د) ماشین از شروع ترمز چند متر را طی می‌کند تا متوقف شود؟

۴ــ مدرسه علی در انتهای خیابانی است که خانه علی در آن خیابان است. علی موقع رفتن به مدرسه ممکن است راه برود یا بدود یا برای دیدن مغازه‌ها بایستد یا به عقب برگردد یا برای به موقع رسیدن سوار ماشین شود. نمودار حرکت یکی از روزهایی که علی به مدرسه رفته است به شکل صفحهٔ بعد است. واحد زمان را دقیقه و واحد مکان را ۱۰۰متر در نظر بگیرید.



۵ــ با توجه به نمودار بالا به سؤالات زیر پاسخ بگویید.

الف) فاصله مدرسه علی تا خانه او چقدر است و چقدر طول کشیده است تا علی به مدرسه برسد؟

ب) در دو دقیقه اول حرکت سرعت حرکت علی چقدر بوده است؟

ج) در دو دقیقه دوم حرکت احتمالاً علی چکار می‌کرده است؟

د) در دقایق بین ۴ و ۵ علی با چه سرعتی و در چه جهتی حرکت می‌کرده است؟ در حال دویدن بوده است یا راه رفتن؟

هـ) در دقایق بین ۵ و ۷ علی کجا بوده و احتمالاً چه می‌کرده است؟

و) در بین دقایق ۷ و ۹ حدوداً سرعت حرکت او چقدر بوده است و احتمالاً علی چه عملی انجام داده است؟

ز) بین دقایق ۹ و ۱۰ علی کجا بوده است و احتمالاً چه می‌کرده است؟

مشتق توابع مثلثاتی

اگر تابع حرکت متحرکی روی محور xها به صورت $x(t)=\sin t$ باشد، این متحرک یک حرکت تناوبی حول مبدأ دارد و مرتباً به جلو و عقب حرکت می‌کند. سرعت این متحرک نیز حالت تناوبی خواهد داشت و مرتباً در حال افزایش و کاهش و تغییر جهت است. برای تشخیص چگونگی سرعت این متحرک باید مشتق تابع $\sin x$ را محاسبه کنیم.

$$(\sin x)' = \lim_{h\to ۰}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{۲\sin\frac{h}{۲}\cos(x+\frac{h}{۲})}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰}\frac{\sin\frac{h}{۲}}{\frac{h}{۲}}\lim_{h\to ۰}\cos(x+\frac{h}{۲}) = ۱.\cos x = \cos x$$

به کمک تساوی $\cos x = \sin(\frac{\pi}{۲}-x)$ می‌توانیم مشتق تابع $\cos x$ را نیز محاسبه کنیم.

$$(\cos x)' = (\sin(\frac{\pi}{۲}-x))' = (-\sin(x-\frac{\pi}{۲}))' = -\cos(x-\frac{\pi}{۲}) = -\sin x$$

تمرین در کلاس

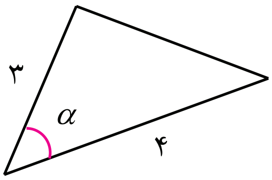
۱ــ نشان دهید مشتق تابع $\tan x$ در هر نقطه از دامنه اش به شکل زیر است.

$$(\tan x)' = \frac{۱}{\cos^{۲} x} = ۱ + \tan^{۲} x$$

۲ــ نشان دهید مشتق تابع $\cot x$ در هر نقطه از دامنه‌اش به شکل زیر است.

$$(\cot x)' = \frac{-۱}{\sin^{۲} x} = -(۱ + \cot^{۲} x)$$

۳ــ مثلثی ساخته‌ایم که طول دو ضلع آن ۳ و ۴ است و زاویه بین آن‌ها را مقدار متغیر α قرار می‌دهیم.



الف) آهنگ تغییرات مساحت این مثلث نسبت به a را در زاویهٔ α، به دست آورید.

ب) در کدام زاویه‌ها آهنگ تغییرات منفی است و معنای آن چیست؟

ج) در کدام زاویه‌ها آهنگ تغییرات مثبت است و معنای آن چیست؟

د) در کدام زاویه آهنگ تغییرات صفر است و در این زاویه مساحت مثلث به‌دست آمده چه ویژگی دارد؟

مثال

۱ : مشتق تابع $y(x)=\sin x\,(۱ + \cos x)$ را حساب می کنیم.

$$y'(x) = (\sin x)'(۱+\cos x) + \sin x(۱+\cos x)'$$

$$= \cos x(۱+\cos x) + \sin x(-\sin x) = \cos x + \cos^{۲} x - \sin^{۲} x$$

۲ : مشتق تابع $y(x) = \dfrac{x\sin x}{\sin x + \cos x}$ را حساب می کنیم.

$$y'(x) = \frac{(x\sin x)'(\sin x + \cos x) - (\sin x + \cos x)' x \sin x}{(\sin x + \cos x)^{۲}}$$

$$= \frac{(\sin x + x\cos x)(\sin x + \cos x) - (\cos x - \sin x)x\sin x}{\sin^{۲} x + \cos^{۲} x + ۲\sin x\cos x}$$

$$= \frac{\sin^{۲} x + \sin x\cos x + x\cos x\sin x + x\cos^{۲} x - x\cos x\sin x + x\sin^{۲} x}{۱ + \sin ۲x}$$

$$= \frac{\sin^{۲} x + \sin x\cos x + x}{۱ + \sin ۲x}$$

مسائل

۱ــ مشتق توابع زیر را حساب کنید.

الف) $y(x)=\sin ۳x$ ب) $y(x)=x\tan\frac{x}{۲}$ ج) $y(x)=\sin^۳ ۲x$

د) $y(x)=\frac{\sin x}{x}$ هـ) $y(x)=\frac{\tan x}{۱+\tan x}$ و) $y(x)=\frac{x^۲-\sin^۲ x}{۱+\cos^۲ x}$

۲ــ مشتق تابع $y=\cos x$ را مستقیماً از طریق تعریف به دست آورید.

۳ــ نمودار تابع $y=\sin x$ با چه زاویه‌ای از مبدأ می‌گذرد (زاویه خط مماس بر نمودار تابع نسبت به محور xها)؟ نمودار تابع $\tan x$ با چه زاویه‌ای از مبدأ می‌گذرد؟

۴ــ در چه نقاطی خط مماس بر نمودار تابع $y(x)=\sin ۳x$ موازی محور xها است.

۵ــ آیا می‌توان بر نمودار تابع $y(x)=\sin x+\cos x$ خط مماسی رسم کرد که با خط $y=۳x-۱$ موازی باشد؟

۶ــ در خط $y=mx+۲$، m چه مقدارهایی می‌تواند داشته باشد تا بتوان بر نمودار تابع $y(x)=\tan ۳x$ خط مماسی رسم کرد که با آن موازی باشد.

۷ــ تابع حرکت متحرکی روی محور xها به صورت $x(t)=۱+۲\sin^۲ t$ است. چگونگی حرکت این متحرک را توصیف کنید. در چه نقاطی روی محور xها این متحرک ایست آنی دارد؟ در چه نقاطی این متحرک بیشترین سرعت را دارد و مقدار این سرعت چقدر است؟

مشتق تابع وارون و توابع مرکب

حل یک مسئله

مشتق یک تابع وارون‌پذیر و مشتق وارون آن چه رابطه‌ای با هم دارند؟

نمودار یک تابع و وارون آن نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند، پس مماس‌های بر این دو نمودار در نقاط متناظر نیز قرینه هم خواهند بود و شیب‌های آن‌ها رابطه مشخصی با هم خواهند یافت. برای یافتن این رابطه در فعالیت زیر در حالتی خاص این رابطه را جستجو می‌کنیم.

فعالیت ۸

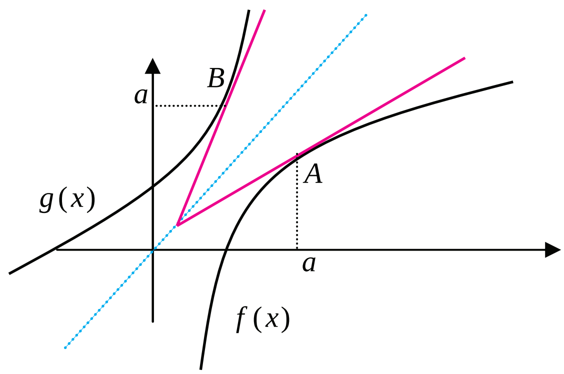
تابع $f(x)=\sqrt{x-1}$ روی دامنهٔ $[1,\infty)$ تعریف شده است و صعودی است. وارون $f(x)$ تابع $g(x)=x^2+1$ با دامنهٔ $[0,\infty)$ است.

۱ــ نمودارهای این دو تابع را رسم کنید و نقطهٔ $A(5,2)$ روی نمودار f و نقطهٔ $B(2,5)$ روی نمودار g را مشخص کنید.

۲ــ وضعیت خط‌های مماس بر نمودارهای این دو تابع در این نقاط نسبت به نیمساز ربع اول و سوم چگونه است؟ شیب‌های این دو خط مماس چه رابطه‌ای با هم دارند؟

۳ــ آیا برای نقاط دیگر هم چنین رابطه‌ای وجود دارد؟ چه حدسی می‌زنید؟ حدس خود را ثابت کنید.

فرض کنید $f(x)$ تابعی وارون پذیر و مشتق پذیر باشد و وارون آن را با $g(x)$ نشان دهیم. فرض کنید $A(a,b)$ نقطه‌ای از نمودار f باشد $(f(a)=b)$، در این صورت $B(b,a)$ نقطه‌ای از نمودار g خواهد بود که در شکل زیر نمایش داده شده‌اند.



نمودار g قرینه نمودار f نسبت به نیمساز ربع اول و سوم است. این نکته باعث می‌شود خط مماس بر نمودار g در نقطهٔ $B(b,a)$ نیز قرینه خط مماس بر نمودار در نقطهٔ $A(a,b)$ شود. در فصل دوم دیدیم که شیب‌های این دو خط وارون یکدیگرند. اما شیب‌های این دو خط $f'(a)$ و $g'(b)$ هستند، بنابراین

$$g'(b)=\frac{1}{f'(a)}=\frac{1}{f'(g(b))}$$

این نتیجه نشان می‌دهد که باید $f'(a)\neq 0$.

اگر $f'(a)=0$ ، خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $A(a,b)$ موازی محور xها خواهد بود و در نتیجه خط مماس بر نمودار g در نقطهٔ $B(b,a)$ موازی محور yها خواهد بود که به معنای آن است که g در b مشتق‌پذیر نیست. به طور کلی قضیه زیر برقرار است.

قضیه :

اگر f تابعی وارون‌پذیر و مشتق‌پذیر با مشتق ناصفر باشد و وارون آن تابع g باشد، در این صورت g نیز مشتق‌پذیر است و $g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}$

مثال

۱ : تابع $f(x)=x^k$ در دامنهٔ $(0,\infty)$ صعودی و وارون‌پذیر و مشتق‌پذیر با مشتق ناصفر است و وارون آن تابع $g(x)=\sqrt[k]{x}$ است. بنابراین

$$g'(x)=\frac{1}{f'(g(x))}=\frac{1}{kg(x)^{k-1}}=\frac{1}{k\sqrt[k]{x^{k-1}}}$$

۲ : تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ وارون‌پذیر و مشتق‌پذیر با مشتق ناصفر است و وارون آن خودش است. بنابراین باید داشته باشیم $f'(x)=\frac{1}{f'(f(x))}$. درستی این تساوی را بررسی می‌کنیم.

$$f'(x)=-\frac{1}{x^2} \quad , \quad f'(f(x))=-\frac{1}{(\frac{1}{x})^2}=-x^2$$

در بسیاری از موارد تابع وارون ممکن است قابل محاسبه نباشد اما مشتق آن را می‌توانیم با استفاده از این فرمول حساب کنیم.

تمرین در کلاس

۱ــ $g(x)=\sin^{-1}x$ وارون تابع $f(x)=\sin x$ است که دامنهٔ f را به فاصلهٔ $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ محدود کرده‌ایم. دامنهٔ g فاصلهٔ $[-1,1]$ است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای x های در فاصلهٔ $(-1,1)$ داریم :

$$(\sin^{-1}x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

در نقاط $x=\pm 1$ وضعیت مشتق‌پذیری $\sin^{-1}x$ چگونه است؟

۲ــ $g(x)=\cos^{-1}x$ وارون تابع $f(x)=\cos x$ است که دامنهٔ f را به فاصلهٔ $[0,\pi]$ محدود کرده‌ایم. دامنهٔ g فاصلهٔ $[-1,1]$ است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای xهای در فاصلهٔ $(-1,1)$ داریم :

$$(\cos^{-1}x)'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

در نقاط $x=\pm ۱$ وضعیت مشتق‌پذیری $\cos^{-۱}x$ چگونه است؟

۳ــ $g(x)=\tan^{-۱}x$ وارون تابع $f(x)=\tan x$ است که دامنهٔ f را به‌فاصلهٔ $(-\frac{\pi}{۲},\frac{\pi}{۲})$ محدود کرده‌ایم. دامنهٔ g کل IR است. به کمک فرمول مشتق تابع وارون، ثابت کنید برای هر مقدار x داریم :

$$(\tan^{-۱}x)'=\frac{۱}{۱+x^۲}$$

مثال

۱ : مشتق تابع $f(x)=\sin^{-۱}x+\cos^{-۱}x$ را حساب می‌کنیم.

$$f'(x)=\frac{۱}{\sqrt{۱-x^۲}}+\frac{-۱}{\sqrt{۱-x^۲}}=۰$$

صفر شدن مشتق این تابع در همهٔ نقاط به معنای آن است که این تابع، ثابت است. قبلاً در فصل سوم دیدیم که

$$\sin^{-۱}x+\cos^{-۱}x=\frac{\pi}{۲}$$

۲ : مشتق تابع $f(x)=(x+\sin x)\sin^{-۱}x$ را حساب می‌کنیم.

$$f'(x)=(x+\sin x)'\sin^{-۱}x+(x+\sin x)(\sin^{-۱}x)'$$

$$=(۱+\cos x)\sin^{-۱}x+\frac{x+\sin x}{\sqrt{۱-x^۲}}$$

اگر f و g دو تابع صعودی باشند، $f\circ g$ نیز تابعی صعودی است. اگر شدت صعود g در نقطه‌ای مانند a برابر $m_۱$ (یعنی، $(m_۱=g'(a)$ و شدت صعود f در نقطهٔ $g(a)$ برابر $m_۲$ (یعنی، $(m_۲=f'(g(a))$) باشد، شدت صعود $f\circ g$ در نقطهٔ a چه خواهد بود؟ به عبارت دیگر چه رابطه‌ای بین $g'(a)$ و $f'(g(a))$ و $(f\circ g)'(a)$ وجود دارد؟ برای داشتن یک حدس مناسب بهتر است چند مثال را بررسی کنیم.

فعالیت ۹

۱ــ برای دو تابع $f(x)=m_۱x$ و $g(x)=m_۲x$، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبه $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f\circ g)'(x)$، بررسی کنید که چه رابطه‌ای بین آن‌ها وجود دارد.

۲ــ برای تابع دلخواه $f(x)$ و $g(x)=m_۲x$، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبهٔ $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f\circ g)'(x)$، بررسی کنید که چه رابطه‌ای بین آن‌ها وجود دارد.

۳ـ برای تابع $f(x)=x^{3}$ و تابع دلخواه $g(x)$، تابع $f(g(x))$ را محاسبه کنید و با محاسبهٔ $g'(x)$ و $f'(g(x))$ و $(f\circ g)'(x)$، بررسی کنید که چه رابطه‌ای بین آن‌ها وجود دارد.

تمام مثال‌های بالا نشان می‌دهند که شدت صعود $f\circ g$ در نقطه‌ای مانند a برابر است با حاصلضرب شدت صعود g در a در شدت صعود f در $g(a)$، به عبارت دیگر :

$$(f\circ g)'(a)=f'(g(a))g'(a)$$

درستی این رابطه در حالت کلی قابل اثبات است و قضیهٔ زیر برقرار است.

قضیه :

اگر f و g دو تابع مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه $f\circ g$ نیز مشتق‌پذیر است و

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$$

مثال

۱ : مشتق تابع $\sin x^{2}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x)=\sin x$ و $g(x)=x^{2}$ داریم $f(g(x))=\sin x^{2}$. بنابراین

$$(\sin x^{2})'=f'(g(x))g'(x)=\cos x^{2}.2x=2x\cos x^{2}$$

۲ : مشتق تابع $\sqrt{1+\sin^{2}x}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=1+\sin^{2}x$ داریم $f(g(x))=\sqrt{1+\sin^{2}x}$. بنابراین

$$(\sqrt{1+\sin^{2}x})'=f'(g(x))g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{1+\sin^{2}x}}\times 2\sin x\cos x=\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^{2}x}}$$

۳ : مشتق تابع $\sin\sqrt{1+x^{2}}$ را حساب می‌کنیم.

اگر قرار دهیم $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{1+x^{2}}$ داریم $f(g(x))=\sin\sqrt{1+x^{2}}$. بنابراین

$$(\sin\sqrt{1+x^{2}})'=f'(g(x))g'(x)=\cos\sqrt{1+x^{2}}\times(\sqrt{1+x^{2}})'$$

$$=\cos\sqrt{1+x^{2}}\times\frac{1}{2\sqrt{1+x^{2}}}\times 2x=\frac{x\cos\sqrt{1+x^{2}}}{\sqrt{1+x^{2}}}$$

تمرین در کلاس

۱ــ مشتق تابع $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ را حساب کنید.

۲ــ مثلثی ساخته‌ایم که طول دو ضلع آن ۱ و ۳ می باشد و زاویهٔ بین این دو ضلع α است که قابل تغییر از صفر تا π رادیان است. طول ضلع سوم را l بنامید.

الف) l را بر حسب α و آهنگ تغییرات l نسبت به α را به‌دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟

ب) α را بر حسب l و آهنگ تغییرات α نسبت به l را به‌دست آورید. علامت آهنگ تغییرات چیست و چه معنایی دارد؟

ج) آهنگ تغییرات در (الف) و (ب) چه رابطه‌ای با هم دارند؟

مسائل

۱ــ مشتق توابع زیر را حساب کنید و تعیین کنید که در کدام نقاط از دامنهٔ خود مشتق‌پذیری برقرار نیست.

الف) $y(x)=\sqrt{\frac{x^2}{1+x^2}}$ ب) $f(t)=\cos\sqrt[3]{t}$

ج) $g(\alpha)=\sqrt[5]{1+\tan\alpha}$ د) $y(\alpha)=\tan^2(\frac{\pi}{3}+\sin^{-1}\alpha)$

هـ) $x(t)=\sqrt{1+\sqrt{1+t^2}}$ و) $k(z)=\sqrt{1+\cos^2\sqrt{1+z^2}}$

۲ــ آیا تابع $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟ آیا تابع $g(x)\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$ در صفر مشتق‌پذیر است؟

۳ــ دامنه و برد تابع $f(x)=\sin^{-1}(\sin x)$ را تعیین کنید و نشان دهید این تابع متناوب است و نمودار آن را رسم کنید. این تابع در چه نقاطی مشتق ناپذیر است و مشتق آن را در بقیهٔ نقاط تعیین کنید.

۴ــ تابع $y(x)=1$ را در نظر می‌گیریم و از نقطهٔ $(x,1)$ روی نمودار این تابع خط واصل به مبدأ را رسم می‌کنیم. زاویهٔ این خط با محور x ها را α می‌نامیم که تابعی از x است. تابع $\alpha(x)$ و دامنه و بُرد آن را حساب کنید و مشتق α نسبت به x را حساب کنید. مقدار α با افزایش x افزایش می‌یابد یا کاهش؟ علامت مشتق α چگونه است؟

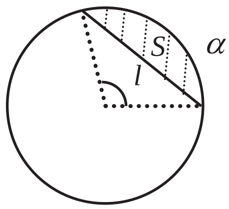
۵ــ در مثلثی طول دو ضلع آن ۲ و ۴ می‌باشد و طول ضلع سوم مقدار متغیر l می‌باشد. زاویهٔ مقابل به این ضلع را با α نشان می‌دهیم.

الف) l تابعی از α است این تابع را محاسبه کنید و دامنه و برد آن را بیابید.

ب) تابع وارون تابع قسمت (الف) چه چیزی را نشان می‌دهد؟

ج) مساحت این مثلث تابعی از α است، این تابع را حساب کنید و آهنگ تغییرات آن را به‌دست آورید. آهنگ تغییرات به ازای چه مقدارهای α مثبت است و معنای آن چیست؟ آهنگ تغییرات به ازای چه مقدارهای α منفی است و معنای آن چیست؟ آهنگ تغییرات به ازای چه مقدار α صفر است و مثلث در این مقدار چگونه است و مساحت آن چه ویژگی دارد؟

۶ــ در شکل زیر وتری از دایره به شعاع واحد به طول l رسم شده است که کمانی به زاویهٔ α را از دایره جدا کرده است. مساحت قسمت هاشور خورده را با S نشان می‌دهیم.



الف) S را بر حسب α و α را بر حسب l و S را بر حسب l حساب کنید.

ب) آهنگ تغییرات S را نسبت به α و آهنگ تغییرات α را نسبت به l و آهنگ تغییرات S را نسبت به l را حساب کنید.

تمرین‌های دوره‌ای

۱ــ قرار است یک مزرعه مستطیلی شکل برای پرورش گل ساخته شود. برای این کار ۲۰۰ متر نردهٔ چوبی برای محصور کردن این ناحیه در اختیار داریم. ابعاد این مستطیل را چقدر در نظر بگیریم تا بزرگترین مساحت ممکن برای این مزرعه را به دست آوریم؟

با طی مراحل زیر، این مسئله را حل کنید.

الف) جدول زیر را تکمیل کنید.

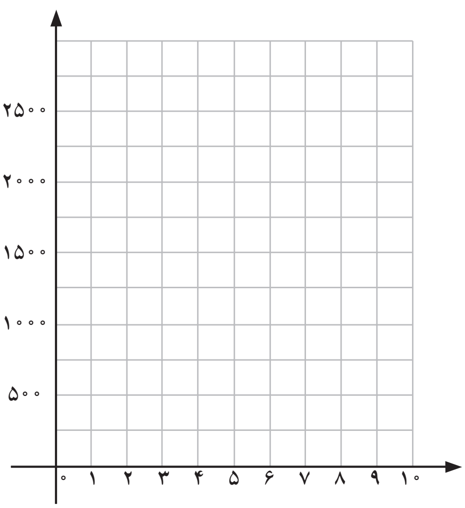
x یک ضلع مستطیل	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰	۸۰	۹۰	۱۰۰
ضلع دیگر				۷۰							
S مساحت				۲۱۰۰							

ب) مساحت این مستطیل را به صورت تابعی از x به‌دست آورید.

ج) دامنه و برد این تابع را به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

د) آیا از روی نمودار می‌توانید بزرگترین مساحت ممکن برای مزرعه گل را به‌دست آورید؟

هـ) به روش جبری و با کمک ضابطه تابع، بزرگترین مساحت ممکن برای مزرعه را به دست آورید.

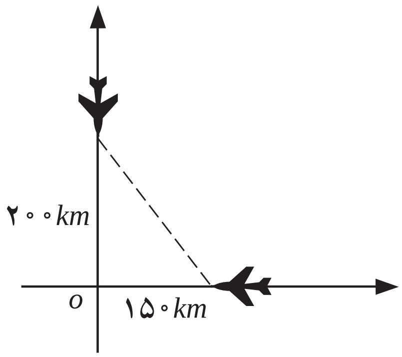


۲ــ دو هواپیما مطابق شکل صفحهٔ بعد در ارتفاع یکسان در دو مسیر عمود برهم، با سرعت ۹۰۰ کیلومتر در ساعت در حال حرکت هستند. یک هواپیما ۱۵۰ کیلومتر و هواپیمای دیگر ۲۰۰ کیلومتر از نقطه O فاصله دارند.

الف) پس از ۲۰ دقیقه فاصله بین دو هواپیما چقدر است؟

ب) فاصله بین دو هواپیما را بر (حسب کیلومتر) به عنوان تابعی از زمان (دقیقه) به‌دست آورید. (شکل زمان $t=0$ را نشان می‌دهد.)

ج) از طریق این تابع استدلال کنید که‌این دو هواپیما به‌هم برخورد نخواهند کرد.



۳ــ اگر $h(x)=(2x+5)^2$ ، h را به صورت ترکیب دو تابع مانند f , g بنویسید به قسمی که $h(x)=(f\circ g)(x)$ و $g(0)=5$.

۴ــ قیمت معمولی یک کالا x (هزار) تومان است. فرض کنید :

$$f(x)=x-400 \quad , \quad g(x)=0/75\,x$$

الف) g و f چه چیزی را بر حسب قیمت کالا توصیف می‌کنند؟

ب) $f\circ g$ را بیابید و توضیح دهید که $f\circ g$ چه چیزی را بر حسب قیمت کالا توصیف می‌کند.

ج) $g\circ f$ چه چیزی را بر حسب قیمت کالا توصیف می‌کند؟

۵ــ فرض کنید f و g توابعی از IR به IR هستند و دامنه f شامل برد g است. ثابت کنید :

الف) اگر f و g صعودی باشند آنگاه $f\circ g$ صعودی است.

ب) اگر f و g نزولی باشند آنگاه $f\circ g$ صعودی است.

ج) اگر f صعودی و g نزولی باشد آنگاه $f\circ g$ نزولی است.

د) برای هر یک از موارد (الف) و(ب) و(ج) مثالی ارائه کنید.

۶ــ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) اگر f روی بازه $[a,b]$ صعودی باشد، در هیچ نقطه‌ای محور xها را قطع نمی‌کند.

ب) اگر f روی بازه $[a,b]$ اکیداً صعودی باشد، حداکثر در یک نقطه محور xها را قطع می‌کند.

۷ــ تحت چه شرایطی تابع خطی $f(x)=ax+b$ زوج است؟ تحت چه شرایطی فرد است؟

۸ــ اگر $f(x)=\sqrt{x-1}, g(x)=x^2+2, h(x)=x+3$ ، تابع $f\circ g\circ h$ را به‌دست آورید.

۹ــ فرض کنید $h(x)=(f(x))^2+g(x)$ که توابع f و g ممکن است زوج یا فرد باشند.

الف) تحت چه شرایطی h حتماً یک تابع زوج می‌شود؟

ب) تحت چه شرایطی h حتماً یک تابع فرد می‌شود؟

۱۰ــ الف) فرض کنید که g یک تابع زوج باشد و $h=f\circ g$، آیا در مورد زوج یا فرد بودن h می‌توان اظهار نظر قطعی کرد؟

ب) اگر g یک تابع فرد باشد و $h=f\circ g$، آیا در مورد زوج یا فرد بودن h می‌توان اظهار نظر قطعی کرد؟

ج) اگر f و g دو تابع فرد باشند، در مورد زوج یا فرد بودن $f \circ g$ چه می‌توان گفت؟

۱۱ــ فرض کنید که $f(x)$ روی بازه $[-۲,۷]$ صعودی باشد.

الف) دامنه تابع $y=f(x+۳)$ را بیابید و تعیین کنید روی کدام بازه صعودی است؟

ب) دامنه تابع $y=f(x-۴)$ را بیابید و تعیین کنید روی کدام بازه صعودی است؟

ج) در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع $y = -f(x)$ چه می‌توان گفت؟

د) در مورد صعودی یا نزولی بودن تابع $y = f(-x)$ چه می‌توان گفت؟

۱۲ــ هزینه‌اجارهٔ در بست یک اتوبوس (برای هر نفر) به وسیله تابع $C(x)=\dfrac{۱۰۰+۵x}{x}$ داده می‌شود که در آن x تعداد افراد در یک گروه و $C(x)$ برحسب هزار تومان است و داریم :

$$x \in \{۱,۲,۳,\cdots ۴۰\}$$

$C^{-1}(x)$ را به دست آورید و توضیح دهید که چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۱۳ــ یک سیلندر به شکل استوانه در اختیار داریم که ارتفاع آن برابر قطر قاعده آن است. شعاع قاعده این سیلندر را با x نشان می‌دهیم.

الف) حجم این سیلندر استوانه‌ای شکل را به عنوان تابعی از x به دست آورید. برای شعاع قاعده ۱۰ متر حجم استوانه چقدر است؟

ب) $V^{-1}(x)$ را به دست آورید و معنای آن را توصیف کنید.

ج) اگر حجمی‌برابر ۱۰۲۴π مترمکعب نیاز داشته باشیم، با استفاده از هر یک از فرمول‌ها که ساده‌تر است شعاع را بیابید.

۱۴ــ درستی یا نادرستی عبارات زیر را بررسی کنید.

الف) یک تابع زوج می‌تواند وارون‌پذیر هم باشد.

ب) اگر f روی بازه $[۰ , ۵]$ صعودی باشد f^{-1} روی بازه $[f(۰) , f(۵)]$ صعودی است.

ج) اگر g روی بازه $[۰ , ۵]$ نزولی باشد، g^{-1} روی بازه $[g(۵) , g(۰)]$ نزولی است.

د) اگر f و g وارون یکدیگر باشند ، دامنه آن‌ها با هم برابر است.

۱۵ــ اگر $f(x)=\dfrac{ax+b}{x+d}$، $f^{-1}(x)$ را بیابید. تحت کدام شرایط برای a , b , d داریم $f=f^{-1}$

۱۶ــ وزن ایده آل w برای مردان (برحسب کیلوگرم) به عنوان تابعی از قد h (برحسب سانتی‌متر) به صورت تقریبی از رابطه $w(h) = ۰/۹h - ۸۸$ به دست می‌آید.

الف) وزن ایده‌آل برای یک مرد ۱۷۰ سانتی‌متری چقدر است ؟

ب) h را به‌عنوان تابعی از w به‌دست آورید. این تابع چه چیزی را نشان می‌دهد؟

ج) با نشان دادن $h(w(a)) = a$, $w(h(b)) = b$ ثابت کنید که h(w) , w(h) وارون یکدیگرند.

د) قد ایده‌آل مردی که وزن او ۸۰ کیلوگرم است چند سانتی‌متر است.

(رابط وزن ایده آل برای زنان به صورت $w(h) = ۰/۹h - ۸۲/۵$ است.)

۱۷ــ توابعی مانند g و f بیابید که برای آن‌ها داشته باشیم

$$(f\circ g)(x) = (g\circ f)(x) = x$$

۱۸ــ در هر یک از حالت‌های زیر تابع خطی $f(x) = ax + b$ را به گونه‌ای به‌دست آورید که شرط خواسته شده برقرار گردد.

الف) $f(f(x)) = ۴x + ۳$ ب) $f(۱ - x) = ۵x + ۱$

ج) $f(۲x + ۳) = ۳x - ۲$

۱۹ــ تعداد باکتری‌ها در یک غذای منجمد با تابع $n(d) = ۲۰d^۲ - ۸۰d + ۵۰۰$ با شرط $۲ \le d \le ۱۴$ داده می‌شود که d دمای غذا است . وقتی که غذا از انجماد خارج می‌شود دما با تابع $۰ \le t \le ۳$ ، $d(t) = ۴t + ۲$ داده می‌شود که t زمان بر حسب ساعت است. مطلوبست :

الف) تابع مرکب $n(d(t))$

ب) تعداد باکتری‌ها در غذا وقتی که $t = ۲$.

ج) پس از چه زمانی تعداد باکتری‌ها به ۲۴۲۰ می‌رسد؟

۲۰ــ ثابت کنید که تابع $f(x) = \frac{|x| + ۱}{|x|}$ تابعی زوج است و با استفاده‌از آن برد تابع را به‌دست آورید.

۲۱ــ ثابت کنید که تابع $f(x) = \frac{x}{|x| + ۱}$ تابعی فرد است و با استفاده‌از آن برد تابع را به‌دست آورید.

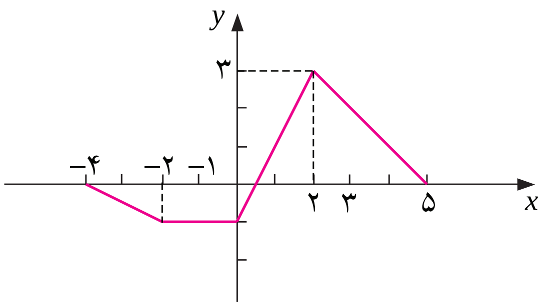
۲۲ــ نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر داده شده‌است. دامنه توابع داده شده را معلوم کنید و نمودار آن‌ها را رسم کنید.

الف) $y = |f(x)|$

ب) $y = f(|x|)$

ج) $y = f(-x)$

د) $y = -f(x)$



۲۳ــ اگر f یک تابع زوج و غیر ثابت باشد، تعیین کنید که در هر یک از حالات زیر آیا g زوج یا فرد یا آن که نه زوج است و نه فرد.

الف) $g(x) = -f(x)$ ب) $g(x) = f(-۵x)$

ج) $g(x) = f(x) + ۳$ د) $g(x) = -f(x - ۳)$

۲۴ــ تابع $f(x) = x^۲ - ۲x$ را روی دامنه $[۱, \infty)$ در نظر بگیرید.

الف) با رسم نمودار این تابع نشان دهید این تابع وارون پذیر است و برد آن را به‌دست آورید.

ب) با رسم نمودار تابع وارون، دامنه و برد تابع وارون را به دست آورید.

ج) تابع وارون f را با g نشان دهید و برای یک نقطه دلخواه‌از دامنه g مانند x قرار دهید $g(x) = y$. با توجه به آن که داریم $x = f(y)$، y را بر حسب x حساب کنید.

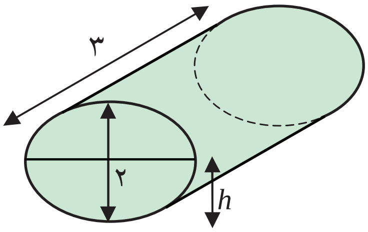
د) ضابطه تابع وارون f را بنویسید.

۲۵ــ ثابت کنید که تابع $f(x)=1+\sqrt{1-x^2}$ روی دامنه $[0, 1]$ یک به یک است و وارون آن را به‌دست آورید.

۲۶ــ دو تابع g و f وارون یکدیگرند. آیا توابع $g\circ f$، $f\circ g$ با هم مساویند؟

۲۷ــ برای هر عدد صحیح q، نشان دهید $[x + q] = [x] + q$.

۲۸ــ یک منبع گازوئیل به شکل استوانه در اختیار داریم که به شکل خوابیده روی زمین قرار دارد. قطر دایرهٔ قاعده آن ۲ متر و ارتفاع آن (که به طور افقی روی زمین است) برابر ۳ متر است.

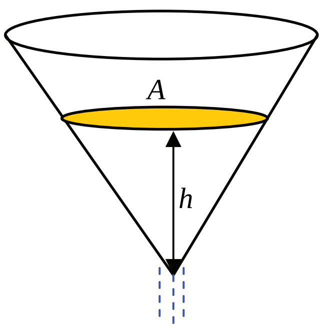


الف) اگر حجم گازوئیل موجود در منبع (بر حسب سانتی‌متر مکعب) را با V و ارتفاع گازوئیل موجود در منبع (بر حسب سانتی‌متر) را با h نشان دهیم، V تابعی از h است. این تابع را محاسبه کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. با توجه به شیوه تعریف، نشان دهید این تابع صعودی است.

ب) h نیز تابعی از V است، دامنه و برد آن را تعیین کنید. آیا می‌توانید این تابع را محاسبه کنید؟

۲۹ــ از نقطه‌ی $A(2,5)$ به نقاط مختلف نمودار تابع $y=(x-2)^2$ خط رسم می‌کنیم. آیا نقطه یا نقاطی یافت می‌شوند که خط رسم شده بر نمودار این تابع عمود شود؟ در کدام نقاط این اتفاق می‌افتد؟ درستی محاسبات خود را با رسم نمودار این تابع نشان دهید.

۳۰ــ قیفی به شکل مخروط دوار داریم که ارتفاع آن ۱۰ سانتی‌متر و شعاع قاعده آن ۵ سانتی‌متر است. این قیف را پر از آب می‌کنیم و در لحظهٔ $t = 0$ شیر آن را باز می‌کنیم و آب با سرعت دو سانتی‌متر مکعب در ثانیه از آن خارج می‌شود.



الف) اگر ارتفاع آب باقیمانده در قیف را با h نشان می‌دهیم، حجم آب باقیمانده را برحسب h به دست آورید.

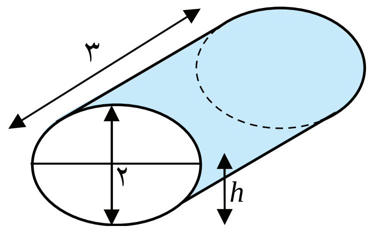
ب) h را بر حسب زمان به دست آورید و آهنگ تغییرات h را نسبت به زمان در هر لحظه حساب کنید.

ج) سطح آب باقیمانده در قیف را با A نشان می‌دهیم. با محاسبهٔ A بر حسب زمان، آهنگ تغییرات A را نسبت

به زمان در هر لحظه حساب کنید.

د) با محاسبه A بر حسب h، آهنگ تغییرات A را نسبت به h در هر مقداری از h حساب کنید.

۳۱ــ یک منبع گازوئیل به شکل استوانه در اختیار داریم که به شکل خوابیده روی زمین قرار دارد. قطر دایرهٔ قاعده آن ۲متر و ارتفاع آن (که به طور افقی روی زمین است) برابر ۳ متر است.



اگر منبع خالی را به گونه‌ای پر کنیم که ارتفاع گازوئیل با سرعت ثابت ۳ سانتی‌متر بر دقیقه افزایش یابد، سرعت افزایش حجم گازوئیل در هر لحظه t چقدر خواهد بود؟

مراجع

۱ــ رام کردن و پرورش مسئله‌های ریاضی، عبدالحسین مصحفی، انتشارات مدرسه، چاپ اول، زمستان ۱۳۷۷

۲ــ آموزش هنر حل مسئله، یحیی تابش، جواد حاجی بابایی و آرش رستگار، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، ۱۳۸۰

۳ــ Success in maths Sim Pupiles Book
Addison wesley longman 1998

۴ــ اصول آنالیز ریاضی، والتر رودین

۵ــ حساب دیفرانسیل و انتگرال، (جلد اول)، سیاوش شهشهانی

۶ــ حساب دیفرانسیل و انتگرال (جلد اول)، آدامز

۷ــ حساب دیفرانسیل و انتگرال، جیمز استوارت، ترجمهٔ ارشک حمیدی، (جلد اول)، انتشارات فاطمی.