

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلٰى مُحَمَّدٍ وَّ اٰلِ مُحَمَّدٍ وَّ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ



# ریاضیات

محتوای تکمیلی ویژه مدارس استعدادهای درخشان  
پایه نهم دوره اول متوسطه





این کتاب، به منظور فراهم کردن مواد آموزشی تکمیلی مورد نیاز مدارس استعدادهای درخشان، توسط سازمان ملی پرورش استعدادهای درخشان و دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری طراحی و تألیف شده است.

نام کتاب: ریاضیات - محتوای تکمیلی ویژه مدارس استعدادهای درخشان

پایه نهم دوره اول متوسطه - ۹۲۳

شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: محمود امانی طهرانی، محمد نستوه، کورش امیری‌نیا، سیده‌طاهره آقامیری، رضا گلشن مهرجردی، عباسعلی مظفری و ناصر جعفری (اعضای شورای برنامه‌ریزی)

محمدحسین احمدی، نرگس اخلاقی‌نیا، عبدالرضا زارع‌شحنه، سعید صدری و علی قصاب (اعضای گروه تألیف)  
واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری (نظارت) - کاظم زارع (ویراستار علمی)، سید اکبرمیرجعفری (ویراستار ادبی)

شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) - سعید صدری (طراح گرافیک، طراح جلد و صفحه‌آرا) - محمدحسین احمدی (طراح پشت جلد و امور آماده‌سازی)

نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی - ساختمان شماره ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)  
تلفن: ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹  
وبگاه: [www.chap.sch.ir](http://www.chap.sch.ir) و [www.irtextbook.ir](http://www.irtextbook.ir)

ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران - کیلومتر ۱۷ جاده مخصوص کرج - خیابان ۶۱ (دارو پخش) تلفن: ۵ - ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۳۷۵۱۵ - ۱۳۹

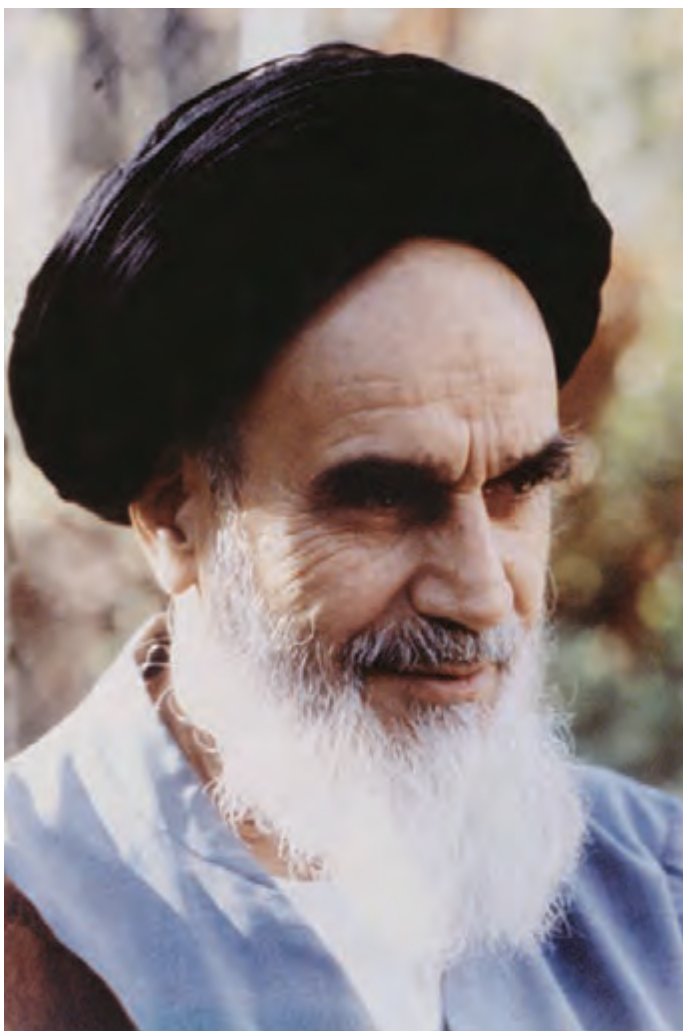
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»

سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ دهم ۱۴۰۴

حق چاپ محفوظ است.

ISBN 978-964-05-2679-8

شابک ۹۷۸-۹۶۴-۰۵-۲۶۷۹-۸



بنیان‌گذار کبیر جمهوری اسلامی، حضرت امام خمینی «قُدَسَ سِرُّهُ»  
ما در شرایط جنگ و محاصره توانسته‌ایم آن همه هنرآفرینی و اختراعات و پیشرفت‌ها داشته باشیم.  
ان‌شاءالله در شرایط بهتر، زمینه کافی برای رشد استعداد و تحقیقات را در همه امور فراهم می‌سازیم.  
مبارزه علمی برای جوانان، زنده‌کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌ها و حقیقت‌هاست.



به نام خداوند جان آفرین

## پیشگفتار

ریاضیات (که در زبان پارسی قدیم «انگارِش» خوانده می شد) را بیشتر دانش بررسی کمیتها، ساختارها، فضا و دگرگونی تعریف می کنند.

دیدگاه دیگری ریاضی را دانشی می داند که در آن با استدلال منطقی از اصول و تعریفها به نتایج دقیق و جدیدی می رسیم. با اینکه ریاضیات از علوم طبیعی به شمار نمی رود، ولی ساختارهای ویژه ای که ریاضی دانان می پژوهند بیشتر از دانش های طبیعی به ویژه فیزیک سرچشمه می گیرند و در فضایی جدا از طبیعت و محض گونه (مجرد) گسترش پیدا می کنند، به طوری که علوم طبیعی برای حل مسائل خود به ریاضی باز می گردند تا جوابشان را با آن مقایسه و بررسی کنند.

علوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد و پزشکی بسیار به ریاضیات تکیه دارد ولی ریاضی دانان گاه به دلایل صرفاً ریاضی (و نه کاربردی) به تعریف و بررسی برخی ساختارها می پردازند.

## سخنی با معلم

این کتاب که در راستای اجرای سیاست غنی سازی برنامه درسی مدارس استعدادهای درخشان و مطابق با اصل یکپارچگی و فراگیری برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران تولید شده است، به تعمیق بخش هایی از کتاب درسی ریاضی پایه نهم می پردازد. این کتاب حاصل فرایندی مطالعاتی با بیش از چندین سال است؛ با این همه تیزبینی صاحب نظران در هنگام تدریس در نقد منصفانه این کتاب بسیار ضروری است، زیرا بی نقصی این کتاب هیچ گاه در تصور نبوده است!

فصل های کتاب متناظر با کتاب درسی ریاضی است و مشخصاً دبیر ریاضی مجرب خواهد فهمید که تدریس هر بخش را چه زمانی آغاز کند. با این همه کلید واژه های بخش های کتاب به صورت فهرست وار بدین شرح است:

۱. تمرین های این کتاب با پیش فرض استعداد برتر و نیاز مخاطبین نگاشته شده است. یک معلم خلاق می تواند مخاطبین خود را در هنگام تدریس با بخشی از تمرین ها به چالش مفهومی بکشد. تفکر درباره

همه تمرین‌ها در سال آموزشی واجب تلقی می‌شود، و این امر شاید در تضاد با معرفی کتاب‌های دیگر باشد. خلافت خود را با تدریس «این کتاب» به تصویر بکشید!

۲. دیر زمانی است که مقوله کارگاه بازی در فرایند تدریس نقش آفرینی می‌کند و کتاب پیش رو نیز متناسب با موضوع، با کارگاه‌های آموزشی غنی شده است. توصیه می‌شود زمانی یک یا دو جلسه‌ای برای اجرای هریک از آنها در نظر بگیرید؛ و مکانی که می‌تواند فضایی به جز فضای مرسوم کلاسی باشد را به این امر اختصاص دهید.

۳. تغییرات فرهنگ آموزشی نیز مد نظر قرار گرفته‌اند. برای تغییر نسل، باید نخست دیدگاه خود را تغییر مناسب داد. برای این منظور باب بخشی به نام گفتگو در این کتاب گشوده شده است. تا عباری برای سنگ محک نقد نظام تفکر تدریس معلمین در اختیار قرار داده شود. این گفتگوها آینه‌ای است برای نمود ساخت ارزش‌های رو به رشد، تا یک معلم نهاد ایستایی و پویایی خود را مشاهده کند.

۴. شماره برخی از مسائل کتاب با رنگ صورتی مشخص شده‌اند. این رنگ برای اعلام نیاز زمان بیشتری برای تفکر است. معلم باید در هنگام حل این مسائل زمان شایسته‌ای برای تفهیم روش حل و توصیف ایده‌ها و راهکارهای آن ارائه دهد؛ تا در طول یک سال آموزشی دانش آموزان منفعل، در کنار صدها مسئله مهارتی، با حل چند مسئله چالش برانگیز هم آشنا گردند.

۵. شماره برخی از مسائل کتاب با رنگ سبز مشخص شده‌اند. این رنگ نشان دهنده یک برنامه مطالعاتی است که در فرهنگ عامه به نام پروژه شناخته می‌شود. به زبان تمثیل اگر حل مسئله ریاضی را به بازچینش درست یک نقاشی قطعه‌قطعه شده تشبیه کنیم، انجام یک پروژه به مثابه کشیدن یک نقاشی خلاقانه با موضوع داده شده است. این هر دو ضروری است؛ زیرا پر واضح است که احاد اندیشمندان باید بتوانند کاری از جنس حل مسئله را به‌خوبی انجام دهند، در حالی‌که نخبگان و سرآمدان باید به خلق آثار خلاقانه و ماندگار بپردازند.

۶. برخی از مسائل کتاب با رنگ زرد مشخص شده‌اند. این مسائل به دانش‌آموزان کمک می‌کند تا بتوانند خودشان طراح مسئله باشند.



## سخنی با دانش‌آموز

این کتاب شامل نگاه عمیق‌تری به کتاب درسی ریاضی پایه نهم است، که شامل مسائل بسیاری است که بعضی ساده‌تر و برخی پیچیده‌تر هستند. توصیه می‌کنیم که درباره مسائل کتاب به اندازه کافی فکر کنید و سریع به دنبال پرسیدن جواب از دیگران نباشید! زیرا در این صورت بسیار کم از این کتاب بهره خواهید برد. سعی کنید که فکر کنید و اگر ذهن بازیگوشی دارید، سعی کنید خود را به فکر کردن وادار کنید. همچنین خوب است که مطالب پیشگفتار و سخنی با معلم این کتاب را بخوانید تا با انواع مسائل و شیوه به کارگیری این کتاب آشنا(تر) شوید.





# فهرست مطالب

۱	فصل ۱ - مجموعه‌ها
۲	یک گروه مجازی
۴	معرفی مجموعه
۵	مجموعه‌های برابر و زیرمجموعه
۱۰	نمایش مجموعه‌ها با نمادهای ریاضی
۱۲	اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها
۱۹	بی‌شماری
۲۶	مجموعه و احتمال
۳۳	فصل ۲ - عددهای حقیقی
۳۴	عددهای گویا
۳۹	اعداد حقیقی
۴۱	قدر مطلق و محاسبه تقریبی
۴۳	فصل ۳ - استدلال و اثبات در هندسه
۴۴	گفت‌وگو
۴۷	آشنایی با اثبات در هندسه

۵۲	هم‌نهشتی مثلث‌ها
۵۳	حل مسئله در هندسه
۶۴	شکل‌های متشابه
۶۷	<b>فصل ۴- توان و ریشه</b>
۶۸	توان صحیح
۵۴	پیدا کردن مقدار یک عبارت جبری
۷۰	نماد علمی
۷۰	ریشه‌گیری
۷۳	جمع و تفریق رادیکال‌ها
۷۷	<b>فصل ۵- عبارت‌های جبری</b>
۷۸	گفت‌وگو
۸۱	چندجمله‌ای‌ها
۸۸	اتحاد و تجزیه
۱۰۰	نامعادله
۱۰۵	<b>فصل ۶- خط و معادله‌های خطی</b>
۱۰۶	شیب و معادله خط
۱۱۴	دستگاه معادله‌های خطی
۱۱۷	<b>فصل ۷- عبارت‌های گویا</b>
۱۱۸	گفت‌وگو
۱۲۰	ساده کردن عبارت‌های گویا
۱۲۲	تقسیم چندجمله‌ای‌ها

۱۲۷	فصل ۸- حجم و مساحت
۱۲۸	حجم و سطح کره
۱۳۲	چندوجهی
۱۳۹	حجم هرم و مخروط
۱۴۰	سطح و حجم
۱۴۳	دربارهٔ طرح روی جلد
۱۴۷	کتابنامه





## مجموعه‌ها

## فصل ۱



یکی از ایده‌های مهم برای کار کردن با اعضای یک مجموعه، تقسیم آن مجموعه به زیرمجموعه‌های مجزاست. برای مثال می‌توان اعداد طبیعی را به دو زیرمجموعه اعداد زوج و فرد تقسیم کرد. البته این نوع تقسیم‌بندی به غیر از ریاضیات در جاهای دیگر نیز کاربرد دارد.

## یک گروه اجتماعی مجازی

مدتی بود که معلم ریاضی برای بالا بردن بازدهی کلاس و نشاط بیشتر، یک گروه اجتماعی مجازی درست کرده بود و تقریباً همه دانش‌آموزان کلاس عضوش بودند. در یک سرشب معمولی، تالار گفت‌وگو طبق معمول داغ بود. معلم هم هر چند دقیقه یک‌بار نظر مفیدی می‌داد تا اینکه یکی از دانش‌آموزان متن زیر را فرستاد:

چند روزه که به مطلب خیلی جالب خوندم، الان براتون می‌فرستم.

اعدادی که امروز به اعداد انگلیسی مرسوم است، در اصل اعدادی هستند که خوارزمی دانشمند بزرگ مسلمان آنها را ابداع نمود. در این اعداد هر عدد با تعداد زاویه شناسایی میشود، یعنی عدد 1 دارای یک زاویه است و عدد 2 دارای دو زاویه ..... و عدد 9 دارای نه زاویه بود، و بعد از فتح اندلس و انتشار علم ریاضی توسط مسلمانان در اروپا این نوع اعداد مورد پسند اروپاییان قرار گرفت و جایگزین اعداد رومی شد / خوارزمی دانشمند فارس زبان مسلمان این اعداد را از اعداد هندی استخراج و ابداع نمود

اعداد انگلیسی چطور ساخته شده اند؟

Write a message...

بعد از این بلافاصله تقریباً همه به تشویق و نظر دادن پرداختند، و جالب این بود که بعد از کمتر از نیم ساعت معلوم شد که این عکس به گروه‌ها و کانال‌های دیگر راه پیدا کرده و بیش از چند هزار بار مورد بازدید قرار گرفته است. در این بین یکی از دانش‌آموزان نظر داد که:

این خارجی‌ها حتی اعدادشون هم رو اصول هندسی درست شده

به دنبال آن نظرات دیگر آمد و آمد تا آنجا که نتیجه بحث به اینجا رسید:

به خاطر همینکه که ما تو هندسه عقب مونديم!

تا ساعتی بحث ادامه پیدا کرد، تا اینکه طبق قانون همیشگی گروه، در رأس ساعت ده شب، همه آف شدند. چیزی که در بین استیکرهای تشویق، تعجب و نظرات برای دقایقی نادیده گرفته شد، عدم حضور معلم ریاضی بود!

فردای آن روز معلم ریاضی سر کلاس آمد. او آرام آمد و روی صندلی نشست؛ او مثل همیشه خوش و بیش نکرد؛ مثل همیشه لبخند نداشت؛ حتی مثل همیشه تکالیف را ندید! او و در نتیجه کل کلاس ساکت ساکت بودند. بالاخره جسورترین و معتبرترین دانش آموز کلاس پرسید:

دانش آموز: ببخشید می توانم چیزی بپرسم؟

معلم با اشاره سر اجازه داد، و از آنجایی که با ادب بود در ادامه گفت: بله.

دانش آموز: اتفاقی افتاده آقا؟

معلم: نه... چیز جدیدی نیست! منتها من تازه آن را فهمیدم.

کلاس در سکوت فرو رفت.

دانش آموز: یکی از ما کاری کرده که شما ناراحت شدید؟

معلم فقط نگاه کرد.

دانش آموز: دیروز شما در گروه بودید و به یک باره از شما خبری نشد. امروز هم سکوت تان کاملاً

نشان می دهد که چیزی شده است. احتمالاً ما کاری کرده ایم.

معلم باز هم نگاه کرد و پاسخی نداد، اما سرش را به نشانه تأسف تکان داد. او بدون اینکه به فرد خاصی نگاه کند رو به جمعیت کلاس سکوتش را شکست.

معلم: وقتی یکی از شما مطلب چرندی می گذارد، و بقیه بدون فکر و تحلیل می پذیرند و حتی

تشویقش می کنند، من با خود فکر می کنم که اگر قرار نیست ریاضیاتی که می خوانید

شعور شما را بالاتر ببرد و به شما فکر کردن بیاموزد، پس به چه درد می خورد؟ عقل

هم خوب چیزی است.

## معرفی مجموعه

۱. تعدادی از دانش‌آموزان «علامه حلی» و «فرزانگان» را به اردوی راهیان نور برده‌اند. تعداد دانش‌آموزانی که از «علامه حلی» در اردو شرکت کرده‌اند، برابر است با تعداد دانش‌آموزانی که از «فرزانگان» در اردو شرکت نکرده‌اند. تعداد دانش‌آموزانی که در اردو شرکت کرده‌اند بیشتر است یا تعداد دانش‌آموزان فرزانگان؟



۲. کدام یک بیانگر مجموعه تهی است؟

- |             |           |                |                    |
|-------------|-----------|----------------|--------------------|
| الف) $\Phi$ | ب) $\{\}$ | ج) $\emptyset$ | د) $\{0\}$         |
| ه) $\circ$  | و) $\phi$ | ز) $[]$        | ح) $\{\emptyset\}$ |

۳. کدام یک از عبارت‌های زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

الف) اعداد اول بین ۲۴ تا ۲۸

ب) اعداد طبیعی بزرگ‌تر از ۱۸

ج) دو عدد که حاصل ضرب آنها برابر ۴ باشد.

د) سه عدد طبیعی متمایز که مجموع آنها برابر ۷ باشد.

ه) چهار عدد طبیعی متمایز که مجموع آنها برابر ۱۲ باشد.



## مجموعه‌های برابر و زیرمجموعه

۱. اگر  $A = \{a, b, \{a\}, \{a, b\}\}$ ، آنگاه کدام یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف)  $\{a\} \subseteq A$       ب)  $\{a\} \in A$       ج)  $\{a, b\} \subseteq A$       د)  $\{b\} \in A$

۲. اگر  $a = b$  و  $c = d$ ، آنگاه مجموعه  $\{\{a\}, \{a, b\}, \{\{a, b, c\}, a\}\}$  با کدام یک از

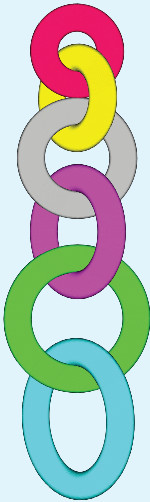
مجموعه‌های زیر برابر است؟

الف)  $\{\{a, b\}, \{a, a\}, \{\{a, c\}, b, a\}\}$       ب)  $\{\{a\}, \{a, b\}, \{\{a, c\}, a\}\}$   
ج)  $\{\{a\}, \{\{a, d\}, b\}\}$       د)  $\{\{a, d\}, \{\{a\}, c\}\}$

۳. اگر دو مجموعه  $\{\{z\}, \{z-1, y+1\}, \{3\}$  و  $\{x+1, \{y+1\}, \{2, 1\}\}$  برابر باشند، آنگاه مقدار  $x + y + z$  را به دست آورید.

● باتوجه به تعریف «زنجیر» که در زیر آمده است، به پرسش‌های ۴ و ۵ پاسخ دهید.

### زنجیر



اگر  $A$  یک مجموعه باشد، به مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های  $A$  که بین هر دو عضو آن رابطه زیرمجموعه  $(\subseteq)$  برقرار باشد، یک «زنجیر» می‌گویند.

برای مثال، اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، آنگاه مجموعه زیر، یک زنجیر سه عضوی از مجموعه  $A$  است.

$$\{\{1\}, \{1, 3, 4\}, \{1, 3\}\}$$

زیرا:

$$\{1, 3\} \subseteq \{1, 3, 4\}, \{1\} \subseteq \{1, 3, 4\}, \{1\} \subseteq \{1, 3\}.$$

۴. فرض کنید  $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ . سه زیرمجموعه از  $X$  مثال بزنید که به همراه دو

زیرمجموعه  $\{a\}$  و  $\{a, e\}$  یک زنجیر تشکیل دهند.

۵. فرض کنید  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ . دو زیرمجموعه  $\{1\}$  و  $\{1, 3, 5, 7\}$  از مجموعه  $M$  را در نظر بگیرید. حداکثر چند زیرمجموعه دیگر از  $M$  به همراه این دو زیرمجموعه، تشکیل یک زنجیر می‌دهند؟

● باتوجه به تعریف «پادزنجیر» که در زیر آمده است، به پرسش‌های ۶ و ۷ پاسخ دهید.

### پادزنجیر

اگر  $A$  یک مجموعه باشد، به مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های  $A$  که بین هیچ دو عضو آن رابطه زیرمجموعه برقرار نباشد، پادزنجیر می‌گویند. برای مثال اگر  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ، آنگاه مجموعه زیر، یک پادزنجیر سه عضوی است.

$$\{\{1\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}\}.$$

۶. اگر  $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ ، آنگاه با اضافه کردن شش زیرمجموعه از  $X$  به مجموعه‌های زیر، یک پادزنجیر هشت عضوی بسازید.

$$\{a\}, \{b\}.$$

۷. اگر  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ، آنگاه حداکثر با چند زیرمجموعه  $A$  می‌توان یک پادزنجیر ساخت؟ آن را بسازید.

۸. دو زیرمجموعه از اعداد طبیعی چهار رقمی داریم. مجموعه  $A$  شامل اعدادی است که حاصل ضرب ارقامشان برابر ۲۵ باشد و مجموعه  $B$  شامل اعدادی است که حاصل ضرب ارقامشان برابر ۲۷ باشد. نسبت تعداد عضوهای مجموعه  $A$  به تعداد عضوهای مجموعه  $B$  را به دست آورید.

۹. فرض کنید  $A$  مجموعه اعداد دورقمی باشد. اگر  $B$  زیرمجموعه‌ای از  $A$  باشد که عضوهای آن به صورت  $5k$  باشند و  $k \in A$ ، آنگاه  $B$  چند عضو دارد؟ حاصل جمع اعضای  $B$  چیست؟

۱۰. اگر مجموعه سه عضوی  $\{x, y, z\}$  زیرمجموعه اعداد طبیعی باشد و  $xyz = 1394$ ، آنگاه چند مجموعه  $\{x, y, z\}$  وجود دارد؟

- باتوجه به تعریف «جمع و ضرب دونه‌به‌دونه» که در زیر آمده است به پرسش‌های ۱۱، ۱۲، ۱۳ و ۱۴ پاسخ دهید.

### جمع و ضرب دونه‌به‌دونه

- برای دو زیرمجموعه  $A$  و  $B$  از اعداد صحیح،
- «جمع دونه‌به‌دونه»  $(\oplus)$ ، یعنی جمع زدن تک‌تک اعضای مجموعه  $A$  با تک‌تک اعضای مجموعه  $B$ .
  - «ضرب دونه‌به‌دونه»  $(\otimes)$ ، یعنی ضرب کردن تک‌تک اعضای مجموعه  $A$  در تک‌تک اعضای مجموعه  $B$ .
- برای مثال، اگر  $A = \{1, 4\}$  و  $B = \{7, 8, 9\}$ ، آنگاه:
- $$A \oplus B = \{8, 9, 10, 11, 12, 13\}, \quad A \otimes B = \{7, 8, 9, 28, 32, 36\}.$$

۱۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

(الف)  $\{1, -2, 3\} \oplus \{2, 3, -1\}$       (ب)  $\{1, -2, 3\} \otimes \{2, 3, -1\}$

۱۲. اگر  $x$  عددی صحیح باشد، آنگاه عبارت زیر با چه اعدادی می‌تواند برابر باشد؟ برای هریک مثال بیاورید.

$$n(\{1, -1, x\} \otimes \{1, 0, -1\})$$

۱۳. معادلات زیر را حل کنید.

(الف)  $n(\{1, 2, x\} \oplus \{1, 0, -1\}) = 4$       (ب)  $\frac{n(\{1, x\} \otimes \{x, 1\})}{n(\{1, x\})} = 1$

(ج)  $\{x, 2, 4\} \oplus \{0, x\} = \{-x, x, 0, 1, -1\} \otimes \{-x\}$

۱۴. اگر  $n(A) = 3$  و  $n(B) = 5$ ، آنگاه حداقل و حداکثر مقدار هریک از قسمت‌های زیر چه اعدادی می‌توانند باشند؟ برای هریک مثال بیاورید.

(الف)  $n(A \oplus B)$       (ب)  $n(A \otimes B)$

۱۵. فرض کنید  $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ .

(الف) همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی  $A$  را بنویسید.

(ب) همهٔ زیرمجموعه‌های سه عضوی  $A$  را بنویسید.

(ج) هفت مجموعه از قسمت «ب» چنان انتخاب کنید که هر مجموعهٔ قسمت «الف» زیرمجموعهٔ دقیقاً یکی از این هفت مجموعه باشد. پاسخ خود را با پاسخ هم‌کلاسی هایتان مقایسه کنید.

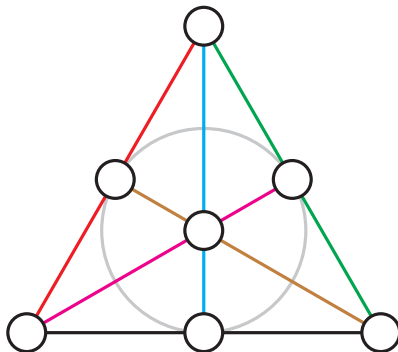
(د) هفت زیرمجموعهٔ به‌دست آمده در قسمت «ج» را از مجموعه‌های قسمت «ب» حذف کنید و از مجموعه‌های باقی‌مانده، هفت زیرمجموعهٔ دیگر بیابید که هر مجموعهٔ قسمت «الف» زیرمجموعهٔ دقیقاً یکی از این هفت مجموعه باشد.

(ه) هریک از اعضای مجموعهٔ  $A$  به چند مجموعهٔ قسمت «ج» تعلق دارد؟

(و) چهارده مجموعهٔ به‌دست آمده در قسمت‌های «ج» و «د» را از مجموعه‌های قسمت «ب» حذف کنید. آیا می‌توانید هفت مجموعه از مجموعه‌های باقی‌مانده چنان انتخاب کنید که هر مجموعهٔ قسمت «الف» زیرمجموعهٔ دقیقاً یکی از این هفت مجموعه باشد؟

(ز) آیا مسئلهٔ زیر جوابی متفاوت از جواب‌های قسمت «ج» دارد؟

زیرمجموعه‌هایی از قسمت «ب» چنان انتخاب کنید که هر مجموعهٔ قسمت «الف» زیرمجموعهٔ دقیقاً یکی از این مجموعه‌ها باشد.

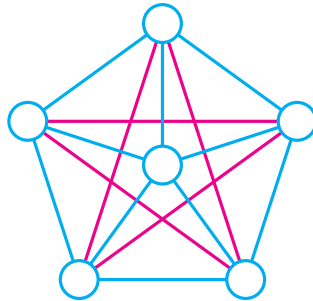


۱۶. مجموعه زیر را در نظر بگیرید.

$$V = \{a, b, c, d, e, f\}$$

الف) هشت زیرمجموعه سه عضوی از  $V$  چنان انتخاب کنید که هر زیرمجموعه دو عضوی  $V$  یا زیرمجموعه دقیقاً دوتا از این هشت مجموعه باشد یا زیرمجموعه هیچ‌کدام از این هشت مجموعه نباشد.

ب) ده مجموعه از زیرمجموعه‌های سه عضوی  $V$  چنان انتخاب کنید که هر زیرمجموعه دو عضوی  $V$  زیرمجموعه دقیقاً دوتا از این ده مجموعه باشد.



۱۷. پروژه. مسئله دختران مدرسه کرکمن<sup>۱</sup>. در سال ۱۸۵۰ میلادی، آقای کرکمن می‌خواست

پانزده دانش‌آموزش را هر روز هفته به گروه‌های سه نفره تقسیم کند. از طرفی او می‌خواست هر دانش‌آموز با هریک از دانش‌آموزان دیگر، دقیقاً یک‌بار هم‌گروه باشد. با چنین شرایطی، آقای کرکمن با چه روشی باید جدول زیر را پر می‌کرد؟

روزهای هفته گروه‌ها	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه
گروه ۱							
گروه ۲							
گروه ۳							
گروه ۴							
گروه ۵							

<sup>۱</sup>Kirkman's schoolgirl problem

## نمایش مجموعه با نمادهای ریاضی

۱. اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف)  $\{x \mid x \in \mathbb{N}\}$

ب)  $\{x \mid (x - 5) \in \mathbb{N}\}$

ج)  $\{x \mid (x - 5) \in \mathbb{N}, \frac{x}{4} \in \mathbb{N}\}$

د)  $\{x + 4 \mid (x - 5) \in \mathbb{N}, \frac{x}{4} \in \mathbb{N}\}$

۲. اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف)  $\{x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

ب)  $\{x \mid \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}\}$

ج)  $\{x \mid \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}, x \geq -8\}$

د)  $\{\sqrt{x+7} \mid \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}, x \geq -8\}$

۳. از ستون سمت چپ به ستون سمت راست وصل کنید.

●  $\{2x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

■  $\{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \dots\}$

●  $\{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

■  $\{\dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots\}$

●  $\{3x^2 - 2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

■  $\{-4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$

●  $\{2x \mid (x + 4) \in \mathbb{N}\}$

■  $\{-2, 1, 10, 25, 46, \dots\}$

●  $\{x \mid 2x \in \mathbb{Z}, x \geq 4\}$

■  $\{2, 5, 10, 17, 26, \dots\}$

●  $\{x \mid (\frac{x}{4} + 3) \in \mathbb{Z}, x > -6\}$

■  $\{4, \frac{9}{4}, 5, \frac{11}{4}, \dots\}$

۴. اعضای مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف)  $\{\frac{x}{4} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{N}, x^2 < 100\}$

ب)  $\{x^2 - 3 \mid -4 < x < 4, x \in \mathbb{Z}\}$

۵. کدامیک از عبارتهای زیر یک مجموعه را مشخص می‌کنند؟

الف)  $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 = 0\}$

ب)  $\{x \mid x \in \mathbb{Z}, 5x + 2 = 5 - 2x\}$

ج)  $\{x \mid x \in \mathbb{N}, x(x - 1) + 1 = x^2 - x + 1\}$

۶. در هر دایره عدد صحیح مناسب قرار دهید.

الف)  $\{3x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq -2\} = \{-7, -4, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \dots\}$

ب)  $\{2x + \bigcirc \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq 4\} = \{-5, \bigcirc, -1, 1, \bigcirc, \bigcirc, \dots\}$

ج)  $\{\bigcirc x + 2 \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq \bigcirc\} = \{8, \bigcirc, 14, 17, \bigcirc, \bigcirc, \dots\}$

د)  $\{\bigcirc x + \bigcirc \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq 1\} = \{\bigcirc, 11, 15, \bigcirc, \bigcirc, \dots\}$

۷. اگر  $A = \{-22, -17, -12, -7, \dots\}$ ، آنگاه کدام یک از عبارتهای زیر درست است؟

الف)  $A = \{x + 5 \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq -27\}$

ب)  $A = \{5x + 3 \mid x \in \mathbb{Z}, x \geq -5\}$

۸. مجموعه‌های برابر را مشخص کنید.

الف)  $\{4x + 2 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

ب)  $\{2x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

ج)  $\{4x + 12 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

د)  $\{4x + 6 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

ه)  $\{4x \mid x \in \mathbb{Z}\}$

و)  $\{2x + 12345678 \mid x \in \mathbb{Z}\}$

۹. اعضای مجموعه  $\{x \mid x^2 \in \mathbb{Z}, -5 < x < 5\}$  را مشخص کنید.

۱۰. اگر  $M = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 10\}$  و  $A = \{\sqrt{a} \mid a \in M\}$ ، آنگاه  $A$  چند عضو صحیح دارد؟

۱۱. اگر  $A$  مجموعه اعداد طبیعی فرد یک رقمی و  $B = \{ab \mid \{a, b\} \subseteq A, a \neq b\}$ ، آنگاه مجموعه  $B$  را با اعضای آن مشخص کنید.

۱۲. فرض کنید  $n$  یک عدد ثابت،  $A = \{3x + n \mid x \in \mathbb{Z}\}$  و  $-23 \in A$ . اگر  $\{a, b\} \subseteq A$ ، آنگاه  $a + b$  به چند تا از مجموعه‌های زیر، می‌تواند تعلق داشته باشد؟

الف)  $\{1395, 1438, 2017\}$

ب)  $\{1357, 1388, 1332\}$

۱۳. فرض کنید  $k$  یک عدد ثابت است و  $A = \{x^2 + k \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x < k\}$ . اگر  $\{6, 9\} \subseteq A$ ، آنگاه مجموعه  $A$  را با اعضای آن مشخص کنید.

- در تعدادی از تمرین‌های این کتاب، از تعریف «حاصل ضرب دو مجموعه» که در زیر آمده، استفاده شده است.

#### حاصل ضرب دو مجموعه

حاصل ضرب دو مجموعه  $A$  و  $B$  را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A \times B = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x \in A, y \in B \right\}.$$

برای مثال، اگر  $A = \{1, 2, 3\}$  و  $B = \{k, t\}$ ، آنگاه:

$$A \times B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ t \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ k \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ t \end{bmatrix} \right\},$$

$$B \times A = \left\{ \begin{bmatrix} k \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} k \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} t \\ 3 \end{bmatrix} \right\}.$$

۱۴. اگر  $A = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 3\}$  و  $B = \{2x \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$ ، آنگاه مجموعه  $A \times B$  را با اعضای آن مشخص کنید.

۱۵. اگر  $A \times B = \left\{ \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ، آنگاه کدام یک از مجموعه‌های زیر  $A$  و کدام یک  $B$  است؟

الف)  $\{2x + 3 \mid x \in \mathbb{Z}, -1 < x \leq 2\}$       ب)  $\{x \mid x^3 - x = 0\}$

ج)  $\{x + 1 \mid \frac{x}{4} \in \mathbb{Z}, 0 < x < 8\}$       د)  $\{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$

۱۶. اگر  $A = \{x \mid x^2 \in \mathbb{N}\}$ ،  $B = \{x^2 \mid x \in \mathbb{N}\}$  و  $C = \{x^2 \mid x^2 \in \mathbb{N}\}$ ، آنگاه مجموعه زیرمجموعه کدام مجموعه زیر است؟  $\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$

الف)  $C \times A$

ب)  $B \times C$

ج)  $A \times C$

د)  $B \times B$

#### اجتماع، اشتراک و تفاضل مجموعه‌ها

۱. اگر  $A = \{4, 5, a\}$ ،  $B = \{1, b, 5, 7\}$  و  $A \cup B = \{5, 7, 1, 2, 6, c\}$ ، آنگاه مقدار  $a + b + c$  را به دست آورید.



۲. اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$ ، ۲۵ عضو دارد. به مجموعه  $A$ ، ۱۰ عضو جدید اضافه کرده‌ایم؛ به اشتراک آنها ۹ عضو اضافه شده است. اجتماع مجموعه  $B$  و مجموعه جدید حاصل از  $A$  چند عضو دارد؟

۳. الف) چند مجموعه  $A$  در رابطه‌های  $A \cap X = A$  و  $A \cup X = \{1, 2\}$  صدق می‌کند؟

ب) چند مجموعه  $X$  در رابطه‌های  $A \cup X = A$  و  $A \cap X = \{1, 2\}$  صدق می‌کند؟

۴. حاصل عبارت‌های زیر را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.

الف)  $\{2x \mid x \in \mathbb{N}\} \cup \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$  ب)  $\{5x \mid x \in \mathbb{N}\} \cap \{4x \mid x \in \mathbb{N}\}$

ج)  $\{4x - 2 \mid x \in \mathbb{N}\} \cup \{4x \mid x \in \mathbb{N}\}$

د)  $\{3x - 1 \mid x \in \mathbb{N}\} \cap \{3x + 2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

۵. در هر قسمت، مجموعه  $A$  را تعیین کنید به‌طوری‌که مجموع اعضای  $A$  برابر ۱۸ باشد.

الف)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $B = \{2, 3, 4, 5\}$

ب)  $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $B = \{2, 3, 5, 7\}$

ج)  $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $A \cap B = \{2, 4\}$

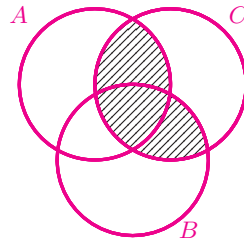
۶. کدامیک از عبارت‌های زیر، قسمت هاشور خورده شکل را نشان می‌دهند؟

الف)  $A \cap (B \cup C)$

ب)  $A \cup (B \cup C)$

ج)  $(A \cap B) \cup C$

د)  $(A \cup B) \cap C$



۷. اگر  $A = \{2x - 1 \mid x \in \mathbb{N}, x < 11\}$  و  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, -11 < x < 11\}$ ، حاصل جمع همهٔ اعضاء بر ۳

$C = \{3x \mid x \in \mathbb{N}\}$ ، آنگاه در کدامیک از مجموعه‌های زیر، حاصل جمع همهٔ اعضاء بر ۳

بخش پذیر است؟

الف)  $(A \cup B) \cap (A \cup C)$

ب)  $(A \cap C) \cup B$

- اگر همهٔ اعضای یک مجموعه، به یک یا چند زیرمجموعهٔ ناتهی جدا از هم تقسیم شوند، آن مجموعه **إفراز** شده است.
- برای مثال، مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  را در نظر بگیرید. در زیر، این مجموعه را در قسمت «الف» به یک «قطعه»، در قسمت «ب» به دو قطعه و در قسمت «ج» به سه قطعه **إفراز** کرده‌ایم.
- الف)  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$       ب)  $\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}$
- ج)  $\{2\}, \{1, 3\}, \{4, 5\}$

۸. در هریک از شکل‌های زیر چه چیزی افزاز شده است؟ تصویر سمت راست، یک قطعه از مجموعه‌ای است که به ۲۴ قطعه افزاز شده است. آن مجموعه چیست؟



۹. چرا هیچ‌یک از قسمت‌های زیر، یک افراز از مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  را نشان نمی‌دهند؟

(الف)  $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}$  (ب)  $\{1, 2\}, \{3, 5\}$

۱۰. الف) تمام پنج افراز مجموعه  $\{1, 2, 3\}$  را بنویسید.

ب) تمام پانزده افراز مجموعه  $\{1, 2, 3, 4\}$  را بنویسید.

۱۱. قطعه  $\{1, 2\}$  به چند افراز از مجموعه  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$  تعلق دارد؟ همه آنها را بنویسید.

۱۲. مجموعه  $\{1, 2\}$  زیرمجموعه قطعه‌های چندتا از افرازهای مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  است؟ همه آنها را بنویسید.

۱۳. هریک از مجموعه‌های  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  و  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  چند افراز دارند؟

۱۴. در زیر، چهار جفت مجموعه برابر وجود دارد. آنها را مشخص کنید.

(الف)  $\{3x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, \frac{x+1}{4} \notin \mathbb{N}\}$  (ب)  $\{4x + 2 \mid x \in \mathbb{N}, \frac{x+1}{3} \notin \mathbb{N}\}$

(ج)  $\{12x - 4 \mid x \in \mathbb{N}\}$  (د)  $\{4x + 2 \mid x \in \mathbb{W}, \frac{x}{3} \notin \mathbb{N}\}$

ه)  $\{6x + 2 \mid x \in \mathbb{N}\} - \{4x - 2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

و)  $\{3x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\} - \{4x + 2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

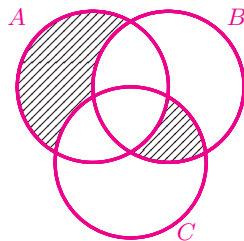
ز)  $\{4x - 2 \mid x \in \mathbb{N}\} - \{6x + 2 \mid x \in \mathbb{N}\}$

ح)  $\{4x + 2 \mid x \in \mathbb{N}\} - \{3x + 1 \mid x \in \mathbb{N}\}$

۱۵. اگر  $A = \{\sqrt{2}, \sqrt{3}, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  و  $B = \{x \mid x \in \mathbb{N}, 3 \leq x \leq 8\}$

و  $C = \{x \mid x^2 \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 2\}$ ، آنگاه چه اعدادی در ناحیه‌های هاشور خورده

شکل زیر قرار دارند؟

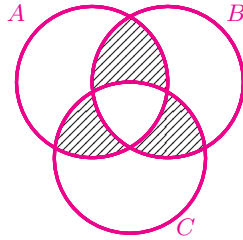


۱۶. کدام یک از عبارات‌های زیر ناحیه هاشور خورده را نشان می‌دهند؟

الف)  $((A \cap B) - C) \cup ((A \cap C) - B) \cup ((B \cap C) - A)$

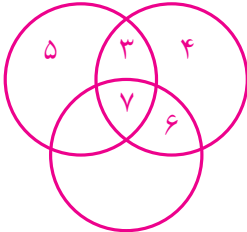
ب)  $((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) - (A \cap B \cap C)$

ج)  $(A \cup B \cup C) - ((A - (B \cup C)) \cup (B - (A \cup C)) \cup (C - (A \cup B)))$



۱۷. مجموعه‌های پنج عضوی  $A$ ،  $B$  و  $C$  زیرمجموعه‌های عددهای طبیعی یک رقمی هستند.

باتوجه به اطلاعات داده شده، اعضای این سه مجموعه را بیابید. این تمرین چند جواب دارد؟



$$A = \{1, 2, 5, \dots, \dots\}$$

$$n(A \cap B) = 3$$

$$\dots = \{4, \dots, \dots, \dots, \dots\}$$

$$n(A \cap C) = 2$$

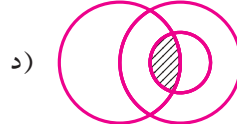
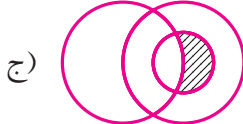
$$\dots = \{2, \dots, \dots, \dots, \dots\}$$

$$n(C - B) = 3$$

$$8 \in B$$

۱۸. در هریک از شکل‌های زیر، دایره‌ها بیانگر مجموعه‌های  $A$ ،  $B$  و  $C$  هستند. کدام یک می‌تواند

$$(A - B) \cap C \text{ باشد؟}$$



۱۹. اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  دارای ۴۰ عضو است. مجموعه‌های  $A - B$  و  $B - A$  به ترتیب

۱۲ و ۱۸ عضو دارند. اگر از هریک از مجموعه‌های  $A$  و  $B$ ، ۹ عضو برداشته شود، از مجموعه

اشتراک آنها ۴ عضو کم می‌شود. تعداد عضوهای اجتماع دو مجموعه جدید، چقدر است؟

۲۰.  $A$ ،  $B$  و  $C$  سه مجموعهٔ ناتهی هستند. درستی هریک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

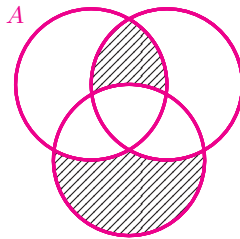
الف) بی‌شمار مثال برای  $A$ ،  $B$  و  $C$  وجود دارد که  $A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$ .

ب) بی‌شمار مثال برای  $A$ ،  $B$  و  $C$  وجود دارد که  $A - (B \cup C) \neq (A - B) \cup (A - C)$ .

۲۱. اگر  $A = \{\sqrt{x} \mid \sqrt{x} \in \mathbb{Z}, x < 1000\}$ ،  $B = \{x + 17 \mid x \in \mathbb{N}, x \leq 20\}$ ،

$C = \{20, 21, 22, \dots, 30\}$  و شکل زیر نمودار ون سه مجموعهٔ  $A$ ،  $B$  و  $C$  باشد، آنگاه

ناحیهٔ سایه خوردهٔ شکل زیر حداکثر چند عضو دارد؟



۲۲. برای سه مجموعهٔ دلخواه  $A$ ،  $B$  و  $C$ ، درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید. درستی تساوی‌ها

را با استفاده از نمودار ون نشان دهید و برای عبارت‌های نادرست یک مثال بیاورید که درستی

آنها را نقض کند.

الف)  $(B \cap C) - A = (B - A) \cap (C - A)$

ب)  $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$

۲۳. اگر  $A \cap B = \emptyset$  و  $A \cap C = \emptyset$ ، آنگاه کدام نتیجه‌گیری درست است؟

الف)  $B \cap C \neq \emptyset$

ب)  $B \cap C = \emptyset$

ج)  $A \cap (B \cup C) = \emptyset$

د)  $A \cap (B - C) \neq \emptyset$

۲۴. فرض کنید  $1394 \in B$ . اگر  $1394$  را به مجموعهٔ  $A$  اضافه کنیم،  $A$  تغییر نمی‌کند. کدام یک

از رابطه‌های زیر همواره درست است؟

الف)  $B \subseteq A$

ب)  $A - B = \emptyset$

ج)  $A \cap B \neq \emptyset$

د)  $A - B \neq \emptyset$

۲۵. یک روز در هنگام نوشیدن قهوه در باشگاه مسافران بین کهکشان‌ها، «ایون تیخی»، عضو برجسته این باشگاه گفت: «پیاده شدن در سیارهٔ «گسیود» خیلی مشکل بود، اما وقتی روی سطح سیاره فرود آمدم، از اینکه تصمیم به دیدن آنجا گرفته بودم پشیمان شدم. در آنجا موجوداتی عجیب زندگی می‌کردند. بیش از ۱۰۰۰ نفر از ساکنان سیاره به پیشوازم آمدند. ۸۱۱ نفر از آنها «یک‌چشم» داشتند! ۷۵۲ نفر آنها «موماری» بودند؛ یعنی روی سرشان به جای مو، مار رشد کرده بود! ۴۱۸ نفر از آنها «پاماهی» بودند؛ یعنی به جای پاهایشان یک دم ماهی داشتند. ۵۷۰ نفرشان، هم یک‌چشم بودند و هم موماری. ۳۵۶ نفرشان، هم یک‌چشم بودند و هم پاماهی. ۳۴۸ نفرشان، هم موماری بودند و هم پاماهی. سرانجام، ۲۹۷ نفر از این عجیب‌الخلقه‌ها، هم یک‌چشم بودند، هم موماری و هم پاماهی. بزرگترین آنها به طرف من آمد و گفت: «در این هنگام استاد «تارانتوف» که به داستان مسافرت ایون تیخی گوش می‌کرد، با صدای بلند گفت: «من می‌دانم که در آن سیاره، چند نفر فقط یک‌چشم هستند؛ چند نفر فقط موماری هستند و چند نفر فقط پاماهی.»

الف) تارانتوف از چه راهی تعداد آن موجودات عجیب‌الخلقه را پیدا کرده بود؟

ب) دست‌کم چند نفر به پیشواز آمده بودند؟



## بی‌شمارش

در هیچ‌یک از مسائل این بخش، هدف شمارش تعداد اعضای مجموعه‌های داده شده نیست. صرفاً می‌خواهیم بدون شمردن تعداد اعضای مجموعه‌ها، آنها را با یکدیگر مقایسه کنیم.

۱. اعضای مجموعه  $S$  همه اعداد چهار رقمی هستند که رقم‌های آنها ۴ یا ۶ است. تعداد اعضای

مجموعه  $S$  با تعداد اعضای کدام‌یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟

(الف) فرض کنید هر خانه یک جدول  $2 \times 2$  با یکی از دو رنگ آبی یا قرمز رنگ شده است.

اعضای مجموعه  $B$  همه حالت‌های رنگ‌آمیزی این جدول هستند.

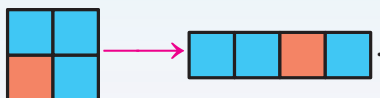
(ب) اعضای مجموعه  $A$  همه حالت‌های ممکن در پرتاب همزمان چهار سکه هستند.

(ج) اعضای مجموعه  $C$  همه حالت‌های ممکن چهار بار پرتاب یک سکه هستند.

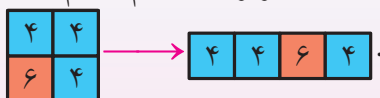
وحیده، صبا و دریا، این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. درستی راه‌حل هریک را بررسی کنید.

### راه‌حل وحیده

هر حالت از رنگ‌آمیزی جدول  $2 \times 2$  را به یک جدول  $1 \times 4$  تبدیل می‌کنیم. برای مثال:



اکنون اگر رنگ آبی را ۴ و رنگ قرمز را ۶ بنامیم، داریم:



حال جدول  $1 \times 4$  بالا را عدد ۴۴۶۴ در نظر می‌گیریم. در نتیجه  $n(B) = n(S)$ .

راه حل صبا

فرض کنید پشت و روی سکه‌ها اعداد ۴ و ۶ نوشته شده باشد. بنابراین یکی از حالت‌های پرتاب این چهار سکه به صورت زیر است.



حالت پرتاب بالا را عدد ۴۶۴۴ در نظر می‌گیریم. پس  $n(A) = n(S)$ .

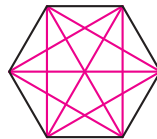
راه حل دریا

چهار جایگاه زیر را در نظر بگیرید.

هزارگان	صدگان	دهگان	یکان

پشت و روی سکه اعداد ۴ و ۶ را بنویسید. عدد رو شده در پرتاب‌های اول، دوم، سوم و چهارم را به ترتیب در جایگاه‌های یکان، دهگان، صدگان و هزارگان بالا بنویسید. بنابراین  $n(C) = n(S)$ .

۲. مجموعه  $S$  شامل همه قطرهای یک شش ضلعی است. تعداد اعضای مجموعه  $S$  با تعداد اعضای کدام یک از مجموعه‌های زیر برابر است؟



الف) کشوری شش شهر دارد که بین هر دو تا از آن شهرها یک خط هوایی وجود دارد. مجموعه  $A$  شامل همه خطوط هوایی بین این شهرهاست.

ب) شش تیم والیبال در یک گروه هستند که هر تیم باید با همه تیم‌های دیگر گروه، یک بار بازی کند. هریک از اعضای مجموعه  $B$  نشان‌دهنده یکی از بازی‌های این گروه است.



۳. می‌خواهیم با سه تکه پارچه هم‌عرض، پرچمی با سه رنگ متفاوت بدوزیم که در آن سه تکه افقی دوخته شوند. می‌توانیم پارچه بالا را یکی از رنگ‌های سبز، آبی، قهوه‌ای یا مشکی، پارچه میانی را یکی از رنگ‌های سفید، صورتی یا بنفش و پارچه پایینی را یکی از رنگ‌های قرمز یا زرد انتخاب کنیم. اگر همه حالت‌هایی را که می‌توان با شرایط گفته شده پرچم دوخت، مجموعه  $S$  بنامیم، تعداد اعضای مجموعه  $S$  با تعداد اعضای کدامیک از مجموعه‌های زیر برابر است؟



الف) اعضای مجموعه  $A$ ، همه اعداد سه‌رقمی هستند که یکان، دهگان و صدگان آنها به ترتیب از مجموعه‌های  $\{1, 2, 3\}$ ،  $\{4, 5\}$  و  $\{6, 7, 8, 9\}$  انتخاب شده باشند.

ب) هریک از اعضای مجموعه  $B$  حالتی را نشان می‌دهد که یک نفر بتواند از ۲ شلوار، ۴ پیراهن و ۳ کت متفاوت، یک تیپ بزند!

ج) دو فنجان، سه نعلبکی و چهار قاشق چایخوری، همگی متمایز، در فروشگاه‌های وجود دارد. اعضای مجموعه  $C$  همه حالت‌هایی را نشان می‌دهند که می‌توان از میان این لوازم، دو قلم کالا با نام‌های متفاوت خرید.



۴. تعداد اعضای کدام مجموعه‌ها با هم برابرند؟

(الف) مجموعه  $A$  شامل همهٔ اعداد چهار رقمی است که با رقم‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ نوشته می‌شوند و رقم تکراری ندارند.

(ب) مجموعه  $B$  همهٔ اعداد چهار رقمی است که از جابه‌جایی رقم‌های ۳، ۳، ۶، ۸ ساخته می‌شوند.

(ج) مجموعه  $C$  همهٔ کلماتی است که از جابه‌جایی حروف  $M, A, T, H$  ساخته می‌شوند.

(د) مجموعه  $D$  شامل همهٔ حالت‌های ایستادن عرفان، الیاس، پوریا و کیان در یک صف است.



۵. جفت مجموعه‌هایی را که تعداد اعضای آنها برابر است، مشخص کنید.

(الف) اعضای مجموعه  $A$  همهٔ اعداد سه رقمی هستند که با رقم‌های ۱ و ۲ نوشته می‌شوند.

(ب) اعضای مجموعه  $B$  همهٔ اعداد دو رقمی هستند که با رقم‌های ۱، ۲ و ۳ نوشته می‌شوند.  
(تکرار رقم‌ها مجاز است.)

(ج) از شهر  $x$  به شهر  $y$  سه جاده وجود دارد. از شهر  $y$  به شهر  $z$  نیز سه جاده وجود دارد. مجموعه  $C$  همهٔ مسیرهای ممکن را که می‌توان از  $x$  به  $z$  رفت، نشان می‌دهد.

(د) اعضای مجموعه  $D$  همهٔ حالت‌های ممکن سه‌بار پرتاب یک سکه هستند.

برای هر جفت مجموعه‌های بالا که مشخص کرده‌اید، مجموعه دیگری مثال بزنید که تعداد اعضای آن مجموعه با تعداد اعضای مجموعه‌های آن جفت برابر باشد.

۶. جفت مجموعه‌هایی که تعداد اعضای آنها باهم برابر است را مشخص کنید.

الف) آشپزی باید شش غذای کباب‌کوبیده، شیش‌لیک<sup>۱</sup>، قرمه‌سبزی، لوبیاپلو، عدس‌پلو و باقالی‌پلو با گوشت را برای شش مشتری ارسال کند. اعضای مجموعه  $A$  همه حالت‌هایی هستند که آشپز می‌تواند این شش غذا را به هریک از سه پیک موتوری که دارد، بسپارد. (آشپز می‌تواند هر شش غذا را به یک پیک بسپارد!)

ب) مجموعه  $B$  همه اعداد ۳ رقمی است که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ ساخته می‌شوند. (تکرار ارقام مجاز است.)

ج) مجموعه  $C$  همه اعداد ۶ رقمی است که با ارقام ۱، ۲ و ۳ ساخته می‌شوند.

د) مجموعه  $D$  همه حالت‌هایی است که بتوان سه توپ متمایز را در شش جعبه متمایز قرار داد.



برای هر جفت مجموعه‌های بالا که مشخص کرده‌اید، مجموعه دیگری مثال بزنید که تعداد اعضای آن مجموعه با تعداد اعضای مجموعه‌های آن جفت برابر باشد.

● در تعدادی از تمرین‌های این بخش، از تعریف دو عدد هم‌رقم که در زیر آمده، استفاده شده است.

#### دو عدد هم‌رقم

دو عدد را هم‌رقم می‌نامیم هرگاه مجموعه رقم‌های دو عدد برابر باشند. برای مثال، اعداد ۱۲ و ۲۱ هم‌رقم هستند. چون مجموعه رقم‌های ۱۲ مجموعه  $\{1, 2\}$  و مجموعه رقم‌های ۲۱ مجموعه  $\{2, 1\}$  است و  $\{1, 2\} = \{2, 1\}$ .

<sup>۱</sup> «شیش» در ترکی قفقازی همان «سیخ» فارسی است و «لیک» هم علامت نسبت است؛ بنابراین «شیش‌لیک» یعنی «سیخی» و منظور البته کباب سیخی است، در مقابل کباب تابه‌ای و دیگری.

۷. همهٔ اعداد سه رقمی را که با ۱۲۳ هم‌رقم هستند، بیابید.

۸. ده عدد سه رقمی مثال بزنید که رقم‌های آنها متفاوت باشند و با ۱۲۳ هم‌رقم نباشند.

۹. مجموعهٔ  $S$  شامل همهٔ اعداد دو رقمی با رقم‌های متفاوت است که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نوشته می‌شوند.

الف) همهٔ اعضای مجموعهٔ  $S$  را طوری در یک جدول بچینید که اعداد هر ستون هم‌رقم باشند.

ب) همهٔ زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعهٔ  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  را در یک ردیف بنویسید و آنها را با اعداد جدول قسمت «الف» مقایسه کنید.

۱۰. عباس با رقم‌های ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ همهٔ عددهای دورقمی را که رقم تکراری ندارند، نوشته است. اگر اعدادی را که عباس نوشته است، مجموعهٔ  $A$  بنامیم، آنگاه کدام عبارت دربارهٔ  $n(A)$  درست است؟

الف)  $n(A)$  برابر است با تعداد کلمات دوحرفی که با حروف  $a, b, c, d$  و  $e$  می‌توان ساخت به طوری که در کلمات حرف تکراری وجود نداشته باشد.

ب)  $n(A)$  دو برابر تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعهٔ  $\{6, 7, 8, 9, 10\}$  است.

ج)  $n(A)$  برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی مجموعهٔ  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

د)  $n(A)$  برابر است با تعداد حالت‌هایی که می‌توان از ۵ لنگه جوراب شبیه به هم، یک جفت جوراب را انتخاب کرد.



۱۱. مجموعه  $S$  شامل همه اعداد سه رقمی با رقم‌های متفاوت است که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ نوشته می‌شوند.

الف) همه اعضای مجموعه  $S$  را طوری در یک جدول بچینید که اعداد هر ستون باهم هم‌رقم باشند.

ب) همه زیرمجموعه‌های سه عضوی مجموعه  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  را در یک ردیف بنویسید و آنها را با اعداد جدول قسمت «الف» مقایسه کنید.

۱۲. فرض کنید اعضای مجموعه  $A$  همه حالت‌هایی را نشان دهد که از پنج خانم، سه نفر برای شرکت در مسابقه‌ای انتخاب شده باشند و مجموعه  $B$  همه حالت‌هایی باشد که سه آقا می‌توانند در یک صف، پشت سرهم بایستند. با ذکر دلیل، مشخص کنید کدام یک از جمله‌های زیر درست هستند.

الف)  $n(A)$  برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی یک مجموعه پنج عضوی.

ب)  $n(B)$  برابر است با تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی یک مجموعه سه عضوی.

ج) تعداد اعداد سه رقمی که رقم تکراری ندارند و هر سه رقم آنها فرد هستند برابر است با

$$n(A) \times n(B).$$

۱۳. فرض کنید مجموعه  $A$  شامل همه اعداد طبیعی بزرگتر از ۹ باشد که رقم‌های آنها از چپ به راست افزایشی هستند. برای مثال، رقم‌های اعداد ۵۸ و ۱۲۵۷ از چپ به راست افزایشی است ولی رقم‌های اعداد ۴۳ و ۱۴۵۸۸ از چپ به راست افزایشی نیست. کدام یک از عبارت‌های زیر درست است؟

الف) مجموعه  $A$  بی‌شمار عضو دارد.

ب) اگر  $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ، آنگاه تعداد زیرمجموعه‌های  $M$  برابر است با

$$n(A) + 10.$$

## مجموعه و احتمال

۱. تعداد اعضای کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم برابر است؟

(الف) همه حالت‌های ممکن در پرتاب دو سکه

(ب)  $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$

(ج) همه حالت‌های ممکن فرزندان خانواده‌ای که دو فرزند دارند.

(د) همه حالت‌های ممکن که می‌توان دو کارت از بین چهار کارتی که روی آنها اعداد ۱،

۲، ۳ و ۴ نوشته شده است، انتخاب کرد.

۲. در هریک از عبارت‌های زیر، همه حالت‌های ممکن را به صورت حاصل ضرب دو مجموعه نمایش دهید.

(الف) دو بار پرتاب یک سکه

(ب) پرتاب دو تاس شش وجهی

(ج) دو خانواده که هریک یک فرزند دارند.

(د) پرتاب دو تاس که یکی دوازده وجهی و دیگری بیست وجهی باشد.



۳. کدام پیشامد معادل  $\{2, 3, 5\} \times \{2, 3, 5\}$  است؟

(الف) پیشامد اینکه در پرتاب دو تاس، هر دو تاس عدد اول باشد.

(ب) پیشامد اینکه در پرتاب دو تاس، حداقل یک تاس عدد اول باشد.

(ج) پیشامد اینکه در پرتاب دو تاس مجموع دو عدد رو شده کمتر از ۱۱ باشد.

(د) پیشامد اینکه در پرتاب دو تاس مجموع اعداد ظاهر شده، عددی بین ۳ و ۱۱ باشد.

۴. سکه‌ای را چهار بار پرتاب کرده‌ایم.

الف) همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسید.

ب) احتمال اینکه بار سوم رو آمده باشد، چقدر است؟

۵. سکه‌ای را چهار بار پرتاب کرده‌ایم. می‌دانیم بار دوم رو آمده است.

الف) همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسید.

ب) احتمال اینکه دقیقاً دوبار رو آمده باشد، چقدر است؟

۶. سکه‌ای را چهار بار پرتاب کرده‌ایم. می‌دانیم حداقل دو بار رو آمده است.

الف) همهٔ حالت‌های ممکن را بنویسید.

ب) احتمال اینکه دقیقاً سه بار رو آمده باشد، چقدر است؟

۷. فرزند دوم خانوادهٔ رجبی در راه است. اگر فرزند اول این خانواده پسر باشد، احتمال اینکه

فرزند دوم دختر باشد، چقدر است؟

۸. عاطفه در یک مسابقهٔ تلویزیونی شرکت کرده بود. در مرحلهٔ آخر، مجری از یکی از تماشاچیان

پرسید: «شما چند فرزند دارید؟» تماشاچی پاسخ داد: «دو فرزند که یکی کلاس نهم است و

دیگری کلاس هفتم». مجری گفت: «لطفاً جنسیت یکی از فرزندان خود را بگویید.» تماشاچی

گفت: «پسر». سپس مجری به عاطفه گفت که اگر جنسیت فرزند دیگر خانواده را درست

حدس بزند، یک میلیارد تومان جایزهٔ مسابقه را می‌برد. عاطفه چند دقیقه وقت خواست و

مجری رو به دوربین گفت: «بعد از چند پیام بازرگانی، با ادامهٔ برنامه در خدمتتان خواهیم

بود.»

الف) در اصفهان، معصومه از پای تلویزیون بلند شد و سراغ رایانه‌اش رفت. او فرزند دختر

و پسر را به ترتیب اعداد ۱ و ۲ در نظر گرفت. سپس برنامه‌ای نوشت که به‌طور تصادفی

از بین اعداد ۱ و ۲، دو عدد چاپ کند. برای مثال، اگر رایانه اعداد ۱، ۱ را چاپ کند

یعنی هر دو فرزند، دختر هستند. معصومه این برنامه را ابتدا صد بار، سپس هزار بار،

بعد ده‌هزار بار و در نهایت صد‌هزار بار اجرا کرد و نتایج به‌دست آمده را در یک جدول به‌صورت زیر نوشت.

اجرای برنامه	چاپ شدن ۱, ۱	چاپ شدن ۱, ۲	چاپ شدن ۲, ۱	چاپ شدن ۲, ۲
۱۰۰ بار	۱۸ بار	۲۰ بار	۳۴ بار	۲۸ بار
۱۰۰۰ بار	۲۶۴ بار	۲۳۹ بار	۲۴۷ بار	۲۵۰ بار
۱۰۰۰۰ بار	۲۵۱۹ بار	۲۵۰۵ بار	۲۴۹۳ بار	۲۴۸۳ بار
۱۰۰۰۰۰ بار	۲۴۶۱۷ بار	۲۵۱۰۰ بار	۲۵۰۹۶ بار	۲۵۱۱۷ بار

معصومه با خودش گفت که چون یکی از بچه‌های تماشایی، پسر است پس حالت ۱, ۱ به درد نمی‌خورد! بنابراین با توجه به جدول بالا، شانس انتخاب ۲, ۲ (شانس پسر بودن فرزند دیگر) و شانس انتخاب ۱, ۲ یا ۲, ۱ (شانس دختر بودن فرزند دیگر)، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.

اجرای برنامه	شانس انتخاب ۲, ۲	شانس انتخاب ۱, ۲ یا ۲, ۱
۱۰۰ بار	$\frac{28}{28+34+20} \approx 0/3414$	$\frac{34+20}{28+34+20} \approx 0/6585$
۱۰۰۰ بار	$\frac{250}{250+247+239} \approx 0/3396$	$\frac{247+239}{250+247+239} \approx 0/6603$
۱۰۰۰۰ بار	$\frac{2483}{2483+2493+2505} \approx 0/3319$	$\frac{2493+2505}{2483+2493+2505} \approx 0/6680$
۱۰۰۰۰۰ بار	$\frac{25117}{25117+25096+25100} \approx 0/3335$	$\frac{25096+25100}{25117+25096+25100} \approx 0/6664$

چون با زیاد شدن تعداد دفعات آزمایش تصادفی، شانس اینکه ۲, ۲ انتخاب شود به عدد  $\frac{1}{2}$  نزدیک می‌شود، پس احتمال اینکه فرزند دیگر پسر باشد برابر  $\frac{1}{2}$  است. از طرفی چون با زیاد شدن تعداد دفعات آزمایش تصادفی، شانس اینکه ۱, ۲ یا ۲, ۱ انتخاب شود به عدد  $\frac{1}{2}$  نزدیک می‌شود، پس احتمال اینکه فرزند دیگر دختر باشد برابر  $\frac{1}{2}$  است. بنابراین اگر عاطفه به مجری بگوید که فرزند دیگر دختر است، احتمال برنده شدنش دو برابر وقتی است که بگوید فرزند دیگر پسر است.

دربارهٔ درستی استدلال معصومه با هم‌کلاسی‌هایتان بحث کنید.



ب) در شیراز، دو خواهر دربارهٔ شانس برنده شدن عاطفه، در بحث با یکدیگر، استدلال‌هایی به صورت زیر آوردند.

### استدلال خواهر بزرگتر

این خانواده یک فرزند دیگر دارد. این فرزند یا دختر است یا پسر. پس فرزند دیگر به احتمال  $\frac{1}{2}$  پسر و به احتمال  $\frac{1}{2}$  دختر است. پس فرقی ندارد که عاطفه بگوید پسر یا دختر.

### استدلال خواهر کوچکتر

اگر همهٔ حالت‌های ممکن را براساس [ فرزند بزرگتر ] در نظر بگیریم و ابتدا فرض کنیم که تماشایی نمی‌گفت یکی از فرزندانش پسر است، همهٔ حالت‌های ممکن داشتن دو فرزند، به صورت زیر بود:

[ دختر ]، [ پسر ]، [ دختر ]، [ پسر ]، [ فرزند بزرگتر ]، [ فرزند کوچکتر ]

اما چون تماشایی گفته که یکی از فرزندانش پسر است، پس در واقع سه حالت از چهار حالت بالا، همهٔ حالت‌های ممکن مسئله است. بنابراین اگر مجموعهٔ  $S$  همهٔ حالت‌های ممکن،  $A$  پیشامد پسر بودن فرزند دیگر و  $B$  پیشامد دختر بودن فرزند دیگر باشند، داریم:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} \text{پسر} \\ \text{پسر} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{پسر} \\ \text{دختر} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{دختر} \\ \text{پسر} \end{bmatrix} \right\},$$

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} \text{پسر} \\ \text{پسر} \end{bmatrix} \right\}, \quad B = \left\{ \begin{bmatrix} \text{دختر} \\ \text{پسر} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \text{دختر} \\ \text{دختر} \end{bmatrix} \right\}.$$

در نتیجه:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{3}, \quad P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{2}{3}.$$

پس بهتر است عاطفه بگوید که فرزند دیگر دختر است.

چرا استدلال خواهر بزرگتر نادرست و استدلال خواهر کوچکتر درست است؟

ج) در نیشابور، دکتر کُندری و مهندس مسعودی در «عطاری طیرانی»، مشغول خرید و دیدن مسابقه بودند. دکتر کُندری به مهندس مسعودی و آقای طیرانی گفت: «بیایید همهٔ حالت‌های ممکن را بر اساس [جنسیتی که تماشاچی گفت، فرزند دیگر] در نظر بگیریم.» این سه نفر با استدلال‌های زیر، با یکدیگر بحث کردند.

### استدلال دکتر کُندری

قبل از اینکه تماشاچی جنسیت یکی از فرزندانش را اعلام کند، همهٔ حالت‌های ممکن این‌گونه بود:

[دختر]، [دختر]، [پسر]، [دختر]، [پسر]، [پسر]

چون تماشاچی گفت که یکی از فرزندانش پسر است پس دو حالت [پسر] و [پسر]، همهٔ حالت‌های ممکن مسئله است. بنابراین شانس عاطفه در بردن یک میلیارد تومان، پنجاه‌پنجاه است.

### استدلال آقای طیرانی

بر اساس [جنسیتی که تماشاچی گفت، فرزند دیگر]، همهٔ حالت‌های ممکن مسئله این‌گونه خواهد بود:

[پسر کوچکتر]، [پسر بزرگتر]، [پسر]، [دختر کوچکتر]، [دختر بزرگتر]، [فرزند دیگر جنسیتی که تماشاچی گفت]

پس اگر عاطفه بگوید فرزند دیگر دختر است، شانس برنده شدنش دو برابر وقتی است که بگوید فرزند دیگر پسر است.

### استدلال مهندسی مسعودی

قبل از اینکه تماشایی گفته باشد یکی از فرزندان پسر است، همه حالت‌های ممکن این‌گونه می‌باشد:

[ دختر کوچکتر ]، [ دختر بزرگتر ]، [ پسر ]، [ دختر ]، [ پسر کوچکتر ]، [ پسر بزرگتر ]

چون فرزند با جنسیت معلوم، پسر است پس سه حالت [ پسر اول ]، [ پسر دوم ] و [ دختر ]، همه حالت‌های ممکن مسئله هستند. بنابراین اگر عاطفه بگوید فرزند دیگر پسر است، شانس برنده شدنش دو برابر وقتی است که بگوید فرزند دیگر دختر می‌باشد.

درباره درستی یا نادرستی استدلال‌های بالا، با هم‌کلاسی‌هایتان گفت‌وگو کنید.

۹. الف) پڑمان سکه‌ای را دوبار پرتاب کرده است. اگر سکه بار اول رو آمده باشد، احتمال اینکه

بار دوم نیز رو آمده باشد، چقدر است؟

ب) منیژه سکه‌ای را دوبار پرتاب کرده است. اگر از رو آمدن سکه در یکی از پرتاب‌ها اطلاع

داشته باشیم، احتمال اینکه در آن یکی پرتاب نیز سکه رو آمده باشد چقدر است؟

### ترتیب ابجد

الف، ب، ج، د. احتمالا این ترتیب از حروف الفبا را دیده‌اید. آیا تا به حال پرسیده‌اید: این دیگر چه ترتیبی است؟

در میان شاعران ایرانی نوعی عدد نویسی بر اساس حرف‌های الفبا معمول است که به آن «حساب جمله‌ها» یا «ماده تاریخ» می‌گویند. در این شیوه، ترتیب حروف الفبا به شکل زیر است:

أبجد هوز حطی کلیمن سَعَفَص قُرَشَت ثَخَذ ضَطَغ.

البته هیچ یک از این کلمات معنای خاصی ندارند! رابطه حروف با اعداد به شکل زیر است:

الف	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط	ی	ک	ل	م	ن	س	ع
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰	۷۰

هر عدد به حرفی که در بالای آن نوشته شده مربوط است. هریک از حروف دیگر به شکل

زیر به یک عدد مربوط اند:

ف	ص	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ	غ
۸۰	۹۰	۱۰۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۶۰۰	۷۰۰	۸۰۰	۹۰۰	۱۰۰۰

با استفاده از اعداد و حروف بالا، می‌توان یک عدد را با یک جمله یا یک عبارت بیان کرد.

برای مثال، حافظ، تاریخ کشته شدن شاه شیخ ابواسحاق شیرازی را در بیت:

بلبل و سرو و سمن و یاسمن و لاله و گل      هست تاریخ وفات شه مُشکین کاکُل

آورده است. با حساب جمله‌ها داریم:

$$\text{بلبل} = ۶۴ \quad \text{سرو} = ۲۶۶ \quad \text{سمن} = ۱۵۰$$

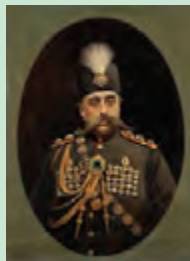
$$\text{یاسمن} = ۱۶۱ \quad \text{لاله} = ۶۶ \quad \text{گل} = ۵۰$$

مجموع این اعداد برابر است با ۷۵۷ که سال کشته شدن ابواسحاق است.

مظفرالدین شاه قاجار (تصویر زیر) در سال ۱۳۲۴ هجری قمری با مشروطه موافقت کرد.

این کار به «عدل مظفر» معروف شد. با حساب جمله‌ها «عدل مظفر» برابر با عدد ۱۳۲۴

است.



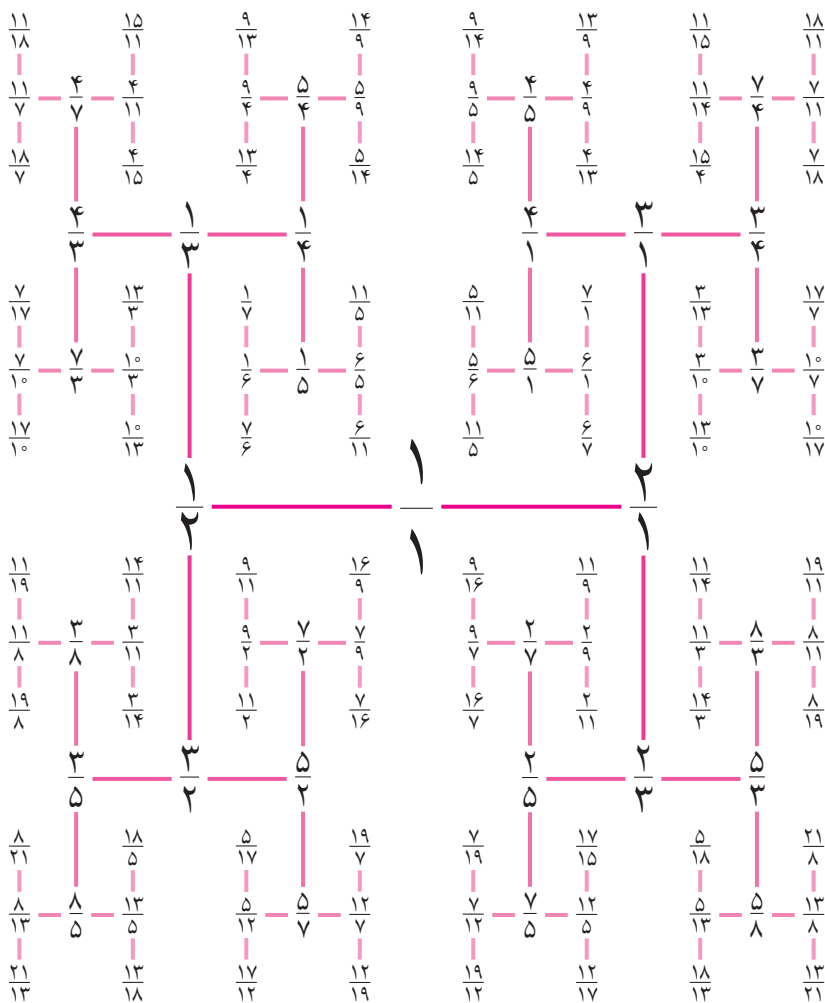
یک عبارت برای سال تولد خود بسازید.



## عددهای حقیقی

## ۲

### فصل



با ادامه دادن الگویی که مشاهده می‌کنید بی‌شمار عدد حقیقی مثبت ساخته می‌شود. ولی این اعداد همه اعداد حقیقی مثبت نیستند؛ زیرا در این الگو اعدادی مانند  $\sqrt{2}$  و  $\pi$  تولید نمی‌شوند.

## عددهای گویا

۱. در هر قسمت، کدام یک از چهار کسر سمت راست، بین دو کسر سمت چپ است؟

(الف)  $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{17}{24}, \frac{91}{120}, \frac{87}{120}, \frac{65}{96}$  (ب)  $\frac{7}{5}, \frac{5}{3}, \frac{23}{15}, \frac{51}{45}, \frac{113}{75}, \frac{119}{90}$

۲. کدام یک از عبارت‌های زیر یک مجموعه را مشخص می‌کند؟

(الف) دو عدد گویای کمتر از یک که مجموع آنها برابر ۲ باشد.

(ب) کوچک‌ترین عدد گویای مثبت

(ج) یک میلیون عدد گویا بین  $\frac{1}{4}$  و  $\frac{1}{3}$

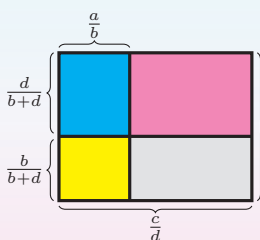
۳. ابتدا هر جفت از کسرهای زیر را با هم مقایسه کنید. سپس کسری بین هر دو کسر بیابید که معخرج آن ۲۴ باشد.

(الف)  $\frac{3}{7}, \frac{2}{5}$  (ب)  $\frac{2}{5}, \frac{1}{3}$

۴. ثابت کنید که اگر  $a, b, c$  و  $d$  چهار عدد مثبت باشند و  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ، آنگاه  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .

مریم و ملیحه این مسئله را با راه‌حل‌های زیر حل کرده‌اند. ابتدا راه‌حل این دو نفر را بررسی کنید. سپس راه‌حل دیگری ارائه دهید.

### راه‌حل مریم



در مستطیل روبه‌رو، مجموع مساحت دو ناحیه آبی و

زرد برابر  $\frac{a}{b}$  است. مجموع مساحت ناحیه‌های آبی،

زرد و صورتی برابر  $\frac{a+c}{b+d}$  می‌باشد. مجموع مساحت

چهار ناحیه آبی، زرد، صورتی و خاکستری برابر است

با  $\frac{c}{d}$ . بنابراین واضح است که:  $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$ .

راه حل ملیحه

فرض کنید در یک لیوان،  $a$  گرم نمک در  $b$  گرم آب حل شده باشد و در یک کاسه،  $c$  گرم نمک در  $d$  گرم آب محلول باشد. اگر این دو محلول را داخل یک پارچ، روی هم بریزیم، آنگاه محلول داخل پارچ،  $a + c$  گرم نمک و  $b + d$  گرم آب دارد. حال فرض کنید غلظت محلول داخل لیوان کمتر از غلظت محلول داخل کاسه باشد (به عبارت دیگر آب نمک داخل کاسه شورتر از آب نمک داخل لیوان باشد یعنی  $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ ). در این صورت غلظت محلول داخل پارچ از غلظت محلول داخل لیوان بیشتر و از غلظت محلول داخل کاسه کمتر است. یعنی:

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}.$$

۵. در مسئله قبل، آیا لازم است هر چهار عدد  $a, b, c, d$  مثبت باشند؟

۶. تلاش کنید که بین دو عدد زیر، عددی بیابید.

$$\frac{23}{99}, \quad \frac{232323}{999999}$$

۷. فرض کنید  $c$  و  $d$  دو عدد طبیعی باشند. تمام مقادیر  $c$  و  $d$  را بیابید به طوری که  $\frac{5}{9} < \frac{c}{d} < \frac{7}{9}$  و  $20 < d$  باشد.

۸. دانا و مانا می‌خواستند عدد  $\frac{72}{100}$  را به صورت کسری بنویسند که صورت آن صحیح و مخرجش طبیعی باشد. راه حل هریک را بررسی کنید.

راه حل دانا

چون همه ارقام بعد از ممیز عدد  $0.727272\ldots$  داخل دوره گردش قرار دارند، کارمان ساده‌تر است. ابتدا رقم‌های عدد  $0.727272\ldots$  را طوری جابه‌جا می‌کنیم که ارقام داخل دوره گردش حداقل یک‌بار قبل از ممیز ظاهر شوند. پس عدد

$۷۲/۷۲۷۲۷۲ \dots$  که  $۱۰۰$  برابر  $۰/۷۲۷۲۷۲ \dots$  است، به دست می‌آید. حال با استفاده از  $۰/۷۲۷۲۷۲ \dots$ ،  $۷۲/۷۲۷۲۷۲ \dots$  و عمل تفریق، ارقام بعد از ممیز را نابود می‌کنیم:

$$۷۲/۷۲۷۲۷۲ \dots - ۰/۷۲۷۲۷۲ \dots = ۷۲.$$

یعنی  $۹۹$  برابر  $۰/۷۲۷۲۷۲ \dots$  مساوی با  $۷۲$  است. پس  $۰/۷۲۷۲۷۲ \dots$  برابر است با  $\frac{۷۲}{۹۹}$ .

#### راه حل مانا

$$\begin{aligned} a = ۰/۷۲ &\implies ۱۰۰a = ۷۲/۷۲ \\ \implies ۱۰۰a - a &= ۷۲/۷۲ - ۰/۷۲ \\ \implies ۹۹a &= ۷۲ \\ \implies a &= \frac{۷۲}{۹۹}. \end{aligned}$$

۹. هریک از اعداد زیر را به کسری تبدیل کنید که صورت آن صحیح و مخرجش طبیعی باشد.

الف)  $۰/۷$       ب)  $۱/۳$       ج)  $۱۲/۲۳$       د)  $-۲/۱۶۸$

۱۰. دانا و مانا این بار می‌خواستند عدد  $۱/۳۲۵۷۵۷۵۷۰۰۰$  را به صورت کسری بنویسند که صورت آن صحیح و مخرجش طبیعی باشد. راه حل هریک را بررسی کنید.

#### راه حل دانا

چون همه ارقام بعد از ممیز عدد  $۱/۳۲۵۷۵۷۵۷۰۰۰$  داخل دوره گردش قرار ندارند، پس کارمان سخت‌تر است؛ چون نمی‌توانیم با یک‌بار جابه‌جا کردن رقم‌ها، رقم‌های



داخل دوره گردش را نابود کنیم، بنابراین ابتدا رقم‌های عدد  $۱/۳۲۵۷۵۷۵۷۰۰۰$  را طوری جابه‌جا می‌کنیم که فقط ارقام داخل دوره گردش، بعد از ممیز بمانند. پس عدد  $۱۳۲/۵۷۵۷۵۷۰۰۰$  که  $۱۰۰$  برابر  $۱/۳۲۵۷۵۷۵۷۰۰۰$  است، به دست می‌آید. سپس رقم‌های  $۱۳۲/۵۷۵۷۵۷۰۰۰$  را طوری جابه‌جا می‌کنیم که ارقام داخل دوره گردش حداقل یک‌بار قبل از ممیز ظاهر شوند. بنابراین عدد  $۱۳۲۵۷/۵۷۵۷۵۷۰۰۰$  که  $۱۰۰۰۰$  برابر  $۱/۳۲۵۷۵۷۵۷۰۰۰$  است، به دست می‌آید. حال با استفاده از  $۱۳۲۵۷/۵۷۵۷۵۷۰۰۰$ ،  $۱۳۲/۵۷۵۷۵۷۰۰۰$  و عمل تفریق، ارقام بعد از ممیز را نابود می‌کنیم:

$$۱۳۲۵۷/۵۷۵۷۵۷۰۰۰ - ۱۳۲/۵۷۵۷۵۷۰۰۰ = ۱۳۱۲۵.$$

یعنی  $۹۹۰۰$  برابر  $۱/۳۲۵۷۵۷۵۷۰۰۰$  مساوی با  $۱۳۱۲۵$  است. پس  $۱/۳۲۵۷۵۷۵۷۰۰۰$  برابر است با  $\frac{۱۳۱۲۵}{۹۹۰۰}$ .

#### راه حل مانا

$$a = ۱/۳۲۵\overline{۷} \Rightarrow ۱۰۰a = ۱۳۲/۵\overline{۷}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰۰۰a = ۱۳۲۵۷/۵\overline{۷}$$

$$\Rightarrow ۱۰۰۰۰a - ۱۰۰a = ۱۳۲۵۷/۵\overline{۷} - ۱۳۲/۵\overline{۷}$$

$$\Rightarrow ۹۹۰۰a = ۱۳۱۲۵$$

$$\Rightarrow a = \frac{۱۳۱۲۵}{۹۹۰۰}.$$

۱۱. هریک از اعداد زیر را به کسری تبدیل کنید که صورت آن صحیح و مخرجش طبیعی باشد.

الف)  $۴/۵\overline{۷۱}$

ب)  $۶۳/۰\overline{۷}$

ج)  $۶۳/۰۷\overline{۱۲}$

د)  $-۲/۱۱\overline{۶۸}$

• باتوجه به تعریف «طول دوره گردش» به پرسش‌های ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ و ۱۶ پاسخ دهید.

### طول دوره گردش

فرض کنید  $a$  یک عدد باشد که درون دوره گردش آن  $n$  رقم موجود باشد. اگر  $n$  کوچکترین عدد ممکن باشد، آنگاه  $n$  را طول دوره گردش  $a$  می‌نامیم. برای مثال، طول دوره گردش  $0.\overline{156}$  برابر ۲ و طول دوره گردش  $3/4398398$  برابر ۳ است.

۱۲. طول دوره گردش هریک از کسرهای زیر را به دست آورد. می‌توانید از ماشین حساب کمک بگیرید.

- |                      |                     |                     |                      |
|----------------------|---------------------|---------------------|----------------------|
| (الف) $\frac{1}{11}$ | (ب) $\frac{5}{32}$  | (ج) $\frac{1}{17}$  | (د) $\frac{2}{11}$   |
| (ه) $\frac{20}{37}$  | (و) $\frac{12}{31}$ | (ز) $\frac{9}{101}$ | (ح) $\frac{41}{333}$ |

۱۳. (الف) عددی با طول دوره گردش ۳ بنویسید که اگر آن را با  $\frac{41}{333}$  جمع بزنیم طول دوره گردش حاصل جمع، برابر ۳ باشد.

(ب) عددی با طول دوره گردش ۳ بنویسید که اگر آن را با  $\frac{41}{333}$  جمع بزنیم طول دوره گردش حاصل جمع، برابر ۱ باشد.

(ج) عددی با طول دوره گردش ۳ بنویسید که اگر آن را با  $\frac{41}{333}$  جمع بزنیم حاصل جمع، دوره گردش نداشته باشد.

۱۴. (الف) طول دوره گردش کسر  $\frac{1}{7}$  را بیابید.

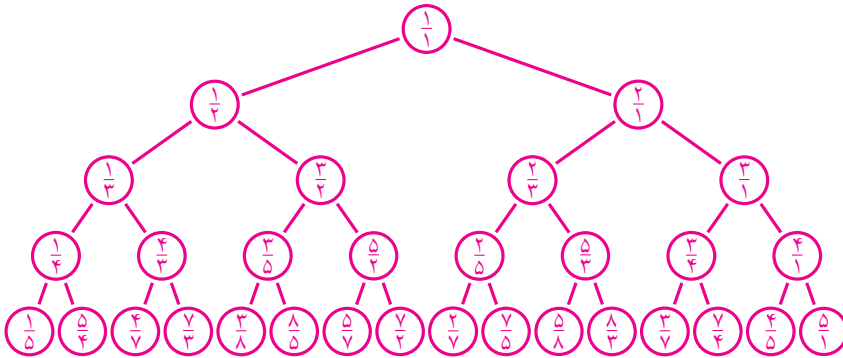
(ب) نمایش اعشاری کسرهای  $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \dots, \frac{6}{7}$  را به کمک ماشین حساب به دست آورید. ارقام داخل دوره گردش این کسرها چه ارتباطی باهم دارند؟

۱۵. (الف) طول دوره گردش کسر  $\frac{1}{13}$  را بیابید.

(ب) نمایش اعشاری کسرهای  $\frac{1}{13}, \frac{2}{13}, \frac{3}{13}, \dots, \frac{12}{13}$  را به کمک ماشین حساب به دست آورید. ارقام داخل دوره گردش این کسرها چه ارتباطی باهم دارند؟

۱۶. پروژۀ. اگر  $p$  عددی اول باشد، برای چه  $p$ هایی طول دوره گردش عدد  $\frac{1}{p}$  برابر  $p - 1$  است؟

۱۷. پروژه. فرض کنید الگوی زیر با رابطه  $\frac{n}{m} / \frac{n}{m+n} \frac{n+m}{m}$  ادامه پیدا کرده باشد.



اگر اعداد این الگو را به صورت زیر، پشت سرهم بنویسیم، الگویی ساخته می شود که نام آن دنباله کالکین-ویلِف<sup>۱</sup> است.

$$\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{1}, \frac{1}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{4}, \frac{2}{5}, \frac{5}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{1}, \dots$$

الف) ثابت کنید در دنباله کالکین-ویلِف هر عدد گویای مثبت دقیقاً یک بار ظاهر می شود.

ب) آیا می توانید روش دیگری برای تولید همه اعداد گویای مثبت بیابید که در آن هر عدد گویای مثبت دقیقاً یک بار ظاهر شود؟ (اگر دنباله شما واقعاً با دنباله کالکین-ویلِف متفاوت باشد، در تمام دنیا نام شما را به خاطر عملکرد این دنباله خواهند شناخت.)

## اعداد حقیقی

۱. نمایش اعشاری اعداد سمت راست چه تفاوتی با نمایش اعشاری اعداد سمت چپ دارند؟

- ۰/۱۲۱۲۱۲۱۲۱۲۱۲۱۲...
- ۰/۰۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲...
- ۲/۱۲۳۴۴۴۴۴۴۴۴۴۴۴۴...
- ۰/۱۰۱۱۰۰۱۱۱۰۰۰۱۱۱۱...
- ۱/۱۲۳۴۱۰۱۱۰۱۰۱۰۱۰۱۰...
- ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳...

<sup>۱</sup>Calkin-Wilf sequence

۲. خوارزمی در کتاب «الجبر و المقابله» دربارهٔ محاسبهٔ محیط دایره نوشته است: «بهترین راه این است که قطر را در  $\frac{22}{7}$  ضرب کنیم. این سریع‌ترین و ساده‌ترین روش است. خدای بزرگ بهتر می‌داند.»

در زیر، عدد  $\pi$  تا سی رقم اعشار نوشته شده است.

۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳۲۸

به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

(الف) اگر در محاسبهٔ محیط دایره به جای  $\pi$  از  $\frac{22}{7}$  استفاده کنیم، چقدر خطا کرده‌ایم؟

(ب) اگر در محاسبهٔ محیط دایره به جای  $\pi$  از  $\frac{255}{113}$  استفاده کنیم، چقدر خطا کرده‌ایم؟

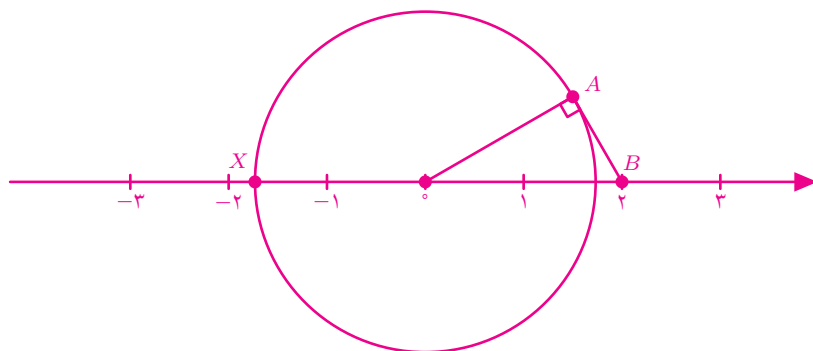
۳. مقدار تقریبی  $\sqrt{2}$  را با ماشین حساب به دست آورید.

(الف) کسری با صورت و مخرج طبیعی، مانند  $\frac{m}{n}$ ، مثال بزنید که  $0 < \sqrt{2} - \frac{m}{n} < 0/0001$ .

(ب) کسری با صورت و مخرج طبیعی، مانند  $\frac{m}{n}$  که  $n$  نسبت به ۲ و ۵ اول باشد، مثال بزنید

که  $0 < \sqrt{2} - \frac{m}{n} < 0/0000001$ .

۴. (الف) در شکل زیر، طول پاره‌خط  $AB$  برابر ۱ واحد است. نقطهٔ  $X$  نشان‌دهندهٔ چه عددی است؟



(ب) فرض کنید  $n \in \mathbb{N}$ ،  $m \in \mathbb{Z}$  و  $n$  نسبت به ۲ و ۵ اول است.  $n$  و  $m$  را طوری بیابید

که  $0 < \frac{m}{n} - X < 0/0000001$ . این مسئله چند جواب دارد؟

۵. مجموعه اعداد حقیقی را به دو زیرمجموعه که هریک بی شمار عضو دارند، افراز کنید.
۶. مجموعه اعداد طبیعی را به دو زیرمجموعه که هریک بی شمار عضو دارند، افراز کنید و هر زیرمجموعه را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.
۷. الف) مجموعه  $\mathbb{N}$  را به سه زیرمجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  که هریک بی شمار عضو دارند، افراز کرده ایم. اگر  $A$ ،  $B$  و  $C$  به صورت زیر باشند، آنگاه جاهای خالی را با عبارت های مناسب پر کنید.

$$A = \{3x \mid x \in \mathbb{O}\}, B = \{3x - \mathbb{O} \mid x \in \mathbb{N}\}, C = \{\mathbb{O}x + \mathbb{O} \mid x \in \mathbb{O}\}$$

- ب) اگر  $x, y \in B$ ، آیا می توان گفت  $x + y$  عضو کدام مجموعه است؟
۸. مجموعه اعداد صحیح را به پنج زیرمجموعه که هر کدام بی شمار عضو دارند، افراز کنید و هر زیرمجموعه را با نمادهای ریاضی نمایش دهید.
۹. فرض کنید مجموعه اعداد صحیح به سه زیرمجموعه  $A$ ،  $B$  و  $C$  که هریک بی شمار عضو دارند، افراز شده باشند. اگر  $A = \{6k + 2 \mid k \in \mathbb{N}\}$  و  $B = \{6k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\}$ ، کدام یک از عددهای زیر عضو مجموعه  $C$  است؟

۵۳ د) -۳۲ ج) -۱۹ ب) -۱۱ الف)

۱۰. ریاضی دان ها مجموعه اعداد گنگ را به دو زیرمجموعه افراز کرده اند. در این باره تحقیق کنید.

## قدرمطلق و محاسبه تقریبی

۱. حاصل هریک از عبارت های زیر را بدون استفاده از نماد قدرمطلق بنویسید.
- الف)  $1 - |1 - |1 - 1||$  ب)  $|2\sqrt{5} - \sqrt{5}|$
- ج)  $|2 - \sqrt{3}| - \sqrt{3}|1 - \sqrt{3}|$  د)  $|10 - \pi^2|$
- ه)  $|(\sqrt{2})^3 - (\sqrt{3})^2| - \sqrt{(\sqrt{2} - \sqrt{3})^2}$

۲. هریک از مجموعه‌های زیر را با اعضایشان مشخص کنید.

- الف)  $\{|x| \mid x \in \mathbb{Z}, -5 \leq x \leq 5\}$   
 ب)  $\{|x - 2| \mid x^2 \in \mathbb{Z}, -4 \leq x \leq 3\}$   
 ج)  $\{x^2 - |-x| \mid x \in \mathbb{Z}, -2 \leq x \leq 4\}$   
 د)  $\{(-1)^{x+3}(x - |x|) \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 4\}$

۳. کدام مجموعه‌ها با هم برابرند؟ آنها را مشخص کنید.

- الف)  $\{x|x| \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 2\}$   
 ب)  $\{x(x+1) \mid x \in \mathbb{N}, 2 \leq x \leq 6\}$   
 ج)  $\{(-1)^x|x - 4|^2 \mid x \in \mathbb{Z}, 1 \leq x \leq 6\}$   
 د)  $\{x \mid x \in \mathbb{R}, x(x+2) = 0\}$   
 ه)  $\{x^3 - |x| \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 1\}$   
 و)  $\{(-1)^{x+4}x^2 \mid x \in \mathbb{Z}, -3 \leq x \leq 2\}$   
 ز)  $\{-9, 4, -1, 0, 1, -4\}$   
 ح)  $\{x^2 - |x| \mid x \in \mathbb{Z}, 2 \leq x \leq 6\}$   
 ط)  $\{x^2 + |x| \mid x \in \mathbb{Z}, -6 \leq x \leq -2\}$

۴. فرض کنید  $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$  و  $n$  نسبت به ۲ و ۵ اول است.  $m$  و  $n$  ای بیابید که

$$0 < \frac{m}{n} - |\sqrt{2} - \sqrt{3}| < 0.0000001.$$

می‌توانید برای محاسبه مقدار تقریبی  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$  از ماشین حساب کمک بگیرید.



تصویر بالا برشی از صدف یک حلزون را نشان می‌دهد. در این برش، خانه‌های کوچکی را می‌بینید که به تدریج بزرگ شده‌اند. اما در روند بزرگ شدن این خانه‌ها، اجزاء طوری متناسب باقی مانده‌اند که همه این خانه‌ها تقریباً مشابه یکدیگرند.

## گفت و گو

### در کلاس هندسهٔ مدرسهٔ علامه حلی

دانش‌آموز: ببخشید یک سؤال دارم که چند وقت است ذهنم را مشغول کرده است. ما برای چه باید هندسه بخوانیم؟

معلم: یعنی قبول نداری هندسه خواندن مفید است؟

دانش‌آموز: بله. قبول دارم تا حدی هندسه خواندن مفید است؛ اما چرا باید این همه مسائل پیچیدهٔ هندسه را حل کنیم؟

معلم: باید خودتان را برای آینده آماده کنید. این مسائل هندسه‌ای که می‌بینید، در آینده برایتان بسیار کاربردی است. برای مثال اگر مهندس طراحی ساختمان بشوید، نیاز به دانش بسیار بالایی هندسه دارید. پس باید هندسه خواند.

دانش‌آموز: ببخشید، اما برادر من مهندس عمران است و خواهرم مهندس معمار. من تا حالا ندیده‌ام که آنها این جور مسائل هندسه را حل کنند؛ یا در انجام دادن پروژه‌هایشان این قضیه‌های هندسه را به‌کار ببرند.

معلم: [درحالی‌که لبخند معنی داری می‌زد] یعنی آنها اصلاً خط و دایره و منحنی نمی‌کشند؟!

دانش‌آموز: یعنی اگر دایره و منحنی بکشند با هندسه سروکار دارند؟

معلم: بله.

دانش‌آموز: پس با این استدلال یعنی همهٔ نقاش‌ها و هنرمندان هم هندسه‌دان هستند!

معلم: بله.

دانش‌آموز: من حتماً امتحان می‌کنم. اگر هنرمندان و نقاش‌ها هندسه‌دان باشند باید بتوانند به‌سادگی مسائل معمولی هندسهٔ این کتاب را حل کنند.



در حالی که به نظر بحث تمام شده بود، دوباره همان دانش آموز تکرار کرد: «من حتماً امتحان می‌کنم.»

### در کلاس هندسهٔ مدرسهٔ فرزندگان

دانش‌آموز: ببخشید یک سؤال دارم که چند وقت است ذهنم را مشغول کرده است. ما برای چه باید هندسه بخوانیم؟

معلم: هندسه تمرینی است برای رشد ذهن. وقتی دربارهٔ یک مسئلهٔ هندسه فکر می‌کنیم در واقع ذهنمان را مجبور می‌کنیم که از یک سری قواعد و اصول ساده، بتواند نتایج پیچیده‌تری را به دست آورد.

دانش‌آموز: این مسئله در مورد ریاضی خواندن هم درست است؟  
معلم: بله.

دانش‌آموز: پس چرا هندسه می‌خوانیم؟ چرا هندسه را از کتاب‌های ریاضی حذف نمی‌کنیم و فقط ریاضی نمی‌خوانیم؟

معلم: در واقع در کمتر جایی از ریاضی است که اینقدر اصول و قواعد واضح باشد و از پایه‌های مشخصی نتایج پیچیده و خیره‌کننده بگیریم. یعنی قبول نداری هندسه خواندن مفید است؟

دانش‌آموز: بله. قبول دارم تاحدی هندسه خواندن مفید است. اما چرا باید این همه مسائل پیچیدهٔ هندسه را حل کنیم؟

معلم: باید خودتان را برای آینده آماده کنید. این مسائل هندسه‌ای که می‌بینید در آینده برایتان تقریباً کاربردی ندارند؛ اما در فرایند آموزشی، رشد ذهنی حاصل از هندسه لازم است. پس باید هندسه خواند.

دانش‌آموز در حالی که دیگر چیزی نگفت با خودش فکر می‌کرد که چطور می‌توانم درستی این ادعا را نشان دهم. شاید فعلاً باید اعتماد کنم.

## در کلاس هندسه مدرسه شهید بهشتی

دانش‌آموز: ببخشید یک سؤال دارم که چند وقت است ذهنم را مشغول کرده است. ما برای چه باید هندسه بخوانیم؟

معلم: هندسه! یعنی قبول نداری هندسه خواندن مفید است؟

دانش‌آموز: [درحالی‌که سرش را می‌خاراند] اگر توهین نباشد، «نه»؛ قبول ندارم.

معلم: خب. به نظر تو به‌جای هندسه خواندن، خواندن چه چیزی مفید است؟

دانش‌آموز: [با تردید] به‌جای هندسه؟

دانش‌آموز لحظه‌ای فکر کرد. اگر معلم گفته بود «خواندن چه چیزی مفید است»، او می‌توانست لیستی از مطالب مهم و ضروری زندگی را ارائه دهد. اما معلمشان گفته بود «به‌جای هندسه خواندن».

دانش‌آموز: باید بینم که هندسه خواندن قرار است چه مهارتی را در من رشد دهد؟

معلم: مثلاً وقتی هندسه می‌خوانیم یاد می‌گیریم که چطور متن‌ها را تبدیل به شکل کنیم.

دانش‌آموز: این مهارت، در آینده من نقش دارد؟

معلم: به نظر من، بله.

معلم دیگر چیزی نگفت و با خودش فکر کرد که چطور می‌تواند درستی این ادعا را نشان دهد.

### بخشی از کتاب «درباره استدلال‌های هندسی»

یک روز در ابتدای سال تحصیلی، به گفت‌وگوی دو دانش‌آموز سیزده ساله گوش می‌کردم. آنها درباره درس‌های تازه‌ای که داشتند، بحث می‌کردند. یکی از آنها از درس هندسه با شگفتی یاد می‌کرد. او می‌گفت: «درس بسیار عجیبی است، معلم وارد کلاس می‌شود، دو مثلث برابر روی تخته رسم می‌کند و در تمام طول ساعت تلاش می‌کند، برابری آنها را برای ما ثابت کند. هیچ‌کس نمی‌فهمد این تلاش بیهوده درباره مطلبی که واضح است، چه لزومی دارد؟!»

## آشنایی با اثبات در هندسه

### قضیه

بسیاری از مسائل ریاضی، فرض و حکم دارند. فرض، داده‌هایی از مسئله است که درستی آنها را می‌پذیریم. حکم، موضوعی است که باید درست یا نادرست بودنش را بررسی کنیم. اگر به کمک فرض‌های مسئله و حقایقی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، توانستیم درست بودن حکم را نتیجه بگیریم، می‌توانیم به آن مسئله قضیه بگوییم. معمولاً ریاضی‌دان‌ها قضیه‌هایی را که در اثبات مسائل کاربرد فراوان دارند، نام‌گذاری می‌کنند.

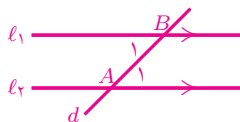
### چند قضیهٔ پرکاربرد

قضیه‌های زیر در حل مسائل هندسه کاربرد فراوان دارند. فرض و حکم هریک را بنویسید.

۱. قضیهٔ زاویه‌های متقابل به‌رأس. زاویه‌های متقابل به‌رأس برابرند.

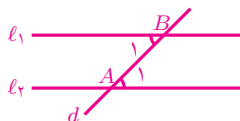
۲. الف) قضیهٔ خطوط موازی و مورب. اگر خط  $d$  دو خط موازی  $\ell_1$  و  $\ell_2$  را قطع کند و

زاویه‌های  $A_1$  و  $B_1$  را پدید آورد، آنگاه  $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ .



ب) عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب. اگر خط  $d$  دو خط  $\ell_1$  و  $\ell_2$  را قطع کند و

زاویه‌های  $A_1$  و  $B_1$  پدید آیند به‌طوری‌که  $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ، آنگاه  $\ell_1$  و  $\ell_2$  موازی‌اند.



۳. قضیه مجموع زاویه‌های مثلث. مجموع زاویه‌های هر مثلث  $180^\circ$  درجه است.
۴. قضیه زاویه خارجی مثلث. اندازه هر زاویه خارجی در یک مثلث دلخواه برابر است با مجموع اندازه‌های زاویه‌های داخلی غیر مجاورش.
۵. اصل اض‌رض. اگر دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی با دو ضلع و زاویه بین آنها از مثلثی دیگر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
۶. قضیه ض‌ض‌ز. اگر دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی با دو زاویه و ضلع بین آنها از مثلثی دیگر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
۷. قضیه ض‌ض‌ض. اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلثی دیگر برابر باشد، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
۸. قضیه ز‌ز‌ض. اگر دو زاویه و ضلع غیر بین آنها از یک مثلث با دو زاویه و ضلع غیر بین آنها از مثلثی دیگر، نظیر به نظیر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.
۹. الف) قضیه عمودمنصف. هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط فاصله یکسان دارد.
- ب) عکس قضیه عمودمنصف. اگر نقطه‌ای از دو سر یک پاره‌خط فاصله یکسان داشته باشد، این نقطه روی عمودمنصف پاره‌خط قرار دارد.
۱۰. الف) قضیه مثلث متساوی‌الساقین. در هر مثلث متساوی‌الساقین زاویه‌های پای ساق باهم برابرند.
- ب) عکس قضیه مثلث متساوی‌الساقین. اگر مثلثی دو زاویه برابر داشته باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.
۱۱. الف) قضیه فیثاغورس. در هر مثلث قائم‌الزاویه مربع اندازه وتر با مجموع مربع‌های اندازه دو ضلع دیگر برابر است.

<sup>۱</sup> در ریاضیات اصل، عبارتی است که درستی آن بدون استدلال پذیرفته می‌شود.

ب) عکس قضیه فیثاغورس. اگر در مثلثی مربع اندازه یک ضلع با مجموع مربع های اندازه دو ضلع دیگر برابر باشد، آن مثلث قائم الزاویه است.

۱۲. قضیه وتر و یک ضلع. اگر وتر و یک ضلع از یک مثلث قائم الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم الزاویه ای دیگر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم نهشت اند.

۱۳. الف) قضیه نیم ساز. هر نقطه روی نیم ساز یک زاویه از دو ضلع آن زاویه فاصله یکسان دارد.

ب) عکس قضیه نیم ساز. اگر نقطه ای از دو ضلع یک زاویه فاصله یکسان داشته باشد، این نقطه روی نیم ساز آن زاویه قرار دارد.

۱۴. قضیه شعاع و مماس. شعاع دایره در نقطه تماس بر خط مماس عمود است.

۱۵. قضیه کمان و وتر. وترهای نظیر دو کمان برابر، برابری و برعکس.

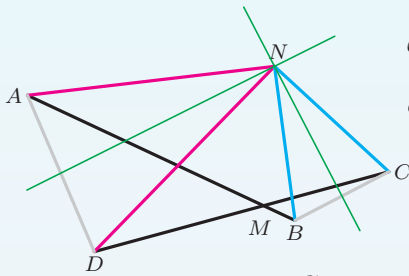
۱۶. قضیه زاویه محاطی. اندازه هر زاویه محاطی با نصف کمان روبه رو به آن زاویه برابر است.

## مسائل

۱. دو پاره خط برابر  $AB$  و  $CD$  یکدیگر را در نقطه  $M$  قطع کرده اند. عمود منصف های دو

پاره خط  $AD$  و  $BC$  یکدیگر را در نقطه  $N$  قطع کرده اند. اگر نقطه  $N$  درون زاویه  $AMC$  باشد، آنگاه ثابت کنید  $MN$  نیم ساز زاویه  $AMC$  است.

بُرنّا با استفاده از قضیه هایی که در بخش قبل آمده، این مسئله را حل کرده است. راه حل بُرنّا را بررسی کنید. شما نیز در حل مسئله های بعدی (مانند راه حل بُرنّا) نام هر قضیه ای را که از آن استفاده می کنید، ذکر نمایید.



چون نقطه  $N$  روی عمود منصف‌های  
پاره‌خط‌های  $AD$  و  $BC$  قرار دارد، پس  
بنابه قضیه عمود منصف داریم:

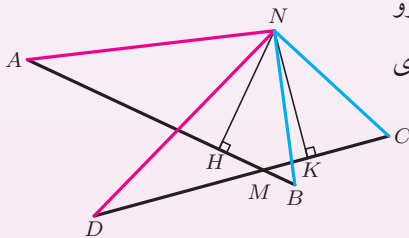
$$AN = DN \text{ (۱)}, BN = CN \text{ (۲)}$$

حال می‌توانیم ثابت کنیم دو مثلث  $ABN$  و  $CDN$  هم‌نهشت‌اند.

$$\left. \begin{array}{l} AB = CD \text{ فرض مسئله} \\ AN = DN \text{ (۱) بنابه} \\ BN = CN \text{ (۲) بنابه} \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{قضیه ض‌ض‌ض}} \triangle ABN \cong \triangle CDN$$

$$\xRightarrow{\text{بقیه اجزای متناظر}} \left\{ \begin{array}{l} \widehat{ABN} = \widehat{DCN} \text{ (۳)} \\ \widehat{NAB} = \widehat{NDC} \\ \widehat{BNA} = \widehat{CND} \end{array} \right.$$

برای اینکه نشان دهیم  $MN$  نیم‌ساز زاویه  $AMC$  است از عکس قضیه نیم‌ساز  
استفاده می‌کنیم. برای این کار کافی است ثابت کنیم نقطه  $N$  از دو ضلع زاویه  
 $AMC$  فاصله یکسان دارد.



بنابراین ثابت می‌کنیم که در شکل روبه‌رو  
دو پاره‌خط  $NH$  و  $NK$  برابرند. برای  
این کار نشان می‌دهیم:

$$\triangle BNH \cong \triangle CNK.$$

چون  $BN = CN$  (بنابه ۱)،  $\widehat{ABN} = \widehat{DCN}$  (بنابه ۲) و  $\widehat{HNB} = \widehat{KNC}$   
(هر دو قائمه‌اند)، پس بنابه قضیه زضض، دو مثلث  $BNH$  و  $CNK$  هم‌نهشت‌اند.  
در نتیجه  $NH = NK$ .

۲. روی ضلع‌های مثلث  $ABC$  و در بیرون آن، مثلث‌های متساوی‌الاضلاع  $MAB$ ،  $NBC$  و  $PAC$  رسم شده‌اند. ثابت کنید سه پاره‌خط  $MC$ ،  $NA$  و  $PB$  برابرند.

۳. در مثلث  $ABC$  نیم‌ساز زاویه‌های  $A$  و  $B$  یکدیگر را در نقطه  $O$  قطع کرده‌اند. ثابت کنید اگر از نقطه  $O$  خطی موازی با  $AB$  رسم شود و ضلع‌های  $AC$  و  $BC$  را به ترتیب در  $D$  و  $E$  قطع کند، آنگاه اندازه پاره‌خط  $DE$  با مجموع اندازه‌های  $AD$  و  $BE$  برابر است.

۴. چرا در قضیه «زضض»، از عبارت «نظیر به نظیر» استفاده شده ولی در قضیه «ضضز» از عبارت «نظیر به نظیر» استفاده نشده است؟

۵. الف) درستی یا نادرستی عبارت زیر را بررسی کنید.

اگر دو ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه با دو ضلع از یک مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

ب) عبارت بالا چه تفاوتی با قضیه وتر و یک ضلع دارد؟

۶. در چهارضلعی  $ABCD$  عمود منصف‌های ضلع‌های  $AB$  و  $CD$  یکدیگر را روی ضلع  $AD$  قطع می‌کنند و  $\hat{B}AD = \hat{C}DA$ . ثابت کنید دو پاره‌خط  $AC$  و  $BD$  نیز برابرند.

۷. روی ربع دایره  $AOB$  امتداد دو وتر مساوی  $AM$  و  $BN$  یکدیگر را در نقطه  $D$  قطع می‌کنند. ثابت کنید اندازه  $\hat{A}OD$  برابر  $45^\circ$  درجه است.

۸. سه نقطه  $A$ ،  $B$  و  $C$  روی یک دایره چنان قرار دارند که دو وتر  $AB$  و  $BC$  برابرند. نقطه  $D$  را روی این دایره چنان انتخاب می‌کنیم که  $ABCD$  یک چهارضلعی باشد. ثابت کنید هر نقطه روی  $BD$  از دو پاره‌خط  $AD$  و  $CD$  فاصله یکسان دارد.

۹. در یک دایره قطر  $RS$ ، عمود منصف وتر  $AB$  است. نقطه دلخواه  $P$  را روی قطر  $RS$  در نظر بگیرید. اگر امتداد پاره‌خط‌های  $AP$  و  $BP$  دایره را به ترتیب در نقاط  $C$  و  $D$  قطع کرده باشند، آنگاه ثابت کنید پاره‌خط‌های  $AD$  و  $BC$  برابرند؛ همچنین پاره‌خط‌های  $AC$  و  $BD$  نیز برابرند.

۱۰. چهار نقطه  $A, B, C$  و  $D$  روی دایره‌ای به قطر  $\sqrt{2} \times 6$  چنان قرار دارند که  $ABCD$  یک چهارضلعی و  $BD$  قطر دایره است. اگر  $AC$  نیم‌ساز زاویه  $BAD$  و طول  $AD$  برابر ۱ باشد، آنگاه محیط  $ABCD$  چقدر است؟

۱۱. خطی با دو ضلع زاویه  $xOy$  در نقطه‌های  $A$  و  $B$  برخورد کرده است. اگر نیم‌سازهای دو زاویه  $xAB$  و  $yBA$  باهم در نقطه  $C$  برخورد کنند، آنگاه ثابت کنید  $CO$  نیم‌ساز زاویه  $xOy$  است.

۱۲. ثابت کنید اگر یک ضلع و ارتفاع و میانه وارد بر آن از یک مثلث با اجزاء نظیر از مثلی دیگر برابر باشند، آنگاه دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۱۳. در مثلث  $ABC$  میانه  $AM$  را از طرف  $M$  به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه  $N$  به دست آید. ثابت کنید محیط مثلث‌های  $ABN$  و  $ACN$  برابر است.

### هم‌نهشتی مثلث‌ها

۱. باتوجه به جمله «در چهارضلعی  $ABCD$ ، دو مثلث  $ABD$  و  $BCD$  هم‌نهشت‌اند»، مثال‌هایی بیاورید که تساوی‌های قسمت‌های «الف» و «ج» را نقض کند. چرا تساوی قسمت «ب» همواره درست است؟

الف)  $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$

ب)  $\widehat{BAD} = \widehat{DCB}$

ج)  $\widehat{ABD} = \widehat{CDB}$

۲. در چهارضلعی محدب  $ABCD$ ، دو مثلث  $ABD$  و  $ADC$  هم‌نهشت‌اند. کدام یک از عبارت‌های زیر همواره درست است؟ برای هریک از عبارت‌های نادرست، مثالی بیاورید که درستی آنها را نقض کند.

الف)  $\widehat{ADC} = \widehat{DAB}$

ب)  $\widehat{DAC} = \widehat{BDA}$

ج)  $\widehat{ABD} = \widehat{DCA}$

د)  $AC = BD$



۳. چهارضلعی مقعر  $ABCD$  را در نظر بگیرید. اگر دو مثلث  $ABD$  و  $ADC$  همنهشت باشند، آنگاه کدام یک از عبارات‌های زیر همواره درست است؟ برای هریک از عبارات‌های نادرست، مثالی بیاورید که درستی آنها را نقض کند.

الف)  $\widehat{ADC} = \widehat{DAB}$

ب)  $\widehat{ADC} = \widehat{BDA}$

ج)  $\widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

د)  $BD = CD$

۴. چهارضلعی  $ABCD$  را در نظر بگیرید. اگر سه مثلث  $ABD$ ،  $BCD$  و  $ACD$  همنهشت باشند، آنگاه کدام یک از عبارات‌های زیر همواره درست است؟ برای هریک از عبارات‌های نادرست، مثالی بیاورید که درستی آنها را نقض کند.

الف) مثلث  $ABC$  متساوی الساقین است. ب)  $ABCD$  مستطیل است.

۵. مثالی بیاورید که درستی جمله زیر را نقض کند.

قطرهای چهارضلعی  $ABCD$  یکدیگر را در نقطه  $E$  قطع کرده‌اند. اگر دو مثلث  $AEB$  و  $CED$  همنهشت باشند، آنگاه  $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ .

## حل مسئله در هندسه

در حل بسیاری از مسائل این بخش می‌توانید از ایده‌هایی که در راه‌حل‌های داده شده آمده‌اند، کمک بگیرید. توجه کنید که برای حل هیچ‌یک از مسائل این بخش به قضیه‌ای غیر از قضیه‌هایی که در بخش «ابزارهایی برای اثبات» نوشته شده‌اند، نیاز ندارید.

## امتداد دادن میانه

۱. در مثلث  $ABC$  میانه  $AM$  را از طرف  $M$  به اندازه خودش امتداد می‌دهیم تا نقطه  $N$  به دست آید. چند جفت مثلث همنهشت می‌توان یافت که رئوس آنها از پنج نقطه  $A$ ،  $B$ ،  $C$ ،  $M$  یا  $N$  انتخاب شده باشند؟

۲. دو ضلع و میانه وارد بر ضلع سوم یک مثلث با اجزاء نظیر در مثلث دیگر برابرند. ثابت کنید این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

گلرخ مسئله بالا را به صورت زیر حل کرده است. درستی راه حل گلرخ را بررسی کنید.

### راه حل گلرخ

در دو مثلث  $ABC$  و  $MNP$  داریم:

$$AB = MN, AC = MP, AD = MQ,$$

که  $D$  و  $Q$  به ترتیب وسط ضلع‌های  $BC$  و  $NP$  هستند. کافی است ثابت کنیم  $\widehat{BAC} = \widehat{NMP}$ . برای این کار، ضلع  $AD$  را از طرف  $D$  به اندازه خودش ادامه می‌دهیم و نقطه حاصل را  $E$  می‌نامیم. ضلع  $MQ$  را نیز از طرف  $Q$  به اندازه خودش امتداد می‌دهیم و نقطه حاصل را  $R$  می‌نامیم. بنابه حالت «ض‌ض» دو مثلث  $ABD$  و  $CDE$  هم‌نهشت‌اند؛ همچنین دو مثلث  $MNQ$  و  $PQR$  نیز هم‌نهشت هستند. در نتیجه دو مثلث  $ACE$  و  $MPR$  هم‌نهشت هستند. بنابراین  $\widehat{DAC} = \widehat{QMP}$  از طرفی

$$\widehat{BAD} = \widehat{E} = \widehat{R} = \widehat{QMN}.$$

$$\text{پس } \widehat{BAC} = \widehat{NMP}.$$

۳. ثابت کنید اگر طول میانه وارد بر یک ضلع و زاویه‌هایی که این میانه با دو ضلع دیگر می‌سازد از یک مثلث با اجزاء نظیر در مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۴. اگر جمله زیر درست است آن را ثابت کنید و اگر نادرست است مثالی بیاورید که آن را نقض کند.

اگر اندازه یک زاویه و طول میانه رسم شده از آن زاویه از یک مثلث با اجزاء نظیر در مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۵. ثابت کنید اگر در یک مثلث میانه و نیم‌ساز برهم منطبق باشند، آن مثلث متساوی‌الساقین است.

۶.  $AM$  میانه مثلث  $ABC$  است. نقطه‌های  $D$  و  $E$  بیرون از مثلث  $ABC$  چنان قرار دارند که  $B$  و  $C$  به ترتیب درون زاویه‌های  $DAC$  و  $EAB$  هستند. اگر دو مثلث  $ABD$  و  $ACE$  به رأس  $A$  متساوی‌الساقین باشند و  $ED = 2AM$ ، آنگاه ثابت کنید  $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{EAD}$ .

۷. ثابت کنید در هر مثلث، دو سر یک ضلع از میانه وارد بر آن ضلع فاصله یکسانی دارند.

### امتداد دادن یک ضلع، رسم خط موازی و ...

۱. مثلث  $ABC$  به رأس  $A$  متساوی‌الساقین است. نقطه دلخواه  $D$  را روی ضلع  $AB$  قرار دهید. ضلع  $AC$  را از طرف  $C$  به اندازه  $BD$  امتداد دهید و نقطه حاصل را  $E$  بنامید. اگر محل برخورد  $BC$  و  $DE$ ، نقطه  $F$  باشد، آنگاه ثابت کنید اندازه دو پاره‌خط  $DF$  و  $EF$  برابر است.

مصطفی و فرزانه این مسئله را به صورت زیر حل کرده‌اند. ابتدا توضیحات راه‌حل‌های این دو نفر را کامل کنید؛ سپس سعی کنید راه‌حل دیگری برای این مسئله بیابید.

#### راه‌حل مصطفی

ضلع  $BC$  را از طرف  $C$  به اندازه  $BF$  امتداد می‌دهیم و نقطه حاصل را  $G$  می‌نامیم. چون دو مثلث  $BDF$  و  $CEG$  در حالت «ض‌رض» هم‌نهشت‌اند، پس اندازه زاویه‌های  $BFD$  و  $CGE$  برابر است و همچنین  $EG = DF$ . از طرفی دو زاویه  $BFD$  و  $GFE$  متقابل به رأس هستند؛ بنابراین مثلث  $FEG$  متساوی‌الساقین است و در نتیجه  $DF = EF$ .

$BC$  را از طرف  $C$  امتداد می‌دهیم. سپس از نقطه  $E$  خطی موازی با  $AD$  رسم می‌کنیم تا امتداد  $BC$  را در نقطه  $P$  قطع کند. اکنون چون دو زاویه  $\widehat{ABC}$  و  $\widehat{CPE}$  برابرند و  $\widehat{ACB}$  و  $\widehat{PCE}$  متقابل به رأس هستند، نتیجه می‌شود  $EP = EC$ . بنابراین دو مثلث  $BDF$  و  $PEF$  هم‌نهشت‌اند؛ پس  $DF = EF$ .

۲. در مثلث  $ABC$  از وسط ضلع  $BC$  خطی بر نیم‌ساز زاویه  $A$  عمود شده است که اضلاع (یا امتداد اضلاع)  $AB$  و  $AC$  را به ترتیب در نقاط  $E$  و  $F$  قطع کرده است. ثابت کنید  $BE = CF$ .

۳. ثابت کنید اگر یک زاویه حاده و مجموع اضلاع این زاویه از یک مثلث قائم‌الزاویه با یک زاویه حاده و مجموع اضلاع این زاویه از مثلث قائم‌الزاویه دیگر برابر باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۴. فرض کنید یک زاویه و یکی از ضلع‌های آن زاویه از یک مثلث با اجزاء نظیر از مثلث دیگر برابر باشند. ثابت کنید اگر مجموع دو ضلع دیگر این دو مثلث باهم برابر باشند، آنگاه این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۵. اگر دو زاویه و محیط یک مثلث با دو زاویه و محیط مثالی دیگر برابر باشند، ثابت کنید این دو مثلث هم‌نهشت‌اند.

۶. نقطه  $M$  روی ضلع  $AC$  از مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  قرار دارد. نقطه  $N$  را روی امتداد  $BC$  (از طرف  $C$ ) چنان انتخاب می‌کنیم که  $BM = NM$ . ثابت کنید  $AM = CN$ .

۷. سه نقطه  $A$ ،  $B$  و  $C$  دایره‌ای را به سه کمان برابر تقسیم کرده‌اند و  $M$  نقطه‌ای دلخواه روی کمان  $AC$  است. ثابت کنید وتر  $MB$  با مجموع وترهای  $MA$  و  $MC$  برابر است.

۸. در مربع  $ABCD$  نقطه  $E$  روی ضلع  $CD$  قرار دارد. اگر  $F$  روی ضلع  $BC$  چنان قرار داشته باشد که  $AF$  نیم‌ساز زاویه  $BAE$  شود، آنگاه ثابت کنید  $BF + DE = AE$ .

۹. در مثلث  $ABC$  زاویه  $C$  قائمه است. روی اضلاع  $AC$  و  $BC$  مربع‌های  $ACMN$  و  $BCPQ$  ساخته شده است. اگر از  $N$  و  $Q$  به ترتیب عمودهای  $NH$  و  $QK$  بر امتداد  $AB$  رسم شوند، آنگاه ثابت کنید  $NH + QK = AB$ .

۱۰. در چهارضلعی  $ABCD$  سه ضلع  $AB$ ،  $BC$  و  $CD$  برابرند. اگر  $\widehat{ABC} = 70^\circ$  و  $\widehat{BCD} = 170^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه  $\widehat{BAD}$  چند درجه است؟

ارغوان، سمن، نرگس و شقایق این مسئله را به صورت زیر حل کرده‌اند. ابتدا توضیحات راه حل هریک را کامل کنید. سپس سعی کنید این مسئله را با راه حل دیگری حل نمایید.

#### راه حل ارغوان

نقطه  $M$  را درون زاویه  $ABC$  چنان انتخاب می‌کنیم که مثلث  $ABM$  متساوی‌الاضلاع باشد. چون  $BM = BC$ ، پس  $\widehat{BCM} = 85^\circ$ . بنابراین دو مثلث  $BCM$  و  $DCM$  در حالت «ض‌ض» هم‌نهشت‌اند. بنابراین مثلث  $AMD$  متساوی‌الساقین است و چون  $\widehat{AMD} = 130^\circ$ ، پس  $\widehat{DAM} = 25^\circ$  و در نتیجه  $\widehat{DAB} = 85^\circ$ .

#### راه حل سمن

دو قطر  $AC$  و  $BD$  یکدیگر را در نقطه  $E$  قطع می‌کنند. روی قطر  $AC$  نقطه  $F$  را چنان قرار می‌دهیم که  $AF = CE$ . اکنون دو مثلث  $ABF$  و  $CBE$  در حالت «ض‌ض» هم‌نهشت‌اند. در نتیجه مثلث  $BEF$  متساوی‌الاضلاع است. روی پاره خط  $ED$  نقطه  $G$  را چنان قرار می‌دهیم که  $CE = EG$ . حال دو مثلث  $CDG$  و  $ABF$  در حالت «ض‌ض» هم‌نهشت‌اند. بنابراین مثلث  $AED$  متساوی‌الساقین است و چون  $\widehat{AED} = 120^\circ$ ، در نتیجه  $\widehat{DAB} = 85^\circ$ .

### راه حل نرگس

پاره خط  $AP$  را موازی و مساوی با  $BC$  رسم می‌کنیم به طوری که  $AC$  قطر چهارضلعی  $ABCP$  باشد. اکنون دو مثلث  $ABC$  و  $CPA$  در حالت «ض‌ض» هم‌نهشت‌اند. پس  $PC = AB$  و  $\widehat{CPA} = 70^\circ$ . بنابراین مثلث  $CDP$  متساوی‌الساقین است. حال اگر اندازه زاویه‌ها را محاسبه کنیم به سادگی نتیجه می‌شود که  $\widehat{PCD} = 60^\circ$  و در نتیجه مثلث  $CPD$  متساوی‌الاضلاع است. از طرفی چون مثلث  $PAD$  متساوی‌الساقین است پس  $\widehat{PAD} = 25^\circ$  و در نتیجه  $\widehat{DAB} = 85^\circ$ .

### راه حل شقایق

چون  $AB = BC$ ، پس  $B$  روی عمود منصف قطر  $AC$  قرار دارد. همچنین چون  $BC = CD$ ، پس  $C$  روی عمود منصف قطر  $BD$  قرار دارد. اگر عمود منصف‌های  $AC$  و  $BD$  یکدیگر را در نقطه  $O$  قطع کنند، آنگاه سه مثلث  $ABO$ ،  $BCO$  و  $CDO$  در حالت «ض‌ض‌ض» هم‌نهشت‌اند. توجه کنید که محاسبه اندازه سه زاویه مثلث  $BCO$  به سادگی امکان‌پذیر است. پس  $\widehat{OAB} = 85^\circ$ . حال چون سه نقطه  $D$ ،  $O$  و  $A$  روی یک خط قرار دارند نتیجه می‌شود که اندازه زاویه  $DAB$  نیز برابر  $85^\circ$  درجه است.

۱۱. در چهارضلعی  $ABCD$  سه ضلع  $AB$ ،  $BC$  و  $CD$  برابرند. اگر  $\widehat{ABC} = 150^\circ$  و  $\widehat{BCD} = 90^\circ$ ، آنگاه اندازه زاویه‌های  $BAD$  و  $CDA$  چقدر است؟

۱۲. در مثلث  $ABC$ ،  $\widehat{B} = 120^\circ$  و نیم‌سازهای زاویه‌های  $A$  و  $C$  یکدیگر را در نقطه  $H$  قطع کرده‌اند. اگر روی امتداد ضلع‌های  $AB$  و  $BC$  (از طرف  $B$ )، به ترتیب نقطه‌های  $P$  و  $Q$  را چنان انتخاب کنیم که سه پاره خط  $AP$ ،  $CQ$  و  $AC$  برابر شوند، آنگاه ثابت کنید زاویه  $PHQ$  قائمه است.

۱۳. سه نقطه  $A, B$  و  $C$  روی یک دایره چنان قرار دارند که سه زاویه مثلث  $ABC$  حاده هستند. اگر دو ارتفاع  $AH$  و  $BG$  یکدیگر را در نقطه  $D$  قطع کنند و امتداد  $AH$  با دایره در نقطه  $M$  برخورد کند، آنگاه ثابت کنید پاره‌خط‌های  $DH$  و  $MH$  باهم برابرند.

۱۴. دو دایره یکدیگر را در نقطه‌های  $A$  و  $B$  قطع کرده‌اند. اگر  $AC$  قطری از دایره اول و  $AD$  قطری از دایره دوم باشد، آنگاه ثابت کنید نقطه‌های  $B, C$  و  $D$  روی یک خط راست قرار دارند.

۱۵. در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{A} = 120^\circ$ . روی نیم‌ساز زاویه  $A$  نقطه  $D$  طوری انتخاب شده است که  $AD = AB + AC$ . اندازه زاویه‌های مثلث  $BDC$  چقدر هستند؟

۱۶. در مثلث  $ABC$ ،  $AB = AC$  و  $\hat{A} = 80^\circ$ . نقطه  $D$  درون مثلث  $ABC$  چنان قرار دارد که  $\hat{D\hat{B}C} = 10^\circ$  و  $\hat{D\hat{C}B} = 30^\circ$ . ثابت کنید مثلث  $ADB$  متساوی‌الساقین است.

۱۷. دو خط عمود برهم ضلع‌های مربع  $ABCD$  را به ترتیب در نقطه‌های  $M, N, P$  و  $Q$  قطع کرده‌اند. ثابت کنید دو پاره‌خط  $MP$  و  $QN$  برابرند.

### چند استدلال نادرست

۱. جمله «در هر مثلث میانه وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع است»، درست است یا نادرست؟ سامان با استدلال زیر ثابت کرده که جمله بالا درست است. چرا استدلال سامان نادرست است؟

#### استدلال سامان

در مثلث  $ABC$ ، میانه  $AM$  را از طرف  $M$  به اندازه خودش امتداد می‌دهیم و نقطه حاصل را  $N$  می‌نامیم. دو مثلث  $AMB$  و  $NMC$  در حالت ض‌رض هم‌نهشت‌اند.

پس داریم:

$$\begin{aligned}\triangle AMB \cong \triangle NMC &\implies \triangle AMB + \triangle AMC \cong \triangle NMC + \triangle AMC \\ &\implies \triangle NAC \cong \triangle ABC.\end{aligned}$$

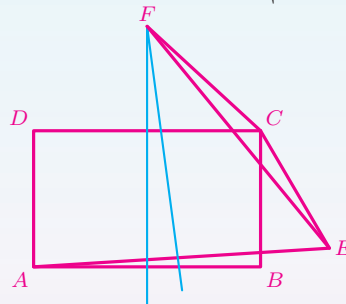
پس  $AN = BC$  و در نتیجه  $AM = BM$ . بنابراین در هر مثلث میانه وارد بر یک ضلع، نصف آن ضلع است.

۲. مستطیل  $ABCD$  را در نظر بگیرید. پاره خط  $CE$  برابر با  $BC$  در خارج مستطیل رسم شده است. عمود منصف  $AB$  با عمود منصف  $AE$  در نقطه  $F$  برخورد کرده است. آیا می توان ثابت کرد که زاویه های  $FCE$  و  $FCB$  برابرند؟

صدف و کیمیا با راه حل های زیر، مسئله را حل کرده اند. راه حل درست کدام است؟

#### راه حل صدف

ابتدا شکل مسئله را رسم می کنیم.



همان طور که در شکل می بینیم،

$$\widehat{FCB} + \widehat{BCE} = \widehat{FCE}.$$

بنابراین واضح است که  $\widehat{FCB} < \widehat{FCE}$ . پس این دو زاویه  $FCB$  و  $FCE$  برابر نیستند.



### راه حل کیمیا

چون  $F$  روی عمود منصف های سه پاره خط  $AB$ ،  $CD$  و  $AE$  قرار دارد پس بنا به قضیه عمود منصف داریم:

$$FA = FB, FA = FE, FC = FD.$$

بنابراین دو مثلث  $FAD$  و  $FCE$  بنابه قضیه ض ض ض هم نهشت اند و در نتیجه:

$$\widehat{FDA} = \widehat{FCE}. \quad (۱)$$

از طرفی بنابه قضیه مثلث متساوی الساقین زاویه های  $FCD$  و  $FDC$  برابرند و چون  $CDA$  و  $DCB$  قائمه اند، پس:

$$\widehat{FCD} + \widehat{DCB} = \widehat{FDC} + \widehat{CDA} \implies \widehat{FCB} = \widehat{FDA}. \quad (۲)$$

با مقایسه رابطه های (۱) و (۲) به سادگی نتیجه می شود که دو زاویه  $FCE$  و  $FCB$  برابرند.

۳. در مثلث  $ABC$ ،  $\widehat{B} = ۱۲^\circ$ . روی ضلع  $AC$  و خارج از مثلث  $ABC$ ، مثلث متساوی الاضلاع

$ACD$  ساخته شده است. ثابت کنید  $BD$  نیم سازه زاویه  $ABC$  است.

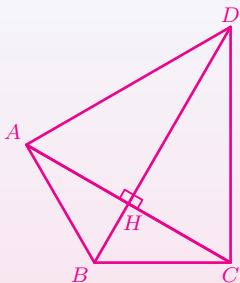
غزل مدعی است که مسئله را حل کرده است. چرا راه حل او نادرست است؟

### راه حل غزل

مثلث  $ACD$  متساوی الاضلاع است. پس  $AD = CD$ ؛ یعنی نقطه  $D$  از دو سر پاره خط  $AC$  فاصله یکسان دارد. در نتیجه بنابه قضیه عمود منصف، نقطه  $D$  روی عمود منصف  $AC$  است. اگر محل برخورد عمود منصف  $AC$  با ضلع  $AC$  را  $H$  بنامیم، آنگاه دو مثلث  $AHD$  و  $CHD$  هم نهشت اند. زیرا:

$$\left. \begin{array}{l} AD = CD \quad \text{فرض مسئله} \\ DH = DH \quad \text{ضلع مشترک} \\ \hat{AHD} = \hat{CHD} \quad \text{دو زاویه قائمه} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \triangle AHD \cong \triangle CHD.$$

در نتیجه  $\hat{HDC} = \hat{HDA}$ .



اگر از  $H$  به  $B$  وصل کنیم، چون  $\hat{HDC} = \hat{HDA}$ ، دو مثلث  $AD = CD$  و  $BD$  ضلع مشترک است و دو مثلث  $BCD$  و  $BAD$  در حالت ض‌ضض هم‌نهشت‌اند. در نتیجه  $\hat{ABD} = \hat{CBD}$  یعنی  $BD$  نیم‌ساز زاویه  $ABC$  است.

• قبل از اینکه خواننده مسئله بعد را بخواند، لازم است تعریف «دو خط موازی» را یادآوری کنیم.

#### دو خط موازی

دو خط در یک صفحه را موازی می‌نامند هرگاه هیچ نقطه مشترکی نداشته باشند یا برهم منطبق باشند.

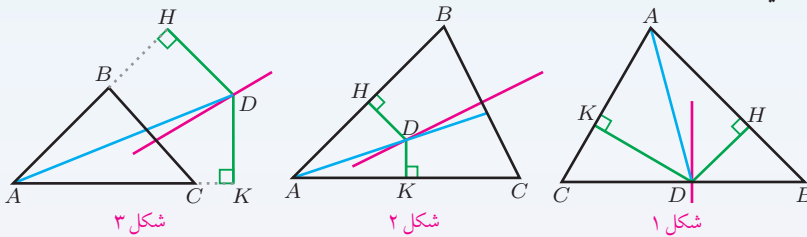
۴. نصیر مدعی است که همه مثلث‌ها متساوی‌الساقین هستند. او برای ادعای خود استدلال زیر را ارائه کرده است. ایراد استدلال نصیر را پیدا کنید.

#### استدلال نصیر

مثلث دلخواهی رسم کنید و آن را  $ABC$  بنامید. نیم‌ساز زاویه  $A$  و عمود منصف ضلع  $BC$  را بکشید. دو حالت ممکن است پیش آمده باشد.  
الف) نیم‌ساز زاویه  $A$  و عمود منصف ضلع  $BC$  موازی باشند.  
ب) نیم‌ساز زاویه  $A$  و عمود منصف ضلع  $BC$  موازی نباشند.

اگر حالت «الف» پیش آمده باشد، نیم‌ساز زاویه  $A$  ارتفاع مثلث  $ABC$  می‌شود. بنابراین  $ABC$  متساوی‌الساقین خواهد شد.

اگر حالت «ب» پیش بیاید، محل برخورد نیم‌ساز زاویه  $A$  و عمود منصف ضلع  $BC$  را  $D$  بنامید. نقطه  $D$  یا روی ضلع  $BC$  است، یا بیرون مثلث  $ABC$  است یا درون آن. در هر حالت، از  $D$  عمودهای  $DH$  و  $DK$  را به ترتیب بر  $AB$  و  $AC$  رسم کنید.



با یک استدلال برای هر سه شکل بالا می‌توان ثابت کرد  $AH = AK$  و  $BH = CK$ . اگر این دو تساوی ثابت شوند، برای شکل‌های ۱ و ۲ داریم:

$$AH + BH = AK + CK \implies AB = AC,$$

و برای شکل ۳ داریم:

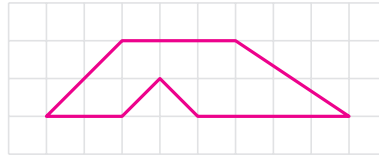
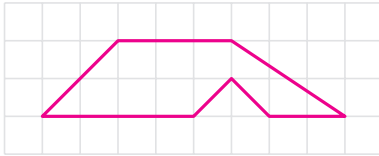
$$AH - BH = AK - CK \implies AB = AC.$$

بنابراین در هر سه شکل، مثلث  $ABC$  متساوی‌الساقین است.

و اما استدلالی که برای هر سه شکل ثابت می‌کند  $AH = AK$  و  $BH = CK$ : نقطه  $D$  روی نیم‌ساز زاویه  $BAC$  قرار دارد؛ پس بنابه قضیه نیم‌ساز  $DH = DK$ . بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه  $ADH$  و  $ADK$  بنابه قضیه وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند؛ در نتیجه  $AH = AK$ . از طرفی نقطه  $D$  روی عمود منصف ضلع  $BC$  قرار دارد؛ پس بنابه قضیه عمود منصف  $BD = CD$ . بنابراین دو مثلث قائم‌الزاویه  $BDH$  و  $CDK$  بنابه قضیه وتر و یک ضلع هم‌نهشت‌اند؛ در نتیجه  $BH = CK$ .

## شکل های متشابه

۱. الف) چرا دو چندضلعی زیر متشابه نیستند؟



ب) شهرام تشابه دو چندضلعی را به صورت زیر تعریف کرده است:

### تعریف شهرام

هرگاه در دو چندضلعی همه ضلع ها به یک نسبت تغییر کرده باشد (کوچک یا بزرگ شده، و یا بدون تغییر باشد). و اندازه زاویه ها تغییر نکرده باشد، آن دو چندضلعی باهم متشابه اند.

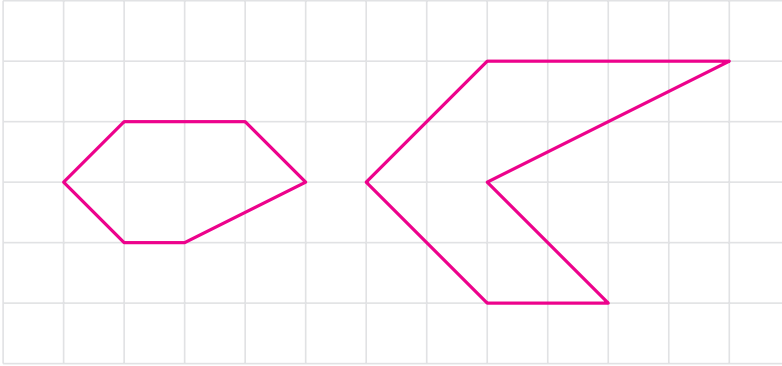
آیا تعریف شهرام درست است؟ اگر پاسخ خیر است، چه چیزی به تعریف شهرام اضافه کنیم تا درست شود؟

۲. یک پنج ضلعی رسم کنید که زاویه های آن دوه دو با زاویه های پنج ضلعی زیر برابر باشد ولی دو پنج ضلعی متشابه نشوند.



۳. فرض کنید  $n > 3$ . روشی برای رسم دو  $n$ -ضلعی که زاویه های آنها دوه دو برابرند ولی متشابه نیستند، ارائه دهید.

۴. الف) آیا در دو چندضلعی زیر، می‌توان اضلاع را طوری دوبه‌دو نظیر یکدیگر قرار داد که نسبت همهٔ اضلاع متناظر برابر باشند؟ یا به عبارت دیگر اضلاع متناظر متناسب باشند؟



ب) فرض کنید  $n > 3$ . روشی برای رسم دو  $n$ -ضلعی که اضلاع متناظرشان متناسب باشند ولی دو چندضلعی متشابه نباشند، ارائه دهید.

۵. دو ده‌ضلعی محدب مثال بزنید که زاویه‌های آنها دوبه‌دو برابر و اضلاع متناظرشان متناسب باشند ولی این دو ده‌ضلعی متشابه نباشند.

۶. استاندارد بین‌المللی اندازهٔ کاغذ به نام ایزو ۲۱۶ (ISO 216)، برای کاغذها اندازه و نام‌های مختلفی در نظر گرفته است. بعضی از این نام‌ها A0، A1، A2، A3، A4 و ... هستند. عرض و طول کاغذ A0 به ترتیب ۸۴۱ و ۱۱۸۹ میلی‌متر است.

الف) دو کاغذ A4 را چگونه کنارهم قرار دهیم که مستطیل حاصل با کاغذ A4 تقریباً متشابه باشد.

ب) یک کاغذ A4 را چگونه نصف کنیم که کاغذهای حاصل با کاغذ A0 تقریباً متشابه باشد.

ج) سعید مستطیلی داشت! آن را از وسط طولش نصف کرد. او حالا دو مستطیل متشابه با مستطیل اول دارد. نسبت تشابه چیست؟

د) حدس بزنید که ایزو ۲۱۶ بر چه اساسی کاغذها را نام‌گذاری کرده است.

### بخشی از کتاب «تاریخ فشرده ریاضیات»

اقلیدس، که درباره زندگی وی به طور قطعی چیزی نمی‌دانیم، احتمالاً در طول سلطنت بطلمیوس اول (۲۸۳-۳۰۶ ق.م.) می‌زیست و گویا جمله معروف اقلیدس: «هیچ راه شاهانه‌ای به هندسه وجود ندارد.»، خطاب به اوست. گرچه چندین متن کوچک را به او نسبت می‌دهند، اما مشهورترین و پیشرفته‌ترین کار او سیزده کتاب اصول (*Stoicheia*) است. از زمره آثار دیگرش کتاب مفروضات (*Data*) است که مشتمل بر مطالبی است که آن را کاربردهای جبر در هندسه می‌نامیم و به زبان کاملاً هندسی ارائه شده است. نمی‌دانیم چه تعداد از این متون از خود اقلیدس و چه تعداد از آنها گردآوری آثار اوست؛ اما این کتاب‌ها در موارد بسیار، عمق شگفت‌انگیزی را نشان می‌دهند. این متون نخستین متن‌های کامل ریاضی به‌جامانده از یونان باستان است.

اصول، پس از کتاب مقدس، شاید بیش از هر کتاب دیگر در تاریخ جهان غرب، تجدید چاپ شده و مورد مطالعه قرار گرفته است. از اختراع چاپ تاکنون، بیش از هزار ویرایش از آن انتشار یافته و قبل از آن نیز، نسخ خطی این کتاب بخش اعظم آموزش هندسه را تحت سیطره خود داشته است. قسمت اعظم هندسه دبیرستانی ما گاه کلمه به کلمه از هشت یا نه کتاب از سیزده کتاب اقلیدس، گرفته شده است؛ و هنوز سنت اقلیدسی در آموزش مقدماتی ما اهمیت بسیار دارد. برای ریاضی‌دان حرفه‌ای این کتاب‌ها همواره افسونی گریزناپذیر داشته‌اند (گرچه برای شاگردان اغلب سؤال‌انگیز بوده‌اند) و ساخت منطقی آنها شاید بیش از هر متن دیگری در جهان، تفکر علمی را تحت تأثیر قرار داده است.

کار اقلیدس، بر اساس استنتاج کاملاً منطقی قضایا از مجموعه‌ای از تعاریف، اصول متعارفی، و اصول موضوع، استوار است. در چهار کتاب اول به هندسه مسطحه پرداخته شده است، و به نظریه تناسب‌ها اشارتی ندارد و از مقدماتی‌ترین خواص خطوط و زوایا به همنهشتی مثلث‌ها، تساوی مساحت‌ها، قضیه فیثاغورس (کتاب اول، گزاره ۴۷)، ساختن مربعی برابر با مستطیل داده شده، بخش طلایی، دایره، و چندضلعی‌های منتظم، می‌رسیم.



شکل بالا تصویر رنگ شده جسمی است که از ترکیبات ساده شیمیایی به وجود آمده است. ارتفاع این جسم کمتر از  $10^{-6}$  متر و ضخامت آن کمتر از موی انسان است.

## توان صحیح

۱. حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $۲^۳ - ۲^{-۳}$

ب)  $۵^۲ + ۵^۲ - ۳^{-۳}$

ج)  $۳^۴ \times ۵^{-۲} - ۲^{-۲}$

د)  $۵^۲ - ۳^۲ \times (-۳)^{-۲}$

ه)  $-۲^{-۳} \times (-۲)^{-۴} - ۸$

و)  $۲ \times ۵^{-۴} + ۲^{-۳} \times ۳^{-۲}$

ز)  $۳^۴ \times ۳^۵ \times ۵^۲ \times ۳^{-۷} - ۵^۳$

ح)  $۴^۳ + ۴^۳ + ۴^۳ - ۳^۴ \times ۳^{-۱}$

ط)  $\frac{۳^۴ \times ۵^۲ \times ۳^۳}{۵^۳ \times ۲^۷ \times ۵}$

ی)  $\frac{۲ + ۳ \times ۴^{-۱} - ۲ \times ۵^{-۱}}{۳^۲ \times ۲^{-۲} - ۵}$

۲. عبارت‌های زیر را ساده کنید و توان‌های منفی را از بین ببرید.

الف)  $\frac{۳^{-۴}}{۵^{-۱}}$

ب)  $\frac{۲a^{-۱}b^{-۲}}{a^{-۳}b^{-۲}}$

ج)  $\frac{(۰/۱)^{-۱}}{۱۰^{-۱}}$

د)  $\frac{۲x^{-۳}}{۳^{-۳}y}$

۳. عبارت‌های زیر را ساده کنید و توان‌های منفی را از بین ببرید.

الف)  $\left(\frac{۱}{۵}\right)^{-۴}$

ب)  $\left(\frac{۳}{۷}\right)^{-۲}$

ج)  $\left(\frac{۲a^{-۱}}{۳^{-۲}}\right)^{-۲}$

د)  $\left(\frac{x^{-۱}}{y^{-۱}z}\right)^{-۱}$

۴. هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید و توان‌های منفی را از بین ببرید.

الف)  $\left(\frac{۲a^{-۱}b}{a^۲b^{-۳}}\right)^{-۳}$

ب)  $\left(\frac{q^{-۱}r^{-۱}s^{-۲}}{r^{-۵}sq^{-۸}}\right)^{-۱}$

ج)  $\left(\frac{s^۲t^{-۴}}{۵s^{-۱}t}\right)^{-۲}$

د)  $\left(\frac{xy^{-۲}z^{-۳}}{x^۲y^۳z^{-۴}}\right)^{-۳}$

۵. کدام یک از اعداد زیر بین صفر و یک است؟

الف)  $\left(\frac{۳^۲ \times ۲^{-۳}}{۵^{-۴}}\right)^{-۱}$

ب)  $\left(\frac{۲^{-۲} \times ۵^۳}{۳^۳ \times ۷^{-۲}}\right)^{-۲}$



۶. اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

$$\left(-\frac{1}{4}\right)^{-1} \quad \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \quad \left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} \quad \left(-\frac{4}{3}\right)^{-3}$$

۷. عدد  $\left(\frac{1}{64}\right)^{-12}$  را به صورت عدد  $2^m$  نوشته ایم. مقدار  $m$  را بیابید.

۸. اگر  $a$  عددی گویا و  $b$  عددی صحیح باشد و  $3^2 \times a^b = 6^8$ ، آنگاه حداقل پنج مقدار مختلف برای  $a + b$  بیابید.

۹. فرض کنید  $m$  و  $n$  دو عدد صحیح باشند.

الف) برای  $n^{-m}$  چند مقدار وجود دارد به طوری که تساوی  $2^1 = m^n$  برقرار باشد؟

ب) برای  $m^{-n}$  چند مقدار وجود دارد به طوری که تساوی  $2^2 = m^n$  برقرار باشد؟

۱۰. به جای  $x$  چه عددی باید قرار گیرد؟

$$3^{-102} - 3^{-101} + 3^{-100} - 3^{-99} = 3^{-99}x$$

۱۱. اگر  $n \in \mathbb{Z}$  و  $1 = (n^n)^{1396}$ ، آنگاه مقدار  $n$  را بیابید.

۱۲. پروژه. دربارهٔ صفر به توان صفر تحقیق کنید. (می توانید عبارت  $0^0$  را گوگل کنید).

۱۳. اگر  $\{m, n\} \subseteq \mathbb{N}$  و  $a \in \mathbb{R}$ ، مثالی بیابید که

$$a^m + a^n = a^{m+n} \quad \text{الف} \quad a^m + a^n = a^{mn} \quad \text{ب}$$

۱۴.  $x$  و  $y$  چه اعدادی هستند؟

$$2^{2^2} = 2^{2^2}x = 4^{y^3}$$

۱۵. حاصل عبارت زیر را به صورت یک عدد توان دار با توان ۵ بنویسید.

$$\frac{3^4 + 3^3 \times 3 + \frac{1}{9} \times 27^2}{(2^6)^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \times 2^{-4}}$$

۱۶. در هریک از قسمت‌های زیر،  $x$  و  $y$  را بیابید.

الف)  $\frac{15^3}{23} = \left(\frac{5}{2}\right)^x \times 3^y$

$$ب) \frac{15^5}{14^5} = \left(\frac{3}{7}\right)^x \left(\frac{5}{2}\right)^y$$

$$ج) \frac{215}{152} \times \frac{2^{-10}}{5} = \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{2}{5}\right)^y$$

$$2) \quad \frac{21^3 \times 3^2}{21^3} = \left(\frac{7}{2}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^y$$

## نماد علمی

۱. کدامیک از اعداد زیر به صورت نماد علمی نوشته شده‌اند؟

الف)  $12 \times 10^5$

c)  $1/9999 \times 10^{-4}$

ج)  $9/83 \times 21^\circ$

c)  $0,999 \times 10^{-1}$

۲. هریک از اعداد زیر را به صورت نماد علمی بنویسید.

(الف) یک سال نوری تقریباً  $9,460,528,400,000$  کیلومتر است.

(ب) جرم یک مولکول اکسیژن تقریباً ۵۳ × ۱۰<sup>-۲۶</sup> گرم است.

## ریشه‌گیری

۱. الف) اگر  $x$  عددی نامنفی باشد، ریشه‌های دوم  $x^2$  را بیابید.

(ب) اگر  $x$  عددی نامنفی باشد، حاصل  $\sqrt{x^2}$  چیست؟

(ج) اگر  $x$  عددی منفی باشد، ریشه‌های دوم  $x^2$  را بیابید.

(د) اگر  $x$  عددی منفی باشد، حاصل  $\sqrt{x^2}$  چیست؟

۲. می‌دانیم  $\sqrt[3]{54a^3z^8}$  عددی حقیقی است. کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟ برای عبارت درست دلیل بیاورید و برای عبارت نادرست مثالی بیاورید که درستی آن را نقض کند.

(الف)  $\sqrt[3]{54a^3z^8} = 3|a|z^2\sqrt[3]{2z^2}$  (ب)  $\sqrt[3]{54a^3z^8} = 3az^2\sqrt[3]{2z^2}$

۳. می‌دانیم  $\sqrt{54a^3z^8}$  عددی مثبت است. کدام عبارت درست و کدام نادرست است؟ برای عبارت درست دلیل بیاورید و برای عبارت نادرست مثالی بیاورید که درستی آن را نقض کند.

(الف)  $\sqrt{54a^3z^8} = 3|a|z^4\sqrt{6a}$  (ب)  $\sqrt{54a^3z^8} = 3az^4\sqrt{6a}$

۴. پس از آزمون ریاضی نیم‌سال اول، نمره دانش‌آموزان ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰ شده بود! معلم ریاضی تصمیم گرفت برای کمک به دانش‌آموزان، نمره هر دانش‌آموز را در ۲۰ ضرب کند، سپس از حاصل جذر بگیرد و نمره به‌دست آمده را در کارنامه وارد کند.

(الف) چه نمره‌هایی تغییر نمی‌کنند؟

(ب) چه نمره‌هایی بیشترین تغییر را دارند؟

(ج) چه نمره‌ای پس از تغییر عدد صحیح خواهد بود؟



۵. اگر  $\sqrt{x} = 9261$  و  $\sqrt[3]{y} = 6$ ، آنگاه  $\sqrt[3]{xy}$  چه عددی است؟

۶. اگر  $\sqrt{x\sqrt{x}} = 4$ ، آنگاه  $x$  چه عددی است؟

۷. هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید.

(الف)  $\sqrt{75a^3x}$

(ب)  $\sqrt[3]{a^2b}\sqrt[3]{64a^4b}$

(ج)  $\sqrt{\frac{162b^5c^5}{125x^2y^4}}$

(د)  $\sqrt[3]{\frac{54b^4c^6}{-32x^5y^9}}$

(ه)  $\sqrt{128a^5b^3}$

(و)  $\sqrt[3]{250a^4b^3c^2}$

(ز)  $\sqrt{\frac{150x^2y^6}{81a^2b^4}}$

(ح)  $\sqrt[3]{\frac{-40x^3y^5}{81t^5s^7}}$

۸. حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف)  $\sqrt[3]{-(-7)^{-6}}$

ب)  $\sqrt{(\pi^2 - 10)^2}$

ج)  $\sqrt{\frac{8^{10} + 4^{10}}{8^2 + 8^{11}}}$

د)  $(\sqrt{3} - \sqrt{6})^2$

ه)  $\frac{2\sqrt{8} - \sqrt{50} + 3\sqrt{18} + \sqrt{162}}{\sqrt{200}}$

۹. اگر  $3 < a < 5$ ، آنگاه درستی تساوی زیر را بررسی کنید.

$$\sqrt{(a-6)^6(a-3)^3} = -(a-6)^3(a-3)\sqrt{a-3}$$

۱۰. اگر  $a < 0$ ،  $b > 0$  و  $c < 0$ ، آنگاه عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف)  $\sqrt{a^2 b^5 c^4}$

ب)  $\sqrt[3]{a^2 b^5 c^4}$

۱۱. ابراهیم برای محاسبهٔ اولین رقم بعد از ممیز عدد  $\sqrt[3]{9}$  این‌گونه عمل کرد:

روش ابراهیم

برای محاسبهٔ اولین رقم بعد از ممیز عدد  $\sqrt[3]{9}$  کافی است بدانیم که عدد  $10\sqrt[3]{9}$  یا  $\sqrt[3]{9000}$  بین کدام دو عدد طبیعی متوالی قرار دارد.

$$20^3 < 9000 < 21^3 \implies \sqrt[3]{20^3} < \sqrt[3]{9000} < \sqrt[3]{21^3}$$

$$\implies 20 < \sqrt[3]{9000} < 21$$

$$\implies 20 < 10\sqrt[3]{9} < 21$$

$$\implies 2 < \sqrt[3]{9} < 2/1.$$

بنابراین اولین رقم بعد از ممیز عدد  $\sqrt[3]{9}$  صفر است.

الف) اولین رقم بعد از ممیز  $\sqrt[3]{10}$  را به‌دست آورید.

ب) دومین رقم بعد از ممیز  $\sqrt[3]{10}$  را به‌دست آورید.

## جمع و تفریق رادیکال‌ها

۱. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\left(1 + \frac{\sqrt{8} + 2}{1 + \sqrt{2}}\right)^{-1}$$

۲. در هر یک از قسمت‌های زیر،  $x$  را بیابید.

الف)  $x - \sqrt{6} = 6\sqrt{6}$

ب)  $-2\sqrt{7} - x = -5\sqrt{7}$

ج)  $\sqrt[3]{12} + 3\sqrt[3]{96} - x = -9\sqrt[3]{12}$

د)  $\sqrt[3]{81} + \sqrt[3]{-24} - x = \frac{9}{10}\sqrt[3]{3}$

ه)  $2\sqrt{20} + \sqrt{90} + x = 4\sqrt{5} + 23\sqrt{10}$

و)  $\sqrt{\frac{5}{49}} + x + 3\sqrt{\frac{125}{36}} = \frac{213}{70}\sqrt{5}$

۳. در هر یک از قسمت‌های زیر،  $A$  را بر حسب  $x$  و  $y$  به دست آورید.

الف)  $\sqrt{16x} + A = (4 + x^2)\sqrt{x}$

ب)  $\sqrt[3]{2y^4} - A = (y - 3)\sqrt[3]{2y}$

ج)  $\sqrt[3]{250x^4y^5} - A = xy\sqrt[3]{2xy^2}$

د)  $A + \sqrt{9x^5y^4} = 5x^2y^4\sqrt{xy}$

۴. کدام یک از راه‌حل‌های زیر را برای گویا کردن مخرج کسر  $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$  بیشتر می‌پسندید؟!

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{4}} &= \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{2}}{2} \\ &= \sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{\sqrt[3]{4}} &= \frac{2}{\sqrt[3]{4}} \times \frac{\sqrt[3]{42}}{\sqrt[3]{42}} \\ &= \frac{2\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{4^3}} \\ &= \frac{4\sqrt[3]{2}}{4} \\ &= \sqrt[3]{2}\end{aligned}$$

۵. درستی یا نادرستی هریک از عبارتهای زیر را بررسی کنید.

الف)  $\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \sqrt{3}-1$

ب)  $\frac{2}{\sqrt{3}+1} = \frac{3}{\sqrt{3}} - 1$

ج)  $\frac{3}{\sqrt{24}} = \frac{3}{2}$

د)  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

۶. مخرج هریک از کسره‌های زیر را گویا کنید.

الف)  $\frac{1}{\sqrt{52}}$

ب)  $\frac{24}{\sqrt{12}}$

ج)  $\frac{11}{\sqrt{5}\sqrt{7}}$

د)  $\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{15}}$

۷. هریک از اعداد زیر را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف)  $\frac{2}{\sqrt{2}}$

ب)  $\frac{9}{\sqrt{3}}$

ج)  $\frac{\sqrt{2}}{2}$

د)  $\frac{5}{\sqrt{20}}$

### مسئله پنج‌تایی دیوفانتی

فرض کنید  $A$  زیرمجموعه‌ای  $m$ -عضوی از اعداد گویا باشد. اگر حاصل ضرب هر دو عضو متمایز  $A$  را با یک جمع بزنیم و حاصل توان دوم یک عدد گویا باشد، آنگاه مجموعه  $A$  را یک  $m$ -تایی دیوفانتی می‌نامند. اگر همه اعضای یک  $m$ -تایی دیوفانتی اعداد طبیعی باشند، به آن یک  $m$ -تایی دیوفانتی طبیعی می‌گویند. برای مثال،  $\{3, 5, 16\}$  یک سه‌تایی دیوفانتی طبیعی است، زیرا:

$$3 \times 5 + 1 = 16 = 4^2, \quad 3 \times 16 + 1 = 49 = 7^2, \quad 5 \times 16 + 1 = 81 = 9^2.$$

دیوفانتوس (قرن سوم ق.م) چهارتایی دیوفانتی  $\{\frac{1}{16}, \frac{33}{16}, \frac{17}{4}, \frac{105}{16}\}$  را پیدا کرد؛ اما نتوانست یک پنج‌تایی دیوفانتی بیابد. فرما (۱۶۰۷ – ۱۶۶۵) اولین نفری بود که توانست چهارتایی دیوفانتی طبیعی  $\{1, 3, 8, 120\}$  را بسازد. اوایل (۱۷۰۷ – ۱۷۸۳) با اضافه کردن عدد  $\frac{77748}{8288641}$  به چهارتایی فرما، یک پنج‌تایی دیوفانتی ساخت. اوایلر ثابت کرد که بی‌شمار پنج‌تایی دیوفانتی وجود دارد. بیش از دو قرن بعد، در سال ۱۹۹۹، گیبز (Gibbs) اولین کسی بود که توانست یک شش‌تایی دیوفانتی پیدا کند [۶]:

$$\left\{ \frac{11}{192}, \frac{35}{192}, \frac{155}{27}, \frac{512}{27}, \frac{1235}{48}, \frac{180873}{16} \right\}.$$

در سال ۲۰۱۵، دویلا (Dujella) و همکارانش ثابت کردند که بی‌شمار شش‌تایی دیوفانتی وجود

دارد [۵]. درباره وجود یا عدم وجود هفت تایی دیوفانتی، هنوز چیزی نمی دانیم. اما مهم ترین مسئله در ارتباط با چندتایی های دیوفانتی که هنوز کسی پاسخ آن را نمی داند، مسئله زیر است.

### مسئله پنج تایی دیوفانتی. آیا یک پنج تایی دیوفانتی طبیعی وجود دارد؟

بی شک فرما و اویلر برای ساختن یک پنج تایی دیوفانتی طبیعی تلاش زیادی کرده بودند که به سرانجامی نرسید؛ این نشان می دهد حل این مسئله بدون استفاده از ریاضیات مدرن، تقریباً غیرممکن است.

تا به امروز تلاش های زیادی برای حل مسئله پنج تایی دیوفانتی صورت گرفته است. یکی از ایده های حل این مسئله این بوده است که به یک چهارتایی دیوفانتی یک عضو چنان اضافه کنیم که پنج تایی حاصل پاسخ مسئله باشد. در سال ۱۹۶۹، بیکر (Baker)، برنده مدال فیلدز، و داونپورت (Davenport) ثابت کردند که عدد طبیعی دیگری وجود ندارد که اگر آن را به مجموعه  $\{1, 3, 8, 120\}$  اضافه کنیم، یک پنج تایی دیوفانتی ساخته شود [۲].

واضح است که اگر یک پنج تایی دیوفانتی طبیعی وجود داشته باشد، هر زیر مجموعه چهارتایی آن یک چهارتایی دیوفانتی طبیعی است. بنابراین ریاضی دان ها سعی کردند همه چهارتایی های دیوفانتی طبیعی را بشناسند. در سال ۱۹۷۹، آرکین (Arkin) و همکارانش ثابت کردند که می توان از هر سه تایی دیوفانتی یک چهارتایی دیوفانتی ساخت [۱]. به این ترتیب که اگر  $\{a, b, c\}$  یک سه تایی دیوفانتی باشد که

$$ab + 1 = r^2, \quad ac + 1 = s^2, \quad bc + 1 = t^2,$$

آنگاه با قرار دادن  $d = a + b + c + 2abc + 2rst$ ، چهارتایی دیوفانتی  $\{a, b, c, d\}$  به دست می آید. از روش آرکین و همکارانش نتیجه می شود که اگر بی شمار سه تایی دیوفانتی وجود داشته باشد، آنگاه بی شمار چهارتایی دیوفانتی نیز وجود دارد. در زیر دو روش برای تولید بی شمار سه تایی دیوفانتی طبیعی آمده است:

**روش اول.** برای هر عدد طبیعی  $k$ ، مجموعه  $\{k, k + 2, 4k + 4\}$  یک سه تایی دیوفانتی طبیعی است.

**روش دوم.** در این روش از جمله های دنباله فیبوناتچی استفاده می شود. در زیر جمله اول تا جمله

یازدهم این دنباله نوشته شده است.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

اگر جمله  $k$ ام دنباله فیبوناتچی را با  $F(k)$  نشان دهیم، آنگاه برای هر عدد طبیعی  $k$ ، مجموعه  $\{F(2k), F(2k+2), F(2k+4)\}$  یک سه تایی دیوفانتی طبیعی است.

در سال ۱۹۹۷ دیولا ثابت کرد که اگر با روش آرکین و همکارانش از مجموعه های  $\{k, k+2, 4k+4\}$  و  $\{F(2k), F(2k+2), F(2k+4)\}$  چهارتایی دیوفانتی طبیعی بسازیم، به هیچ کدام از این چهارتایی ها نمی توان عددی طبیعی اضافه کرد به طوری که مجموعه حاصل یک پنج تایی دیوفانتی طبیعی باشد [۴].

دیولا در سال ۲۰۰۴ ثابت کرد که هیچ شش تایی دیوفانتی طبیعی وجود ندارد. همچنین او ثابت کرد که اگر پنج تایی های دیوفانتی طبیعی وجود داشته باشند، تعداد آنها متناهی است [۳].

چندتایی های دیوفانتی به عنوان مسئله ای در خم های بیضوی نیز مطرح هستند. خم های بیضوی موجوداتی هندسی هستند که ارتباط تنگاتنگی با اعداد صحیح دارند و در رمزنگاری پیشرفته از آنها استفاده می شود.

## منابع

- [1] J. Arkin and V. E. Hoggatt, and E. G. Strauss, *On Euler's solution of a problem of Diophantus*, Fibonacci Quart. **17** (1979), 333–339.
- [2] A. Baker and H. Davenport, *The equations  $3x^2 - 2 = y^2$  and  $8x^2 - 7 = z^2$* , Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **20** (1969), 129–137.
- [3] A. Dujella, *There are only finitely many Diophantine quintuples*, J. Reine Angew. Math. **566** (2004), 183–214.
- [4] A. Dujella, *The problem of the extension of a parametric family of Diophantine triples*, Publ. Math. Debrecen **51** (1997), 311–322.
- [5] A. Dujella, M. Kazalicki, M. Mikic, and M. Szikszai, *There are infinitely many rational Diophantine sextuples*, Int. Math. Res. Not. IMRN, to appear.
- [6] P. Gibbs, *Some rational Diophantine sextuples*, Glas. Mat. Ser. III **41** (2006), 195–203.

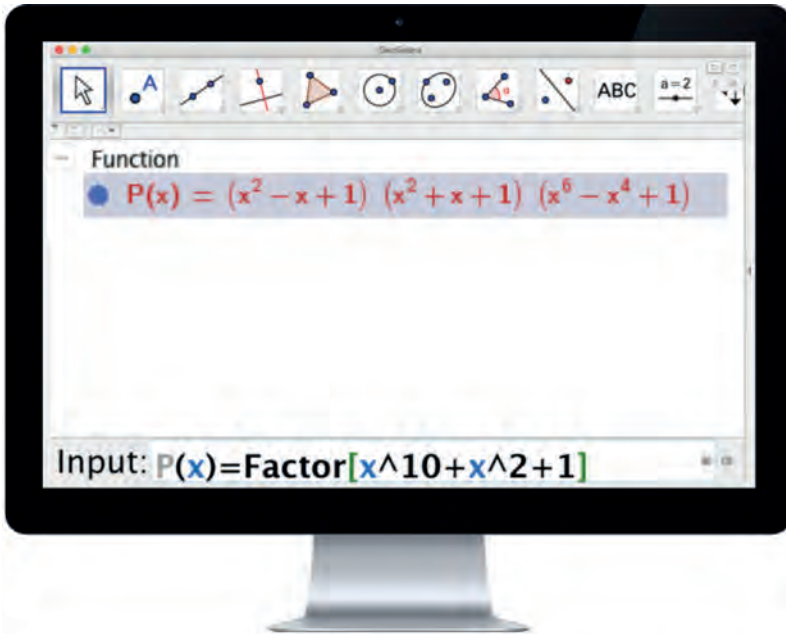




# ۵

## فصل

### عبارت‌های جبری



امروزه نرم‌افزارهای زیادی هستند که محاسبات جبری را به سادگی انجام می‌دهند. همان‌طور که در تصویر بالا می‌بینید نرم‌افزار جئوجبرا چند جمله‌ای  $x^{10} + x^2 + 1$  را تجزیه کرده است.

## گفت‌وگو

در کلاس درس ریاضی معلم طبق معمول راه‌حل مسئله‌ای را توضیح می‌داد. درحالی‌که به مکان خاصی از تخته کلاس اشاره می‌کرد، رو به دانش‌آموزان کرد:

معلم: حاصل این عبارت چند می‌شود؟ کسی ماشین حساب دم دست دارد؟

دو دانش‌آموز با تعجب به یکدیگر نگاه کردند.

دانش‌آموز ۱: ما کاملاً گیج شده‌ایم. یک روز می‌گویید از ماشین حساب استفاده نکنید. یک روز می‌گویید استفاده بکنید!

دانش‌آموز ۲: خُب آره. یک روز می‌گویید ماشین حساب مضر است؛ و یک روز می‌گویید اشکال ندارد!

معلم: [درحالی‌که لبخند ریزی به لب داشت] هیچ‌کس دیگری نظری ندارد؟

دانش‌آموزان کلاس کمی پچ‌پچ کردند. به نظر می‌آمد چیزهایی برای گفتن داشتند ولی کسی چیزی نگفت.

معلم: هر مسئله‌ای برای تمرین یک مهارت است و به ما کمک می‌کند تا مهارتی را یاد بگیریم. اگر آن مهارت «محاسبه کردن» باشد، نمی‌توانیم از ماشین حساب استفاده کنیم؛ اما اگر مهارتی که در یک مسئله باید آن را تمرین کنیم از جنس «محاسبه» نباشد، می‌توان از ماشین حساب استفاده کرد. به همین سادگی!

دانش‌آموز ۱: چطور می‌توانیم خودمان بفهمیم که چه زمانی از ماشین حساب کمک بگیریم و چه زمانی نه؟

معلم: [درحالی‌که به‌طور خاص به آن دانش‌آموز نگاه می‌کرد] سؤال خوبی است. باید ببینیم که معنی محاسبه چیست. [رو به همه دانش‌آموزان کلاس] کسی می‌داند محاسبه یعنی چه؟

دانش‌آموز ۳: محاسبه یعنی فرایندی که با چهار عمل اصلی انجام می‌دهیم. مثلاً به‌دست آوردن حاصل  $۲ \times ۴ - ۲$  محاسبه است.

معلم: به نظر شما ضرب دوتا چندجمله‌ای محاسبه است یا نه؟

دوباره در کلاس همه‌ها شد. این بار شاید چون جواب از جنس بله-خیر بود، خیلی‌ها می‌خواستند نظر بدهند. معلم از دانش‌آموزان خواست که همه نظر بدهند و در سه گروه موافق‌ها، مخالف‌ها و بی‌نظرها تقسیم شدند. (البته طبق معمول یکی از عادت‌های بد خیلی‌ها که همه در مورد همه چیز نظر می‌دهند، تعداد بی‌نظرها خیلی خیلی کم بود.) معلم به جواب‌های نه اشاره کرد و توضیحاتش را ادامه داد؛

معلم: اما ریاضی‌دان‌ها حتی برای به‌دست آوردن حاصل ضرب دو چندجمله‌ای هم می‌گویند «محاسبه کردن حاصل ضرب دو چندجمله‌ای».

دانش‌آموزی با خودش گفت که الان می‌چاقای معلم را می‌گیرم!

دانش‌آموز ۴: شما گفتید می‌توان از ماشین حساب کمک گرفت؛ اما مگر اینجا هم می‌شود گفت که اگر هدف مسئله‌ای محاسبه کردن نبود می‌توانیم از ماشین حساب کمک بگیریم؟

معلم: [کمی بی‌تفاوت] بله.

دانش‌آموز ۴: اما یک ماشین حساب که نمی‌تواند حاصل ضرب چندجمله‌ای‌ها را حساب کند!

معلم: [با لبخندی که انگار با آن می‌خواست درسی به مخاطب خود بدهد] ماشین حساب‌هایی که تا حالا داشتی یا ماشین حساب‌هایی که تا حالا دیدی؟! جوری می‌گویی ماشین حساب که انگار کلی اطلاعات داری. [بعد از کمی مکث] زمانی که من دبیرستانی بودم هر ساله ماشین حساب‌های پیشرفته‌تری تولید می‌شدند، اما در نسل شما چون ابعاد پردازشگرهای قوی در دسترس کوچکتر شده‌اند، ماشین حساب‌ها به‌عنوان نرم‌افزارهایی در دل دستگاه‌های هوشمند قرار گرفته‌اند. راستش دیگر

آنچنان خبری از ماشین‌حساب‌های مستقل نیست. شما می‌توانید از نرم‌افزارهای پیشرفته برای محاسبه کمک بگیرید.

کلاس در سکوت محض رفت.

معلم: ضرب چندجمله‌ای‌ها که خیلی ساده است. با نرم‌افزارهای ریاضی می‌توانید حتی چندجمله‌ای‌ها را تجزیه کنید!

کلاس این بار در بهت فرو رفت، زیرا هم ادعای معلم عجیب بود و هم اینکه دانش‌آموزی آهسته گفته بود: «پس عملاً ما وقتی داریم تجزیه می‌کنیم، سرکاریم!» و بچه‌ها فهمیده بودند که معلم صدای آن دانش‌آموز را شنیده است.

معلم: [با نرمی و قاطعیت] نه! گفتم که وقتی محاسبه کردن هدف است، نباید از وسیله دیگر کمک بگیریم. مگر وقتی قرار است برای سلامتی‌مان، بخشی از مسیرمان را پیاده راه برویم، می‌توانیم همان بخش را سوار ماشین بشویم؟

دانش‌آموز ۵: ببخشید من متوجه نشدم. بالاخره نفمیدم محاسبه یعنی چه؟

معلم: پس این باشد آخرین بخش این بحث امروزمان. محاسبه کردن یک چیز یعنی تعیین کردن پاسخ یک چیز به کمک روشی الگوریتمی. خُب، حالا دفترهایتان را نشانم بدهید تا ببینم وضع تکالیفتان چطور است.

گروه زیادی از دانش‌آموزان با هیاهو ابراز ناراحتی کردند که این بار هم نشد خیلی وقت کلاس را تلف کنیم. در این وسط، زرنگ‌ترین دانش‌آموز کلاس چیز جدیدی یافته بود. با خود می‌اندیشید که «تعیین کردن پاسخ یک چیز به کمک روشی الگوریتمی» یعنی چه؟ چطور می‌توان با کمک نرم‌افزارهای ریاضی چندجمله‌ای‌ها را تجزیه کرد؟

## چند جمله‌ای‌ها

۱. چند تا از عبارت‌های زیر یک جمله‌ای هستند؟ و یا اینکه به یک جمله‌ای تبدیل می‌شوند؟

- الف)  $2|x| - |x|$       ب)  $\frac{5x^2}{y}$       ج)  $\frac{x^2y}{5}$       د)  $-\sqrt{2}x$   
 ه)  $x^2 + 3x^2$       و)  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$       ز)  $\sqrt{x^2}$       ح)  $18^{-1}$

۲. در هر قسمت، یک جمله‌ای  $A$  را بیابید و ضریب عددی آن را مشخص کنید.

الف)  $A(-\frac{3}{5}t^2z) = \frac{7}{5}r^3z^3t^4$       ب)  $A(\frac{\sqrt{2}}{3}p^2q^3) = \frac{\sqrt{2}}{2}p^4q^5w^2$

ج)  $(a^2 - 3ab)A = 4a^3x - 12abx$       د)  $(y - z)A = \frac{3}{4}xy - \frac{3}{4}xz$

۳. فرض کنید  $A$  و  $B$  یک جمله‌ای‌هایی با ضرایب عددی صحیح باشند. اگر  $AB = x^2$ ، همه حالت‌هایی را که  $A$  و  $B$  می‌توانند داشته باشند، بیابید.

۴. چند تا از عبارت‌های زیر دوجمله‌ای هستند؟ و یا اینکه به دوجمله‌ای تبدیل می‌شوند؟

- الف)  $xy^2 + y^2x$       ب)  $\frac{5x^2}{y} + \frac{y}{5x^2} + a$       ج)  $\frac{x^2y + xy^2}{5}$   
 د)  $-\sqrt{2}x + \sqrt{3}x$       ه)  $x^2 + \sqrt{x^2}y$       و)  $|x^3| + y$

۵. در هر یک از قسمت‌های زیر مشخص کنید که هر دوجمله‌ای از مجموع چه یک جمله‌ای‌هایی تشکیل شده است. مانند نمونه، ضریب عددی هر یک جمله‌ای را مشخص کنید.

دوجمله‌ای	یک جمله‌ای‌ها	ضریب عددی جمله اول	ضریب عددی جمله دوم
$z - y$	$z, -y$	۱	-۱
$-3ab^2 - 4b^2c^3$			
$\frac{1}{5}z - \frac{ab}{3}$			
$\sqrt[3]{2}uw^2 - \sqrt{3}xy^2$			

۶. در هر یک از قسمت‌های زیر  $A$  دوجمله‌ای است. آن را بیابید.

- الف)  $xA = xy - x^2$       ب)  $A(-2y^2) = 2y^2w^2z - 10y^2$   
 ج)  $-\frac{a}{4}A = 3ab + \frac{a^2cb}{5}$       د)  $A(\sqrt{3}x) = 3x^2 - 9xy$

۷. حاصل ضرب دو دو جمله‌ای در یکدیگر، چند جمله می‌تواند داشته باشد؟ همه حالت‌های ممکن را بررسی کنید و برای هریک مثالی بیاورید.

۸. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد صحیح باشند، آنگاه درباره تعداد جملات حاصل ضرب  $(x^2 + ax + 1)(x + b)$  پس از ساده کردن، کدامیک از عبارت‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟

الف) اگر  $a = -b$ ، آنگاه تعداد جملات حاصل ضرب پس از ساده کردن دقیقاً ۳ تا است.

ب) اگر  $b = 0$ ، آنگاه تعداد جملات حاصل ضرب پس از ساده کردن ۳ تا یا ۲ تا است.

۹. درجه هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را مشخص کنید.

الف) ۹      ب)  $-\sqrt{2}$       ج)  $\sqrt[3]{5} + \pi$       د) ۰

۱۰. در ردیف دوم جدول زیر، دو سه جمله‌ای وجود دارد که حاصل ضرب آنها یک سه جمله‌ای درجه ۸ است. در هر ردیف، نقطه چین‌ها را با یک جمله‌ای‌های مناسب طوری پر کنید که،

• درجه و تعداد جملات گسترده حاصل ضرب دو سه جمله‌ای ستون عبارت جبری با اعدادی که در همان ردیف نوشته شده، برابر باشند.

• گسترده حاصل ضرب هر دو سه جمله‌ای، یک چندجمله‌ای باشد که فقط متغیر  $x$  دارد.

درجه	تعداد جملات	عبارت جبری
۸	۹	$(x^6 + x^3 + 1)(x^2 + x + 1)$
۷	۸	$(x^5 + \dots + 1)(x^2 + x + 1)$
۶	۷	$(x^4 + \dots + 1)(x^2 + x + 1)$
۵	۶	$(\dots + \dots + 1)(x^2 + x + 1)$
۴	۵	$(\dots + \dots + 1)(x^2 + x + 1)$
۴	۴	$(\dots + \dots + \dots)(x^2 + \dots + 1)$
۴	۳	$(\dots + \dots + \dots)(\dots + \dots + \dots)$
۴	۲	$(\dots + \dots + \dots)(\dots + \dots + \dots)$

۱۱. برای هریک از چندجمله‌ای‌هایی که در پرسش قبل به دست آورده‌اید، راه‌حلی بیابید که آن چندجمله‌ای را تجزیه کند. برای این کار، به راه‌حلی که در ضرب کردن دو سه‌جمله‌ای به کار برده‌اید، به دقت نگاه کنید. برای مثال، اگر حاصل  $(x^2 + x + 1)(x^6 + x^3 + 1)$  را به صورت زیر به دست آورده باشیم:

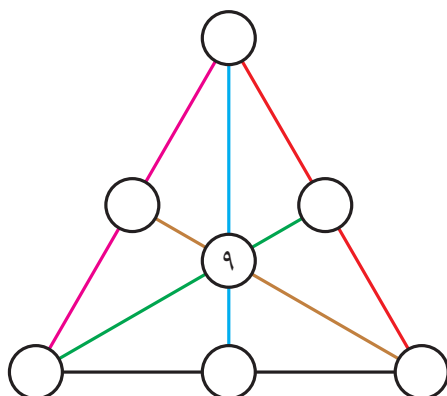
$$\begin{aligned} & (x^6 + x^3 + 1)(x^2 + x + 1) \\ &= x^6(x^2 + x + 1) + x^3(x^2 + x + 1) + 1(x^2 + x + 1) \\ &= x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1, \\ & \text{آنگاه برای تجزیه چندجمله‌ای حاصل، می‌توانیم به صورت زیر عمل کنیم:} \\ & \underbrace{x^8 + x^7 + x^6}_{x^6(x^2 + x + 1)} + \underbrace{x^5 + x^4 + x^3}_{x^3(x^2 + x + 1)} + \underbrace{x^2 + x + 1}_{1(x^2 + x + 1)} \\ &= x^6(x^2 + x + 1) + x^3(x^2 + x + 1) + 1(x^2 + x + 1) \\ &= (x^6 + x^3 + 1)(x^2 + x + 1). \end{aligned}$$

به این ترتیب هر جا دیدید که دو یا چند چندجمله‌ای در هم ضرب شده‌اند، یعنی یک تمرین تجزیه متولد شده است!



۱۲. در شکل زیر، دایره‌های خالی را با یک جمله‌ای‌هایی که فقط متغیر  $x$  دارند، طوری پر کنید که هر سه شرط زیر برقرار باشد.

- درجهٔ یک جمله‌ای‌ها حداکثر ۴ باشد.
- مجموع یک جمله‌ای‌های روی هر پاره‌خط تشکیل یک سه جمله‌ای دهد.
- مجموع ضرایب هر سه جمله‌ای (روی هر پاره‌خط) برابر صفر شود.



- در زیر، مدلی برای نام‌گذاری چندجمله‌ای‌ها ارائه شده است. در این کتاب از چنین مدلی برای نام‌گذاری چندجمله‌ای‌ها استفاده شده است.

#### نام‌گذاری چندجمله‌ای‌ها

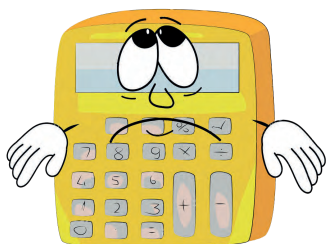
برای نام‌گذاری چندجمله‌ای‌ها از حروف بزرگ انگلیسی استفاده می‌کنند. برای مثال، می‌توان چندجمله‌ای  $x^2 + y^2$  را  $P$  نامید. از طرفی چون شناسایی متغیرهای یک چندجمله‌ای مهم هستند، بهتر است چندجمله‌ای  $P$  را به صورت  $P(x, y)$  نمایش داد.

۱۳. در هریک از خانه‌های جدول زیر، یک چندجمله‌ای بنویسید به طوری که حاصل جمع هر سه خانه پشت‌سرهم برابر  $x$  شود.  $P(x)$  را بیابید.

$x + ۱$				$P(x)$				$x - ۱$
---------	--	--	--	--------	--	--	--	---------



۱۴. یک ماشین حساب، عمل جمع را در یک ثانیه و عمل ضرب را در ۵ ثانیه انجام می‌دهد. برای مثال، به ازای هر مقدار  $x$ ، حاصل عبارت  $x^3 + 4x + 10$  را در ۱۷ ثانیه حساب می‌کند. درستی هریک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.



الف)  $P(x)$  ای وجود دارد که محاسبه آن، به ازای هر مقدار  $x$ ، با این ماشین حساب ۱۸ ثانیه زمان می‌برد.  
ب)  $P(x)$  ای وجود دارد که محاسبه آن، به ازای هر مقدار  $x$ ، با این ماشین حساب ۱۹ ثانیه زمان می‌برد.

۱۵. اگر در گسترده  $(x - 18)(x - \frac{1}{3})(2x - 3)$  به جای  $x$  عدد  $\frac{1}{6}$  بگذاریم، حاصل چه عددی است؟  
هانا و تارا این مسئله را به صورت زیر حل کردند. این راه‌حل‌ها را بررسی کنید.

#### راه‌حل هانا

گسترده این عبارت را به دست می‌آوریم و آن را  $P(x)$  می‌نامیم.

$$\begin{aligned} 3x(2x - \frac{1}{3})(x - 18) &= (6x^2 - x)(x - 18) \\ &= 6x^2(x - 18) - x(x - 18) \\ &= 6x^3 - 108x^2 - x^2 + 18x \\ &= 6x^3 - 109x^2 + 18x. \end{aligned}$$

چون  $P(x) = 6x^3 - 109x^2 + 18x$  و می‌خواهیم  $P(\frac{1}{6})$  را به دست آوریم، پس:

$$\begin{aligned} P(\frac{1}{6}) &= 6 \times (\frac{1}{6})^3 - 109(\frac{1}{6})^2 + 18(\frac{1}{6}) \\ &= 6(\frac{1}{216}) - 109(\frac{1}{36}) + 18(\frac{1}{6}) \\ &= \frac{1}{36} - \frac{109}{36} + 3 \\ &= \frac{1 - 109 + 108}{36} \\ &= 0. \end{aligned}$$

اگر  $P(x) = 3x(2x - \frac{1}{3})(x - 18)$ ، باید  $P(\frac{1}{6})$  را محاسبه کنیم. بنابراین:

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{6}\right) &= 3\left(\frac{1}{6}\right)\left(2 \times \frac{1}{6} - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6} - 18\right) \\ &= \frac{1}{2} \times 0 \times \left(-\frac{107}{6}\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

۱۶. اگر  $P(x) = x(x-1)(x-2)$ ، آنگاه حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $P(0)$       ب)  $P(1)$       ج)  $P(2)$       د)  $P(3)$

• در تعدادی از تمرین‌های این کتاب، از تعریف «ریشه یک چندجمله‌ای» که در زیر آمده، استفاده شده است.

#### ریشه یک چندجمله‌ای

اگر  $P(x)$  یک چندجمله‌ای،  $a$  یک عدد حقیقی و  $P(a) = 0$ ، آنگاه عدد  $a$  ریشه چندجمله‌ای  $P(x)$  است.

برای مثال، اگر  $P(x) = (x-1)(x+3)$ ، آنگاه عدد ۱ ریشه چندجمله‌ای  $P(x)$  و عدد ۳ ریشه  $P(x)$  نیست؛ زیرا:

$$P(1) = (1-1)(1+3) = 0, \quad P(3) = (3-1)(3+3) = 18 \neq 0.$$

۱۷. هریک از عبارت‌های زیر، چند ریشه دارند؟ آنها را بیابید.

الف)  $2x + 7$       ب)  $(x+1)(x-2)$   
ج)  $x(x-3)(x-\sqrt{2})$       د)  $x^2 - 1$

۱۸. حداقل سه تا چندجمله‌ای درجه ۴ مثال بزنید که ریشه‌های آنها ۱، ۲، ۳- و ۱- باشد.

۱۹.  $P(x)$  ای مثال بزنید که درجه آن ۳ باشد و

$$P(2) = P\left(-\frac{1}{5}\right) = P(-\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- باتوجه به تعریف «چندجمله‌ای متعادل» که در زیر آمده است، به پرسش‌های ۲۰، ۲۱، ۲۲ و ۲۳ پاسخ دهید.

### چندجمله‌ای متعادل

یک چندجمله‌ای را متعادل می‌نامیم، هرگاه دو شرط زیر برقرار باشد.

- درجه آن چندجمله‌ای نسبت به همه متغیرهایش یک باشد.
- مجموع ضرایب جمله‌هایی که یک متغیر دلخواه در آن ظاهر می‌شود، برابر صفر باشد.

برای مثال، چهارجمله‌ای  $xy + zw - xz - yw$  متعادل است. زیرا متغیر  $x$  در جمله‌های  $xy$  و  $-xz$  آمده است که مجموع ضرایب این جمله‌ها برابر صفر است. این استدلال برای متغیرهای  $y$ ،  $z$  و  $w$  نیز صادق است.

۲۰. کدام یک از چندجمله‌ای‌های زیر متعادل هستند؟

- الف)  $(ab)^2 - (ac)^2 - (bd)^2 + (cd)^2$     ب)  $ac - ad + bd + bc$   
ج)  $(a - c)(b - d) - (a - d)(b - c)$     د)  $ab - ad + bc - cd$

۲۱. کدام یک از عبارتهای زیر هشتجمله‌ای متعادل هستند؟

- الف)  $(a - d)(b - e)(c - f)$   
ب)  $(a - d)(b - e)(c - f) - (a - d)(b - c)(e - f)$   
ج)  $(a - d)(b - e)(c - f) - (a - b)(d - c)(e - f)$

۲۲. چندجمله‌ای متعادل قسمت «الف» تمرین قبل، چه ارتباطی با قسمت «الف» تمرین ۱۶ صفحه

۸ دارد؟ با استفاده از چندجمله‌ای قسمت «الف» تمرین قبل و همه زیرمجموعه‌های سه عضوی

یک مجموعه شش عضوی، می‌توانید قسمت «ب» تمرین ۱۶ صفحه ۸ را حل کنید.

۲۳. علی باید جاهای خالی عبارت زیر را با حروف  $a, b, c, d, e$  و  $f$  طوری پر کند که حاصل عبارت یک چندجمله‌ای متعادل باشد.

$$(a - d)(b - e)(c - f) - (\dots - \dots)(\dots - \dots)(\dots - \dots)$$

درستی هریک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

الف) علی می‌تواند شش حرف داده شده را طوری در جاهای خالی قرار دهد که حاصل یک چهارده‌جمله‌ای متعادل باشد.

ب) علی می‌تواند شش حرف داده شده را طوری در جاهای خالی قرار دهد که حاصل یک شانزده‌جمله‌ای متعادل باشد.

## اتحاد و تجزیه

۱. تساوی‌های ستون راست چه تفاوتی با تساوی‌های ستون چپ دارند؟

- |                                      |                      |
|--------------------------------------|----------------------|
| • $x = x$                            | ■ $2x = x$           |
| • $1^0(y + 1) = 1^0y + 1^0$          | ■ $1^0(y + 1) = 1^0$ |
| • $z^2(z + 1) - xz = z(z^2 + z - x)$ | ■ $z^3 + z^2 = xz$   |
| • $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$      | ■ $(a + b)^2 = 4$    |

۲. با ذکر دلیل مشخص کنید که کدام یک از تساوی‌های زیر اتحاد است و کدام یک اتحاد نیست.

الف)  $3x^2 - 4x + x^2 = 1^0x + 4x^2 - 14x$

ب)  $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1$

ج)  $x^4 + 2x - 1 = (x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1) + x^2$

۳. مثالی بیاورید که اتحاد بودن تساوی زیر را نقض کند.

$$(a + b - c)^3 + (ab + 2c)^3 = (ab - 2c)^3 + (a + b + c)^3 + 3abc$$

۴. جفت عبارت‌هایی را که تشکیل اتحاد می‌دهند، بیابید.

الف)  $3x^3 - 5x + 2$

ب)  $(x - 1)(3x^2 + 3x - 2)$

ج)  $x + (x - 1)(x^3 + 2) - x^3$

د)  $x^4 + 2x - 1$

ه)  $x^3 + 5x^2 + 4x + 1$

و)  $(x + 1)(x^2 + 3x + 1) + x^2$

ز)  $x^4 + 3x - 2x^3 - 2$

ح)  $8x + 3$

ط)  $(x^2 + x - 1)(x^2 - x + 1) + x^2$

ی)  $12x + 5 - 2(2x + 1)$

۵. در هر قسمت، با اضافه کردن یک چندجمله‌ای به عبارت سمت چپ، اتحاد بسازید.

الف)  $(xy - 5)^2, (x^2y^2 + 7)$

ب)  $(2y + 1)(y^2 + 2), (y^3 + 3)$

ج)  $(2a - 3b)(a + 4b), (2a^2 - 8ab)$

د)  $(z + 2z^2)(2z - z^3), (-z^3)$

۶.  $a$  و  $b$  چه اعدادی باشند که تساوی زیر یک اتحاد شود؟

$$a(x + 1)^2 + b(x + 1) - ax^2 - bx = 8x + 3$$

۷.  $a$  و  $b$  دو عدد هستند به طوری که تساوی زیر اتحاد شده است. مقدار  $a + b$  را به دست آورید.

$$1 + x + 2x^2 - x^3 = 3 + a(x - 2) + b(x - 2)^2 - (x - 2)^3$$

• در تعدادی از تمرین‌های این کتاب، از تعریف «تجزیه چندجمله‌ای‌ها» که در زیر آمده، استفاده شده است.

#### تجزیه چندجمله‌ای‌ها

چندجمله‌ای  $P$  را در نظر بگیرید. اگر بتوان  $P$  را به صورت حاصل ضرب دو یا چند چندجمله‌ای با درجه کمتر از درجه  $P$  نوشت، آنگاه  $P$  تجزیه شده است.

۸. ابتدا اتحاد بودن هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید. سپس در مواردی که تساوی یک اتحاد است، با ذکر دلیل، بگویید که طرف راست تجزیه شده چندجمله‌ای طرف چپ هست یا نه.

الف)  $x^2 + x + 1 = x(x + 1) + 1$

ب)  $a^2 - a + 6 = (a - 3)(a + 2)$

ج)  $(2b - 7c)(2b + 7c) = 4b^2 - 49c^2$

د)  $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - (2xy)^2$

ه)  $u(u + 1) - 5(u + 1) = (u - 5)(u + 1)$

و)  $5w - 10 = 5(w - 2)$

ز)  $xy - x - y + 1 = x(y - 1) - (y - 1)$

ح)  $x^2 + 1 = x(x + \frac{1}{x})$

ط)  $x - 1 = (\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)$

۹. فرض کنید  $P(x)$  یک چندجمله‌ای درجه ۱ باشد. آیا ممکن است  $P(x)$  تجزیه شود؟

۱۰. فرض کنید  $P(x, y)$  یک چندجمله‌ای باشد که درجه آن نسبت به  $x$  برابر ۱ و نسبت به  $y$  نیز برابر ۱ است. آیا ممکن است  $P(x, y)$  تجزیه شود؟

۱۱. به کمک فاکتورگیری، چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف)  $x^4 + 2x^3 + 3x^2$

ب)  $(z + 5)z - z(7 - z)$

ج)  $c^3 + 2c^2 - 3c - 6$

د)  $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

۱۲. آیا فاکتورگیری، همیشه یک چندجمله‌ای را تجزیه می‌کند؟

## اتحاد مربع دوجمله‌ای

۱. آیا حاصل ضرب یک دوجمله‌ای در خودش همواره سه‌جمله‌ای است؟

۲. با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای هر عبارت را تجزیه کنید.

الف)  $k^2 + 3k + \frac{9}{4}$

ب)  $5z^2 + 4 + 4\sqrt{5}z$

ج)  $36x^2y^4 - 12xy^2 + 1$

د)  $4(a+b)^2 - 12(a+b) + 9$

ه)  $(u-1)^2 - 2(u-1)(1-v) + (1-v)^2$

۳. یک دوجمله‌ای را در خودش ضرب کنید و حاصل ضرب را به هم‌کلاسی‌هایتان بدهید و از آنها بخواهید آن را تجزیه کنند. سعی کنید دوجمله‌ای را طوری انتخاب کنید که هم‌کلاسی‌هایتان نتوانند حاصل ضرب دوجمله‌ای در خودش را به‌سادگی تجزیه کنند.

۴. ابتدا به کمک فاکتورگیری و اتحاد مربع دوجمله‌ای، چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید. سپس ریشه‌های هر چندجمله‌ای را بیابید.

الف)  $-y^2 - 16 + 8y$

ب)  $\frac{1}{12} + \frac{x^2}{3} + \frac{x}{3}$

ج)  $(z+1)^3 + 6(z+1)^2 + 9(z+1)$

د)  $\frac{9}{4}(u+4)^3 + \frac{49}{8}(u+4) - \frac{21}{4}(u+4)^2$

۵. الف) چرا می‌توان از اتحاد مربع دوجمله‌ای برای تجزیه کردن کمک گرفت؟

ب) آیا می‌توان از اتحاد  $A^2 + 2AB + B^2 + C^2 = (A+B)^2 + C^2$  برای تجزیه کردن کمک گرفت؟

۶. می‌دانیم  $a+1$  عددی منفی است. عبارت زیر را به‌صورت یک چندجمله‌ای بنویسید.

$$\sqrt{(-a)^2} + \sqrt{a^2 + 2a + 1}$$

۷. می‌دانیم  $a$  عددی منفی است. عبارت زیر را به‌صورت یک چندجمله‌ای بنویسید.

$$\sqrt{a^2(a-1)^2} + \sqrt{4a^2 - 4a + 1} - \sqrt{(-a^2 + 2a - 1)^2}$$

۸. اگر  $a, b, c$  سه عدد حقیقی باشند و  $\{(a+1)^2 + 2, (b-1)^3\} = \{-1, -a^4, c\}$ ، آنگاه

چند مقدار مختلف برای  $a^{-c} + b$  وجود دارد؟

۹. اگر  $a, b$  و  $c$  سه عدد حقیقی باشند و  $\{-8, 3\} = \{\sqrt{a^2 - 10a + 25}, \sqrt[3]{b^9}, \sqrt{-c}\}$ ،

آنگاه کدام یک از عبارت‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) حاصل  $a - b + c$  می‌تواند برابر ۱ باشد.

ب) حاصل  $b^{-c} + a^{-c}$  می‌تواند برابر صفر باشد.

۱۰. الف) یک چندجمله‌ای بیابید که  $\sqrt{2}$  ریشه‌اش باشد ولی ضرایب یک‌جمله‌ای‌های آن اعداد

صحیح باشند.

ب) یک چندجمله‌ای بیابید که  $1 - \sqrt{2}$  ریشه‌اش باشد ولی ضرایب یک‌جمله‌ای‌های آن

اعداد صحیح باشند.

ج) یک چندجمله‌ای بیابید که  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  ریشه‌اش باشد ولی ضرایب یک‌جمله‌ای‌های آن

اعداد صحیح باشند.

## مربع‌سازی

۱. سه‌جمله‌ای  $P + 36x + 4x^2$ ، گستردهٔ مربع یک دو‌جمله‌ای است.  $P$  را بیابید.

لیلا، مینا و مهشید این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. راه‌حل‌های این سه نفر را بررسی کنید.

### راه‌حل لیلا

اتحاد مربع دو‌جمله‌ای را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$(جملهٔ دوم + جملهٔ اول)^2 = (جملهٔ دوم)^2 + (جملهٔ اول)^2 + 2(جملهٔ اول)(جملهٔ دوم)$$

اگر  $4x^2$  را مربع جملهٔ اول و  $36x$  را دو برابر جملهٔ اول در جملهٔ دوم در نظر بگیریم،



داریم:

$$(2x)^2 + \underbrace{2(2x)(\text{جمله دوم})}_{36x} + (\text{جمله دوم})^2 = (2x + \text{جمله دوم})^2.$$

پس جمله دوم، عدد ۹ است. بنابراین  $P = 81$ .

راه حل مینا

اگر  $4x^2$  را مربع جمله اول و  $36x$  را مربع جمله دوم در نظر بگیریم، داریم:

$$(2x)^2 + (6\sqrt{x})^2 + 2(2x)(6\sqrt{x}) = (2x + 6\sqrt{x})^2.$$

بنابراین  $P = 24x\sqrt{x}$ .

راه حل مهشید

اگر  $4x^2$  دو برابر جمله اول در جمله دوم و  $36x$  مربع جمله دوم باشد، داریم:

$$(-6\sqrt{x})^2 + \underbrace{2(-6\sqrt{x})(\text{جمله اول})}_{4x^2} + (\text{جمله اول})^2 = (-6\sqrt{x} + \text{جمله اول})^2.$$

پس جمله اول،  $-\frac{1}{6}x\sqrt{x}$  است. بنابراین  $P = \frac{1}{9}x^3$ .

۲. یک یک‌جمله‌ای به هریک از عبارت‌های زیر اضافه کنید به طوری که عبارت حاصل، گسترده مربع یک دو جمله‌ای باشد. در هر قسمت همه جواب‌ها را بیابید.

الف)  $x^2 + 10x$

ب)  $x^2 + 3x$

ج)  $4y^2 + 12y$

د)  $4a^2 + 14ab$

ه)  $4a^2 + 7ab$

و)  $5a^2 + 2\sqrt{5}a$

ز)  $5a^2 + 7a$

ح)  $4a^2 + 25$

ط)  $a^6 + 4$

ی)  $a^5 + 1$

۳. درستی محاسبه زیر را بررسی کنید.

$$\sqrt{29 - 12\sqrt{5}} = \sqrt{(3 - 2\sqrt{5})^2} = 3 - 2\sqrt{5}.$$

۴. ثابت کنید:

$$\text{الف) } \sqrt{5 + 2\sqrt{6}} = \sqrt{3} + \sqrt{2} \quad \text{ب) } \sqrt{13 + \sqrt{48}} = 2\sqrt{3} + 1$$

۵. در هر مورد اعداد گویای  $a$  و  $b$  را طوری تعیین کنید که تساوی برقرار باشد.

$$\text{الف) } \sqrt{9 - \sqrt{56}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad \text{ب) } \sqrt{2 + \sqrt{3}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

۶. در تساوی‌های زیر اعداد طبیعی  $x$  و  $y$  را طوری تعیین کنید که  $a$  و  $b$  نیز اعدادی طبیعی شوند. سپس بعد از جایگذاری مقادیر  $x$  و  $y$ ، فقط عبارت سمت چپ تساوی را به هم‌کلاسی‌هایتان بدهید و از آنها بخواهید که حاصل آن را به‌دست آورند. سعی کنید مقادیر  $x$  و  $y$  را طوری انتخاب کنید که هم‌کلاسی‌هایتان نتوانند به‌سادگی حاصل عبارت را پیدا کنند.

$$\text{الف) } \sqrt{x - \sqrt{y}} = \sqrt{a} - \sqrt{b} \quad \text{ب) } \sqrt{x + \sqrt{y}} = \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

۷. حاصل هریک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

$$\text{الف) } \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} + \sqrt{3} \quad \text{ب) } \sqrt{8 - 2\sqrt{15}} - \sqrt{5}$$

## مجموع مربعات

۱. اگر  $a, b, c$  سه عدد باشند و بدانیم  $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ ، آنگاه مقدار عددی  $a^3 + b^3 + c^3$  را بیابید.

۲. الف) چندجمله‌ای  $2 - 2x - 2y + x^2 + y^2$  را به‌صورت مجموع مربع دو دوجمله‌ای بنویسید.

ب) ثابت کنید که اگر  $2 - 2x - 2y + x^2 + y^2 = 0$ ، آنگاه  $x = y = 1$ .

۳. می‌دانیم  $3 = x^2 + y^2 + \frac{1}{4}z^2 - 2x + 2y - z$ . مقدار عددی  $x + y + z$  را بیابید.

۴. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد باشند، آنگاه ثابت کنید مقدار چندجمله‌ای زیر همواره مثبت است.

$$9a^2 + 10a^2 + b^2 - 4ab + 1$$

۵. ثابت کنید:

الف) اگر  $w^2 + x^2 = wx$ ، آنگاه  $w = x = 0$ .

ب) اگر  $w^2 + x^2 + y^2 = w(x + y)$ ، آنگاه  $w = x = y = 0$ .

ج) اگر  $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = w(x + y + z)$ ، آنگاه  $w = x = y = z = 0$ .

### مربع چندجمله‌ای

۱.  $a$  و  $b$  چه اعدادی باشند که تساوی زیر یک اتحاد شود؟

$$(x^2 + ax + 1)^2 = x^4 + bx^3 + 6x^2 + bx + 1$$

۲. حاصل ضرب یک سه‌جمله‌ای در خودش حداقل و حداکثر چند جمله دارد؟

۳. به چند روش متفاوت می‌توان با افزودن یک دوجمله‌ای به عبارت زیر، این عبارت را به صورت مربع یک سه‌جمله‌ای نوشت؟

$$x^4 + 4y^2 + 1 - 4y$$

۴. عبارتهای زیر را به صورت مربع یک سه‌جمله‌ای بنویسید.

$$a^4 + 2\sqrt{2}a^2 - 2\sqrt{2}a + 1 \quad \text{ب) } a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 2a + 1$$

۵. الف) اتحاد زیر را کامل کنید.

$$(a + b + c + d)^2 = a^2 + \dots$$

ب) اگر گسترده عبارت زیر را  $(1 + 2x + 3x^2 + \dots + 10x^9)^2$  ساده کنیم، چند ضریب فرد خواهیم داشت؟

## اتحاد مزدوج

۱. چرا می‌توان از اتحاد مزدوج برای تجزیه کردن کمک گرفت؟

۲. با کمک اتحاد مزدوج، حاصل ضرب عبارت‌های داده شده را حساب کنید.

الف)  $(x^3 + 2x^2 - x + 4)(x^3 - 2x^2 - x - 4)$

ب)  $(x^2 - xy + y^2)(x^2 + xy + y^2)(x^4 - x^2y^2 + y^4)(x^8 - x^4y^4 + y^8)$

۳. عبارت  $4a^2c^2 - (a^2 - b^2 + c^2)^2$  را به صورت ضرب چهار سه‌جمله‌ای متفاوت بنویسید.

۴. ابتدا به کمک فاکتورگیری و اتحاد مزدوج، چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید. سپس ریشه‌های هر چندجمله‌ای را بیابید.

الف)  $-625y + y^3$

ب)  $(x + 2)^4 - 4(x + 2)^2$

۵. برای تجزیه چندجمله‌ای‌های زیر از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج کمک بگیرید.

الف)  $(x^2 - 8x + 8)^2 - 64$

ب)  $(x + y)^4 - (x - y)^4$

ج)  $(x^4 + 4x^2 + 4) - 4x^2$

د)  $4y^4 + 1 + 4y^2 - 4y^2$

ه)  $2z^2 + z^4 + 1 - 2z^2$

و)  $k^8 + 64 + 16k^4 - 16k^4$

۶. الف) اگر  $a - b = 1$ ، آنگاه درستی تساوی زیر را ثابت کنید.

$$(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)(a^8 + b^8) = a^{16} - b^{16}$$

ب) حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 + \frac{1}{16}\right)\left(1 + \frac{1}{256}\right)$$

۷. ثابت کنید:

الف)  $(\sqrt{6} - \sqrt{5})^{1000} \times (\sqrt{6} + \sqrt{5})^{998} = 11 - 2\sqrt{30}$

ب)  $\sqrt[3]{7 - 4\sqrt{3}} \times \sqrt[3]{7 + 4\sqrt{3}} = 1$

۸. اگر برای چهار عدد  $a, b, c, d$  داشته باشیم  $a + b = c + d$  و  $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$ ، آنگاه ثابت کنید  $\{a, b\} = \{c, d\}$ .

۹. در تجزیه عبارت  $a^2(1-x) + (b^2 + c^2 - 2bc)(x-1)$ ، کدام یک از چندجمله‌ای‌های زیر می‌توانند وجود داشته باشند؟

الف)  $a + b - c$

ب)  $a - b + c$

ج)  $b + c - a$

د)  $x - 1$

۱۰. با استفاده از اتحاد مزدوج، مخرج کسرهای زیر را گویا کنید.

الف)  $\frac{3 + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$

ب)  $\frac{1}{\sqrt{10} + \sqrt{14}}$

۱۱. حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{\sqrt{1} + \sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3} + \sqrt{4}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{99} + \sqrt{100}}$$

۱۲. فرض کنید  $a = \sqrt{1394} + \sqrt{1357}$ . عبارت  $\sqrt{1394} - \sqrt{1357}$  را برحسب  $a$  بنویسید.

۱۳. اگر  $x = 1 - \sqrt{2}$  باشد، حاصل  $\sqrt{x + x^{-1}}$  چقدر است؟

۱۴. آیا  $x^4 + 3x^2 + 4$  با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه می‌شود؟

محدثه و امیرعباس این مسئله را به صورت زیر حل کرده‌اند. راه حل‌های آنها را بررسی کنید.

#### راه حل محدثه

اگر  $x^4$  را مربع جمله اول و  $3x^2$  را دو برابر جمله اول در جمله دوم در نظر بگیریم، آنگاه:

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2 + 4 &= \left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^2 + 4 - \frac{9}{4} \\ &= \left(x^2 + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

بنابراین  $x^4 + 3x^2 + 4$  با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه نمی‌شود.

راه حل امیرعباس

ابتدا  $x^4$  را مربع جمله اول و ۴ را مربع جمله دوم در نظر می‌گیریم. پس:

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2 + 4 &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= ((x^2 + 2) + x)((x^2 + 2) - x). \end{aligned}$$

بنابراین  $x^4 + 3x^2 + 4$  با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه می‌شود.

۱۵. آیا  $x^4 + 3x^2 + 1$  با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه می‌شود؟

سعید و آرمیتا این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. راه‌حل‌های این دو نفر را بررسی کنید.

راه حل سعید

اگر  $x^4$  مربع جمله اول و ۱ مربع جمله دوم باشد، داریم:

$$x^4 + 3x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 + x^2.$$

بنابراین  $x^4 + 3x^2 + 1$  با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه نمی‌شود.

راه حل آرمیتا

فرض کنید  $x^4$  مربع جمله اول و  $3x^2$  دو برابر جمله اول در جمله دوم باشد، آنگاه:

$$\begin{aligned} x^4 + 3x^2 + 1 &= \left(x^2 + \frac{3}{2}\right)^2 + 1 - \frac{9}{4} \\ &= \left(x^2 + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} \\ &= \left(\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\left(\left(x^2 + \frac{3}{2}\right) - \frac{\sqrt{5}}{2}\right). \end{aligned}$$

بنابراین  $x^4 + 3x^2 + 1$  با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه می‌شود.

۱۶. چندجمله‌ای‌های زیر را با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه کنید.

الف)  $x^4 + 4x^2 + 16$

ب)  $x^4 + 4x^2 - 16$

ج)  $x^4 + 2x^2 + 9$

د)  $x^4 - 2x^2 + 9$

ه)  $x^4 - 5x^2 + 11$

و)  $x^4 + 5x^2 - 599$

ز)  $4x^4 + 1$

ح)  $x^4 + 1$

۱۷. به جای  $a$  و  $b$  در عبارت  $x^4 + ax^2 + b$  اعدادی قرار دهید که اگر عبارت حاصل را به هم‌کلاسی‌هایتان دادید، آنها نتوانند این عبارت را به‌سادگی تجزیه کنند.

۱۸. اگر  $a$  و  $b$  دو عدد حقیقی باشند، آیا  $x^4 + ax^2 + b$  همیشه با استفاده از اتحاد مربع دوجمله‌ای و اتحاد مزدوج، تجزیه می‌شود؟

۱۹. درباره ریشه داشتن و تجزیه شدن دو چندجمله‌ای  $x^2 + 1$  و  $x^4 + 1$  بحث کنید.

## اتحاد جمله مشترک

۱. چرا می‌توان از اتحاد جمله‌مشترک برای تجزیه کردن کمک گرفت؟

۲. ابتدا با استفاده از اتحاد جمله‌مشترک هریک از چندجمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید. سپس ریشه‌های هر چندجمله‌ای را بیابید.

الف)  $x^2 - 2x - 8$

ب)  $y^2 - 10y + 16$

ج)  $4k^2 + 14k + 10$

د)  $16h^2 + 16h + 3$

۳. فرض کنید  $P(x)$  یک چندجمله‌ای و مجموعه ریشه‌های آن  $R$  باشد به‌طوری‌که

$$n(R) = 2, R \subseteq \{x \mid x \in \mathbb{Z}, -20 \leq x \leq 20\}.$$

با شرایط بالا،  $P(x)$  ای مثال بزنید که اگر آن را به هم‌کلاسی‌هایتان بدهید، آنها نتوانند  $P(x)$  را به‌سادگی تجزیه کنند.

۴. به کمک فاکتورگیری، اتحاد مربع دو جمله‌ای و اتحاد جمله مشترک، چند جمله‌ای‌های زیر را تجزیه کنید.

الف)  $(x^2 + 3x + 2) + (x^2 + 4x + 3)$     ب)  $8x^3 + 16x^2 + 6x$

ج)  $(x^2 + 4x + 4) + (x^2 + 3x + 2)$

۵. در تجزیه عبارت  $(x^4 - 5x^2 + 4)(x^2 - 10x + 16)$  چه تعداد چند جمله‌ای درجه یک متفاوت وجود دارد؟

۶. مقادیر  $a$  و  $b$  را طوری بیابید که تساوی زیر یک اتحاد باشد.

$$x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6 = (x - a)(x - b)(x^2 + x + 1)$$

۷. فرض کنید  $k$  عددی طبیعی باشد. ثابت کنید برای هر مقدار  $k$ ، اگر حاصل ضرب هر دو عضو متمایز مجموعه زیر را با یک جمع بزنیم، حاصل مربع کامل است.

$$\{k, k + 2, 4k + 4, 16k^3 + 48k^2 + 44k + 12\}$$

## نامعادله

### نامعادله یک مجهولی درجه اول

اگر مجهول نامعادله‌ای را با  $x$  نشان داده باشیم و پس از ساده کردن به صورت  $ax + b > 0$  درآید به طوری که  $a \neq 0$ ، آن را یک نامعادله یک مجهولی درجه اول می‌نامیم.

۱. برای چند مقدار  $a$ ، عبارت  $ax + 1 > a^2x + 1$  نامعادله یک مجهولی درجه اول نیست؟ همه این مقادارها را مشخص کنید.



۲. طرفین نامعادله  $2x + 2 < 3x + 1$  با طرفین کدام نامعادله جمع شود که جواب آن  $x < 7$  شود؟

(الف)  $2x + 3 < 4x - 1$

(ب)  $5x - 1 < x + 3$

(ج)  $2x < x + 1$

(د)  $-x > x - 4$

۳. نامعادله  $2x + d < 5x - 3$  را در نظر بگیرید. فرض کنید  $A$  مجموعه اعدادی باشد که می‌توان به جای  $x$  قرار داد و  $B$  مجموعه اعدادی باشد که می‌توان به جای  $d$  قرار داد. اگر  $5 \in A$ ، آنگاه درباره  $B$  چه می‌توان گفت؟

۴. اگر  $A$  و  $B$  به‌ترتیب مجموعه جواب نامعادله‌های  $\frac{3}{4}x + 2 > 2x - 3$  و  $\frac{x}{2} - \frac{x-1}{3} > 1$  باشند، آنگاه  $A \cap B$  را به‌دست آورید.

۵. اگر مجموعه  $A$  مجموعه جواب نامعادله یک مجهولی درجه اول  $P(x) < Q(x)$  و مجموعه  $B$  مجموعه جواب نامعادله یک مجهولی درجه اول  $R(x) < S(x)$  باشد، آنگاه درستی هریک از عبارت‌های زیر را بررسی کنید.

(الف) مجموعه جواب نامعادله  $P(x) + R(x) < Q(x) + S(x)$  با مجموعه  $A \cup B$  برابر است.

(ب) مجموعه جواب نامعادله  $P(x) \times R(x) < Q(x) \times S(x)$  با مجموعه  $A \cap B$  برابر است.

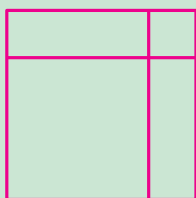
۶. اگر  $x \in \mathbb{Z}$ ، آنگاه درباره درستی یا نادرستی دو عبارت زیر بحث کنید.

(الف) اگر  $x^2 < 64$ ، آنگاه  $-\sqrt{7} < x < \sqrt{7}$ .

(ب) اگر  $x^2 < 64$ ، آنگاه  $-\sqrt{7^0} < x < \sqrt{7^0}$ .

## تاریخچه نمادگذاری در جبر

جبر یونانی، آن‌گونه که به‌دست فیثاغورسیان (حدود ۵۴۰ ق.م) و اقلیدس (حدود ۳۰۰ ق.م) مدون شد، هندسی بود. برای مثال، آنچه را که ما با عنوان «اتحاد مربع دوجمله‌ای» می‌شناسیم و به‌صورت  $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  نشان می‌دهیم، در کتاب اصول اقلیدس (مقاله دوم، قضیه ۴) به‌صورت زیر بیان شده است.



اگر یک خط راست به دو قطعه دلخواه تقسیم شده باشد، مربع تمامی خط با مربع‌های هریک از قطعه‌ها و دو برابر مستطیل حاصل از این قطعه‌ها مساوی است.

خوارزمی (۸۲۵ م)، ریاضی‌دان ایرانی در کتاب معروف خود، الجبر والمقابلہ، حتی از کلمات به‌جای اعداد استفاده کرده است. معادله‌ای را که امروزه به‌صورت  $x^2 + 21 = 10x$  می‌نویسند، خوارزمی به‌شکل زیر بیان و حل کرده است:

مقدار یک مربع چیست که وقتی بیست‌ویک درهم بر آن افزوده شود، ده برابر جذر آن مربع به‌دست آید؟ پاسخ چنین است: تعداد جذرها را نصف کن؛ این نصف، پنج است. آن را در خودش ضرب کن؛ حاصل ضرب، بیست‌وپنج است. از این عدد، بیست‌ویک را که به مربع افزوده بودیم، تفریق کن؛ باقی‌مانده، چهار است. جذر آن را به‌دست آور؛ این جذر، دو است. این را از نصف تعداد جذرها که پنج است تفریق کن؛ باقی‌مانده، سه است. این جذر مربعی است که آن را می‌خواستی و خود مربع، نه است. یا اینکه می‌توانی جذر را به نصف جذرها اضافه کنی؛ مجموع، هفت است. این جذر مربعی است که آن را می‌خواستی و خود مربع، چهل‌ونه است.

البته پاسخ او معادل نوشته امروزی زیر است:

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 21} = 5 \pm \sqrt{4} = 3, 7.$$

درست است که جبر خوارزمی کسل‌کننده به نظر می‌رسد، اما اغلب ایده‌ها جلوتر از نمادها حرکت می‌کنند. حتی مسئله‌هایی که امروزه نیز اغلب برای اولین بار حل می‌شوند، در راه‌حل‌هایشان از نمادهای پیچیده‌ای استفاده می‌شود؛ ولی معمولاً پس از چند سال راه‌حل‌های آنها با نمادهای ساده‌تر عرضه می‌شود.

دیوفانتوس (قرن سوم ق.م) اولین بار از خلاصه‌نویسی در جبر استفاده کرده است. در زیر مثالی از یکی از نخستین نسخ دست‌نویس یونانی می‌بینید.

$$K^{\Upsilon} \beta \ s \eta^{\wedge} \ \Delta^{\Upsilon} \ \overset{\circ}{M} \delta \ \varepsilon \sigma \tau \iota \ \mu \delta;$$

یعنی

$$2x^3 + 8x - (5x^2 + 4) = 44.$$

در زیر توضیحاتی دربارهٔ هریک از نمادهای بالا آمده است.

$K^{\Upsilon}$  اختصاری برای  $K\Upsilon B O \Sigma$  به معنای مکعب است.

$s$  اختصاری برای  $\alpha \rho \iota \theta \mu o s$  به معنای عدد است.

$\wedge$  ترکیبی از  $\Lambda$  و  $I$  در  $\Lambda E I \Psi \Sigma I \Sigma$  به معنای کمبود است.

$\Delta^{\Upsilon}$  اختصاری برای  $\Delta \Upsilon N A M I \Sigma$  به معنای توان است.

$M$  اختصاری برای  $M O N A \Delta E \Sigma$  به معنای واحدها است.

$\varepsilon \sigma \tau \iota$  به نشانهٔ  $i s o s$  یا برابر است.

نُه حرف اول الفبای یونانی یعنی  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, s, \zeta, \eta$  و  $\theta$  به‌ترتیب به نشانهٔ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ به‌کار می‌رفتند؛ و  $\iota, \kappa, \lambda, \mu, \nu, \xi, o, \pi, \Omega$  به‌ترتیب به نشانهٔ ۱۰، ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰، ۶۰، ۷۰، ۸۰ و ۹۰ به‌کار گرفته می‌شدند.

در ادامه مثال‌های از نوع نگارش ریاضی در سال‌های مختلف آمده است. این مثال‌ها روند تدریجی پیشرفت نمادگذاری جبری را نشان می‌دهند.

پاچولی در سال ۱۴۹۴ معادلهٔ  $x + x^2 = 12$  را به‌صورت زیر نوشته است.

*Trouame .I.n°. che giōto al suo qdrat° faccia. 12.*

واندر هوک در سال ۱۵۱۴ معادله  $4x^2 - 51x - 30 = 45$  را به صورت زیر نوشته است.

$$4Se.-51 Pri.-30N dit is ghelijc 45.$$

گالیگایی در سال ۱۵۲۱ معادله  $x^2 + 32x = 320$  را به صورت زیر نوشته است.

$$I \square e 32C^{\circ}-320 numeri.$$

رودولف در سال ۱۵۲۵ معادله  $x^2 = 12x - 36$  را به صورت زیر نوشته است.

$$cubus \bar{p} 6 rebus aequalis 20.$$

رکورد در سال ۱۵۵۷ معادله  $14x + 15 = 71$  را به صورت زیر نوشته است.

$$14. \Phi + 15. \varphi = 71. \varphi.$$

بوتن در سال ۱۵۵۹ معادله  $x^2 + 6x + 9 = x^2 + 3x + 24$  را به صورت زیر نوشته است.

$$I \diamond P 6 \rho P 9 [ I \diamond P 3 \rho P 24.$$

استوین در سال ۱۵۸۵ معادله  $3x^2 + 4 = 2x + 4$  را به صورت زیر نوشته است.

$$3^{(2)}+4 egales `a 2^{(1)}+4$$

ویت در سال ۱۵۹۱ معادله  $-15x^4 + 85x^3 - 225x^2 + 274x = 120$  را به صورت زیر

نوشته است.

$$I QC-15QQ+85C-225Q+274Q+274N aequatu$$

هاریوت در سال ۱۶۳۱ معادله  $x^3 - 3b^2x = 2c^3$  را به صورت زیر نوشته است.

$$aaa - 3bba = +2ccc.$$

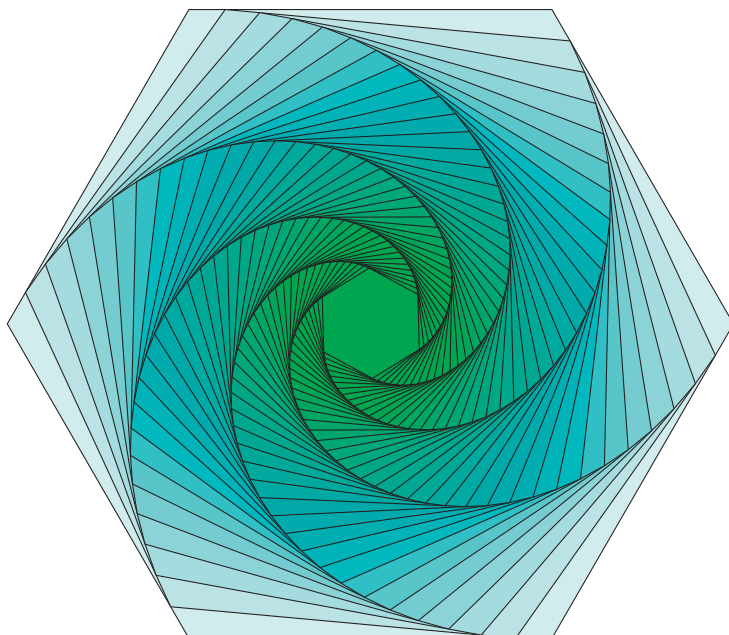
دکارت در سال ۱۶۳۷ معادله  $y^2 = cy - \frac{cx}{b}y + ay - ac$  را به صورت زیر نوشته است.

$$yy \propto -\frac{cx}{b}y + ay - ac.$$

والیس در سال ۱۶۹۳ معادله  $x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$  را به صورت زیر نوشته

است.

$$x^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0.$$

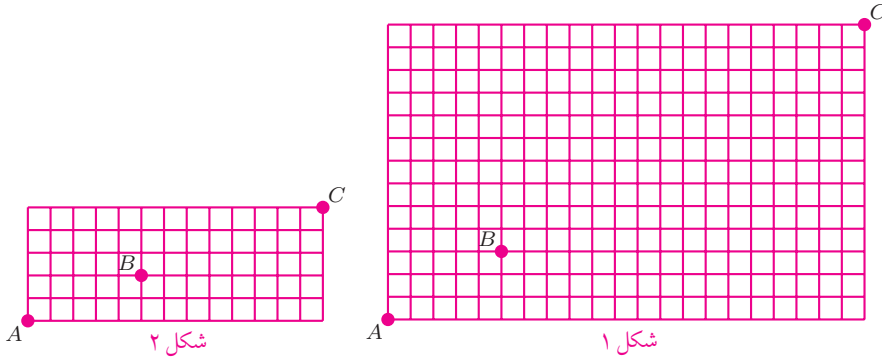


```
\begin{tikzpicture}
\draw(0,0) coordinate(A) --(120:6cm) coordinate(B) ---++(60:6cm) coordinate(C)
---++(0:6cm) coordinate(D) ---++(-60:6cm) coordinate(E) ---++(240:6cm) coordinate(F) --cycle;
\foreach \x in {1,...,60}{\draw (A) coordinate(X);
\draw[fill=green!20] (A) --(B) coordinate[pos=.10] (A) --(C) coordinate[pos=.10] (B)
--(D) coordinate[pos=.10] (C) --(E) coordinate[pos=.10] (D)
--(F) coordinate[pos=.10] (E) --(X) coordinate[pos=.10] (F);
\draw (A) --(B) --(C) -- (D) --(E) -- (F) -- cycle;};
\end{tikzpicture}
```

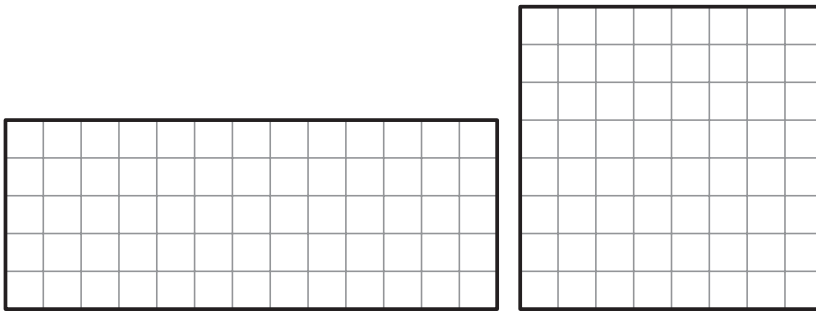
رسم شکل‌های دقیق در رشته‌های بسیاری کاربرد دارد. برای کار با نرم‌افزارهایی که شکل‌ها را دقیق رسم می‌کنند باید به رابطه بین نقاط صفحه مختصات تسلط داشت. برای رسم شکل بالا که دستورات ترسیمش زیر آن نوشته شده است، از بسته TikZ نرم‌افزار  $\text{\LaTeX}$  استفاده شده است. بد نیست بدانید که همه شکل‌های کتاب‌های ریاضی تکمیلی با چنین دستوراتی رسم شده‌اند.

## شیب و معادله خط

۱. در کدام یک از شکل‌های زیر، سه نقطه  $A$ ،  $B$  و  $C$  روی یک خط هستند؟ (طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است.)



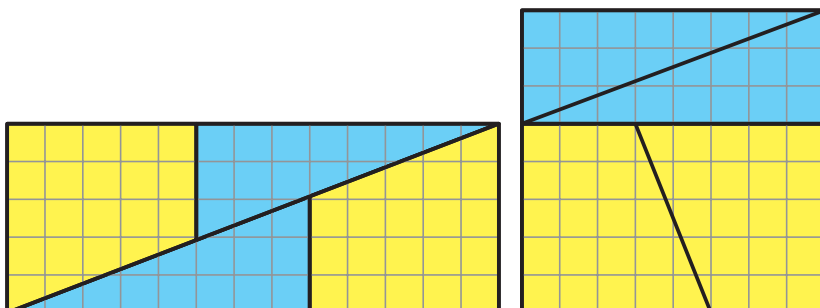
۲. الف) مساحت مربع و مستطیل زیر را حساب کنید. (طول ضلع مربع‌های کوچک یک واحد است.)



ب) در زیر، در شکل سمت راست مساحت هریک از دوزنقه‌ها و در شکل سمت چپ مساحت هریک از مثلث‌ها چقدر است؟



ج) به شکل‌های زیر توجه کنید.



در هر دو شکل مشاهده می‌شود دو مثلث و دوزنقه‌ای که مساحت آن‌ها را در قسمت «ب» حساب کرده‌اید، در مربع و مستطیلی قرار گرفته‌اند که مساحت آن‌ها را در قسمت «الف» حساب کرده‌اید. یعنی به نظر می‌رسد باید مساحت مستطیل و مربعی که در قسمت «الف» حساب کرده‌اید، برابر باشند. ولی چنین نیست. چرا؟

۳. در مسئله قبل مساحت مربع و مستطیل از حاصل ضرب‌های  $8 \times 8$  و  $5 \times 13$  به دست می‌آمد. این اعداد در الگوی عددی زیر که به «دنباله فیبوناتچی»<sup>۱</sup> معروف است، ظاهر می‌شوند.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \dots$$

مسئله‌ای مشابه مسئله قبل طرح کنید به طوری که مساحت مربع و مستطیل آن بیشتر باشد.

۴. اگر سه نقطه  $\left[\begin{smallmatrix} k \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$ ،  $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ k \end{smallmatrix}\right]$  و  $\left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$  روی یک خط راست باشند،  $k$  چقدر است؟

۵. الف) چهار نقطه در صفحه مختصات مثال بزنید که اگر آن‌ها را دوه‌دو به هم وصل کنیم، چهار شیب متفاوت به دست آید.

ب) آیا می‌توانید پنج نقطه در صفحه مختصات مثال بزنید که اگر آن‌ها را دوه‌دو به هم وصل کنیم، چهار شیب متفاوت به دست آید؟

ج) آیا می‌توانید شش نقطه در صفحه مختصات مثال بزنید که اگر آن‌ها را دوه‌دو به هم وصل کنیم، پنج شیب متفاوت به دست آید؟

۶. آیا می‌توان همهٔ اعضای مجموعهٔ زیر را در صفحهٔ مختصات نمایش داد؟

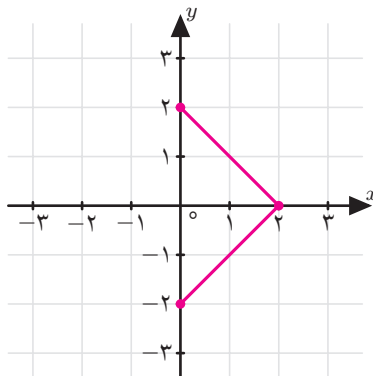
$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, y = 2x - 3 \right\}$$

۷. می‌دانیم  $A$  مجموعه‌ای شامل نقاطی از صفحهٔ مختصات است به‌طوری‌که همهٔ این نقاط روی یک خط راست قرار دارند.

الف) اگر بدانیم  $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in A$ ، آیا می‌توان همهٔ عضوهای مجموعهٔ  $A$  را مشخص کرد؟

ب) اگر بدانیم  $A \subseteq \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ ، آیا می‌توان همهٔ عضوهای مجموعهٔ  $A$  را مشخص کرد؟

۸. مهران و فرهاد می‌خواستند همهٔ نقاط روی پاره‌خط‌های صورتی شکل زیر را به‌صورت یک مجموعه نشان دهند.



پاسخ مهران

اگر

$$A = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid y = -x + 2, x \geq 0, y \geq 0 \right\}$$

و

$$B = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid y = x - 2, x \geq 0, y \leq 0 \right\},$$

آنگاه مجموعهٔ همهٔ نقاط روی پاره‌خط‌های صورتی  $A \cup B$  است.

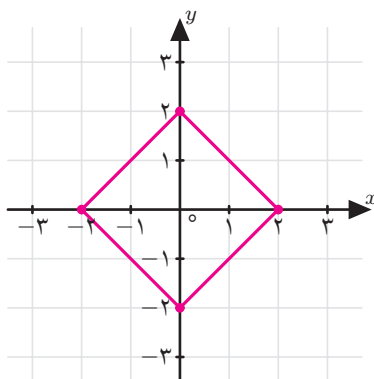
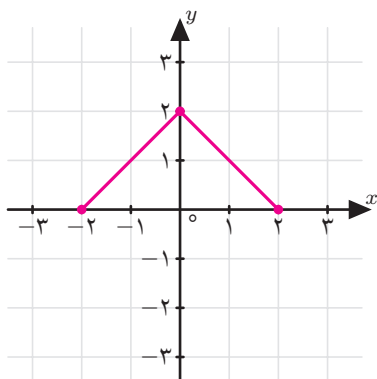


### پاسخ فرهاد

اعضای مجموعه  $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid x + |y| = 2, x \geq 0 \right\}$  مجموعه همه نقاط روی پاره‌خط‌های صورتی هستند.

آیا پاسخ‌های مهران و فرهاد درست هستند؟ برای پاسخ درست، راه‌حل کامل بنویسید.

۹. در هریک از شکل‌های زیر همه نقاط روی پاره‌خط‌های صورتی را به صورت یک مجموعه نشان دهید.



۱۰. آرمیتا می‌خواست مجموعه نقاطی در صفحه مختصات را بیابد که فاصله همه آن نقاط از نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  برابر ۴ باشد. او راه‌حل زیر را نوشت.

### راه‌حل آرمیتا

نقطه  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  را  $O$  می‌نامیم. فرض کنیم فاصله نقطه دلخواه  $A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$  از نقطه  $O$  برابر ۴ باشد. از نقطه  $A$  خطی موازی با محور  $y$  و از نقطه  $O$  خطی موازی با محور  $x$  رسم می‌کنیم. این دو خط یکدیگر را در نقطه  $B$  قطع می‌کنند. طول پاره‌خطی که نقاط  $O$  و  $B$  را به یکدیگر وصل می‌کند برابر است با  $|x - 2|$ . همچنین طول پاره‌خطی که نقاط  $A$  و  $B$  را به یکدیگر وصل می‌کند برابر است با  $|y - 3|$ . چون رابطه فیثاغورس

برای سه پاره خط  $AB$ ،  $AO$  و  $BO$  برقرار است، پس:

$$BO^2 + AB^2 = AO^2 \implies (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2.$$

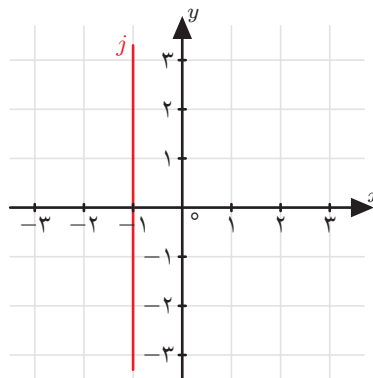
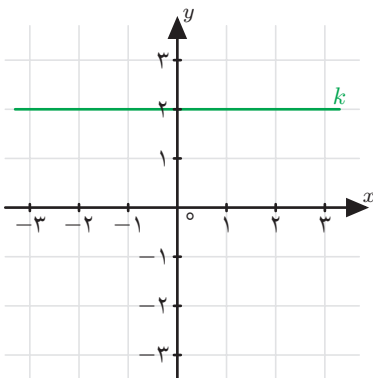
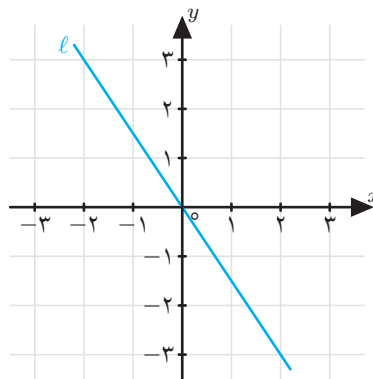
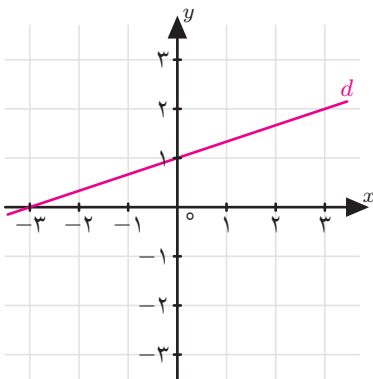
بنابراین مجموعه زیر، مجموعه خواسته شده است.

$$\left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mid (x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 16 \right\}$$

الف) درباره راه حل آرمیتا بحث کنید.

ب) آیا می‌توانید همه نقاطی را که آرمیتا به دست آورده است، روی صفحه مختصات نشان دهید؟

۱۱. هما، فاطمه و فرخنده می‌خواستند معادله چهار خط زیر را به دست آورند.



پاسخ‌های آنها به صورت زیر است. برای پاسخ هریک راه حل کامل بنویسید و درباره هر راه حل بحث کنید.

#### راه حل هما

معادله خط در حالت کلی به صورت  $y = ax + b$  است که در آن  $a$  شیب و  $b$  عرض از مبدأ است.

بنابراین معادله این چهار خط به صورت زیر است.

$$d : y = \frac{1}{3}x + 1$$

$$\ell : y = -\frac{3}{4}x$$

$$k : y = 2$$

$$j : \text{😎}$$

#### راه حل فاطمه

معادله خط در حالت کلی به صورت  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$  است که در آن  $a$  طول از مبدأ و  $b$  عرض از مبدأ می باشد.

بنابراین معادله این چهار خط به صورت زیر است.

$$d : \frac{x}{-3} + \frac{y}{1} = 1$$

$$\ell : \text{😐}$$

$$k : \text{😞}$$

$$j : \text{🔴💥}$$

#### راه حل فرخنده

معادله خط در حالت کلی به صورت  $ax + by + c = 0$  است. بنابراین معادله این چهار خط به صورت زیر است.

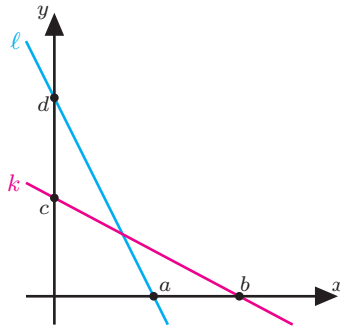
$$d : x - 3y + 3 = 0$$

$$\ell : 3x + 2y = 0$$

$$k : y - 2 = 0$$

$$j : x + 1 = 0$$

۱۲. مطابق شکل زیر، خط  $k$  به معادله  $\frac{x}{8} + \frac{y}{4} = 1$ ، خط  $\ell$  را قطع کرده است. اگر  $b - a = 5$  و  $d - c = 5$ ، آنگاه معادله خط  $\ell$  را به دست آورید.

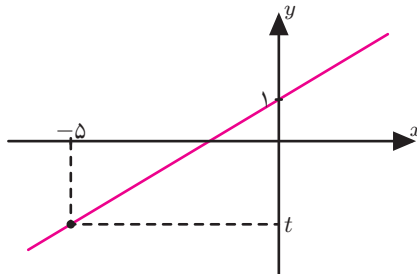


۱۳. خط به معادله  $2x - 7y + 4 = 0$  از کدام ربع دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱۴. اگر بدانیم  $a^2 + b^2 = 0$ ، آنگاه معادله  $ax + by + c = 0$  چه چیزی را در صفحه مختصات نشان می‌دهد؟

۱۵. معادله خطی را بنویسید که محور  $x$ ها را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند و موازی خطی باشد که از دو نقطه  $\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$  و  $\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$  می‌گذرد.

۱۶. خط  $y = 2x + d$  در زیر رسم شده است. مقدار  $t$  چقدر است؟



۱۷. کدام یک از عبارتهای زیر درست و کدام یک نادرست است؟

(الف) اگر شیب دو خط برابر باشند، آن دو خط موازی‌اند.

(ب) اگر دو خط موازی باشند، شیب آن دو خط برابرند.

۱۸. می‌دانیم دو خط  $y = mx + b$  و  $y = m'x + b'$  موازی‌اند. اگر  $mm' = 1$ ، آنگاه کدام یک از عبارات‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

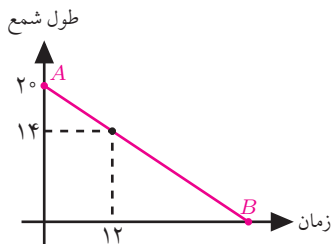
الف) هر دو خط، موازی نیمساز ربع اول و سوم هستند.

ب) هر دو خط، موازی نیمساز ربع دوم و چهارم هستند.

۱۹. زاویه بین دو خط  $x = 1395$  و  $x + y = 2016$  چند درجه است؟

۲۰. محیط هشت ضلعی منتظمی که سه ضلع آن روی خطوط  $y = 6$ ،  $y = x + 2$  و  $x = 2$  باشد، چقدر است؟

۲۱. یک شمع عجیب در حالت ایستاده روشن می‌شود و آنقدر روشن می‌ماند تا تمام شود. پاره خط  $AB$  در شکل زیر، طول شمع در حال سوختن را برحسب زمان نشان می‌دهد.



الف) اگر دو سر این شمع عجیب را همزمان روشن کنیم و شمع را به صورت افقی روی میز بگذاریم، هر طرف شمع مانند حالت ایستاده می‌سوزد. در این حالت نمودار سوختن شمع را رسم کنید.

ب) اگر دو سر این شمع عجیب را همزمان روشن کنیم و شمع را به صورت عمودی نگه داریم، پایین شمع با سرعت ۷ برابر بالای شمع می‌سوزد. در این حالت نمودار سوختن شمع را رسم کنید.

۲۲. کدام یک از عبارات‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر  $(x + y) + (x - y) = 1$ ، آنگاه  $x = \frac{1}{4}$  و  $y = -\frac{1}{4}$ .

ب) اگر  $\sqrt{3}(x + y) + (x - y) = 1$ ، آنگاه  $x = \frac{1}{4}$  و  $y = -\frac{1}{4}$ .

## دستگاه معادلات خطی

۱. فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} 2x+2y \\ 8 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -7 \\ -2x-2y \end{bmatrix}$ .

الف)  $x$  و  $y$  را طوری تعیین کنید که  $A$  روی محور عرض‌ها و  $B$  روی محور طول‌ها باشد.

ب)  $x$  و  $y$  را طوری تعیین کنید که  $A$  روی نیم‌ساز ربع اول و سوم و  $B$  روی نیم‌ساز ربع دوم و چهارم باشد.

۲. فاصلهٔ محل برخورد دو خط  $2x - y = 1$  و  $y + 3x - 4 = 0$  از مبدأ مختصات چقدر است؟

۳. معادله خطی را بنویسید که با خط  $\sqrt{2}y - 2x + 2 = 0$  موازی باشد و از نقطه برخورد دو خط  $y = 0$  و  $y + 2x - 5 = 0$  بگذرد.

۴. محل برخورد دو خط به معادله‌های  $y = x + 2$  و  $my = x + n$  روی محور  $x$  قرار دارد.  $n$  را بیابید.

۵. مقدار  $k$  را طوری تعیین کنید که دستگاه زیر جواب نداشته باشد.

$$\begin{cases} 3x - 2y = k \\ kx + 3y = 1395 \end{cases}$$

۶. محل برخورد دو خط  $y = 3x + 2$  و  $y = \frac{a}{4}x - \frac{3}{4}$  دارای مختصات طبیعی است. پنج برادر محدودهٔ مقدار  $a$  را به صورت زیر حدس زدند. کدام حدس درست و کدام نادرست است؟

- حدس هوشنگ:  $6 < a \leq 13$
- حدس بیژن:  $7 < a < 14$
- حدس ارژنگ:  $6 \leq a < 13$
- حدس ارسلان:  $5 < a < 14$
- حدس اردشیر:  $10 < a < 12$

۷. اگر سه خط با معادله‌های  $x - y = 0$ ،  $(2m - 5)x + my = 3$  و  $2x + y = 9$  یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند، آنگاه  $m$  را بیابید.

۸. معادله پنج خط را بنویسید به طوری که این پنج خط دقیقاً در یک نقطه مشترک باشند.

۹. علیرضا در آزمونی شرکت کرد که ۴۰ سؤال داشت. روی دفترچه آزمون نوشته شده بود: «هر پاسخ درست ۵/۰ نمره مثبت و هر پاسخ نادرست ۱ نمره منفی دارد.» علیرضا در پایان آزمون خوشحال بود که به تمام سؤال‌ها پاسخ داده است؛ اما بعد از اعلام نتایج نمره علیرضا ۲ شد! او به چند سؤال پاسخ درست داده بود؟



۱۰. احمد و محمود هر کدام تعدادی سکه داشتند. احمد ۵ سکه از پدربزرگش گرفت و سکه‌هایش دو برابر سکه‌های محمود شد. سپس ۱۲ سکه به مادربزرگش داد و تعداد سکه‌هایش نصف تعداد سکه‌های محمود شد. احمد در ابتدا چند سکه داشته است؟



۱۱. می‌دانیم  $P(x)$  یک چندجمله‌ای درجه ۱ است.  $P(x)$  را طوری تعیین کنید که داشته باشیم  $P(1) = 3$  و  $P(2) = 5$ .

۱۲. می‌دانیم  $P(x)$  یک چندجمله‌ای درجه ۲ است.  $P(x)$  را طوری تعیین کنید که داشته باشیم  $P(1) = 0$ ،  $P(2) = 1$  و  $P(3) = 4$ .

۱۳. می‌دانیم  $P(x)$  یک چندجمله‌ای درجه ۳ است.  $P(x)$  را طوری تعیین کنید که داشته باشیم  $P(1) = 0$ ,  $P(2) = 1$  و  $P(3) = 3$ .

۱۴. می‌دانیم  $m$  و  $n$  اعدادی حقیقی هستند و معادله خط  $d$  به صورت زیر است:

$$(2x + y + 2)m + (3y - x + 7)n + (5x - 2y + 10) = 0.$$

اگر خط  $d$  موازی محور عرض‌ها باشد و محور طول‌ها را در نقطه‌ای به طول ۲- قطع کند، آنگاه  $m$  و  $n$  را بیابید.

سهیل این مسئله را به صورت زیر حل کرده است. ابتدا ایراد راه حل سهیل را پیدا کنید و سپس  $m$  و  $n$  را به دست آورید.

#### راه حل سهیل

معادله خط در حالت کلی به صورت  $ax + by + c = 0$  است. پس ابتدا چهره معادله را این گونه تغییر می‌دهیم:

$$(2x + y + 2)m + (3y - x + 7)n + (5x - 2y + 10) = 0$$

$$\Rightarrow (2m - n + 5)x + (m + 3n - 2)y + (2m + 7n + 10) = 0. (*)$$

چون خط  $d$  موازی محور عرض‌هاست و طول از مبدأ آن ۲- است، در نتیجه  $x = -2$  معادله خط  $d$  است. پس در رابطه (\*) ضریب  $x$  برابر ۱ و ضریب  $y$  برابر صفر است. بنابراین برای به دست آوردن  $m$  و  $n$  کافی است دستگاه معادلات زیر را حل کنیم.

$$\begin{cases} 2m - n + 5 = 1 \\ m + 3n - 2 = 0 \end{cases}$$

از دستگاه بالا به سادگی نتیجه می‌شود که  $m = -\frac{10}{3}$  و  $n = \frac{8}{3}$ .





## عبارت‌های گویا

با شروع دوران کلاسیک ریاضیات و ابداع نمادگذاری‌های مدرن ریاضی، عبارتهای گویا را می‌توان در اکثر متون علمی دید. در تصویر بالا، دستخط آیزاک نیوتن، از بنیان‌گذاران ریاضیات کلاسیک را مشاهده می‌کنید.

## گفت‌وگو

چند دقیقه آخر کلاس بود. بعد از یادگرفتن تقسیم چندجمله‌ای‌ها نه کسی حال یادگرفتن درس جدید را داشت و نه فعلاً نیازی بود که تمرین بیشتری حل شود.

معلم: کسی سؤالی یا نظری دارد؟

دانش‌آموز ۱: من به چیز جالبی رسیدم. چندجمله‌ای‌ها خیلی شبیه اعداد صحیح هستند. هر دو تا جمع و تفریق دارند. هر دو تا ضرب هم دارند. تقسیم‌شان هم شبیه هم است.

معلم: آفرین.

دانش‌آموز ۲: این که چیز واضحی است. چون چندجمله‌ای‌ها متغیرهایی دارند که در آنها عدد می‌گذاریم، خُب معلوم است که باید اینقدر شبیه اعداد باشند. اگر جز این بود باید تعجب می‌کردیم.

معلم: مطمئنی؟

دانش‌آموز ۲: بله. مگر اشتباه گفتم؟

معلم: به جای متغیرهای چندجمله‌ای‌ها اعداد حقیقی می‌گذاری ولی رفتار آنها شبیه اعداد صحیح است.

دانش‌آموز ۲: خُب اعداد حقیقی هم جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دارند. درست مثل چندجمله‌ای‌ها.

معلم: [درحالی‌که رویش را به سمت دانش‌آموز ۱ برگرداند] درست می‌گوید؟

دانش‌آموز ۱: نه.

معلم: چرا؟

دانش‌آموز ۱: تقسیم چندجمله‌ای‌ها شبیه تقسیم اعداد صحیح است. باقی‌مانده‌اش قاعده و قانون دارد. از یک جایی به بعد عمل تقسیم متوقف می‌شود. در مورد اعداد حقیقی این طور نیست. مثلاً اگر ۲ را بر ۳ تقسیم کنیم...

دانش‌آموز ۲: هه! اتفاقاً ۲ و ۳ هر دو عدد صحیح هستند!

دانش‌آموز ۱: من که هنوز حرفم تمام نشده بود.

معلم: قرار بود در مباحثه وسط حرف همدیگر نپزید!

دانش‌آموز ۱: اتفاقاً با اینکه ۲ و ۳ هر دو عدد صحیح هستند، اگر طبق قاعده تقسیم اعداد

حقیقی جلو برویم دوره گردش می‌آورند؛ ولی در اعداد صحیح ۲ تقسیم بر ۳

خارج قسمتش صفر است و باقی‌مانده‌اش ۲.

معلم: خوشحالم این آخر سالی تقریباً یاد گرفته‌اید که مباحثه کنید.

اینجا بود که صدای زنگ بلند شد و خیلی‌ها صدای معلم را که در صدای زنگ گم شده بود نشنیدند

که گفت: «یک ریاضی‌دان بزرگ به شباهت بین مفاهیم ریاضی پی می‌برد ولی یک ریاضی‌دان خیلی

بزرگ شباهت بین شباهت‌های بین مفاهیم ریاضی را کشف می‌کند.»

### حکایتی از گلستان سعدی

یکی را از حکما شنیدم که می‌گفت: هرگز کسی به جهل خویش  
اقرار نکند مگر آن کس که چون دیگری در سخن باشد همچنان تمام  
ناگفته، سخن آغاز کند.

سخن را سرست، ای خردمند و بُن  
میاور سخن در میانِ سخن  
خداوند تدبیر و فرهنگ و هوش  
نگوید سخن، تا نبیند خموش

## ساده کردن عبارت‌های گویا

۱. عبارت زیر را ساده کنید.

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$$

حنیف و سبحان با راه‌حل‌های زیر عبارت بالا را ساده کرده‌اند. دربارهٔ راه‌حل این دو نفر بحث کنید.

### راه‌حل حنیف

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} &= \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 2)(x + 2)} \\ &= \frac{x - 1}{x + 2} \quad (x \neq 2)\end{aligned}$$

چون در کسر  $\frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 2)(x + 2)}$  ریشه‌های مخرج ۲ و -۲ هستند، و در کسر  $\frac{x - 1}{x + 2}$  ریشه مخرج فقط -۲ است، پس واجب است شرط  $x \neq 2$  نوشته شود.

البته گذاشتن شرط  $x \neq -2$  مستحب است که من ننوشته‌ام. چون خود کسر  $\frac{x - 1}{x + 2}$  می‌گوید  $x \neq -2$ .

### راه‌حل سبحان

$$\begin{aligned}\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} &= \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 2)(x + 2)} \quad (x \neq 2, x \neq -2) \\ &= \frac{x - 1}{x + 2} \quad (x \neq 2, x \neq -2)\end{aligned}$$

چون اعداد ۲ و -۲ ریشه‌های مخرج کسر  $\frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4}$  هستند پس در همهٔ تساوی‌ها باید شرط‌های  $x \neq 2$  و  $x \neq -2$  نوشته شود.

۲. زینب یک عبارت گویا را ساده کرد و حاصل را این‌گونه نوشت:

$$\frac{x-1}{x+2}, \quad (x \neq 2)$$

می‌دانیم زینب عمل ساده کردن را درست انجام داده است. کدام یک از عبارت‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) عبارتی که زینب ساده کرده است می‌تواند  $\frac{x^2-3x+2}{x^2-4}$  باشد.

ب) عبارتی که زینب ساده کرده است می‌تواند  $\frac{x^3+x-x^2-1}{x^3+x+2x^2+2}$  باشد.

۳. لیلا یک عبارت گویا را ساده کرد و حاصل را این‌گونه نوشت:

$$\frac{x-1}{x+2}.$$

می‌دانیم لیلا عمل ساده کردن را درست انجام داده است. کدام یک از عبارت‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) عبارتی که لیلا ساده کرده است می‌تواند  $\frac{x^2+x-2}{x^2+4x+4}$  باشد.

ب) عبارتی که لیلا ساده کرده است می‌تواند  $\frac{a-ax}{-ax-2a}$  باشد.

۴. حداقل سه عبارت گویا مثال بزنید که ساده شده آنها عبارت زیر باشد.

$$\frac{2x-1}{x+2}, \quad (x \neq -3, x \neq 2, x \neq \frac{1}{2})$$

۵. باتوجه به تساوی

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x-2} = \frac{3x^2-6x+2}{x^3-3x^2+2x}$$

مقدار  $a+b+c$  را به دست آورید.

۶. حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

$$\text{الف) } \frac{x^2-2x}{x^2-3x+2} - \frac{x-3}{x^2-4x+3} \quad \text{ب) } \frac{x-1}{x+2} \times \frac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$$

۷. ثابت کنید معکوس ریشه‌های چندجمله‌ای  $x^3-x+1$ ، ریشه‌های چندجمله‌ای  $x^5+x+1$  است.

## تقسیم چندجمله‌ای‌ها

۱. تقسیم کنید و رابطه تقسیم را بنویسید.

الف)  $4x^3 + 2x$  بر  $x + 2$

ب)  $5x^5 + 1$  بر  $x^2 + 3x + 1$

ج)  $\frac{1}{8} + 2x^4 + x - x^2$  بر  $2x - 1$

د)  $5x^4 - 3x^5 - 3x - 5$  بر  $x^2 - x + 1$

ه)  $x^4$  بر  $x + \sqrt{2}$

۲. تقسیم‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف)  $3x^2 + 4$  بر  $x^2 + 4$

ب)  $x^2 + 4$  بر  $3x^2 + 4$

ج)  $25$  بر  $x + 5$

د)  $x + 5$  بر  $25$

۳. در تقسیم زیر، مقسوم‌علیه را به‌دست آورید.

$$\begin{array}{r|l} 6x^4 - 7x^3 - 4x^2 + 5x + 3 & \\ \hline & 2x^2 - 3x + 1 \\ \hline & \vdots \\ \hline & -2x + 5 \end{array}$$

۴. یک چندجمله‌ای درجه ۵ را بر یک چندجمله‌ای درجه ۳ تقسیم کرده‌ایم. درجه خارج‌قسمت

چند است؟ چرا؟ برای هر حالت یک مثال بیاورید.

۵. یک چندجمله‌ای درجه ۷ را بر یک چندجمله‌ای درجه ۳ تقسیم کرده‌ایم. درجه باقی‌مانده

کدام‌یک از اعداد صفر، ۱، ۲، ۳ یا ۴ می‌تواند باشد؟ چرا؟ برای هر حالت یک مثال بیاورید.

۶. هر یک از رابطه‌های زیر یک رابطه تقسیم را نشان می‌دهد. در هر قسمت، ابتدا به جای  $P(x)$  چندجمله‌ای مناسب قرار دهید و سپس مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج‌قسمت و باقی‌مانده را مشخص کنید.

الف)  $4x^5 + 1 = (P(x))(2x^2 + 2x + 1) + (-x^2 - 2x + \frac{1}{4})$

ب)  $x^5 + 2x^2 + 1 = (P(x))(x^2 - x + 1) + x$

۷. اگر  $(x-a)(x-b)(x^2 - x + 4) = x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x - 24$ ، اتحاد باشد، آنگاه  $a^b$  برابر با چه عددی می‌تواند باشد؟

۸. آیا رابطه تقسیم، اتحاد است؟

۹. الف) با استفاده از تقسیم  $x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$  بر  $x^2 + 1$ ، چندجمله‌ای  $x^4 + x^3 - 2x^2 - 3 + x$  را تجزیه کنید.

ب) آیا می‌توان گفت بعد از انجام یک تقسیم در چندجمله‌ای‌ها، یک تمرین تجزیه متولد شده است؟!



۱۰. الف) تساوی زیر یک رابطه تقسیم است. مقسوم، مقسوم‌علیه، خارج‌قسمت و باقی‌مانده را مشخص کنید.

$$x^6 + 2x^4 = (x^4 + x^2 + 1)(x^2 + 1) + (-2x^2 - 1)$$

ب) آیدا  $1 + 4x^{10}$  را بر یک چندجمله‌ای تقسیم کرد. او در انجام تقسیم دچار اشتباه شد و رابطه تقسیم را به صورت زیر نوشت.

$$-4x^{10} + 1 = (-2x^2 - 1)(2x^8 - x^6 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{4}x^2) + (-\frac{1}{4}x^2 + 1)$$

می‌دانیم تساوی بالا اتحاد است. اشتباه آیدا را پیدا کنید و پس از اصلاح رابطه تقسیم، مقسوم‌علیه، خارج‌قسمت و باقی‌مانده را مشخص کنید.

۱۱. اگر  $P(x)$  یک سه‌جمله‌ای درجه ۶ و  $Q(x)$  یک چندجمله‌ای درجه ۳ باشد و  $P(x)$  را بر

$Q(x)$  تقسیم کرده باشیم، آنگاه کدام یک از جمله‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) باقی‌مانده می‌تواند یک چندجمله‌ای درجه ۲ و خارج‌قسمت یک سه‌جمله‌ای باشد.

ب) باقی‌مانده می‌تواند یک سه‌جمله‌ای و خارج‌قسمت می‌تواند یک سه‌جمله‌ای باشد.

ج) خارج‌قسمت می‌تواند یک چهارجمله‌ای باشد.

د) باقی‌مانده می‌تواند یک چهارجمله‌ای باشد.

۱۲. باقی‌مانده تقسیم  $1 + 2ax + x^2 + ax^3 - x^4$  بر  $1 + x$  برابر ۴ است.  $a$  چه عددی است؟

۱۳. داریوش می‌خواست بدون عملیات تقسیم، باقی‌مانده تقسیم  $20 + x^5$  بر  $x - 2$  را پیدا کند.

راه‌حل او در صفحه بعد آمده است. درباره راه‌حل داریوش بحث کنید.

#### راه‌حل داریوش

رابطه تقسیم به صورت زیر است.

$$x^5 + 20 = (x - 2)Q(x) + R(x),$$

که در آن  $Q(x)$  خارج‌قسمت و  $R(x)$  باقی‌مانده هستند. چون مقسوم‌علیه از درجه

یک است پس یا درجه باقی‌مانده صفر است یا باقی‌مانده برابر صفر است. بنابراین

می‌توان باقی‌مانده را به صورت یک عدد حقیقی مثل  $a$  نشان داد. بنابراین می‌توانیم



رابطه تقسیم را به صورت زیر بنویسیم:

$$x^5 + 20 = (x - 2)Q(x) + a.$$

در این تساوی  $Q(x)$  و  $a$  را نمی‌شناسیم. بنابراین یکی را نابود می‌کنیم تا بتوانیم دیگری را پیدا کنیم. انتخاب ما نابودی  $Q(x)$  است.

می‌دانیم تساوی بالا یک اتحاد است؛ یعنی اگر به جای  $x$  هر عددی بگذاریم به یک تساوی عددی درست می‌رسیم؛ بنابراین به جای  $x$ ، ۲ قرار می‌دهیم تا  $Q(x)$  نابود شود.

$$2^5 + 20 = (2 - 2) \times Q(2) + a \implies 32 + 20 = 0 \times Q(2) + a$$

$$\implies 52 = a.$$

پس باقی‌مانده تقسیم  $x^5 + 20$  بر  $x - 2$  برابر ۵۲ است.

۱۴. بدون محاسبات تقسیم، باقی‌مانده تقسیم‌های زیر را به دست آورید.

الف)  $x^5 + 20$  بر  $x - 3$

ب)  $x^5 + x^4 - 10$  بر  $(x - 1)(x - 3)$

۱۵. چندجمله‌ای  $x^5 + x^4 - 10$  را بر  $x^2 + x + 1$  تقسیم کرده‌ایم. می‌دانیم خارج قسمت به ازای

$x = -1$  برابر ۱ است. آیا می‌توان بدون عملیات تقسیم، مقدار باقی‌مانده را به ازای  $x = -1$

پیدا کرد؟

۱۶. اگر باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر  $3x - 1$  برابر  $R(x)$  باشد، آنگاه درباره باقی‌مانده

تقسیم  $P(x)$  بر  $\frac{1}{3} - x$  چه می‌توان گفت؟

۱۷. یک چندجمله‌ای بیابید که بر  $x - 1$  بخش پذیر باشد و همچنین باقی‌مانده تقسیمش بر  $x + 2$ ،

۳۳ شود.

۱۸. در تقسیم  $11x^3 - 8x^2 + 4x - 1$  بر  $2x - 1$ ، مقدار خارج قسمت به ازای  $x = \frac{1}{2}$  چیست؟

۱۹. کدامیک از عبارت‌های زیر درست و کدامیک نادرست است؟

الف) عبارت  $144x - (x^2 - 13)^2$  بر  $x^3 - x^2$  بخش پذیر است.

ب) عبارت  $144x - (x^2 - 13)^2$  بر  $x^3 + 5x + 6$  بخش پذیر است.

۲۰. در هر مورد  $m$  و  $n$  دو عدد هستند. آنها را بیابید.

الف) می‌خواهیم عبارت  $6 - mx + 4x^2 - nx^3$  بر  $2 - x - x^2$  بخش پذیر شود.

ب) می‌خواهیم عبارت  $8 - (2m - n)x + 2x^2 - 7x^3 + (3m + n)x^4 + x^5$  بر

$2 + 3x - x^3$  بخش پذیر شود.

۲۱. اگر  $F(x)$  و  $G(x)$  دو چندجمله‌ای با متغیر  $x$  باشند و باقی‌مانده تقسیم آنها بر  $x^2 - x + 1$

به ترتیب  $x - 1$  و  $x - 2$  شود، آنگاه باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $F(x) \times G(x)$  را بر

$1 - x + x^2$  بیابید.

۲۲. اگر  $P(x)$  یک چندجمله‌ای با متغیر  $x$  باشد و باقی‌مانده تقسیم  $P(x)$  بر  $x + 1$ ،  $x - 2$  و

$x + 2$  به ترتیب  $1$ ،  $3$  و  $-2$  شود، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  را بر  $(x + 1)(x^2 - 4)$

به دست آورید.

### بخشی از یک حکایت گلستان سعدی

یکی از حکما پسر رانهی همی کرد از بسیار خوردن که سیری مردم را رنجور کند گفت  
ای پدر گرسنگی خلق را بکشد نشنیده‌ای که ظریفان گفته‌اند به سیری مردن به که  
گرسنگی بردن. گفت انداز نه‌گهدار، «کَلُوا وَاشْرَبُوا وَلَا تُسْرِفُوا»!

نه چندان بخور کز دهانت بر آید      نه چندان که از ضعف، جانت بر آید



## حجم و مساحت

## فصل ۸



یک مخروط و چند نیم کره دوست داشتی؟!

## حجم و سطح کره

۱. الف) چرا پرگار دایره رسم می‌کند؟

ب) آیا می‌توانید وسیله‌ای مثال بزنید که در فضا کره بسازد؟

۲. یک ظرف استوانه‌ای به ارتفاع ۲۵ و شعاع ۱۲، پر از آب است. کره‌ای به قطر ۲۰ را در ظرف فرو می‌بریم و سپس بیرون می‌آوریم. چقدر آب در ظرف باقی می‌ماند؟

۳. یک گوی کروی به شعاع ۳، در مرکزش حفره‌ای کروی به شعاع ۲ دارد. حجم این جسم چقدر است؟

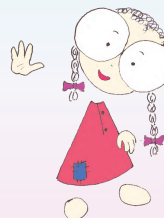
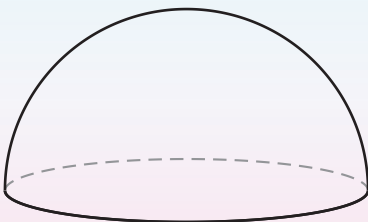
۴. حجم یک کره با مساحت آن مساوی شده است. شعاع کره را به دست آورید.



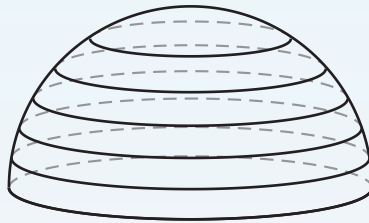
۵. نوشین برای پیدا کردن فرمول حجم کره، راه‌حل زیر را ارائه کرد. راه‌حل نوشین را به دقت بخوانید و توضیحات آن را کامل کنید.

راه‌حل نوشین

فرمول حجم نیم‌کره‌ای به شعاع ۱ را به دست می‌آوریم.

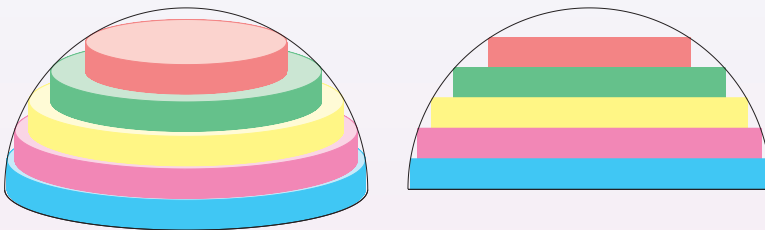


برای به دست آوردن حجم نیم کره ای به شعاع ۱، روی نیم کره پنج دایره با فاصله های مساوی رسم می کنیم تا مانند شکل زیر، نیم کره به شش قطعه با ارتفاع های برابر تقسیم شود.



واضح است که رابطه ای برای محاسبه حجم این شش قطعه نداریم! پس شکلی داخل هریک از آنها قرار می دهیم که حجم آن شکل به حجم قطعه نزدیک باشد و فرمول محاسبه حجم آن شکل را بدانیم.

بنابراین در هریک از این قطعه ها، استوانه ای با ارتفاع  $\frac{1}{6}$  و بیشترین حجم ممکن قرار می دهیم. شکل های زیر، دو نما از این استوانه ها را نشان می دهند.



همان طور که در شکل های بالا می بینید در قطعه ششم نمی توان استوانه ای به ارتفاع  $\frac{1}{6}$  قرار داد؛ ولی ما در ادامه کار، شکل داخل قطعه ششم را استوانه ای به شعاع صفر و ارتفاع  $\frac{1}{6}$  در نظر می گیریم!

واضح است که ارتفاع هریک از این استوانه ها  $\frac{1}{6}$  شعاع نیم کره است. برای به دست آوردن حجم هریک از استوانه ها باید شعاع آنها را داشته باشیم. با استفاده از قضیه فیثاغورس، مربع شعاع هر استوانه به سادگی به صورت زیر، به دست می آید.

$$1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2, 1 - \left(\frac{2}{6}\right)^2, 1 - \left(\frac{3}{6}\right)^2, 1 - \left(\frac{4}{6}\right)^2, 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^2, 1 - \left(\frac{6}{6}\right)^2.$$

چون ارتفاع هر استوانه  $\frac{1}{6}$  است، پس مجموع حجم این شش استوانه برابر است با:

$$\begin{aligned} & \pi \left(1 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right) \times \frac{1}{6} + \pi \left(1 - \left(\frac{2}{6}\right)^2\right) \times \frac{1}{6} + \dots + \pi \left(1 - \left(\frac{6}{6}\right)^2\right) \times \frac{1}{6} \\ &= \pi \left(6 - \frac{1^2 + 2^2 + \dots + 6^2}{6^2}\right) \times \frac{1}{6} \\ &= \pi \left(1 - \frac{1^2 + 2^2 + \dots + 6^2}{6^3}\right) \\ &= \pi - \pi \left(\frac{1^2 + 2^2 + \dots + 6^2}{6^3}\right). \end{aligned}$$

به جای شش استوانه می‌توانیم هفت، هشت یا هر تعداد دلخواهی مانند  $n$  استوانه داشته باشیم. باتوجه به رابطه بالا، حجم  $n$  استوانه از فرمول زیر به دست می‌آید.

$$\pi - \pi \left(\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}\right)$$

در فصل اول کتاب ریاضی تکمیلی سال هشتم، روش ساده‌ای برای به دست آوردن حاصل جمع  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2$  آمده است که بنابه آن روش داریم:

$$\begin{aligned} \pi - \pi \left(\frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}\right) &= \pi - \pi \left(\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{n^3}\right) \\ &= \pi - \pi \left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}\right). \end{aligned}$$

واضح است که هر چقدر تعداد استوانه‌ها، یا عدد  $n$ ، بزرگتر شود، مجموع حجم استوانه‌ها به حجم نیم‌کره نزدیکتر می‌شود. در جدول زیر، برای مقادیری از  $n$ ، حاصل تقریبی عبارت  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$  را تا ۷ رقم اعشار به دست آورده‌ایم.

$n$	۶	۶۶	۶۶۶	۶۶۶۶	۶۶۶۶۶
$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$	۰/۴۲۱۲۹۶۳	۰/۳۴۰۹۴۷۴	۰/۳۳۴۰۸۴۵	۰/۳۳۳۴۰۸۳	۰/۳۳۳۳۴۰۸

پس هر چه  $n$  بزرگتر شود مقدار کسر  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$  به  $\frac{1}{3}$  نزدیکتر می‌شود. بنابراین حجم نیم‌کره‌ای به شعاع ۱ برابر است با:

$$\pi - \pi \left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi.$$

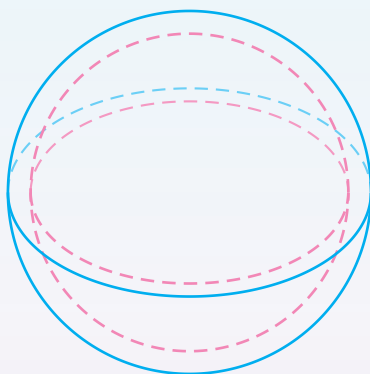
در نتیجه حجم کره‌ای به شعاع ۱ برابر  $\frac{4}{3}\pi$  می‌باشد.

اکنون با استفاده از همین استدلال به سادگی می‌توان نتیجه گرفت که حجم نیم‌کره‌ای به شعاع  $r$  برابر  $\frac{2}{3}\pi r^3$  است. بنابراین حجم کره‌ای به شعاع  $r$  برابر است با  $\frac{4}{3}\pi r^3$ .

۶. آرمیتا برای پیدا کردن فرمول مساحت کره، راه‌حل زیر را ارائه کرد. راه‌حل آرمیتا را به دقت بخوانید و توضیحات آن را کامل کنید.

### راه‌حل آرمیتا

ابتدا مساحت کره‌ای به شعاع ۱ را حساب می‌کنیم.  
فرض کنید  $h$  عدد مثبت کوچکی باشد. شکل زیر، دو کره هم‌مرکز را که شعاع‌های آنها ۱ و  $1+h$  است، نشان می‌دهد.



ابتدا حجم لایه بین دو کره را برحسب  $h$  به دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned}\frac{4}{3}\pi(1+h)^3 - \frac{4}{3}\pi &= \frac{4}{3}\pi((1+h)^3 - 1) \\ &= \frac{4}{3}\pi(3h + 3h^2 + h^3) \\ &= \frac{4}{3}\pi(3 + 3h + h^2)h.\end{aligned}$$

از طرفی، حجم این لایه از حاصل ضرب مقدار مساحت کره کوچکتر در  $h$  بیشتر و از حاصل ضرب مقدار مساحت کره بزرگتر در  $h$  کمتر است. بنابراین اگر مساحت

کره کوچکتر و کره بزرگتر را به ترتیب با  $s$  و  $S$  نشان دهیم، داریم:

$$sh < Sh \Rightarrow sh < \frac{4}{3}\pi(3 + 3h + h^2)h < Sh \\ \Rightarrow s < \frac{4}{3}\pi(3 + 3h + h^2) < S.$$

هر چقدر  $h$  به صفر نزدیکتر شود، مقدار عبارت  $3 + 3h + h^2$  به ۳ نزدیکتر می‌شود.

در نتیجه مساحت کره‌ای به شعاع ۱ برابر است با  $4\pi$ .

با همین استدلال می‌توان به سادگی نتیجه گرفت فرمول مساحت کره‌ای به شعاع  $r$  برابر  $4\pi r^2$  است.

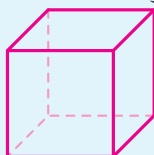
## چندوجهی

### چندوجهی

بخشی از فضا که از همه طرف با تعدادی صفحه محصور شده است جسمی پدید می‌آورد که به آن چندوجهی می‌گویند.

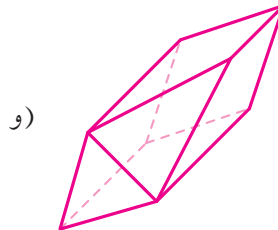
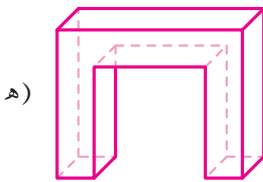
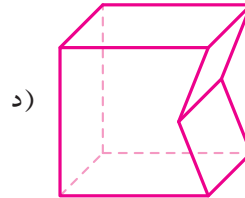
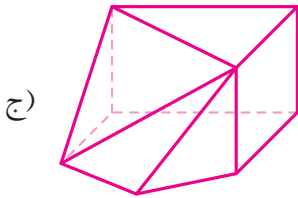
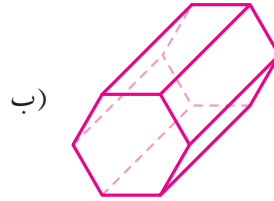
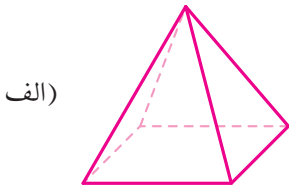
بخش‌هایی از صفحه‌هایی که چندوجهی را پدید می‌آورند سطح‌های با محیط چندضلعی هستند؛ هر چندضلعی (در اینجا منظور سطح درون چندضلعی است)، را وجه‌های چندوجهی، ضلع‌های هر چندضلعی را یال‌های چندوجهی و رأس‌های هر چندضلعی را رأس‌های چندوجهی می‌نامند.

برای مثال، همان‌طور که در شکل زیر می‌بینید، مکعب یک چندوجهی است که شش وجه، دوازده یال و هشت رأس دارد.



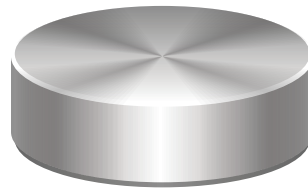
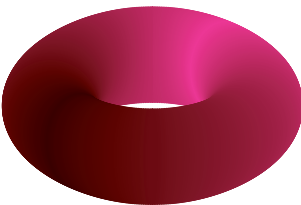


۱. چرا هریک از شکل های زیر چندوجهی هستند؟ در هر چندوجهی تعداد وجه ها، یال ها و رأس ها را بشمارید.



۲. (الف) چرا استوانه، مخروط و کره، چندوجهی نیستند؟

(ب) چرا شکل های زیر چندوجهی نیستند؟



۳. (الف) آیا می توانید دو تا چهاروجهی مثال بزنید که تعداد یال های آنها برابر نباشد؟

(ب) آیا می توانید دو تا پنج وجهی مثال بزنید که تعداد یال های آنها برابر نباشد؟

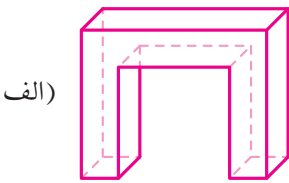
(ج) آیا می توانید دو تا شش وجهی مثال بزنید که تعداد یال های آنها برابر نباشد؟

(د) آیا می توانید سه تا هفت وجهی مثال بزنید که تعداد یال های آنها برابر نباشد؟

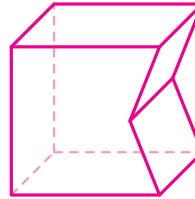
چندوجهی محدب و مقعر

در یک چندوجهی، اگر پاره خط وصل کننده هر دو نقطه دلخواه چندوجهی به طور کامل داخل چندوجهی قرار گیرد به آن چندوجهی، چندوجهی محدب می‌گویند؛ در غیر این صورت آن چندوجهی مقعر نامیده می‌شود.

۴. چرا چندوجهی‌های زیر مقعرند؟



(الف)



(ب)

۵. (الف) یک شش‌وجهی مقعر مثال بزنید که تمام وجه‌های آن چهارضلعی باشند. سپس تعداد یال‌ها و رأس‌های آن را بشمارید.

(ب) یک دوازده‌وجهی مقعر مثال بزنید که دقیقاً ۱۰ وجه آن چهارضلعی باشد.

(ج) یک چندوجهی مقعر مثال بزنید که هیچ‌یک از وجه‌های آن چهارضلعی نباشند.

۶. می‌دانیم وجه‌های یک پنج‌وجهی، چهارتا مثلث و یک چهارضلعی هستند. این پنج‌وجهی چند یال دارد؟

کیومرث این مسئله را به صورت زیر حل کرده است. درستی راه حل او را بررسی کنید.

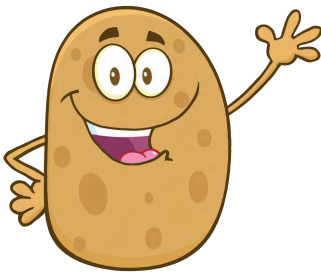
راه حل کیومرث

می‌دانیم در یک چندوجهی، هر یال بین دقیقاً دو وجه مشترک است. بنابراین اگر چندضلعی‌های روی وجه‌ها را جدا از هم در نظر بگیریم، مجموع تعداد ضلع‌های این چندضلعی‌ها، دقیقاً دو برابر تعداد یال‌هاست؛ یا به عبارت دیگر تعداد یال‌ها، نصف مجموع تعداد ضلع‌های این چندضلعی‌هاست.

پس در این مسئله، تعداد یال‌ها به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2} \times (4 \times 3 + 1 \times 4) = \frac{1}{2} \times (12 + 4) = 8.$$

۷. می‌دانیم وجه‌های یک هفت‌وجهی، دوتا مثلث و پنج‌تا چهارضلعی هستند. این هفت وجهی چند یال دارد؟



۸. می‌دانیم وجه‌های یک هشت‌وجهی چهارتا مثلث و چهارتا چهارضلعی هستند.

الف) تعداد یال‌های این هشت‌وجهی چند تا است؟

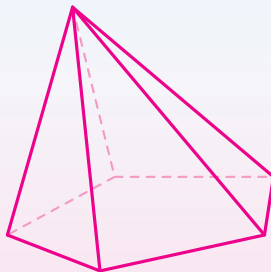
ب) با شرایط بالا، یک هشت‌وجهی با سیب‌زمینی بسازید!

۹. یک شش‌وجهی محدب مثال بزنید که ۱۰ یال داشته باشد.

امید و کیومرث با راه‌حل‌های زیر، مثال‌های متفاوتی پیدا کرده‌اند. درباره این دو راه‌حل بحث کنید.

#### راه‌حل امید

اگر این شش‌وجهی یک هرم باشد، قاعده آن پنج‌ضلعی است. از طرفی چون هرم با قاعده پنج‌ضلعی، ۱۰ یال دارد، بنابراین مثال پیدا شده است!



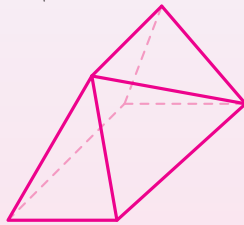
ابتدا باید کشف کنیم که هریک از وجه‌های این شش‌وجهی، چند ضلع دارند. برای کشف این موضوع کلیدی، از تعداد یال‌ها کمک می‌گیریم.

اگر در این شش‌وجهی، وجه‌ها را جدا از هم در نظر بگیریم، آنگاه شش تا چندضلعی داریم که مجموع تعداد ضلع‌های آنها دو برابر تعداد یال‌هاست. یعنی اگر چند تا چندضلعی پیدا کنیم که مجموع تعداد ضلع‌های آنها دو برابر تعداد یال‌ها شود، آن وقت کلید حل مسئله در دستمان است.

با اندکی محاسبه، به سادگی نتیجه می‌شود که وجه‌های این چندوجهی از یکی از رابطه‌های زیر به دست می‌آید:

$$۴ \times ۳ + ۲ \times ۴ = ۲۰ \quad \text{«یا»} \quad ۵ \times ۳ + ۱ \times ۵ = ۲۰.$$

رابطه سمت چپ می‌گوید که این شش‌وجهی می‌تواند از پنج‌تا سه‌ضلعی و یک پنج‌ضلعی ساخته شده باشد. رابطه سمت راست نشان می‌دهد که این شش‌وجهی می‌تواند از چهارتا سه‌ضلعی و دو تا چهارضلعی تشکیل شده باشد. در زیر، با استفاده از چهار مثلث و دو چهارضلعی، یک مثال آورده‌ایم.



۱۰. الف) وجه‌های یک هفت‌وجهی محدب فقط مثلث و چهارضلعی هستند. اگر این هفت‌وجهی ۱۳ یال داشته باشد، آنگاه از چند مثلث و چند چهارضلعی تشکیل شده است؟ آن را بسازید.

ب) یک هفت‌وجهی محدب مثال بزنید که ۱۵ یال داشته باشد و هیچ‌یک از وجه‌های آن مثلث نباشند.

۱۱. الف) یک شش‌وجهی محدب مثال بزنید که ۹ یال داشته باشد.

ب) یک شش‌وجهی محدب مثال بزنید که ۱۱ یال داشته باشد.

ج) یک هفت‌وجهی محدب مثال بزنید که ۱۱ یال داشته باشد.

۱۲. یک هشت‌وجهی دلخواه مثال بزنید و تعداد یال‌های آن را بشمارید؛ سپس تعداد یال‌ها را به هم‌کلاسی‌هایتان بدهید و از آنها بخواهید یک هشت‌وجهی با این تعداد یال بسازند. سعی کنید هشت‌وجهی‌ای که مثال می‌زنید طوری باشد که هم‌کلاسی‌هایتان نتوانند مسئله شما را به‌سادگی حل کنند.

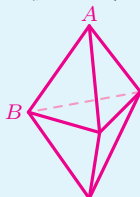
## چندوجهی‌های منتظم

### چندوجهی‌های منتظم

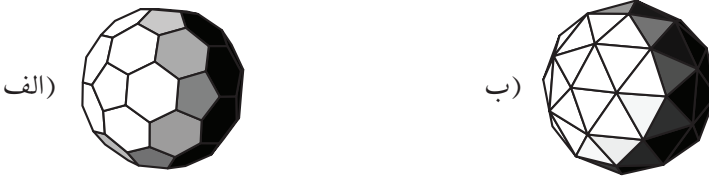
به یک چندوجهی محدب که هر سه شرط زیر را داشته باشد، چندوجهی منتظم می‌گویند.

- همه وجه‌ها چندضلعی منتظم باشند.
- همه وجه‌ها هم‌نهشت باشند.
- تعداد یال‌های متصل به یک رأس با تعداد یال‌های متصل به هر یک از رأس‌های دیگر برابر باشد.

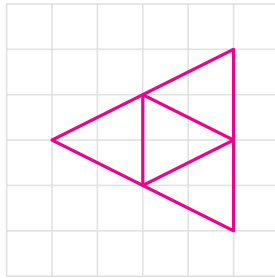
برای مثال، مکعب یک چندوجهی منتظم است ولی شکل زیر چندوجهی منتظم نیست زیرا تعداد یال‌های متصل به رأس  $A$  با تعداد یال‌های متصل به رأس  $B$  برابر نیست.



۱. چرا شکل های زیر چندوجهی منتظم نیستند؟

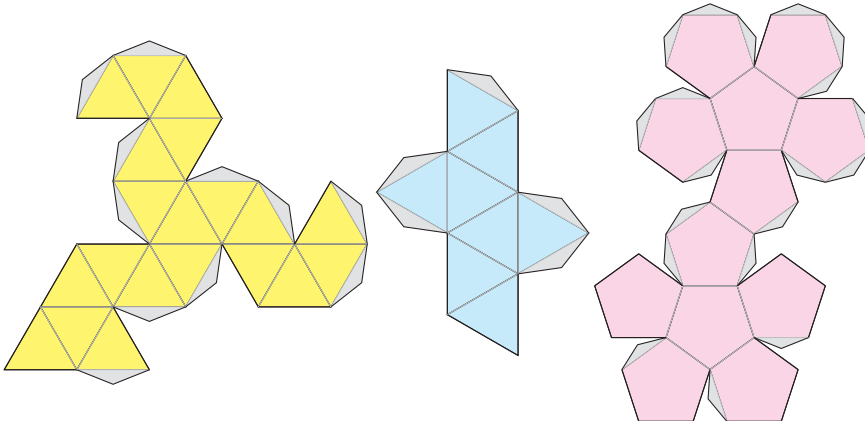


۲. شکل صورتی زیر، گسترده یک چندوجهی را نشان می دهند. این چندوجهی را بسازید. آیا این چندوجهی منتظم است؟ (طول ضلع مربع های کوچک یک واحد است.)



۳. در زیر، گسترده سه چندوجهی منتظم را می بینید. هریک از آنها را با ابعاد بزرگ تر روی یک مقوای A3 طوری رسم کنید که وقتی آن را می بُرید تبدیل به یک چندوجهی منتظم با بیشترین حجم ممکن شود. در هر مورد تعداد وجه ها، یال ها و رأس ها را بشمارید.

توجه داشته باشید که ناحیه های خاکستری جزء گسترده چندوجهی نیستند؛ ولی وقتی می خواهید وجه های چندوجهی را به هم بچسبانید، این ناحیه ها کمک می کنند که وجه های چندوجهی راحت تر به یکدیگر بچسبند.



۴. اگر بخواهیم با مثلث چندوجهی منتظم بسازیم، هر رأس به چند یال می‌تواند متصل باشد؟ همه حالت‌های ممکن را بیابید و برای هر حالت یک چندوجهی منتظم بسازید.

۵. اگر بخواهیم با چهارضلعی چندوجهی منتظم بسازیم، هر رأس به چند یال می‌تواند متصل باشد؟ همه حالت‌های ممکن را بیابید و برای هر حالت یک چندوجهی منتظم بسازید.

۶. اگر بخواهیم با پنج‌ضلعی چندوجهی منتظم بسازیم، هر رأس به چند یال می‌تواند متصل باشد؟ همه حالت‌های ممکن را بیابید و برای هر حالت یک چندوجهی منتظم بسازید.

۷. چرا برای  $n, n \geq 6$  -ضلعی منتظمی وجود ندارد که بتوان با آن چندوجهی منتظم ساخت؟

۸. پروژه. همه چندوجهی‌های منتظم را بیابید.

۹. پروژه. سال گذشته با کاشی‌کاری ضلع به ضلع آشنا شدید و دیدید که با استفاده از یک یا چند نوع چندضلعی می‌توان کاشی‌کاری ضلع به ضلع کرد.

می‌خواهیم مشابه کاشی‌کاری ضلع به ضلع، این بار در فضا و با استفاده از چندوجهی‌ها فضا را پر کنیم. با چه چندوجهی‌هایی می‌توان فضا را این چنین پر کرد؟

## حجم هرم و مخروط

۱. هامون یک چهاروجهی منتظم به طول یال ۱ ساخته است. او می‌خواهد چند هرم بسازد که با چسباندن آنها به چهاروجهی منتظم، یک مکعب ساخته شود. آیا چنین هرم‌هایی وجود دارند؟ اگر پاسخ مثبت است هرم‌ها را بسازید و حجم هریک از آنها را محاسبه کنید.

۲. هومان یک مکعب ساخت و یکی از رأس‌های آن را  $A$  نامید. او می‌خواست سه رأس دیگر از مکعب را طوری انتخاب کند که به همراه رأس  $A$ ، چهار رأس یک چهاروجهی منتظم باشند. آیا چنین رأس‌هایی وجود دارند؟ اگر پاسخ مثبت است این مکعب و چهاروجهی را بسازید.

۳. حجم یک چهاروجهی منتظم به طول یال ۱ را به دست آورید.

۴. حجم یک هرم منتظم با قاعده مربع  $۳۸۴$  سانتی متر مکعب و ارتفاع آن  $۸$  سانتی متر است. طول ضلع قاعده و مساحت کل هرم را به دست آورید.

۵. قیف یک بستنی، مخروطی به عمق  $۱۰$  سانتی متر و شعاع  $۵$  سانتی متر است. دو تکه بستنی به شکل نیم کره و به قطر  $۵$  سانتی متر روی قیف بستنی گذاشته شده است. اگر بستنی ها آب شوند، آیا از قیف بیرون می ریزند؟



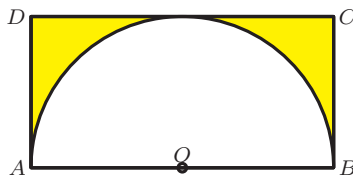
## سطح و حجم

۱. چهار نقطه  $A = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} ۵ \\ ۳ \end{bmatrix}$  و  $D = \begin{bmatrix} ۲ \\ ۳ \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید. حجم حاصل از دوران چهارضلعی  $ABCD$  حول هریک از خطهای زیر چقدر است؟

الف)  $y = ۱$       ب)  $x = ۲$       ج)  $y = ۰$       د)  $x = ۴$

۲. فرض کنید  $A = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۱ \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۵ \end{bmatrix}$  و  $D = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۵ \end{bmatrix}$ . اگر چهارضلعی  $ABCD$  را حول خط  $x = ۲$ ،  $۱۸۰$  درجه دوران دهیم، حجم حاصل چقدر می شود؟

۳. همان طور که در شکل زیر می بینید، در مستطیل  $ABCD$  نیم دایره ای به شعاع  $OA$  رسم شده است. حجم حاصل از دوران ناحیه زرد حول خط  $AB$  چقدر است؟





۴. یک مستطیل در نظر بگیرید که مربع نباشد. می‌خواهیم خطی موازی با طول مستطیل پیدا کنیم که اگر مستطیل را حول آن خط دوران دهیم، حجم به‌دست آمده با حجم حاصل از دوران مستطیل حول عرضش برابر باشد. فاصله این خط از طول مستطیل را برحسب طول و عرض مستطیل به‌دست آورید.

۵. سه نقطه  $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$  و  $C = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید. حجم حاصل از دوران مثلث  $ABC$  حول هریک از خط‌های زیر چقدر است؟

الف)  $x = 3$       ب)  $y = 5$       ج)  $y = -1$       د)  $x = 0$

۶. حجم حاصل از دوران یک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع  $a$  حول یکی از اضلاعش را برحسب  $a$  به‌دست آورید.

۷. حجم حاصل از دوران یک مربع به ضلع ۱ حول یکی از قطرهایش چقدر است؟

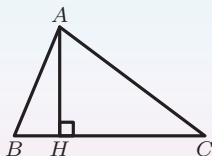
۸. در مثلث  $ABC$ ،  $\hat{A} = 90^\circ$ ،  $AB = 12$  و  $AC = 5$ . حجم حاصل از دوران این مثلث حول ضلع  $BC$  را حساب کنید.

۹. در مثلث  $ABC$ ، طول ضلع‌های  $AB$ ،  $AC$  و ارتفاع  $AH$  به‌ترتیب برابر با ۱۳، ۲۰ و ۱۲ است. حجم حاصل از دوران مثلث  $ABC$  حول  $BC$  چقدر است؟

بهرام و مؤده این مسئله را به‌صورت زیر حل کرده‌اند. توضیحات راه‌حل هریک را کامل کنید.

راه‌حل بهرام

مثلث  $ABC$  و ارتفاع  $AH$  را به‌صورت زیر در نظر می‌گیریم.



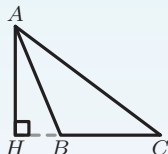
بنابه قضیه فیثاغورس در مثلث‌های  $ABH$  و  $ACH$ ، داریم  $BH = 5$  و

$CH = ۱۶$ . حال کافی است مجموع حجم حاصل از دوران مثلث‌های  $ABH$  و  $ACH$  را حول  $BC$  محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}(\pi(AH)^2(BH)) + \frac{1}{3}(\pi(AH)^2(CH)) &= \frac{1}{3}(\pi(AH)^2(BH + CH)) \\ &= \frac{1}{3}(\pi(۱۲)^2(۵ + ۱۶)) \\ &= ۱۰۰۸\pi.\end{aligned}$$

#### راه حل مرده

مثلث  $ABC$  و ارتفاع  $AH$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم.



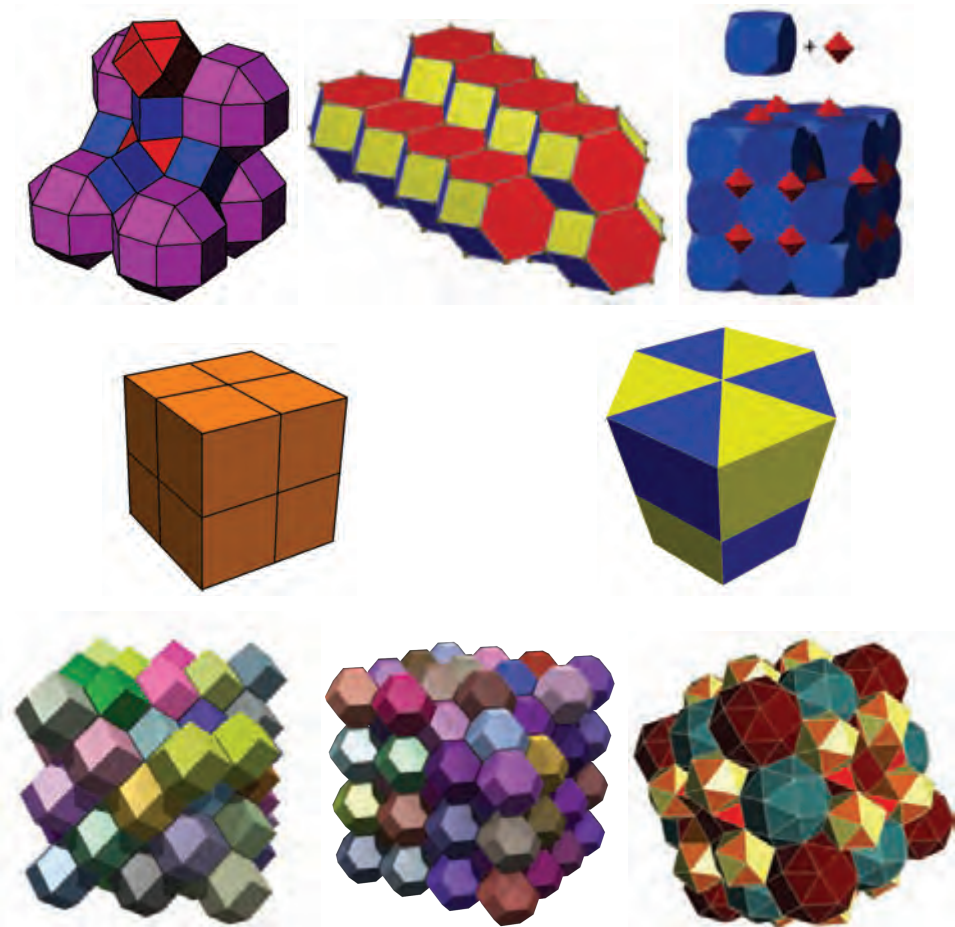
بنابراین قضیه فیثاغورس در مثلث‌های  $ABH$  و  $ACH$ ، داریم  $CH = ۱۶$  و  $BH = ۵$ . حال کافی است تفاضل حجم حاصل از دوران مثلث‌های  $ACH$  و  $ABH$  محاسبه کنیم.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(\pi(AH)^2(CH)) - \frac{1}{3}(\pi(AH)^2(BH)) \\ &= \frac{1}{3}(\pi(۱۲)^2(۱۶)) - \frac{1}{3}(\pi(۱۲)^2(۵)) \\ &= ۷۶۸\pi - ۲۴۰\pi \\ &= ۵۲۸\pi.\end{aligned}$$

۱۰. در متوازی‌الاضلاع  $ABCD$ ،  $\hat{A} = ۴۵^\circ$ ،  $AB = ۶$  و  $AD = ۴\sqrt{۲}$ . حجم حاصل از دوران این متوازی‌الاضلاع را یک بار حول ضلع  $AB$  و بار دیگر حول ضلع  $AD$  حساب کنید.

## درباره طرح روی جلد

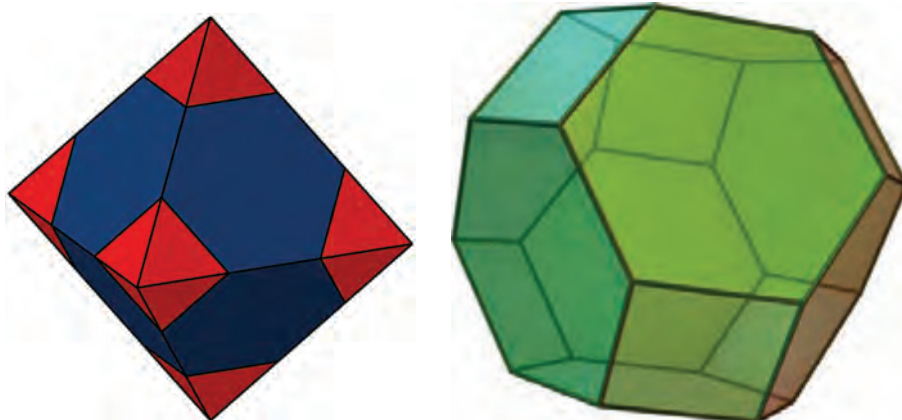
به پر کردن فضای سه بعدی با چندوجهی‌ها به گونه‌ای که هیچ فضایی بین چندوجهی‌ها خالی نماند و اگر دو وجه یا دو یال دو چندوجهی روی هم قرار بگیرند کاملاً برهم منطبق شوند، لانه‌زنبوری<sup>۱</sup> می‌گویند. برای مثال، یک لانه‌زنبوری می‌تواند فقط از مکعب تشکیل شده باشد؛ یا اگر از هر چندضلعی یک کاشی‌کاری یک منشور با قاعده آن کاشی بسازیم به طوری که ارتفاع منشورها برابر باشند، یک لانه‌زنبوری خواهیم داشت. در زیر تعدادی لانه‌زنبوری می‌بینید.



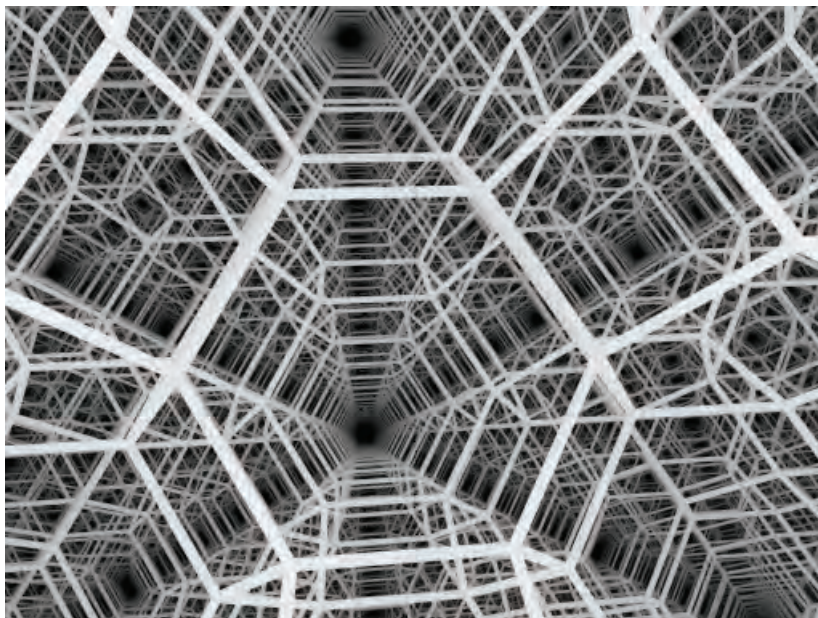
---

<sup>۱</sup>honeycomb

طرح روی جلد (شکل میانی سطر آخر صفحه قبل)، یک لانه‌زنبوری را نشان می‌دهد که فقط از یک چندوجهی ساخته شده و این چندوجهی‌ها بدون دوران کنار و روی هم چیده شده‌اند. به هر یک از چندوجهی‌های این لانه‌زنبوری، هشت‌وجهی گوشه‌بریده<sup>۱</sup> می‌گویند.



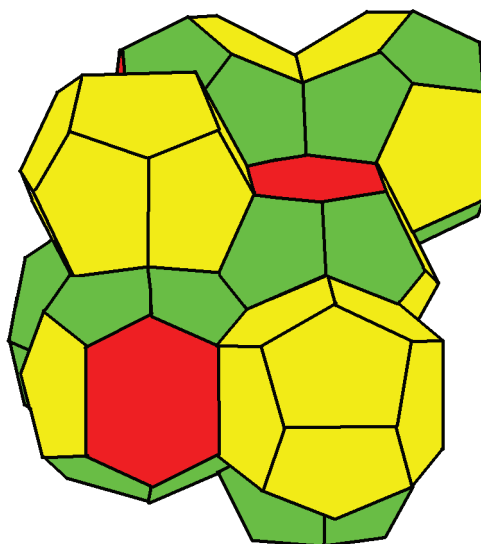
اگر وجه‌های این لانه‌زنبوری را حذف کنیم و از داخل به آن نگاه کنیم، تصویر زیر را می‌بینیم.




---

Truncated Octahedra<sup>۱</sup>

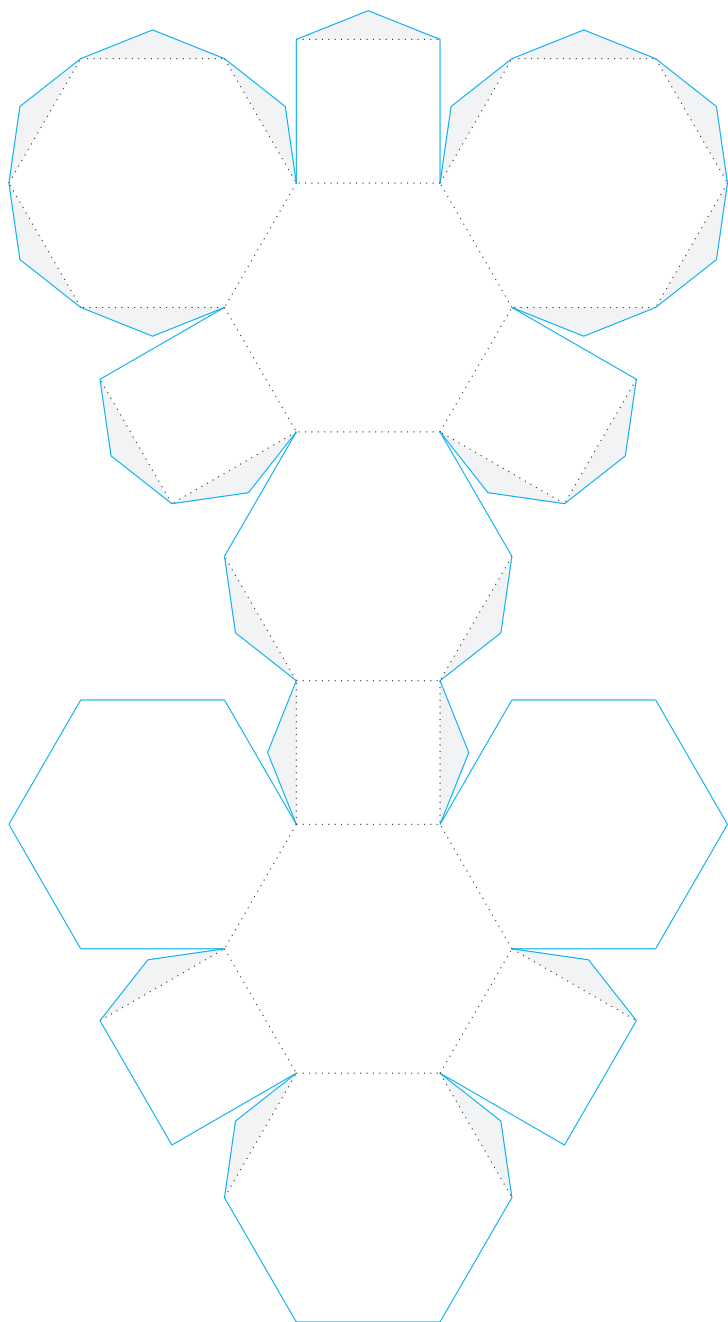
در سال ۱۸۸۷ کلوین (Kelvin) حدس زد که مجموع مساحت وجه‌های لانه‌زنبوری ساخته شده با هشت وجهی‌های گوشه‌بریده، کمترین مقدار را در بین سایر لانه‌زنبوری‌ها دارد. فلان (Phelan) و ویر (Weaire) در سال ۱۹۹۳ با مثال نقض زیر، حدس کلوین را رد کردند.



از دیگر لانه‌زنبوری‌های جالب دیگر می‌توان به چهاروجهی‌های گوشه‌بریده تریاکس اشاره کرد. چهاروجهی‌های گوشه‌بریده تریاکس معروف چینش اتم‌های کربن در الماس است.



تصویر زیر گسترده یک هشت وجهی گوشه بریده را نشان می دهد.



# کتاب‌نامه

- [۱] درک ج. استرویک، تاریخ فشردهٔ ریاضیات، ترجمهٔ غلامرضا برادران خسروشاهی و حشمت‌اله کامرانی، نشر نو، تهران، ۱۳۶۶.
- [۲] ا.ژ. آنه، روش‌های حل مسئله‌های مقدماتی هندسه، ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی، انتشارات فاطمی، چاپ سوم، تهران، ۱۳۸۷.
- [۳] جان باومگارت، تاریخ جبر، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، انتشارات علمی و فرهنگی، تهران، ۱۳۸۵.
- [۴] نادر حاجی‌زاده، حسین کرد و صادق بازوی، هندسهٔ سال دوم، انتشارات خوشخوان، چاپ اول، تهران، ۱۳۸۱.
- [۵] ارشک حمیدی، هندسه از ابتدا تا ...، جلد اول، نشر علوم ریاضی ره‌آورد، تهران، ۱۳۹۴.
- [۶] محمدبن موسی خوارزمی، جبر و مقابله، ترجمهٔ حسین خدیوچم، انتشارات اطلاعات، تهران، ۱۳۶۳.
- [۷] نجف دریابندری، کتاب مستطاب آشنایی از سیر تا پیاز، نشر کارنامه، تهران، ۱۳۹۰.
- [۸] دمیتری فومین، سرگی گنکین و ایلیا ایتنبرگ، محافل ریاضی (تجربه روس‌ها)، ترجمهٔ ارشک حمیدی و مهرداد مسافر، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۶.
- [۹] علی قصاب، ریاضی تکمیلی سال اول دبیرستان، سازمان ملی پرورش استعدادها، درخشان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۱۰] استیون کرانتس، فنون مسئله حل کردن، ترجمهٔ مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۴.
- [۱۱] نصیر کریمی، نیما احمدی‌پور اناری، مرتضی ثقفیان و میثم عقیقی، ۲۵۰ مسئله جبر، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۸.
- [۱۲] —، ۲۵۰ مسئله هندسه، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۸۸.
- [۱۳] سرژ لانگ و جین مورو، هندسه، ترجمهٔ محمدعلی رضوانی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۷.

- [۱۴] ادوین مویز و فلویید دانز، هندسه، ترجمه محمود دیانی، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۷۵.
- [۱۵] تامس ال. هیث، اصول اقلیدس، ترجمه محمدهادی شفیعیها، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۸۷.
- [۱۶] غلامحسین یوسفی، دامنی از گل: گزیده گلستان سعدی، انتشارات سخن، تهران، ۱۳۹۳.
- [۱۷] ریاضیات کانگورو ۷ و ۸، ترجمه مهران اخباریفر، انتشارات فاطمی با همکاری انتشارات باشگاه دانش‌پژوهان جوان، تهران، ۱۳۸۹.
- [۱۸] ریاضیات کانگورو ۹ و ۱۰، ترجمه بردیا حسام، انتشارات فاطمی، تهران، ۱۳۹۰.
- [19] Martin Erickson, *AHA Solutions!*, MAA, 2009.
- [20] Robin Hartshorne, *Geometry: Euclid and beyond*, Springer, New York, 2000.
- [21] Martin Aigner and Günter M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer, Berlin, Fifth Edition, 2014.
- [22] R. Hatcher and G. Gilbert *Mathematics Beyond the Numbers*, Kendall Hunt, 2012.

معلنان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و اولیای آنان می توانند نظر اصلاحی خود را درباره مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - خیابان سپهبد قری - نبش سیمه - وزارت آموزش و پرورش - ساختمان مرحوم علامندان - طبقه پنجم - کد پستی ۵۸۱۱۱ - ۱۵۹۹۹ و یا راینامه به نشانی sampad@medu.ir بفرستند.

سازمان ملی پرورش استعداد های درخشان