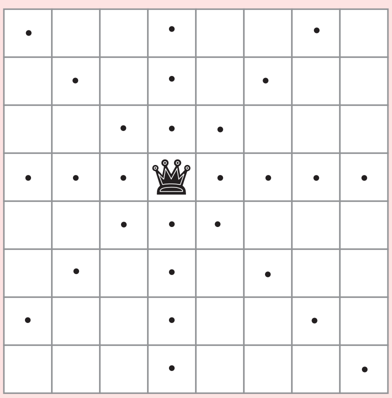
درس ۲ مدل‌سازی با گراف

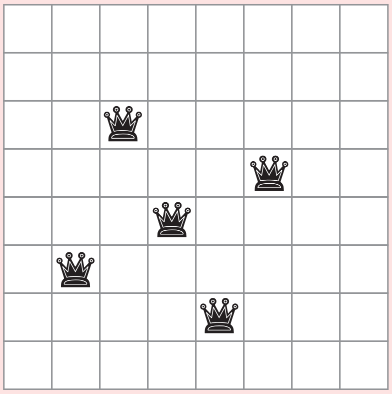
برخی از مسائل روزمرهٔ زندگی را می‌توان به کمک مدل‌سازی نخست به یک مسئلهٔ ریاضی تبدیل نمود و سپس با حل مسئله ریاضی، مسئلهٔ اصلی را نیز حل کرد. به‌طور کلی، بعضی مفاهیم ریاضی در مدل‌سازی مسائل زندگی واقعی بسیار پرکاربرد هستند. «**احاطه‌گری**» یکی از این مفاهیم پرکاربرد است که در ادامه با تاریخچه، مفهوم و کاربردهایی از آن آشنا خواهیم شد.

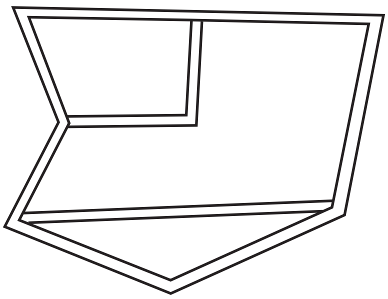
تاریخچه

در قرن نوزدهم میلادی مسائلی مانند «یافتن حداقل تعداد مهرهٔ وزیری که می‌توانند با چینش مناسب تمام صفحهٔ شطرنج را بپوشانند» (یعنی هر خانهٔ صفحهٔ شطرنج که در آن وزیر قرار نگرفته است توسط حداقل یک وزیر تهدید شده باشند) ذهن برخی از مردم اروپا را به خود مشغول کرده بود.



تفکر دربارهٔ پرسش‌هایی از این دست باعث به‌وجود آمدن مفهومی در شاخهٔ گراف در ریاضیات با نام **احاطه‌گری** شد. برای آشنایی با این مفهوم به مسئلهٔ بعد دقت کنید.



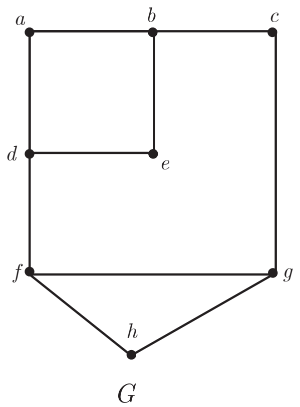


شکل ۱

شکل مقابل نقشهٔ منطقه‌ای از یک شهر است. قرار است در برخی تقاطع‌های این شهر دستگاه‌های خودپرداز به‌گونه‌ای نصب شود که دو شرط زیر را داشته باشد :

۱ برای راحتی شهروندان دستگاه‌ها به‌گونه‌ای نصب شده باشند که هر فرد در هر تقاطعی که قرار گرفته باشد، یا در همان تقاطع به دستگاه خودپرداز دسترسی داشته باشد و یا حداکثر با رفتن به یک تقاطع مجاور به دستگاه خودپرداز دسترسی پیدا کند.

۲ به جهت صرفه‌جویی در هزینه‌ها با کمترین تعداد دستگاه خودپرداز ممکن این کار صورت بگیرد.



شکل ۲

حال فرض کنید منطقهٔ مورد نظر را با گراف شکل ۲ مدل‌سازی کرده باشیم.

الف) در این مدل‌سازی تقاطع‌ها و خیابان‌های بین آنها هر کدام به چه صورت نمایش داده شده‌اند؟

ب) رأس‌هایی از گراف را مشخص کنید که، با توجه به مدل‌سازی انجام شده، اگر خودپردازها در آن تقاطع‌ها قرار گیرند، شرط ۱ برآورده گردد. چنین مجموعه‌ای از رئوس را یک مجموعهٔ **احاطه‌گر** برای گراف می‌نامیم. به‌طور مثال مجموعهٔ شامل همه رئوس گراف G، یک مجموعه احاطه‌گر است. آیا می‌توانید یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۴ عضوی مثال بزنید؟

تعریف : زیر مجموعهٔ D از مجموعهٔ رئوس گراف G را مجموعهٔ احاطه‌گر می‌نامیم هرگاه هر رأس از گراف یا در D باشد و یا حداقل با یکی از رئوس D مجاور باشد.[1]

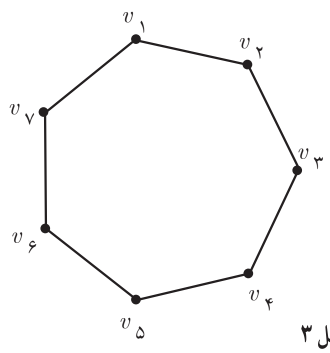
معمولاً به سادگی می‌توان مجموعه‌های مختلفی از رئوس گراف G را مشخص کرد که در شرط ۱ صدق کنند؛ به عبارتی یک گراف می‌تواند مجموعه‌های احاطه‌گر گوناگونی داشته باشد. از طرفی واضح است که هر مجموعه که شامل یک مجموعهٔ احاطه‌گر باشد، احاطه‌گر است. در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر یک گراف، مجموعه‌ای را که کمترین تعداد عضو را داشته باشد **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** آن گراف می‌نامیم. اگر چنین مجموعه‌ای را برای گراف G بیابیم، این مجموعه در هر دو شرط ۱ و ۲ مطرح شده در مسئلهٔ بالا صدق خواهد کرد.

تعریف : در بین تمام مجموعه‌های احاطه‌گر گراف G، مجموعه یا مجموعه‌های احاطه‌گری که کمترین تعداد عضو را دارند **مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم** و تعداد اعضای چنین مجموعه‌ای را **عدد احاطه‌گری گراف G** می‌نامیم و آن را با $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم.

گاهی اوقات برای راحتی به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم از گراف G، یک γــ مجموعه می‌گوییم.

۱ــ از آنجا که عدد احاطه‌گری یک گراف ناهمبند، به سادگی و با استفاده از یک عمل جمع به‌دست می‌آید، لذا در این کتاب عدد احاطه‌گری گراف‌های همبند مد نظر است مگر اینکه مستقیماً به ناهمبندی گراف اشاره شود.

مثال : برای گراف شکل ۳ که دور C_7 است، مجموعهٔ $\{v_1 , v_3 , v_5 , v_7\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر و مجموعه‌های $\{v_1 , v_4 , v_7\}$ و $\{v_1 , v_2 , v_5\}$ دو مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم یا اصطلاحاً دو γــ‌مجموعه‌اند؛ و داریم $\gamma(G) = 3$.



شکل ۳

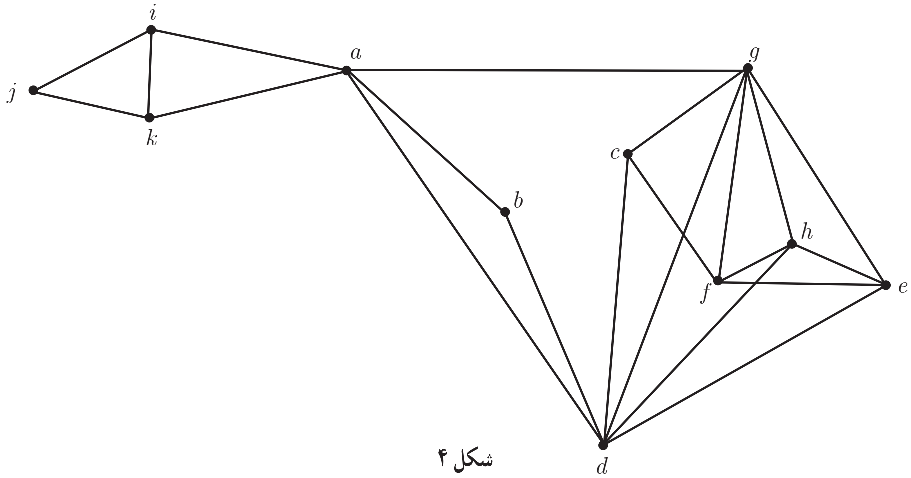
مثال : فرض کنید a، b، c، d، e، f، g، h، i، j و k شهرهای یک استان باشند و فاصله‌های مستقیم این شهرها از یکدیگر، دو به دو، مطابق جدول زیر باشد.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k
a	۰	۵۰	۸۰	۴۰	۶۰	۹۰	۵۰	۷۰	۵۰	۶۰	۵۰
b	۵۰	۰	۵۵	۳۰	۶۰	۷۰	۶۰	۶۰	۹۰	۸۵	۸۰
c	۸۰	۵۵	۰	۴۰	۶۰	۲۰	۵۰	۵۵	۱۰۰	۹۵	۹۰
d	۴۰	۳۰	۴۰	۰	۳۰	۵۵	۳۰	۳۰	۸۰	۷۵	۷۰
e	۶۰	۶۰	۶۰	۳۰	۰	۵۰	۱۰	۵	۶۰	۵۵	۵۵
f	۹۰	۷۰	۲۰	۵۵	۵۰	۰	۴۰	۴۵	۱۰۰	۹۰	۸۰
g	۵۰	۶۰	۵۰	۳۰	۱۰	۴۰	۰	۵	۷۰	۶۵	۶۰
h	۷۰	۶۰	۵۵	۳۰	۵	۴۵	۵	۰	۶۵	۶۰	۵۵
i	۵۰	۹۰	۱۰۰	۸۰	۶۰	۱۰۰	۷۰	۶۵	۰	۵	۱۰
j	۶۰	۸۵	۹۵	۷۵	۵۵	۹۰	۶۵	۶۰	۵	۰	۵
k	۵۰	۸۰	۹۰	۷۰	۵۵	۸۰	۶۰	۵۵	۱۰	۵	۰

می‌خواهیم تعدادی ایستگاه رادیویی در برخی از شهرهای این استان تأسیس کنیم به‌طوری که همهٔ شهرهای استان از پوشش امواج رادیویی برخوردار گردند. و از طرفی برای کاهش هزینه‌ها می‌خواهیم کمترین تعداد ممکن ایستگاه رادیویی را احداث کنیم. اگر هر ایستگاه رادیویی تا ۵۰ کیلومتر اطراف خود را پوشش دهد، حداقل چند ایستگاه رادیویی احتیاج داریم و در چه شهرهایی باید آنها را احداث کنیم؟

حل : برای مدل‌سازی این مسئله کافی است گراف مربوط به آن را به این طریق رسم کنیم که به جای هر شهر یک رأس قرار دهیم و سپس دو رأس را به هم وصل کنیم اگر و تنها اگر فاصلهٔ مستقیم آن دو شهر از ۵۰ کیلومتر بیشتر نباشد. در این صورت مجموعهٔ احاطه‌گرِ مینیمم برای گراف مذکور، جواب مسئله را مشخص می‌کند. (چرا؟)

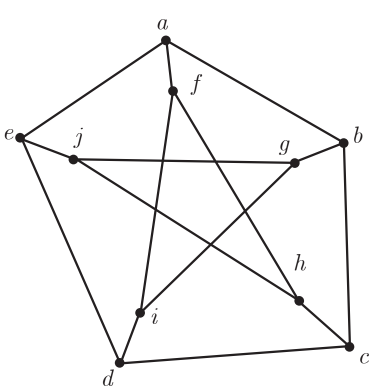
با توجه به آنچه گفته شد گرافِ زیر، گرافِ حاصل از مدل‌سازی برای این مسئله است.



شکل ۴

حال کافی است یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در این گراف بیابیم و ایستگاه‌های رادیویی را در شهرهای متناظر با رئوس این مجموعه احاطه‌گرِ مینیمم مستقر کنیم. یافتن یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای گراف فوق در تمرینات پایان درس به شما واگذار شده است.

کار در کلاس



شکل ۵

۱ مشخص کنید کدام یک ازمجموعه‌های زیر برای گراف شکل ۵ احاطه‌گر هست و کدام نیست؟

الف) $A=\{a,b,c,d,e\}$

ب) $B=\{f,g,h,i,j\}$

پ) $C=\{a,b,j,h,g\}$

ت) $D=\{a,i,h\}$

ث) $E \quad \{f,g,h,e,d\}$

ج) $F=\{f,g,h,e\}$

چ) $H=\{g,h,e\}$

۲ از مجموعه‌های مطرح شده در سؤال ۱ که احاطه‌گر بودند در کدام یک از آنها رأس یا رأس‌هایی وجود دارد که با حذف آنها مجموعهٔ باقی‌مانده هنوز احاطه‌گر باشد؟

تعریف : یک مجموعهٔ احاطه‌گر را که با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نباشد احاطه‌گر **مینیمال** می‌نامیم.

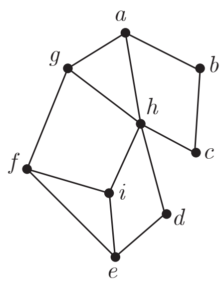
۳ مجموعه‌ای احاطه‌گر با کمترین تعداد رأس که می‌توانید، بنویسید و پاسخ خود را با پاسخ هم کلاسی‌های خود مقایسه کنید.

۴ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

۵ آیا می‌توان هر مجموعهٔ احاطه‌گر دلخواه غیرمینیمال را با حذف برخی رئوسش به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل کرد؟(استدلال کنید)

مثال : در گراف شکل ۶ یک مجموعهٔ احاطه‌گر غیرمینیمال انتخاب کنید و با حذف برخی رأس‌ها، آن را به یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال تبدیل نمایید.

حل : مجموعه $\{a, b, c, d, e, f\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. از آنجا که با حذف برخی رأس‌های آن (مثلاً رأس a) این مجموعه باز هم احاطه‌گر خواهد بود، لذا احاطه‌گر مینیمال نیست. حال با حذف سه رأس a، c و e از آن، مجموعهٔ $\{b,d,f\}$ حاصل می‌شود که باز هم احاطه‌گر است اما چون این مجموعه با حذف هر یک از رأس‌هایش دیگر احاطه‌گر نخواهد بود لذا احاطه‌گر مینیمال است.



شکل ۶

کار در کلاس

در گراف شکل ۷ :

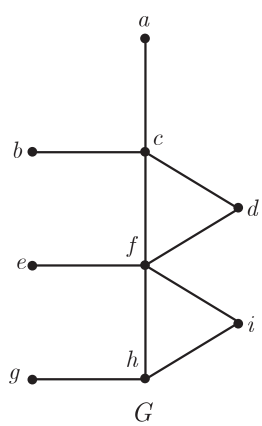
۱ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر باشد.

۲ مجموعه‌ای از رئوس را مشخص نمایید که احاطه‌گر مینیمال باشد.

۳ یک مجموعهٔ احاطه‌گر ۳ عضوی مشخص نمایید.

۴ آیا رأسی در گراف G وجود دارد که دو رأس از ۳ رأس b، e و g را احاطه کند؟

۵ حداقل تعداد رأس‌هایی که تمام رئوس گراف را احاطه می‌کنند چندتاست؟ ($\gamma(G)$ چند است؟)



شکل ۷

معرفی یک نماد

با مفهوم جزء صحیح[1] یک عدد آشنا هستید و می‌دانید که اگر x یک عدد صحیح باشد، $[x]$ برابر با خود x است، و اگر عدد صحیح نباشد، عدد صحیح قبل از x است.

$$[x]=\begin{cases} x & x\in\mathbb{Z} \\ \text{بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از } x & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

حال فرض کنید تعدادی از کارمندان یک شرکت قرار است با چند تاکسی به محلی بروند و هر ۴ نفر یک تاکسی نیاز دارند.

الف) اگر تعداد کارمندان ۱۲ نفر باشد، چند تاکسی نیاز است؟

۱ــ گاهی‌اوقات به جزء صحیح یک عدد، کفِ آن عدد هم گفته می‌شود. در برخی کتاب‌ها $[a]$ را با $\lfloor a \rfloor$ نمایش می‌دهند و به آن کفِ a می‌گویند.

ب) اگر تعداد کارمندان ۱۴ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟

پ) اگر تعداد کارمندان ۱۶ نفر باشد چند تاکسی نیاز است؟

ت) آیا با تقسیم تعداد کارمندان به عدد ۴، تعداد تاکسی‌های مورد نیاز به‌دست می‌آید؟ اگر عدد حاصل عدد صحیح نباشد چه تعداد تاکسی نیاز است؟

ث) مفهوم سقف یک عدد که در ادامه مطرح شده است را می‌توان در مواردی مشابه آنچه در اینجا مطرح شد به‌کار برد.

در صورتی که x عددی غیر صحیح باشد برای نمایش عدد صحیحِ بعد از x از $\lceil x \rceil$ استفاده می‌کنیم و آن را سقفِ x می‌خوانیم. در حالت کلی

$$\lceil x \rceil = \begin{cases} x & x \in \mathbb{Z} \\ \text{کوچک‌ترین عدد صحیح بزرگ‌تر از } x & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

بنابراین :

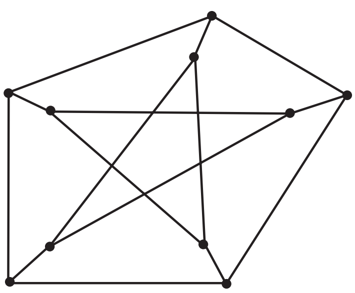
$\lfloor ۳/۵ \rfloor = ۳$ $\lfloor ۳ \rfloor = ۳$

$\lceil ۳/۵ \rceil = ۴$ $\lceil ۳ \rceil = ۳$

■ سؤال : برای کدام اعداد کف و سقف آنها با هم برابر است؟

فعالیت

می‌دانیم در هر گراف، هر رأس خودش و تمام رئوس مجاورش را احاطه می‌کند.



G

شکل ۸

۱ در گراف مقابل Δ چند است؟

۲ هر رأس حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند و این تعداد چه ارتباطی با Δ دارد؟

۳ آیا ۲ رأس می‌توانند همهٔ رئوس گراف G را احاطه کنند؟

۴ حداقل $\left\lceil \frac{۱۰}{۴} \right\rceil$ رأس برای احاطهٔ همهٔ رئوس لازم است. چرا؟

۵ $\gamma(G)$ چند است؟

۶ در یک گراف دلخواه با ماکزیمم درجهٔ Δ ، یک رأس دلخواه حداکثر چند رأس را احاطه می‌کند؟

۷ تعداد کمتر از $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ رأس نمی‌توانند تمام n رأسِ یک گراف را احاطه کنند. چرا؟

بنابراین :

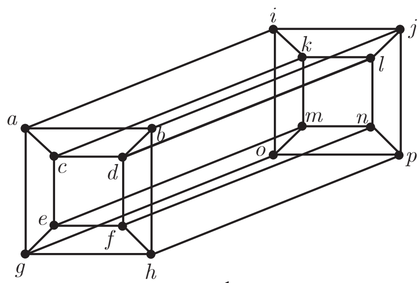
اگر G یک گراف n رأسی با ماکزیمم درجهٔ Δ باشد و D یک مجموعهٔ احاطه‌گر در آن باشد، آنگاه $|D| \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$

و از آنجا که $\gamma(G)$ نیز اندازه یک مجموعهٔ احاطه‌گر است همواره داریم $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ (اصطلاحاً گفته می‌شود

در گراف G عدد $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ یک کران پایین است برای $\gamma(G)$ ؛ یعنی $\gamma(G)$ نمی‌تواند از آن کمتر شود).

کار در کلاس

۱ یک شبکه رایانه‌ای متشکل از ۱۶ کامپیوتر را در نظر بگیرید که در آن هر کامپیوتر، مطابق شکل ۹ به چند کامپیوتر دیگر متصل است. گراف شکل ۹ یک مدل‌سازی از شبکه مورد نظر است که در آن هر رأس نمایشگر یک کامپیوتر است و یال بین دو رأس نمایانگر آن است که کامپیوترهای نظیر به آن دو رأس مستقیماً با هم در ارتباط‌اند. می‌خواهیم مجموعه‌ای با کمترین تعداد ممکن از کامپیوترها (رأس‌ها) انتخاب کنیم. به‌طوری که توسط این مجموعه از کامپیوترها به تمام کامپیوترهای این شبکه وصل باشیم. مجموعهٔ انتخاب شده از رئوس برای گراف مورد نظر چه نوع مجموعه‌ای است؟



شکل ۹

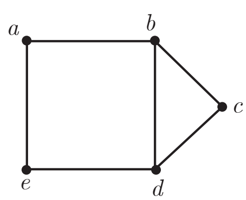
۲ با توجه به رابطهٔ $\gamma(G) \geq \left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ ، حداقل چند رأس برای احاطه کردن تمام رئوس این گراف لازم است؟ آیا می‌توانید مجموعه‌ای احاطه‌گر با این تعداد رأس مشخص نمایید؟

۳ گراف‌های P_{10} , P_9 , C_{10} و C_9 را رسم کنید و عدد احاطه‌گری هر یک را مشخص نمایید.

۴ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ باشد.

۵ گرافی مشخص کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ نباشد.

مثال : عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۰ را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.



شکل ۱۰

حل : به سادگی می‌توان دید که مجموعهٔ دو عضوی $\{a,c\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است.
بنابراین عدد احاطه‌گری این گراف کوچک‌تر یا مساوی ۲ است؛ یعنی $\gamma(G) \leq 2$.
اما اگر $\gamma(G)=1$، یعنی یک رأس در گراف G وجود دارد که به تنهایی تمام رئوس دیگر را احاطه کرده است (به تمام رئوس دیگر وصل است) یعنی رأسی با درجهٔ ۴ در گراف وجود دارد که با توجه به گراف G می‌بینیم که چنین رأسی وجود ندارد و لذا $\gamma(G)>1$. بنابراین $1<\gamma(G)\leq 2$ و لذا $\gamma(G)=2$.

روش دیگر برای حل : نوع دیگری از استدلال به این صورت است که باتوجه به کران پایین مطرح شده برای $\gamma(G)$ و اینکه $\Delta(G)=۳$ داریم :

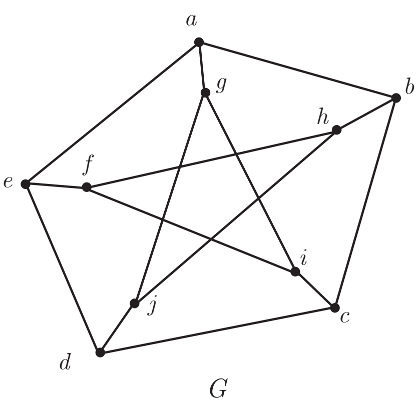
$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \leq \gamma(G) \Rightarrow \left\lceil \frac{۵}{۴} \right\rceil \leq \gamma(G)$$

بنابراین $\gamma(G) \leq ۲$ و با توجه به مجموعهٔ احاطه‌گر دو عضوی ارائه شده در بالا داریم $\gamma(G) \leq ۲$ و لذا $\gamma(G)=۲$.

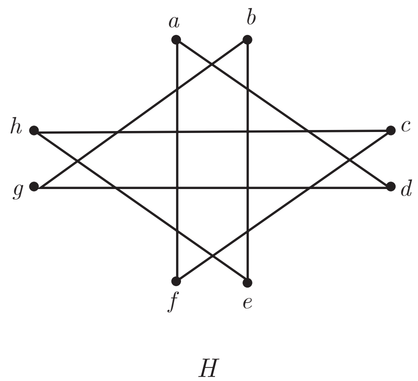
کار در کلاس

۱ تمام γــ مجموعه‌هایِ (مجموعه‌های احاطه‌گر مینیمم) گراف G در مثال قبل را بنویسید.

۲ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص کنید.



الف)

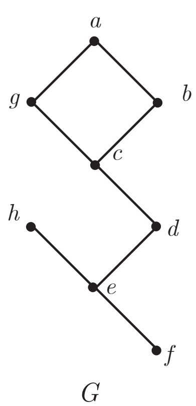


ب)

شکل ۱۱

فعالیت

۱ می‌خواهیم عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۲ را مشخص کنیم.



شکل ۱۲

الف) ابتدا می‌بینیم که با توجه به کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil$ برای $\gamma(G)$ حداقل $۲=\left\lceil \frac{۸}{۴} \right\rceil$ رأس برای احاطه کردن رئوس لازم است اما در مراحل بعدی می‌بینیم که ۲ رأس برای احاطه تمام رئوس این گراف کافی نیست.

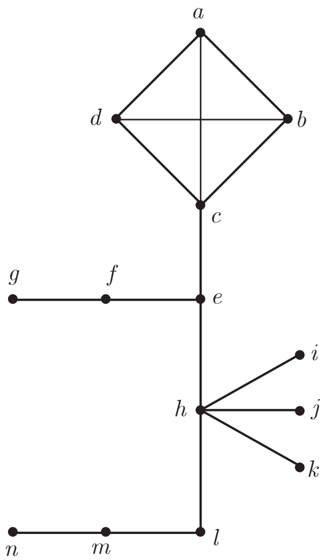
ب) برای احاطه‌کردن رأس h حداقل یکی از رئوس e یا h باید در مجموعهٔ احاطه‌گر باشند و با بودن هر کدام از آنها در مجموعهٔ احاطه‌گر، رئوس g,c,b,a کماکان احاطه نشده باقی می‌مانند.

پ) برای احاطه‌کردن رئوس g,c,b,a حداقل دو رأس دیگر نیاز هست، زیرا هیچ رأسی به تنهایی نمی‌تواند هر چهارتای آنها را احاطه کند.

ت) بنابراین حداقل ۳ رأس باید در هر مجموعهٔ احاطه‌گر از گراف G باشد یعنی $\gamma(G)\geq۳$.

ث) از طرفی چون $\{a,c,e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است، $\gamma(G)\leq۳$. پس $\gamma(G)=۳$.

۲ می‌خواهیم عدد احاطه‌گر گراف شکل ۱۳ را مشخص نماییم.



شکل ۱۳

الف) ابتدا کران پایین $\left\lceil \frac{n}{\Delta+1} \right\rceil$ را بررسی می‌کنیم که عدد $\left\lceil \frac{۱۴}{۶} \right\rceil = ۳$ را می‌دهد. پس $\gamma(G) \geq ۳$.

ب) اما حداقل یکی از رئوس a، b، c و d باید انتخاب شود. چرا؟

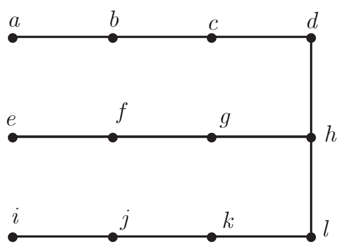
پ) حداقل یکی از رئوس f و g باید انتخاب شود. چرا؟

ت) حداقل یکی از رئوس i و h باید انتخاب شود. چرا؟

ث) حداقل یکی از رئوس m و n باید انتخاب شود. چرا؟

ج) بنابراین حداقل ۴ رأس در هر مجموعهٔ احاطه‌گر باید باشد. لذا $\gamma(G) \geq ۴$ و با توجه به اینکه $\{c,f,h,m\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر است لذا $\gamma(G) \leq ۴$ بنابراین $\gamma(G) = ۴$.

مثال: عدد احاطه‌گری گراف شکل ۱۴ را به‌دست آورید و یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم برای آن ارائه کنید.



شکل ۱۴

حل: برای احاطه‌کردن رأس a لازم است یکی از دو رأس a و b در مجموعهٔ احاطه‌گر باشند. به همین صورت یکی از رئوس e و f و نیز یکی از رئوس i و j نیز باید در هر مجموعه احاطه‌گر باشند. اما این سه رأس انتخاب شده در هر حالت نمی‌توانند رئوس l,h,d را احاطه کنند. لذا حداقل یک رأس دیگر یعنی حداقل ۴ رأس برای احاطهٔ رئوس این گراف لازم است: یعنی $\gamma(G) \geq ۴$ از طرفی $\{b,f,j,h\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گراست و لذا $\gamma(G) \leq ۴$. بنابراین داریم $\gamma(G) = ۴$.

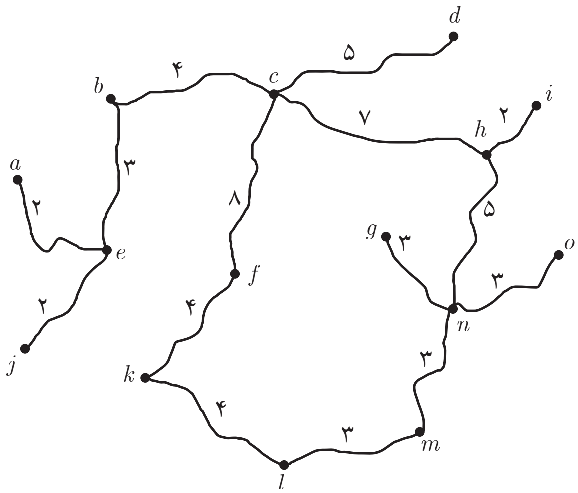
تمرین

۱ در مثال ایستگاه‌های رادیویی (دومین مثال این درس)

الف) تعداد و محل نصب ایستگاه‌ها را مشخص نمایید.

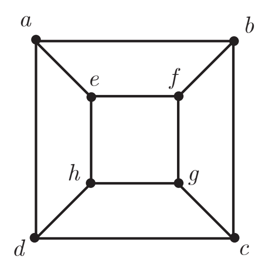
ب) اگر مجبور باشیم یکی از ایستگاه‌ها را در شهر b احداث کنیم حداقل چند ایستگاه دیگر و در چه شهرهایی باید احداث کنیم؟

۲ نقشهٔ مقابل نقشهٔ یک منطقه شامل چند روستا و جاده‌های بین آن روستاهاست و مسافت جاده‌های بین روستاها در آن مشخص شده است. قصد داریم چند بیمارستان مجهز در برخی روستاها احداث کنیم به‌گونه‌ای که فاصلهٔ هر روستا تا نزدیک‌ترین بیمارستان به آن روستا از ۱۰ کیلومتر بیشتر نباشد و از طرفی کمترین تعداد ممکن بیمارستان را احداث کنیم. ابتدا با توجه به نقشهٔ فوق، مسئلهٔ مورد نظر را با یک گراف مناسب مدل‌سازی کنید و سپس تعداد و محل احداث بیمارستان‌ها را مشخص کنید.

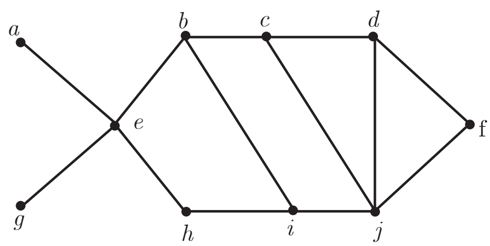


شکل ۱۵

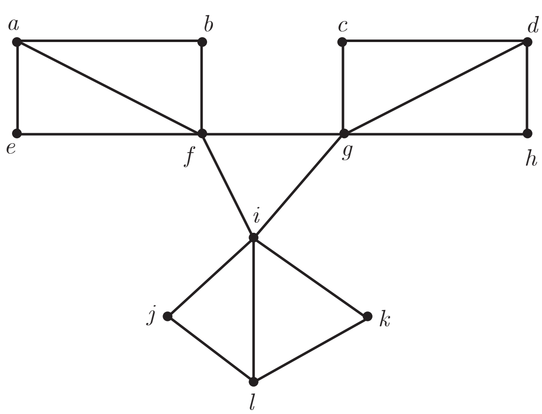
۳ عدد احاطه‌گری را برای هر یک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



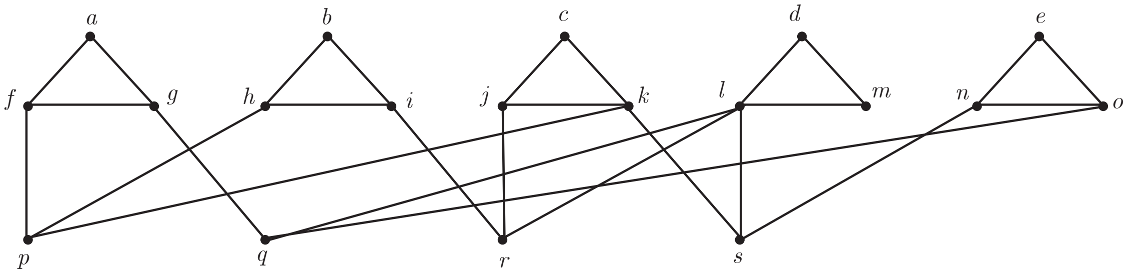
(الف)



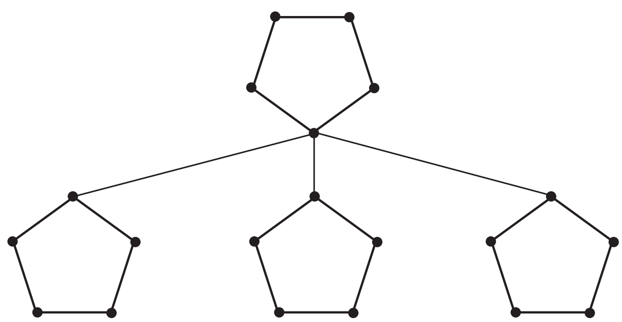
(ب)



(پ)



(ت)



(ث)

۴ اگر برای گراف G داشته باشیم $\gamma(G)=1$، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی‌برد؟ ($\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.)

۵ $\gamma(P_n)$ و $\gamma(C_n)$ را به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ مشخص کنید.

۶ اگر G یک گراف k- منتظم n رأسی باشد نشان دهید $\left\lceil \frac{n}{k+1} \right\rceil \leq \gamma(G)$

۷ یک گراف ۲ــ منتظم ۱۲ رأسی بکشید که عدد احاطه‌گری آن کمترین مقدار ممکن باشد.

۸ الف) یک گراف ۶ رأسی که γ- مجموعهٔ آن با اندازه یک باشد رسم کنید.

ب) یک گراف ۶ رأسی که γ- مجموعهٔ آن با اندازه دو باشد رسم کنید.

پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \leq \frac{n}{2}$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه‌گری آن k باشد، ارائه دهید.

۹ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعهٔ احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

۱۰ برای هر $n\in \mathbb{N}$ $(n\geq ۴)$ دلخواه توضیح دهید که

الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازهٔ ۲ داشته باشد.

ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعهٔ احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

۱۱ گراف $P_{۱۲}$ را رسم کنید.

الف) یک γ ــ مجموعه از آن را مشخص نمایید.

ب) یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال ۶ عضوی از آن را مشخص نمایید.