کاربردهای مشتق

فصل ۵

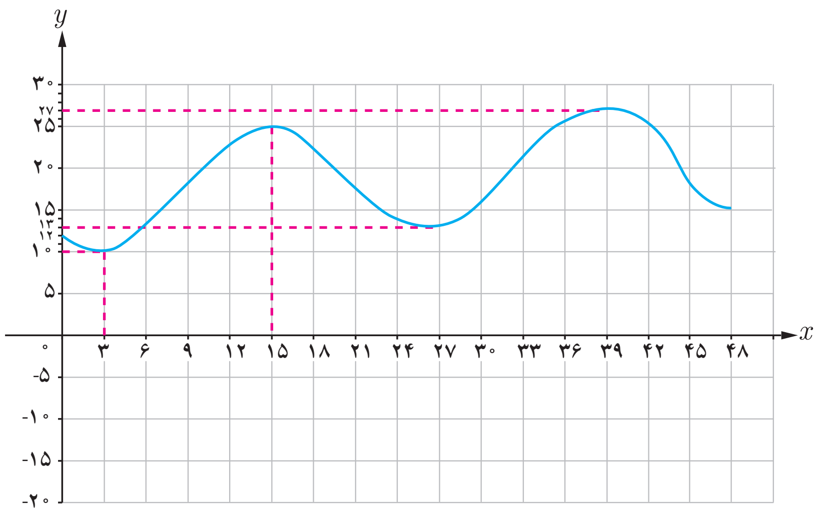
گردنه حیران (اردبیل)

سرعت لحظه‌ای یک اتومبیل برابر با مشتق معادله مکان ـ زمان نسبت به زمان و یا شیب خط مماس برنمودار مکان ـ زمان است. شتاب لحظه‌ای، مشتق دوم معادله مکان نسبت به زمان است.

درس ۱

اکسترمم‌های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

نمودار زیر، نمودار تابع تغییرات دمای هوای یک شهر در دو شبانه‌روز متوالی است. اگر x زمان و y دما باشد؛ بیشترین و کمترین دما در این ۴۸ ساعت در چه زمان‌هایی بوده است و مقدار آنها چند است؟



نقاط به طول ۱۵ و ۳۹ به گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها (نقاط یک همسایگی حول آنها) بیشتر است، بدین خاطر اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «ماکزیمم نسبی» دارد.
نقاط به طول ۳ و ۲۷ به‌گونه‌ای هستند که مقدار تابع در آنها نسبت به مقادیر تابع در نقاط اطراف آنها کمتر است، لذا اصطلاحاً گفته می‌شود تابع در این نقاط «مینیمم نسبی» دارد. به‌طور دقیق‌تر می‌توان گفت :

تعریف :

اگر f یک تابع و $I \subseteq D_f$ یک همسایگی از نقطهٔ c (بازهٔ باز شامل نقطهٔ c) باشد که

الف) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \leq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک ماکزیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

ب) به ازای هر x متعلق به I داشته باشیم $f(x) \geq f(c)$، در این صورت $f(c)$ را یک مینیمم نسبی تابع f می‌نامیم.

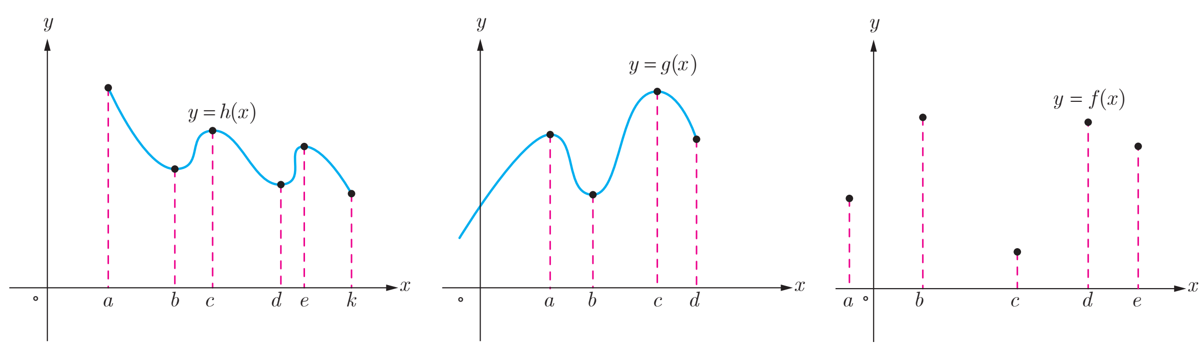
دقت کنید که در نمودار، مقادیر ماکزیمم نسبی برابر ۲۵ و ۲۷ هستند و نقاط ماکزیمم نسبی نقاط (۱۵ , ۲۵) و (۳۹ , ۲۷) هستند و یا به عبارتی مقادیر ماکزیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x=$ ۱۵ و $x=$ ۳۹ اتفاق افتاده‌اند. به طریق مشابه مقادیر مینیمم نسبی ۱۰ و ۱۳ هستند و نقاط مینیمم نسبی نقاط (۳ , ۱۰) و (۲۷ , ۱۳) هستند و یا به عبارتی مقادیر مینیمم‌های نسبی در نقاطی به طول $x=$ ۱۰ و $x=$ ۱۳ اتفاق افتاده‌اند.

در بسیاری از مسائل فقط بیشترین و کمترین مقدار یک تابع در یک مجموعه اهمیت دارد. به بزرگ‌ترین مقدار تابع f در مجموعه A «ماکزیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. همچنین به کوچک‌ترین مقدار تابع f در مجموعه A «مینیمم مطلق» این تابع در این مجموعه می‌گوییم. بنابراین نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f در مجموعه A به ترتیب «بالاترین» و «پایین‌ترین» نقطهٔ نمودار تابع در آن مجموعه هستند و زمانی که می‌گوییم ماکزیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x = a$ (منظور نقطه‌ای از تابع به طول $x = a$ است) اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار ماکزیمم مطلق و $(a\ ,\ f(a))$ نقطهٔ ماکزیمم مطلق تابع بر مجموعه موردنظر است. به عبارتی برای هر $x \in A$ داریم $f(x) \le f(a)$. همچنین وقتی می‌گوییم مینیمم مطلق تابع f در نقطهٔ $x = a$ اتفاق افتاده است یعنی $f(a)$ مقدار مینیمم مطلق و $(a\ ,\ f(a))$ نقطهٔ مینیمم مطلق تابع بر مجموعه مورد نظر است.

✤ **تذکر** : گوییم تابع f در نقطهٔ $x = c$ **اکسترمم نسبی** دارد هرگاه در این نقطه ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی داشته باشد و اگر در نقطهٔ $x = c$ ماکزیمم مطلق یا مینیمم مطلق داشته باشد می‌گوییم در آن نقطه **اکسترمم مطلق** دارد.

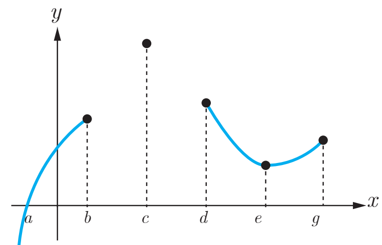
کار در کلاس

۱ در هر یک از نمودارهای توابع زیر مقدار ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق و همچنین طول نقاط ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را در صورت وجود مشخص نمایید.

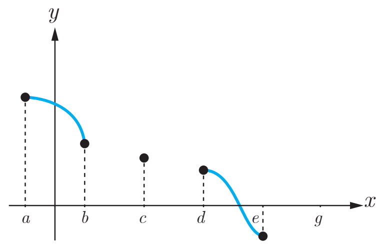


(پ) (ب) (الف)

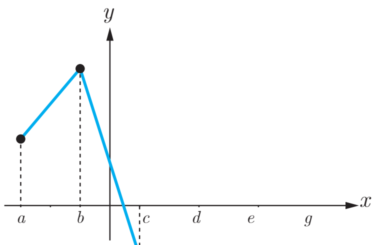
۲ دقت کنید که با توجه به تعریف، نقطهٔ ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی به‌گونه‌ای است که تابع در یک همسایگی آن تعریف شده است اما نقطهٔ ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق لازم نیست حتماً در چنین شرطی صدق کند. حال با توجه به این مطلب در هر نمودار زیر، نقاط ماکزیمم و مینیمم نسبی و ماکزیمم و مینیمم مطلق را مشخص نمایید.



(الف)

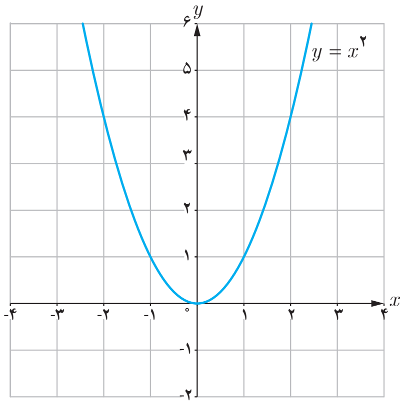


(ب)

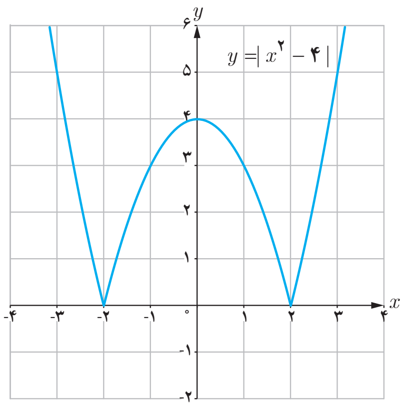


(پ)

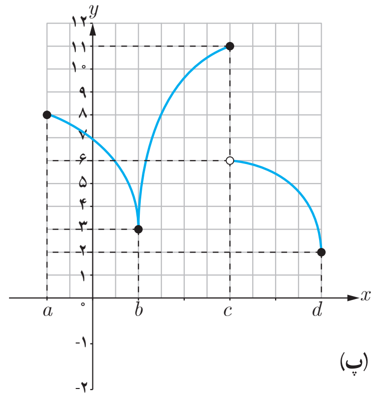
۳ در هر یک از نمودارهای زیر، مقادیر و طول نقاط اکسترمم‌های نسبی و اکسترمم‌های مطلق را مشخص نمایید.



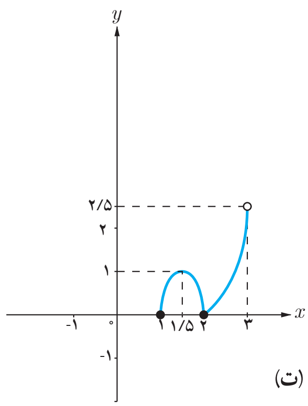
(الف)



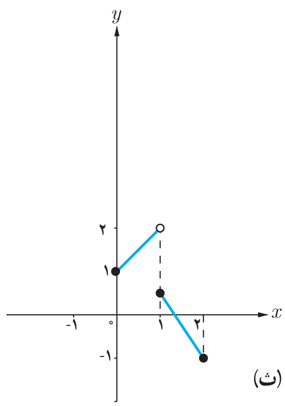
(ب)



(پ)

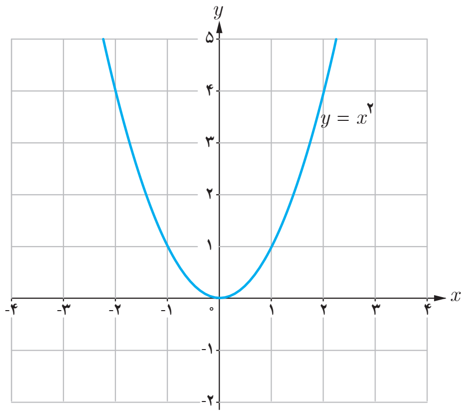


(ت)



(ث)

۴ نمودار یک تابع را رسم کنید که در نقطهٔ (۴ , ۲) ماکزیمم نسبی و در نقطهٔ (۱ , ۵) مینیمم نسبی دارد.



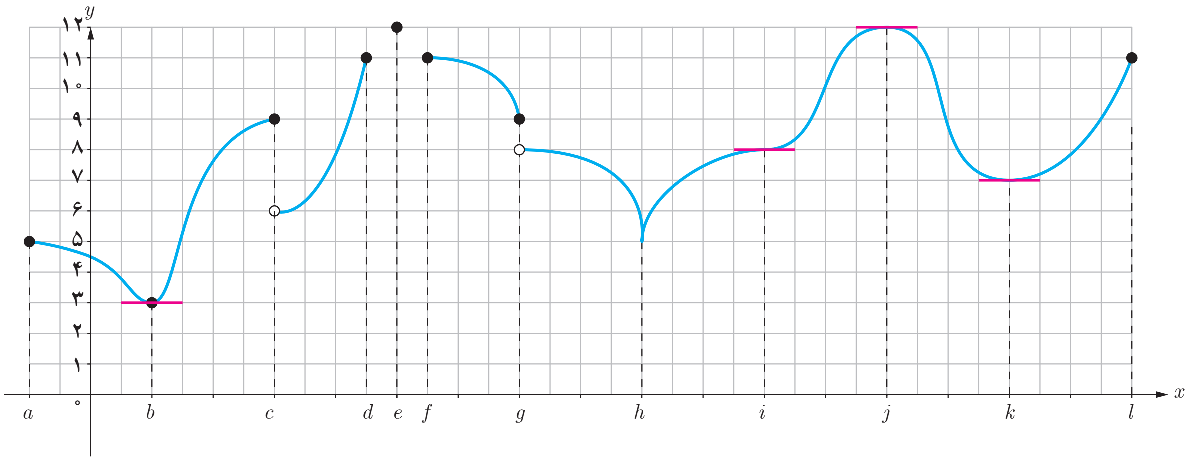
۵ تابع $f(x) = x^2$ را در نظر بگیرید.

الف) وجود مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f را در بازه‌های $[0 , 1]$ و $(0 , 1)$ بررسی کنید.

ب) وجود اکسترمم‌های مطلق تابع f را بر $\mathbb{R}$ بررسی نمایید.

فعالیت

۱ در نمودار زیر نقاطی که تابع در آنها مماس افقی دارد؛ یعنی تمام جاهایی که مشتق در آنها وجود دارد و برابر صفر است مشخص شده‌اند. به سؤالات زیر پاسخ دهید.



الف) تمام نقاط اکسترمم نسبی را مشخص نمایید.

ب) تمام نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد را مشخص نمایید.

پ) تمام نقاطی که مشتق برابر صفر است را بنویسید.

ت) آیا در همهٔ نقاط اکسترمم نسبی مشتق وجود دارد؟

ث) در اکسترمم‌های نسبی که مشتق در آنها وجود دارد، مقدار این مشتق چقدر است؟

ج) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق برابر صفر باشد ولی آن نقطه اکسترمم نسبی نباشد؟

چ) آیا امکان دارد در نقطه‌ای مشتق وجود نداشته باشد ولی آن نقطه اکسترمم مطلق باشد؟

۲ سعی کنید نمودارهای دیگری رسم کنید که در آنها نقاط اکسترممی باشد که مشتق در این نقاط موجود باشد (خط مماس بر منحنی در نقاط اکسترمم وجود داشته باشد). مقدار مشتق در این نقاط اکسترمم چقدر است؟

۳ با توجه به آنچه در قسمت‌های ۱ و ۲ دیدید، کدام‌یک از موارد زیر می‌تواند درست باشد؟

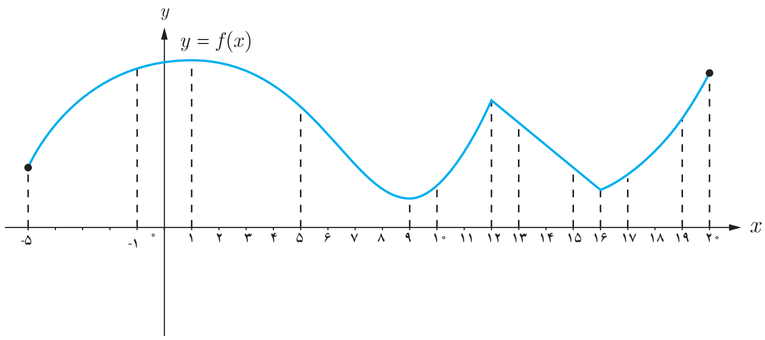
الف) اگر $f'(c)$ وجود نداشته باشد، آنگاه $x=c$ یک نقطهٔ اکسترمم نسبی نیست.

ب) اگر $f'(c)=۰$، آنگاه $x=c$ یک نقطهٔ اکسترمم نسبی است.

پ) اگر $x=c$ طول یک نقطهٔ اکسترمم نسبی باشد و $f'(c)$ موجود باشد، آنگاه $f'(c)=۰$.

فعالیت

۱ شکل روبه‌رو نمودار یک تابع **پیوسته** را نشان می‌دهد.



الف) وجود ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در **بازه‌های بستهٔ** زیر بررسی کنید.

$[-۱,۰]$ ، $[۵,۱۰]$ ، $[۱۳,۱۵]$ ، $[۱۰,۱۳]$ ، $[۱۶,۲۰]$

ب) وجود هر یک از مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق را برای تابع f در **بازه‌های باز** زیر بررسی کنید.

$(-۱,۰)$ ، $(۵,۱۰)$ ، $(۱۳,۱۵)$ ، $(۱۰,۱۳)$ ، $(۱۶,۲۰)$

۲ با توجه به آنچه در قسمت ۱ مشاهده کردید کدام‌یک از موارد زیر نمی‌تواند درست باشد؟

الف) هر تابع پیوسته بر یک بازهٔ بسته دارای اکسترمم‌های مطلق است.

ب) هر تابع پیوسته بر یک بازهٔ باز دارای اکسترمم‌های مطلق است.

قضیهٔ زیر را بدون اثبات می‌پذیریم.

قضیه : اگر تابع f در **بازهٔ بستهٔ** $[a,b]$ **پیوسته** باشد، آن‌گاه تابع در این بازه هم ماکزیمم مطلق و هم مینیمم مطلق دارد.

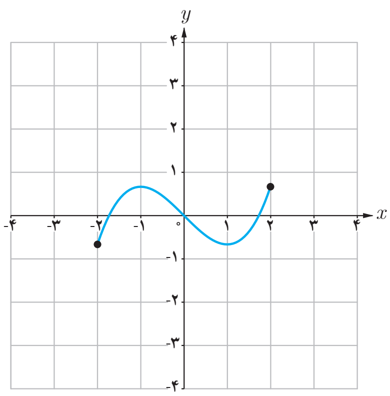
با توجه به آنچه تا به حال ملاحظه کردیم، اکسترمم‌های مطلق تابع در نقاطی اتفاق می‌افتد که مشتق تابع در آن نقاط برابر صفر باشد و یا تابع در آن نقاط مشتق‌پذیر نباشد. به چنین نقاطی، **نقاط بحرانی** تابع می‌گوییم.

تعریف : فرض کنیم $c \in D_f$. نقطهٔ به‌طول c را یک نقطهٔ بحرانی برای تابع f می‌نامیم، هرگاه $f'(c)$ برابر صفر باشد و یا $f'(c)$ موجود نباشد.

برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق ابتدا این نقاط بحرانی را مشخص می‌نماییم. در این صورت از بین تمام نقاط بحرانی و نقاط انتهایی بازه، نقطه یا نقاطی که بیشترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط ماکزیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار ماکزیمم مطلق** تابع است. همچنین در بین نقاط مذکور نقطه یا نقاطی که کمترین مقدار تابع در آنها اتفاق می‌افتد **نقاط مینیمم مطلق** تابع و مقدار تابع در این نقاط **مقدار مینیمم مطلق** تابع است.

مثال : اکسترمم‌های مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x$ را در بازهٔ $[-۲\,,\,۲]$ بیابید.

حل : بنابر آنچه گفته شد باید نقاط بحرانی، یعنی نقاطی که مشتق در آنها وجود ندارد یا برابر صفر است را مشخص نماییم. بنابراین باید در بازهٔ $[-۲\,,\,۲]$ به دنبال نقاطی باشیم که تابع در آنها مشتق نداشته باشد و یا مشتق در آنها برابر صفر باشد. اما f در تمام بازهٔ $(-۲\,,\,۲)$ مشتق‌پذیر است و داریم $f'(x)=x^{۲}-۱$ و مقدار f' در $x=\pm۱$ برابر صفر می‌شود یعنی داریم $f'(۱)=۰$ و $f'(-۱)=۰$.



بنابراین $x=\pm۱$ و $x=\pm۲$ طول نقاط بحرانی هستند و از آنجا که داریم :

$$f(۲)=\frac{۲}{۳} \qquad f(۱)=-\frac{۲}{۳} \qquad f(-۱)=\frac{۲}{۳} \qquad f(-۲)=-\frac{۲}{۳}$$

لذا مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع بر این بازه به ترتیب برابر $\frac{۲}{۳}$ و $-\frac{۲}{۳}$ و نقاط ماکزیمم نقاط به طول $x=-۱$ و $x=۲$ و نقاط مینیمم نقاط به طول $x=۱$ و $x=-۲$ است.

مثال : مقادیر ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق تابع f با ضابطه $f(x)=|x^۲-۱|$ را روی بازه $[-۲\,,\,۲]$ پیدا کنید.

حل : نقاط $x=\pm۲$ نقاط انتهایی بازه‌اند. برای یافتن نقاط اکسترمم مطلق، باید به دنبال نقاط بحرانی باشیم، یعنی نقاطی مانند c که برای آنها $f'(c)=۰$ یا $f'(c)$ وجود نداشته باشد. لذا باید مشتق‌پذیری تابع f در نقاط بازه بررسی شود. اما داریم :

$$f(x)=|x^۲-۱|=\begin{cases}x^۲-۱ & x\le -۱ \ \text{یا}\ ۱\le x\\ ۱-x^۲ & -۱\le x\le ۱\end{cases}\quad\Rightarrow\quad f'(x)=\begin{cases}۲x & x<-۱\ \text{یا}\ ۱<x\\ -۲x & -۱<x<۱\end{cases}$$

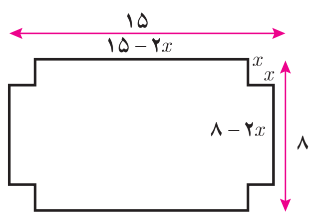
حال باید مشتقات چپ و راست را در نقاط $x=۱$ و $x=-۱$ به دست آوریم که با توجه به تعاریف مشتق چپ و راست از فصل مشتق خواهیم داشت :

$f'_{+}(۱)=۲$ و $f'_{-}(۱)=-۲$, $f'_{+}(-۱)=۲$, $f'_{-}(-۱)=-۲$

بنابراین تابع f در نقاط $x=\pm۱$ مشتق‌پذیر نیست و از طرفی f' تنها در نقطهٔ $x=۰$ مقدار صفر می‌گیرد. لذا نقاط $x=۰$ و $x=\pm۱$ و $x=\pm۲$ نقاط بحرانی این تابع‌اند و با بررسی مقدار تابع در این نقاط به سادگی مشخص می‌شود که مینیمم مطلق تابع در دو نقطهٔ $x=\pm۱$ است و مقدار آن برابر صفر است و ماکزیمم مطلق در نقاط $x=\pm۲$ و مقدار آن برابر ۳ است.

در بسیاری از مسائل در زندگی خواهان این هستیم که با داشتن برخی شرایط از پیش تعیین شده، مسئله را طوری حل کنیم که بیشترین بازده را داشته باشیم. به عنوان نمونه در مثال زیر می‌خواهیم از ورقه‌ای با ابعاد مشخص جعبه‌ای با بیشترین حجم ممکن بسازیم.

مثال : یک سازنده جعبه‌های حلبی، با بریدن مربع‌های همنهشت از چهار گوشه ورق‌های حلبی به ابعاد ۸ اینچ[۱] و ۱۵ اینچ و بالا بردن چهار طرف آن، جعبه‌های سر باز می‌سازد. اگر بخواهیم حجم جعبه‌های ساخته شده بیشترین مقدار ممکن باشد، طول ضلع مربع‌هایی که باید بریده شود چقدر باید باشد؟



حل : فرض کنید طول ضلع مربعی که از گوشه‌های مستطیل مفروض برحسب اینچ بریده می‌شود x باشد. پس

$۱۵-۲x=$ طول قوطی مورد نظر $\qquad ۰\le x\le \frac{۱۵}{۲}$

$۸-۲x=$ عرض قوطی $\qquad ۰\le x\le ۴$

پس با توجه به این مفروضات داریم :

$$V(x)=x(۱۵-۲x)(۸-۲x)=۴x^۳-۴۶x^۲+۱۲۰x\ ,\quad ۰\le x\le ۴$$

۱ــ هر اینچ تقریباً معادل ۲/۵۴ سانتی‌متر است.

چون V روی $[۰ , ۴]$ پیوسته است، پس دارای اکسترمم‌های مطلق در این بازه است و داریم :

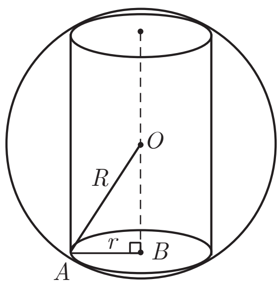
$$V'(x) = ۱۲x^۲ - ۹۲x + ۱۲۰ = ۰$$

$$(۳x - ۵)(x - ۶) = ۰ \Rightarrow x = \frac{۵}{۳} \quad \text{یا} \quad x = ۶$$

اما $x=۶$ در بازه مورد نظر قرار ندارد، پس قابل قبول نیست $x=۰$ و $x=۴$ و $x=\frac{۵}{۳}$ نقاط بحرانی تابع هستند. از طرفی $V(۰)=۰$ ، $V(\frac{۵}{۳})>۰$ و $V(۴)=۰$ نشان می‌دهد که ماکزیمم مطلق تابع در $x=\frac{۵}{۳}$ حاصل می‌شود و لذا طول ضلع مربع‌های مورد نظر باید $\frac{۵}{۳}$ اینچ باشد.

مثال : در کره‌ای به شعاع R یک استوانه محاط کرده‌ایم. شعاع قاعده و ارتفاع استوانه را طوری به دست آورید که حجم استوانه، بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

حل : فرض کنیم استوانه مورد نظر دارای شعاع قاعده r و ارتفاع h باشد. اگر O مرکز کره باشد، در مثلث قائم‌الزاویه OAB ، $OB=\frac{h}{۲}$ و داریم :



$$AB^۲ + OB^۲ = OA$$

بنابراین $r^۲ + \frac{h^۲}{۴} = R^۲$.

حجم این استوانه برابر است با :

$$V = \pi r^۲ h = \pi(R^۲ - \frac{h^۲}{۴})h \Rightarrow V(h) = \pi R^۲ h - \frac{\pi}{۴}h^۳ \quad ; \quad ۰ \leq h \leq ۲R$$

برای یافتن نقاط بحرانی این تابع در بازه $[۰ , ۲R]$، ریشه‌های مشتق را به دست می‌آوریم :

$$V'(h) = \pi R^۲ - \frac{۳\pi}{۴}h^۲ = ۰ \Rightarrow h = \frac{۲R}{\sqrt{۳}}$$

از طرفی $V(۰)=۰$ و $V(۲R)=۰$

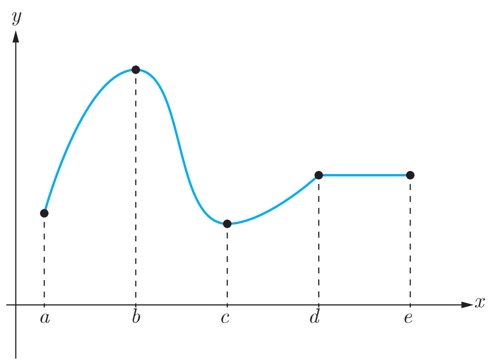
بنابراین تابع V به ازای $h=\frac{۲R}{\sqrt{۳}}$ ، بیشترین مقدار حجم را دارد. با توجه به اینکه $r^۲ + \frac{h^۲}{۴} = R^۲$ ، مقدار r برابر با $r = \frac{\sqrt{۲}R}{\sqrt{۳}}$ می‌باشد.

تشخیص صعودی یا نزولی بودن یک تابع

در فصل اوّل با مفهوم صعودی یا نزولی بودن یک تابع در یک بازه آشنا شدیم. همچنین در فصل قبل با مفهوم مشتق آشنا شدیم و دیدیم که مقدار مشتق یک تابع در یک نقطه برابر است با شیب خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه. از طرفی برای یک تابع مانند f با تابع f' آشنا شدیم. اکنون خواهیم دید که با بررسی f' می‌توان ویژگی‌هایی از تابع f و نمودار آن از جمله صعودی و نزولی بودن تابع را مشخص نمود.

فعالیت

۱ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است.



الف) با رسم مماس‌هایی در نقاط مختلف نمودار f تعیین کنید در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها مثبت و در چه بازه‌هایی شیب مماس‌ها منفی و در چه زیرمجموعه‌ای از دامنه شیب مماس‌ها برابر صفر است.

ب) تعیین کنید در چه بازه‌هایی مشتق f مثبت و در چه بازه‌هایی مشتق f منفی و در چه بازه‌هایی f' برابر صفر است.

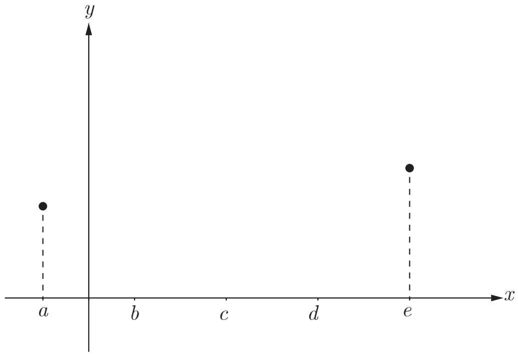
پ) تعیین کنید در چه بازه‌هایی تابع f صعودی اکید و در چه بازه‌هایی نزولی اکید و در چه بازه‌هایی تابع f ثابت است.

۲ دو نقطه از نمودار یک تابع در شکل روبه‌رو داده شده‌اند. نمودار این تابع را در بازهٔ $[a, e]$ به گونه‌ای رسم کنید که دارای همهٔ ویژگی‌های زیر باشد :

ــ تابع f در بازهٔ (a, e) مشتق‌پذیر باشد.

ــ مقدار مشتق تابع در بازه‌های (a, b) و (b, c) و (c, d) و (d, e) به ترتیب منفی، مثبت، صفر و منفی باشد.

ــ تعیین کنید تابع f در کدام بازه‌ها صعودی اکید و در کدام بازه‌ها نزولی اکید و در کدام بازه‌ها ثابت است.



با توجه به آنچه گفته شد قضیهٔ زیر را بدون اثبات بیان می‌نماییم.

قضیه :

فرض کنیم تابع f بر بازه $[a, b]$ پیوسته و بر بازه (a, b) مشتق‌پذیر باشد. در این صورت :

الف) اگر به ازای هر x در (a, b)، $f'(x) > 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ صعودی اکید است.

ب) اگر به ازای هر x در بازه (a, b)، $f'(x) < 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ نزولی اکید است.

پ) اگر به ازای هر x در بازه (a, b)، $f'(x) = 0$، آن‌گاه تابع f بر $[a, b]$ یک تابع ثابت است.

کار در کلاس

۱ توابع $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 1 \\ x & x < 1 \end{cases}$ و $g(x) = x^3$ در تمام $\mathbb{R}$ صعودی اکیداند.

الف) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید باشد، در آن بازه مشتق‌پذیر هم هست؟

ب) آیا می‌توان گفت هر تابع که در یک بازه صعودی اکید و مشتق‌پذیر باشد، در هر نقطه از آن بازه دارای مشتق مثبت است؟

۲ تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر بگیرید.

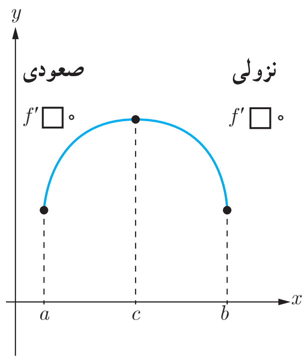
الف) نشان دهید که این تابع در بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

ب) آیا می‌توان گفت این تابع در تمام دامنهٔ خود اکیداً نزولی است؟

در ادامه محکی برای تعیین نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی ارائه می‌دهیم.

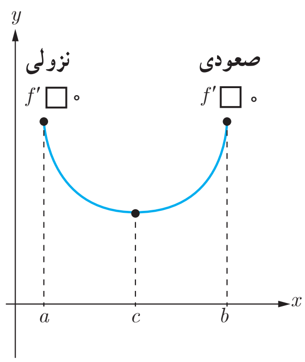
فعالیت

فرض کنیم $c \in (a\,,b) \subseteq D_f$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد و f بر $(a\,,b)$ پیوسته و به جز احتمالاً در c مشتق‌پذیر باشد.



۱ اگر تابع f در بازه‌ای مانند $(a\,,c)$ در سمت چپ آن صعودی و در بازه‌ای مانند $(c\,,b)$ در سمت راست آن نزولی باشد، در این صورت $x=c$ یک نقطهٔ ماکزیمم نسبی تابع f است.

در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع f رسم شده است. علامت f' را در دو طرف نقطهٔ c مشخص نمایید.

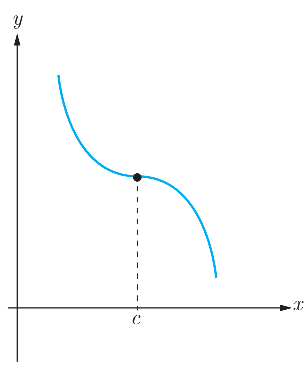


۲ مشابه قسمت (۱) را برای نقطهٔ مینیمم نسبی تابع f بنویسید.

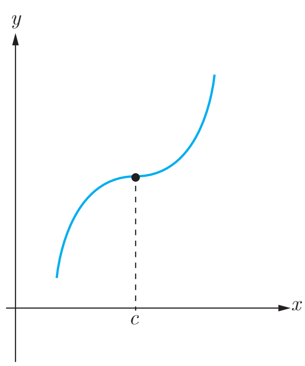
۳ در شکل‌های زیر نمودار تابع f و نقطهٔ c مشخص شده است و $f'(c) = ۰$.

الف) علامت f' را در دو طرف نقطهٔ c در هر دو نمودار بررسی کنید.

ب) در هر یک از نمودارها مشخص کنید آیا c یک نقطهٔ اکسترمم نسبی است؟



(الف)



(ب)

با توجه به آنچه گفته شد می‌توان محک زیر را که به نام آزمون مشتق اوّل معروف است بیان نمود.

آزمون مشتق اوّل

فرض کنیم تابع f بر بازه‌ای باز مانند I $(I \subseteq D_f)$ پیوسته باشد و $c \in I$ یک نقطهٔ بحرانی تابع f باشد. هرگاه f بر این بازه به جز احتمالاً در نقطهٔ c، مشتق‌پذیر باشد، در این صورت :

الف) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a,c)، $f'(x)>0$ و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c,b)، $f'(x)<0$، در این صورت $f(c)$ یک مقدار ماکزیمم نسبی f است.

ب) اگر به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (a,c)، $f'(x)<0$، و به ازای تمام مقادیر x در بازه‌ای مانند (c,b)، $f'(x)>0$، آن‌گاه $f(c)$ یک مقدار مینیمم نسبی f است.

پ) اگر f' در نقطهٔ c تغییر علامت ندهد، به طوری که f' در هر دو طرف c مثبت یا هر دو طرف آن منفی باشد، آن‌گاه $f(c)$ نه مینیمم نسبی و نه ماکزیمم نسبی است.

مثال : اکسترمم‌های نسبی و مطلق تابع $f(x)=x^3-2x^2-4x+6$ را در بازهٔ $[-3,4]$ به‌دست آورید و مشخص کنید این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

حل : از آنجا که توابع چندجمله‌ای همواره مشتق‌پذیرند لذا برای مشخص کردن نقاط بحرانی تابع f باید تمام نقاطی که مشتق تابع در آنها صفر می‌شود را به‌دست آوریم.

$$f'(x)=3x^2-4x-4 \qquad f'(x)=0 \Rightarrow x=2 \quad \text{یا} \quad x=-\frac{2}{3}$$

لذا نقاط بحرانی این تابع نقاط $x=2$ و $x=-\frac{2}{3}$ است و نقاط $x=-3$ و $x=4$ هم که نقاط انتهایی بازه هستند و داریم :

$$(-3,-27)\ ,\ \left(-\frac{2}{3},\frac{202}{27}\right)\ ,\ (2,-2)\ ,\ (4,22)$$

لذا $x=4$ و $x=-3$ به ترتیب طول نقاط ماکزیمم و مینیمم مطلق و مقادیر آنها به ترتیب ۲۲ و ۲۷- است. حال برای تعیین اکسترمم‌های نسبی و صعودی و نزولی بودن تابع باید مشتق تابع را تعیین علامت کنیم. با توجه به تعیین علامت معادلات درجهٔ دوم داریم :

x		$-\frac{2}{3}$		2	
$f'(x)$	+	۰	−	۰	+

از این جدول مشخص می‌شود که تابع f در بازهٔ $\left(-\frac{۲}{۳}\,,\,۲\right)$ نزولی و در سایر جاها صعودی است. همچنین مشخص می‌شود که نقطهٔ $x=-\frac{۲}{۳}$ یک ماکزیمم نسبی و مقدار آن برابر $\frac{۲۰۲}{۲۷}$ است و نقطهٔ $x=۲$ یک مینیمم نسبی و مقدار آن برابر ۲− است.

می‌توان اطلاعات فوق را در جدول زیر که به آن جدول تغییرات تابع می‌گوییم نمایش داد.

x	۳−		$-\frac{۲}{۳}$		۲		۴
f'		+	۰	−	۰	+	
f	۲۷−	↗	$\frac{۲۰۲}{۲۷}$	↘	۲−	↗	۲۲
			ماکزیمم نسبی		مینیمم نسبی		

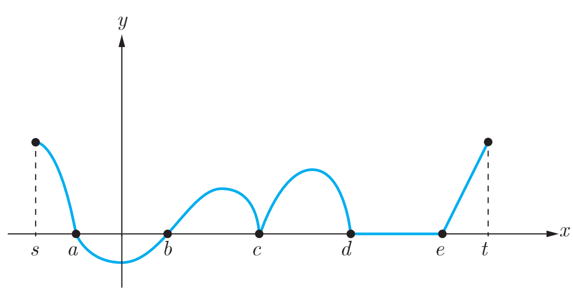
کار در کلاس

نمودار تابع f' در شکل زیر داده شده است.

الف) صعودی و نزولی بودن تابع f را در $[s\,,\,t]$ بررسی کنید.

ب) نقاط a، b، c، d و e کدام بحرانی، کدام ماکزیمم نسبی و کدام مینیمم نسبی‌اند؟

پ) آیا نقاط بازهٔ $(d\,,\,e)$ اکسترمم نسبی هستند؟



تمرین

۱ نمودار تابعی را رسم کنید که همهٔ شرایط زیر را داشته باشد.

نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که مشتق در آن برابر صفر باشد.

نقطهٔ مینیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن نقطه پیوسته باشد ولی مشتق نداشته باشد.

نقطهٔ ماکزیمم نسبی داشته باشد که تابع در آن ناپیوسته باشد.

نقطه‌ای داشته باشد که اکسترمم نسبی نباشد ولی مشتق تابع در آن نقطه صفر باشد.

۲ نمودار تابعی را رسم کنید که بر دامنه‌اش پیوسته باشد ولی بر آن ماکزیمم و مینیمم مطلق نداشته باشد.

۳ برای هر مورد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابع f در بازه‌ای مانند $[a , b]$ صعودی است اما صعودی اکید نیست.

ب) تابع f در بازه‌ای مانند $[a , b]$ نزولی است اما نزولی اکید نیست.

پ) تابع f در بازه‌ای مانند $[a , b]$ هم صعودی و هم نزولی است.

۴ برای هر کدام از موارد زیر نمودار یک تابع را رسم کنید.

الف) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی است اما در برخی نقاط آن بازه پیوسته نیست.

ب) تابعی که در یک بازه اکیداً صعودی و بر آن بازه پیوسته است اما در برخی نقاط آن بازه مشتق‌پذیر نیست.

پ) تابعی که در یک بازه اکیداً نزولی و مشتق‌پذیر است اما مشتق آن در برخی نقاط منفی نباشد.

۵ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که ماکزیمم مطلق داشته باشد ولی تابع $|f|$ ماکزیمم مطلق نداشته باشد.

۶ نقاط اکسترمم نسبی و مطلق توابع زیر را در بازه‌های داده شده در صورت وجود بیابید.

الف) $f(x) = ۳x^۲ - ۲x + ۵ \qquad [-۲ , ۱]$

ب) $f(x) = x^۳ - ۳x \qquad [-۱ , ۲]$

پ) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ۰ \leq x < ۲ \\ ۴ - x & x \geq ۲ \end{cases}$

۷ ضرایب a و b را در تابع $f(x) = x^۳ + ax + b$ طوری پیدا کنید که در نقطه (۲ , ۱)، ماکزیمم نسبی داشته باشد.

۸ نمودار تابعی مانند f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در تمام شرایط زیر صدق کند.

$$f(-۱) = ۵ \quad , \quad f(۴) = -۲ \quad , \quad f(۰) = ۰$$

نقطهٔ (۱ , ۱) ماکزیمم نسبی این تابع باشد.

۹ یک برگه کاغذی مستطیل شکل با اضلاع x و y در اختیار داریم. با بریدن چهار مربع به ضلع h از گوشه‌های آن و تا زدن اضلاع، یک مکعب ساخته شده است. اگر $xy = ۱۰۰\text{cm}^۲$ و $h = ۲\text{cm}$، مقادیر x و y را طوری پیدا کنید که حجم این مکعب بیشترین مقدار ممکن شود.

۱۰ یک مستطیل در یک نیم‌دایره محاط شده است. اگر شعاع دایره، ۴ سانتی‌متر باشد، طول و عرض مستطیل را طوری به دست آورید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن باشد.

۱۱ توابع زیر در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی‌اند؟

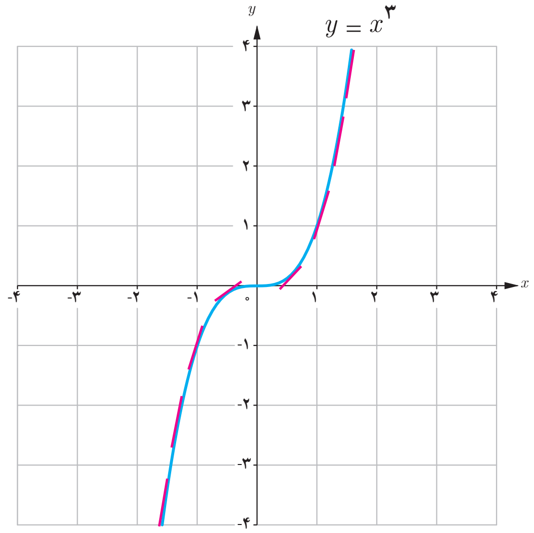
الف) $f(x) = ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۱۲x + ۷$

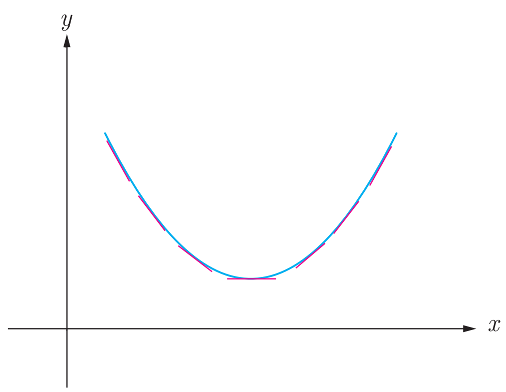
ب) $f(x) = \dfrac{x}{x-۲}$

درس ۲

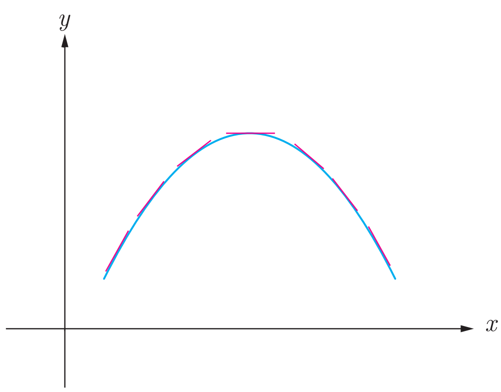
جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطهٔ عطف آن

با تابع $f(x) = x^۳$ آشنایی دارید. از آنجا که مشتق این تابع $f'(x) = ۳x^۲$ در $x = ۰$ برابر صفر و در سایر نقاط همواره مثبت است، لذا شیب خطوط مماس بر منحنی این تابع در $x = ۰$ برابر صفر و در تمام نقاط دیگر مثبت است و این تابع همواره صعودی است. با این حال اگر خطوط مماس بر این منحنی را به‌صورت پاره‌خط‌هایی کوچک در اطراف نقاط مماس رسم کنید خواهید دید که این پاره‌خط‌ها برای xهای منفی در بالای نمودار و برای xهای مثبت در زیر نمودار واقع‌اند. اصطلاحاً گفته می‌شود که جهت تقعر این تابع در بازهٔ $(-\infty\ ,\ ۰)$ به سمت پایین و در بازهٔ $(۰\ ,\ +\infty)$ به سمت بالا است. برای درک بهتر مفهوم تقعر منحنی یک تابع به دو شکل زیر توجه کنید.





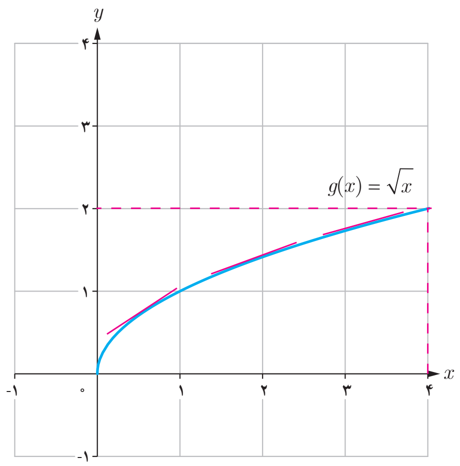
مماس‌ها در زیر منحنی‌اند.
تقعر به سمت بالا است.



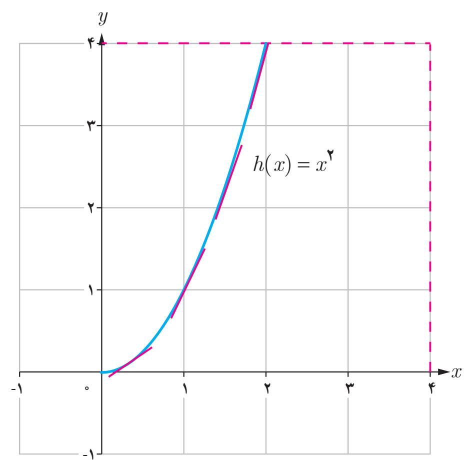
مماس‌ها در بالای منحنی‌اند.
تقعر به سمت پایین است.

فعالیت

در زیر بخشی از نمودارهای دو تابع $h(x)=x^2$ و $g(x)=\sqrt{x}$ در بازهٔ $[0\ ,+\infty)$ و خطوط مماس بر منحنی‌های آنها در برخی نقاط این بازه رسم شده است.



(ب)



(الف)

۱ با حرکت از نقطهٔ $x=0$ به سمت راست، شیب خطوط مماس در هر کدام از منحنی‌ها چگونه تغییر می‌کند؟ (کم می‌شود یا زیاد) جهت تقعر منحنی در هر کدام از نمودارها چگونه است؟

۲ جهت تقعر منحنی چه ارتباطی با تغییرات شیب (کم شدن یا زیاد شدن) خطوط مماس دارد؟

۳ تابع h' در بازهٔ $[0\ ,+\infty)$ صعودی است یا نزولی؟

۴ تابع g' در بازهٔ $[0\ ,+\infty)$ صعودی است یا نزولی؟

۵ الف) در حالت کلی، صعودی یا نزولی بودن تابع f چه ارتباطی با علامت تابع f' دارد؟

علامت f' بر بازهٔ I مثبت است، آنگاه تابع f بر بازهٔ I .... است.

علامت f' بر بازهٔ I منفی است، آنگاه تابع f بر بازهٔ I .... است.

ب) با توجه به قسمت (الف)، صعودی یا نزولی بودن تابع f' چه ارتباطی با علامت تابع f'' دارد؟

علامت f'' بر بازهٔ I مثبت است آنگاه تابع f' بر بازهٔ I .... است.

علامت f'' بر بازهٔ I منفی است آنگاه تابع f' بر بازهٔ I .... است.

۶ با توجه به آنچه گفته شد موارد زیر را کامل کنید :

الف) اگر مقدار f'' در یک بازه مثبت باشد، تابع f' در آن بازه .... است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه .... می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به .... است.

ب) اگر مقدار f'' در یک بازه منفی باشد، تابع f' در آن بازه .... است و لذا شیب خطوط مماس بر منحنی در آن بازه .... می‌یابد و تقعر منحنی تابع f در آن بازه رو به .... است.

آنچه در فعالیت قبل مورد بررسی قرار گرفت به‌طور خلاصه در قضیهٔ زیر، که آزمونی برای تعیین جهت تقعر نمودار تابع است، آورده شده و در این کتاب اثباتِ آن مدنظر نیست.

قضیه :

فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر نقطه x از بازه باز I موجود باشد.

الف) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) > ۰$، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به بالا دارد.

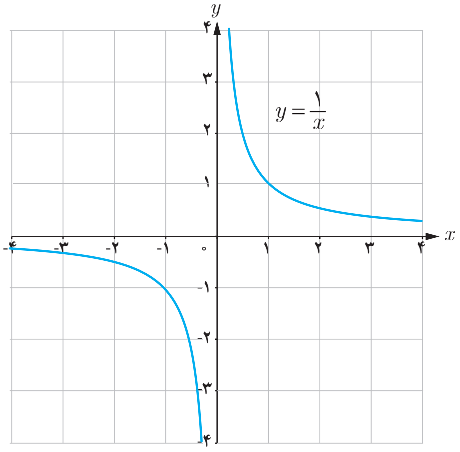
ب) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) < ۰$، آنگاه نمودار f روی بازه I تقعر رو به پایین دارد.

پ) اگر به ازای هر x از I، $f''(x) = ۰$، آزمون بی‌نتیجه است.

مثال : جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ تعریفشان به دست آورید.

الف) $f(x) = \frac{۱}{x}$

ب) $g(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۱$



حل : الف) داریم $D_f = \mathbb{R} - \{۰\}$

$$f(x) = \frac{۱}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{-۱}{x^{۲}} \Rightarrow f''(x) = \frac{۲}{x^{۳}}$$

بنابراین :

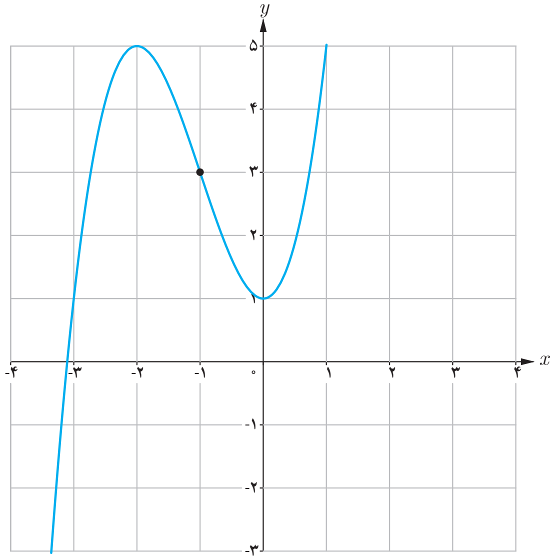
اگر $x > ۰$، آنگاه $f''(x) > ۰$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(۰ , +\infty)$ رو به بالاست.

اگر $x < ۰$، آنگاه $f''(x) < ۰$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(-\infty , ۰)$ رو به پایین است.

ب) داریم $D_g = \mathbb{R}$

$$g(x) = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۱ \Rightarrow g'(x) = ۳x^{۲} + ۶x \Rightarrow g''(x) = ۶x + ۶$$

$$g''(x) = ۰ \Rightarrow ۶x + ۶ = ۰ \Rightarrow x = -۱$$



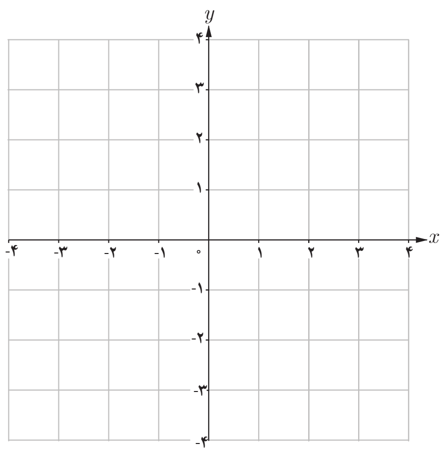
بنابراین :

اگر $x > -۱$ آنگاه $g''(x) > ۰$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(-۱ , +\infty)$ به سمت بالاست.

اگر $x < -۱$ آنگاه $g''(x) < ۰$ و لذا جهت تقعر نمودار این تابع بر بازهٔ $(-\infty , -۱)$ به سمت پایین است.

کار در کلاس

نمودار تابع $y = f(x)$ را با اطلاعات زیر رسم کنید :

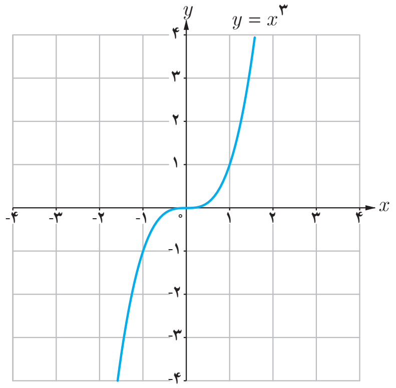


$f(۰) = f(۱) = f(۲) = ۰$

و بر بازه $(-\infty , ۱)$ ، $f''(x) < ۰$

و بر بازه $(۱ , \infty)$ ، $f''(x) > ۰$.

نقطهٔ عطف نمودار یک تابع



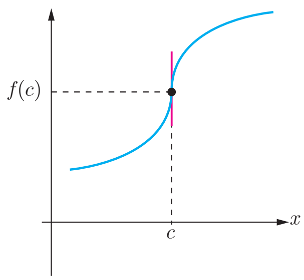
نمودار تابع $f(x) = x^۳$ را در نظر بگیرید. دیدیم که جهت تقعر نمودار این تابع در بازهٔ $(-\infty , ۰)$ رو به پایین و در بازهٔ $(۰ , +\infty)$ رو به بالاست. بنابراین نقطهٔ $x = ۰$ نقطه‌ای است که جهت تقعر منحنی در آن عوض می‌شود. از طرفی در $x = ۰$ منحنی دارای مماس نیز هست. چنین نقطه‌ای از یک منحنی را نقطهٔ عطف آن منحنی گوییم. به عبارت دیگر :

تعریف

فرض کنیم تابع f در نقطه $x = c$ پیوسته است. در این صورت نقطه $(c , f(c))$ نقطه عطف تابع f است، هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشند :

الف) نمودار f در نقطه $(c , f(c))$ خط مماس داشته باشد.

ب) جهت تقعر f در نقطه $(c , f(c))$ تغییر کند.



خط $x = c$ مماس قائم است.

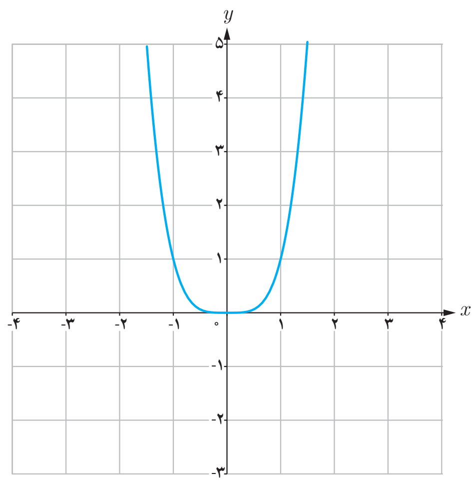
از شرط (الف) در تعریفِ نقطهٔ عطفِ تابع f نتیجه می‌شود که یا $f'(c)$ موجود است و یا تابع f در نقطهٔ c مماس قائم دارد.

از شرط (ب) می‌توان نتیجه گرفت که خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ $(c , f(c))$ از نمودار تابع عبور می‌کند.

از آنجا که تقعر تابع در دو طرف نقطهٔ عطف تغییر می‌کند؛ لذا f'' در یک طرف نقطهٔ c مثبت و در طرف دیگر آن منفی است. بنابراین $f''(c)$ نمی‌تواند مقداری به جز صفر داشته باشد؛ یعنی برای اینکه $(c , f(c))$ یک نقطهٔ عطف منحنی باشد، یا باید $f''(c)$ وجود نداشته باشد و یا اگر وجود دارد باید داشته باشیم $f''(c) = ۰$. با این حال شرط $f''(c) = ۰$ برای نقطهٔ عطف بودن $x = c$

به تنهایی کافی نیست؛ یعنی ممکن است $f''(c)=\circ$ ولی $x=c$ یک نقطهٔ عطف تابع نباشد. به‌طور مثال تابع $f(x)=x^{۴}$ را بررسی می‌کنیم. داریم:

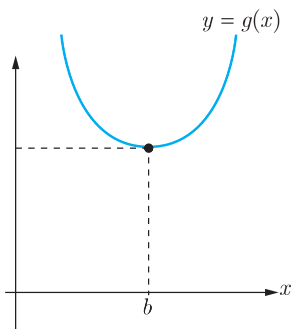
$$f'(x)=۴x^{۳} \qquad , \qquad f''(x)=۱۲x^{۲}$$



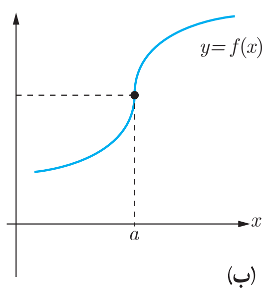
با اینکه $f''(\circ)=\circ$ اما تابع f'' در دو طرف $x=\circ$ مثبت است و لذا تقعر همواره به سمت بالاست و جهت تقعر در $x=\circ$ عوض نمی‌شود و لذا $x=\circ$ یک نقطهٔ عطف این تابع نیست.

کار در کلاس

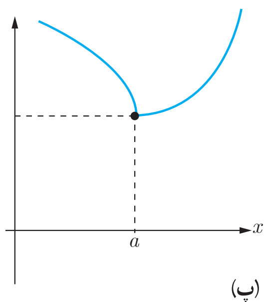
۱ در هر یک از نمودارهای زیر، نقاط عطف را در صورت وجود مشخص و خط مماس بر منحنی در نقاط عطف را رسم کنید.



(الف)



(ب)



(پ)

۲ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟ برای گزاره‌های نادرست مثال نقض بیاورید.

الف) در نقطه عطف علامت $f''(x)$ تغییر می‌کند.

ب) هر نقطه که علامت f'' در آن تغییر کند، نقطهٔ عطف است.

پ) هر نقطه‌ای که در آن مقدار f'' برابر صفر شود یک نقطه عطف است.

ت) تابع می‌تواند بیش از یک نقطه عطف داشته باشد.

ث) تابع صعودی اکید، نقطه عطف ندارد.

مثال : جهت تقعر نمودار تابع زیر را مشخص کنید و نقاط عطف آنها را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = x^{۳} - ۶x^{۲} + ۱۵$

ب) $f(x) = \sqrt[۳]{x}$

حل :

الف)

$f'(x) = ۳x^{۲} - ۱۲x$ و $f''(x) = ۶x - ۱۲$

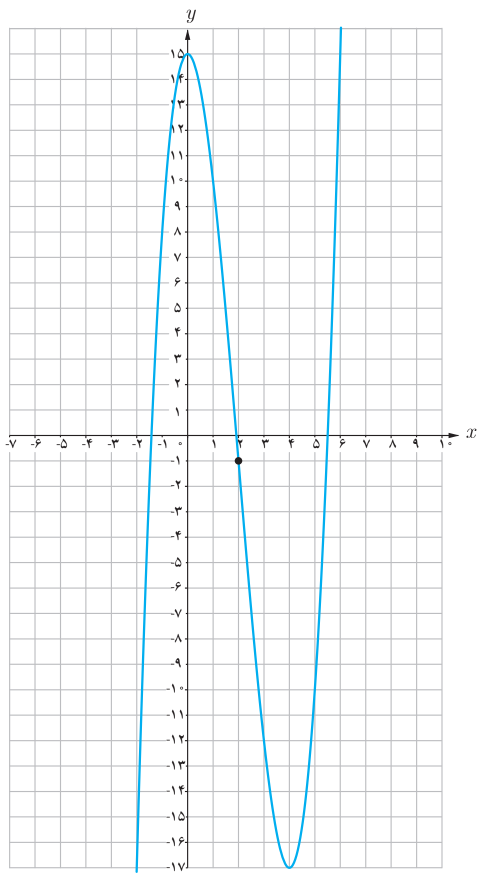
$f''(x) = ۰ \Rightarrow x = ۲$

از آنجا که $f''(x)$ یک تابع خطی است، و در تمام $\mathbb{R}$ تعریف شده است و تنها در $x = ۲$ برابر صفر می‌شود، بنابراین تنها نقطه‌ای که می‌تواند نقطهٔ عطف باشد $x = ۲$ است به شرط آنکه :

۱ $f'(۲)$ موجود باشد

۲ f'' در دو طرف $x = ۲$ تغییر علامت دهد.

اما $f'(x)$ یک تابع چند جمله‌ای است و دامنهٔ آن $\mathbb{R}$ است و $f'(۲)$ نیز موجود و برابر ۱۲− است. از طرفی داریم :



x	$-\infty$	۲	$+\infty$
f''	$-$	۰	$+$
f		۱− نقطهٔ عطف	

ب) $f(x)=\sqrt[3]{x} \to f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \to f''(x)=\dfrac{-2}{9\sqrt[3]{x^5}}$

از آنجا که مقدار $\sqrt[3]{x^5}$ به ازای xهای مثبت، مثبت و به ازای xهای منفی، منفی است.

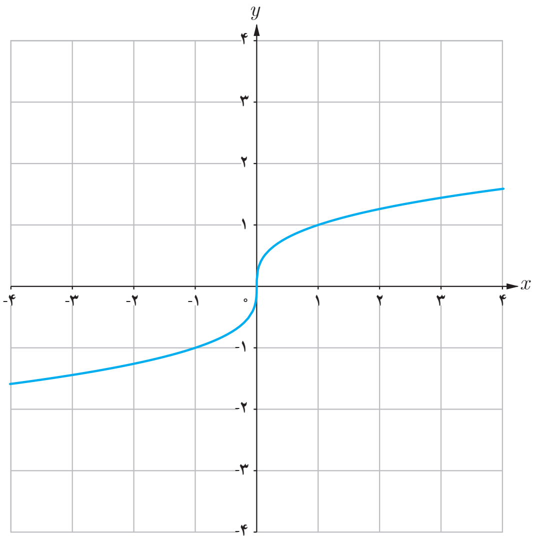
داریم :

اگر $x>0$، آنگاه $f''(x)<0$ و بنابراین جهت تقعر منحنی به سمت پایین است.

اگر $x<0$، آنگاه $f''(x)>0$ و بنابراین جهت تقعر منحنی به سمت بالاست.

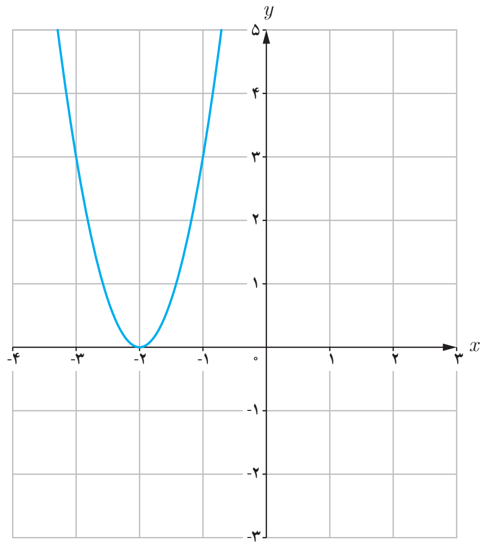
لذا جهت تقعر این تابع در $x=0$ عوض می‌شود. از طرفی در فصل مشتق دیدیم که این تابع در نقطهٔ $x=0$ دارای مماس (مماس قائم) است.

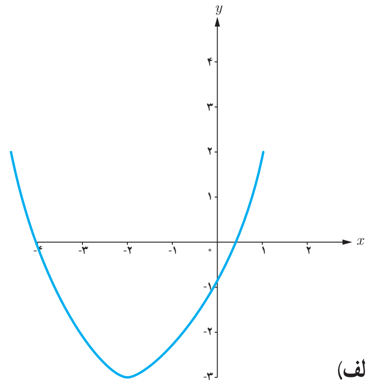
بنابراین $x=0$ نقطهٔ عطف این تابع است.



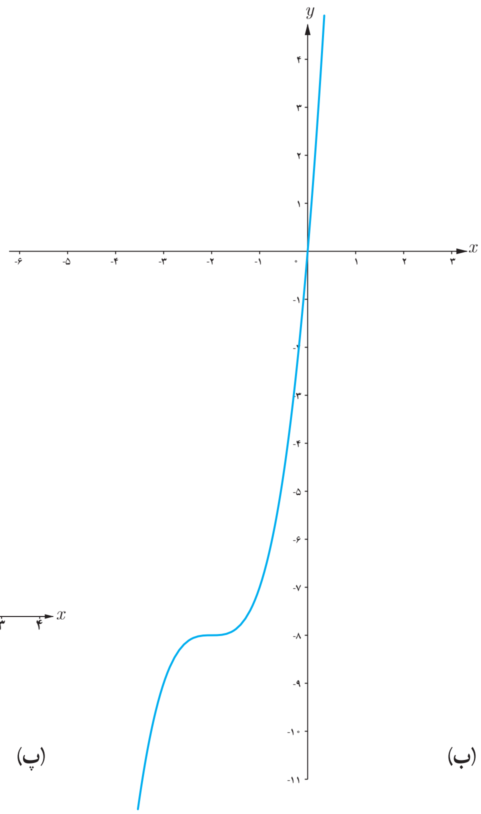
کاردرکلاس

۱ اگر شکل کشیده شده در صفحهٔ شطرنجی مربوط به نمودار تابع f' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟

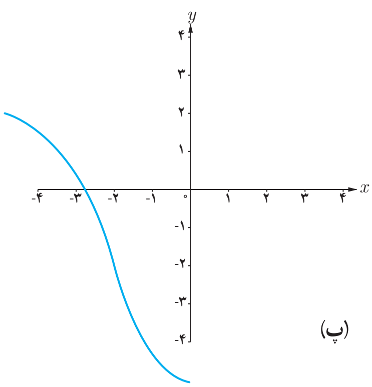




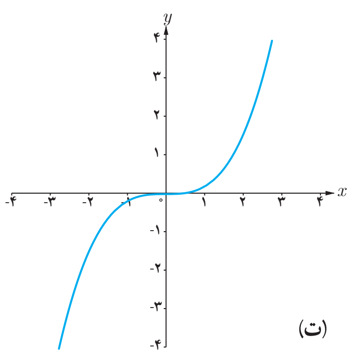
(الف)



(ب)

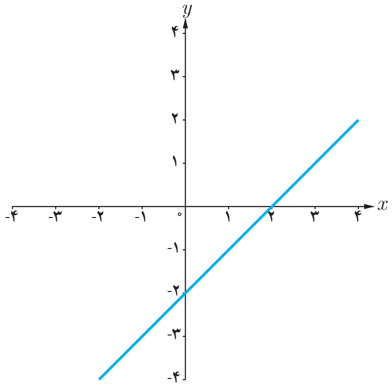


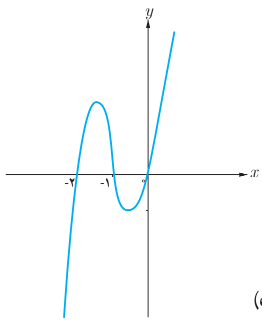
(پ)



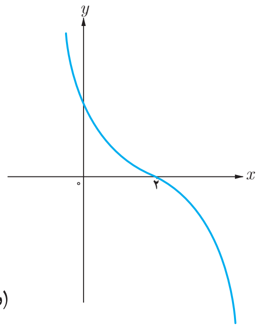
(ت)

۲ اگر شکل زیر مربوط به نمودار تابع f'' باشد کدام نمودار می‌تواند نمودار تابع f باشد؟

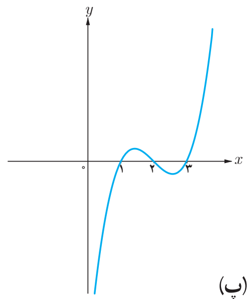




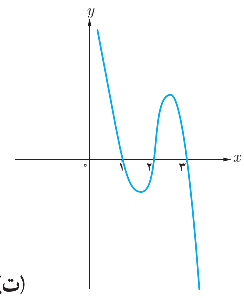
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

تمرین

۱ نمودار تابع f را به‌گونه‌ای رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a جهت تقعر عوض شود ولی این نقطه، نقطهٔ عطف نباشد.

۲ جهت تقعر توابع زیر را در دامنهٔ آنها بررسی کرده و نقطهٔ عطف آنها را در صورت وجود به دست آورید.

الف) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+4$ ب) $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ پ) $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$

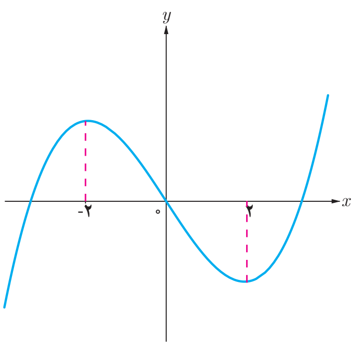
۳ برای هر مورد یک تابع درجهٔ ۳ مثال بزنید که نقطهٔ داده شده نقطهٔ عطف آن باشد.

الف) نقطهٔ $(0\,,0)$ ب) نقطهٔ $(0\,,1)$ پ) نقطهٔ $(1\,,0)$ ت) نقطهٔ $(2\,,2)$

۴ مقادیر a، b و c را در تابع $f(x)=ax^3+bx^2+c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند.

$f(0)=1$ و $f(1)=2$ و $x=\frac{1}{2}$ طول نقطهٔ عطف نمودار تابع f باشد.

۵ اگر $(0\,,0)$ نقطهٔ عطف تابع درجه سومی با ضابطهٔ $y=x^3+ax^2+bx+c$ باشد که نمودار آن در شکل زیر رسم شده است، a، b و c را پیدا کنید.



درس ۳

رسم نمودار توابع

می‌دانیم که هر تابع مانند f به ازای هر $x \in D_f$ دقیقاً یک مقدار y به‌دست می‌دهد به‌طوری‌که $y=f(x)$ و زوج مرتب (x,y) یک نقطه در دستگاه مختصات مشخص می‌کند. نمودار یک تابع، شکلی است که از همهٔ این نقاط (x,y) به ازای تمام $x \in D_f$ها تشکیل شده است. از آنجا که هر بازهٔ زیرمجموعهٔ $\mathbb{R}$ تعداد بی‌شماری عضو دارد؛ لذا هیچ‌گاه نمی‌توان با قلم و کاغذ نمودار یک تابع را به‌طور کاملاً دقیق رسم کرد. در سال‌های گذشته با رسم نمودار توابع خطی و درجهٔ ۲ به کمک نقطه‌یابی آشنا شده‌اید. در این درس با به‌کارگیری مطالبی که قبلاً گفته شد نقاط مهمی از نمودار تابع را به‌دست آورده و به برخی ویژگی‌های آن تابع پی می‌بریم و با استفاده از آنها شکل تقریبی تابع را رسم می‌کنیم.

مثال : اگر بدانید تابع $y=f(x)$ به گونه‌ای است که برای آن داریم :

۱ ریشه‌های تابع f به‌صورت $x=1$ و $x=0$ و $x=-2$ است و f در همهٔ نقاط مشتق‌پذیر باشد.

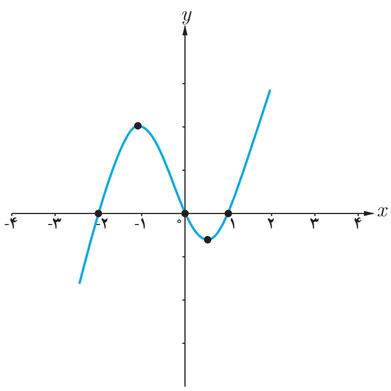
۲ ریشه‌های تابع f' به‌صورت $x=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{6}{5}$ است و علامت f' بین دو ریشه منفی و سایر جاها مثبت است و $f(\frac{1}{2})=-0/6$ و $f(\frac{-6}{5})=2$.

۳ تابع f'' تنها یک ریشه در $x=-\frac{1}{3}$ دارد و علامت f'' در سمت چپ $-\frac{1}{3}$ منفی و در سمت راست آن مثبت است و $f(-\frac{1}{3})=0/7$.

در این صورت نمودار تابع f را رسم کنید.

حل : از (۲) نتیجه می‌شود که تابع f بین نقاط $x=\frac{1}{2}$ و $x=-\frac{6}{5}$ نزولی و سایر جاها صعودی است و $x=-\frac{6}{5}$ و $x=\frac{1}{2}$ به ترتیب طول نقاط ماکزیمم نسبی و مینیمم نسبی تابع‌اند و از (۳) نتیجه می‌شود که تقعر تابع f قبل از $x=-\frac{1}{3}$ رو به پایین و در سمت راست $x=-\frac{1}{3}$ رو به بالاست و چون f' در $x=-\frac{1}{3}$ وجود دارد لذا مماس در این نقطه وجود دارد، بنابراین $x=-\frac{1}{3}$ نقطهٔ عطف این تابع است. قبل از رسم شکل می‌توان همهٔ اطلاعات فوق را در یک جدول خلاصه کرد.

x	$-\infty$		$-\frac{۶}{۵}$		$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۲}$		$+\infty$
f'		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
f''		$\frown -$		$\frown -$	۰	$\smile +$		$\smile +$	
f		$\nearrow$	۲	$\searrow$	$۰/۷$	$\searrow$	$-۰/۶$	$\nearrow$	
			ماکزیمم		نقطه عطف		مینیمم		



با توجه به این اطلاعات و اینکه ریشه‌های تابع محل برخورد نمودار با محور xها هستند نمودار تابع به‌صورت روبه‌رو است.

همان‌طور که در این مثال مشاهده کردیم ریشه‌ها و علامت توابع f' و f'' کمک زیادی به رسم نمودار تابع می‌نماید. همچنین حد تابع در بی‌نهایت گویای رفتار و چگونگی تابع در نقاط انتهایی نموداری که رسم می‌کنیم است. به‌طور کلی برای رسم نمودار یک تابع، همه یا برخی از مراحل زیر را انجام می‌دهیم و با توجه به اطلاعات به‌دست آمده جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم و به کمک آن نمودار تابع را رسم می‌کنیم.

۱ دامنهٔ تابع را مشخص می‌کنیم.

۲ محل تلاقی نمودار با محورهای مختصات را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۳ f' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن بازه‌هایی که f بر آنها صعودی یا نزولی است را مشخص می‌کنیم.

۴ نقاط بحرانی و اکسترمم‌های نسبی تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).

۵ f'' را به‌دست می‌آوریم و با تعیین علامت آن جهت تقعر تابع در بازه‌های مختلف را مشخص می‌کنیم.

۶ نقطهٔ عطف تابع را مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۷ رفتار تابع را برای مقادیر بسیار بزرگ x و بسیار کوچک x مشخص می‌کنیم (در صورت وجود).

۸ معادلهٔ مجانب‌های تابع را به‌دست می‌آوریم (در صورت وجود).

۹ تنظیم یک جدول که با خلاصه کردن اطلاعات توابع f و f' و f'' در آن تشخیص چگونگی شکل نمودار آسان‌تر شود.

۱۰ رسم نمودار تابع با استفاده از اطلاعات قسمت‌های قبل.

۱۱ در صورت نیاز از نقاط کمکی هم استفاده می‌کنیم.

مثال : نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ را رسم کنید.

حل : دامنهٔ این تابع تمام اعداد حقیقی است و این تابع در تمام دامنه‌اش پیوسته و مشتق‌پذیر است. حال با به‌دست آوردن f' و f'' و ریشه‌های آنها و تعیین علامت آنها جدول رفتار تابع را تشکیل می‌دهیم.

$f(x)=x^{۳}=\circ \to x=\circ \to$ محل برخورد نمودار با محورهای مختصات $(\circ\,,\circ)$

$f'(x)=۳x^{۲}=\circ \to x=\circ$

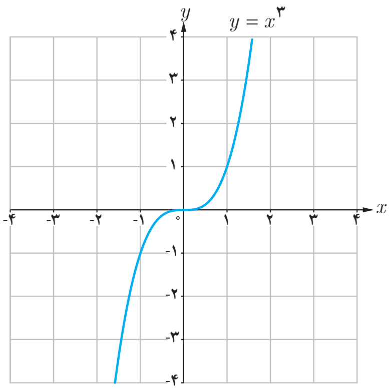
$f''(x)=۶x=\circ \to x=\circ$

x	$-\infty$	$\circ$	$+\infty$
f'	$+$		$+$
f''	$-$		$+$
f	$\nearrow$	$\circ$	$\nearrow$

نقطهٔ عطف

این تابع همواره صعودی است و اکسترمم نسبی ندارد. از طرفی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ لذا دو شاخهٔ انتهایی نمودار در ربع‌های اوّل و سوم قرار دارند.

می‌توان برای دقیق‌تر شدن شکل، نقاط بیشتری از منحنی را به‌دست آورد؛ مثلاً در اینجا نقاط $(۱\,,۱)$ و $(-۱\,,-۱)$ نیز بر نمودار تابع واقع‌اند. با توجه به آنچه گفته شد می‌توان نمودار تابع $y=x^{۳}$ را به‌صورت مقابل رسم کرد.



مثال : جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=(x-۱)^{۲}(x+۳)$ را رسم کنید.

حل :

دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ است و این تابع همواره پیوسته و مشتق‌پذیر است.

$f(x)=\circ \Rightarrow x=۱$ یا $x=-۳$

بنابراین نقاط $(۱\,,\circ)$ و $(-۳\,,\circ)$ محل‌های برخورد با محور xها است

$x=\circ \Rightarrow y=۳$

بنابراین نقطهٔ $(\circ\,,۳)$ محل برخورد با محور yهاست

$f'(x)=۲(x-۱)(x+۳)+(x-۱)^{۲}=(x-۱)(۳x+۵)$

$f'(x)=\circ \Rightarrow x=۱$ یا $x=-\dfrac{۵}{۳}$

لذا نقاط $(۱\,,\,۰)$ و $(-\frac{۵}{۳}\,,\,\frac{۲۵۶}{۲۷})$ نقاط بحرانی‌اند

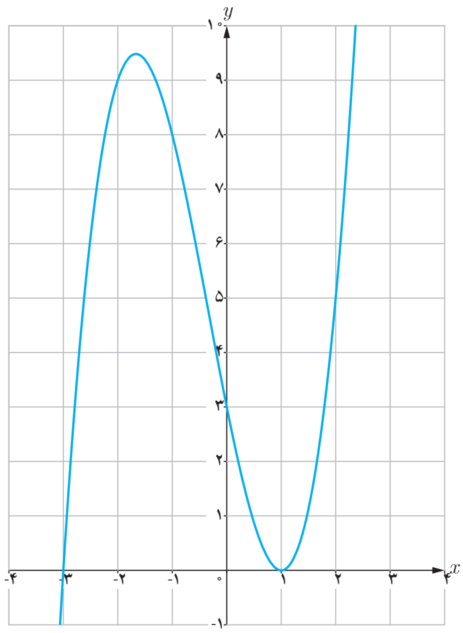
$$f''(x)=(۳x+۵)+۳(x-۱)=۶x+۲$$

$$f''(x)=۰ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳}$$

از آنجا که مماس بر منحنی در نقطهٔ $x=-\frac{۱}{۳}$ وجود دارد و f'' در دو طرف نقطهٔ $x=-\frac{۱}{۳}$ تغییر علامت می‌دهد، نقطهٔ $\left(-\frac{۱}{۳}\,,\,\frac{۱۲۸}{۲۷}\right)$ نقطهٔ عطف تابع است، از طرفی $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$.

x	$-\infty$		$-\frac{۵}{۳}$		$-\frac{۱}{۳}$		۱		$+\infty$
f'		+	۰	−		−	۰	+	
f''		$\frown$ −		$\frown$ −	۰	$\smile$ +		$\smile$ +	
f	$-\infty$	↗	$\frac{۲۵۶}{۲۷}$	↘	$\frac{۱۲۸}{۲۷}$	↘	۰	↗	$+\infty$
			ماکزیمم		عطف		مینیمم		

حال با توجه به آنچه گفته شد نمودار تابع فوق به شکل زیر است.



تابع $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ را که در آن $c\neq ۰$ است تابع هموگرافیک می‌نامیم.

اگر $c=۰$ و $d\neq ۰$ باشد معادلهٔ این تابع به‌صورت $y=\dfrac{a}{d}x+\dfrac{b}{d}$ تبدیل می‌شود که معادلهٔ یک خط راست است و اگر $c\neq ۰$ و $d\neq ۰$ و $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ باشد این تابع به یک تابع ثابت تبدیل می‌شود.

در رسم نمودار تابع هموگرافیک توجه داریم که :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}$$

بنابراین $y=\dfrac{a}{c}$ مجانب افقی این تابع است.

$$\lim_{x\to-\frac{d}{c}}\frac{ax+b}{cx+d}=+\infty \text{ یا } -\infty$$

بنابراین $x=-\dfrac{d}{c}$ مجانب قائم این تابع است

مثال : جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+۲}{x-۱}$ را رسم کنید.

حل : دامنهٔ این تابع $D_f=\mathbb{R}-\{۱\}$ است. داریم $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=۱$ ، لذا خط $y=۱$ مجانب افقی است و از طرفی $\lim\limits_{x\to۱^+}f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to۱^-}f(x)=-\infty$ ، لذا $x=۱$ مجانب قائم نمودار این تابع است.

همچنین نمودار تابع محورهای مختصات را در نقاط $(۰\,,-۲)$ و $(-۲\,,۰)$ قطع می‌کند. اکنون با گرفتن مشتق از تابع خواهیم داشت :

$$f'(x)=\frac{-۳}{(x-۱)^۲}\quad ,\ x\neq ۱$$

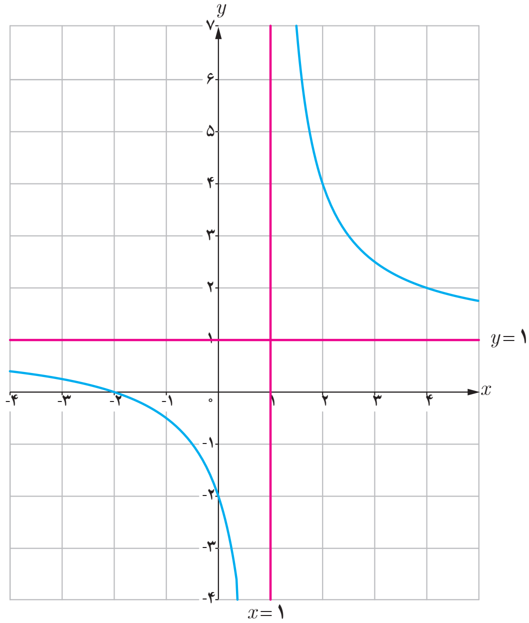
و بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty\,,۱)$ و $(۱\,,+\infty)$ همواره منفی است و لذا تابع f در هر کدام از این بازه‌ها نزولی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت.

$$f''(x)=\frac{۶(x-۱)}{(x-۱)^۴}=\frac{۶}{(x-۱)^۳}\quad ,\ x\neq ۱$$

بنابراین برای هر x در بازهٔ $(-\infty\ ,\ ۱)$ داریم $f''(x) < ۰$، لذا تقعر منحنی به سمت پایین و برای هر x در بازهٔ $(۱\ ,\ +\infty)$ داریم $f''(x) > ۰$ و لذا تقعر منحنی به سمت بالاست. جدول رفتار تابع به‌صورت زیر است :

x	$-\infty$	-۲	۰	۱	$+\infty$
y'	$-$	$-$	$-$	$-$	
y''	$-$	$-$	$-$	$+$	
y	↘ ۰	↘ -۲	↘ $-\infty$	$+\infty$ ↘	

با توجه به اطلاعات این جدول می‌توان نمودار این تابع را به‌صورت روبه‌رو رسم کرد.



✤ **مثال :** جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{۳x+۴}{-۲x+۱}$ را رسم کنید.

✤ **حل :** دامنهٔ این تابع $D=\mathbb{R}-\left\{\dfrac{۱}{۲}\right\}$ است. داریم $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=-\dfrac{۳}{۲}$ ، لذا $y=-\dfrac{۳}{۲}$ مجانب افقی این تابع است و از طرفی $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}^+} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to\frac{۱}{۲}^-} f(x)=+\infty$ ، لذا $x=\dfrac{۱}{۲}$ مجانب قائم این تابع است. همچنین نمودار در نقاط $(۰\ ,\ ۴)$ و $(-\dfrac{۴}{۳}\ ,\ ۰)$ محورهای مختصات را قطع می‌کند.

$$x \neq \frac{۱}{۲} \qquad \text{و} \qquad f'(x)=\frac{۱۱}{(-۲x+۱)^۲}$$

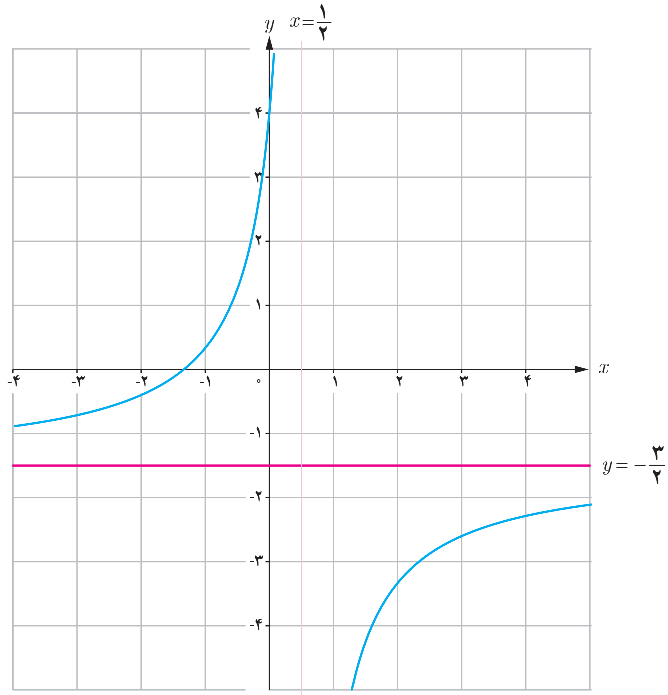
بنابراین مشتق به ازای هر x در بازه‌های $(-\infty\,,\frac{۱}{۲})$ و $(\frac{۱}{۲}\,,+\infty)$ همواره مثبت و در نتیجه تابع f در هر کدام از این بازه‌ها صعودی است. حال با گرفتن مشتق دوم خواهیم داشت :

$$f''(x)=\frac{۴۴}{(-۲x+۱)^{۳}} \quad \text{و} \quad x\neq\frac{۱}{۲}$$

بنابراین برای هر x در بازهٔ $(-\infty\,,\frac{۱}{۲})$ داریم $f''>۰$، لذا تقعر منحنی به سمت بالاست و برای هر x در بازهٔ $(\frac{۱}{۲}\,,+\infty)$ داریم $f''<۰$، لذا تقعر منحنی به سمت پایین است. جدول رفتار تابع به‌صورت زیر است :

x	$-\infty$	$-\frac{۴}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$+\infty$
y'	+	+	+	+	
y''	+	+	+	−	
y	$-\frac{۳}{۲}$ ↗	۰ ↗	۴ ↗	$-\infty$ $+\infty$ ↗	$-\frac{۳}{۲}$

با توجه به اطلاعات این جدول و به کمک چند نقطهٔ کمکی می‌توان نمودار این تابع را به‌صورت زیر رسم کرد.



تمرین

۱ جدول رفتار و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

ب) $f(x) = x^3 - 5x + 5$

پ) $f(x) = -x(x+2)^2$

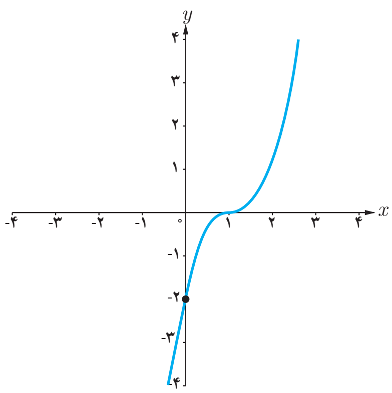
ت) $f(x) = \dfrac{2x-1}{x-2}$

ث) $f(x) = \dfrac{-x}{x+3}$

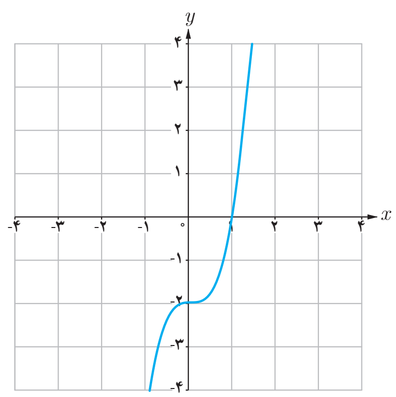
ج) $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1$

۲ فرض کنید $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. محل تقاطع مجانب‌های آن نقطهٔ $(1 , 2)$ است. اگر این تابع از نقطهٔ $(0 , -1)$ بگذرد، ضابطهٔ تابع را به دست آورید.

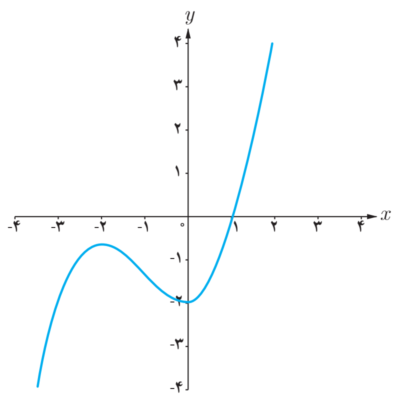
۳ کدام‌یک از نمودارهای زیر مربوط به تابع $f(x) = x^3 + x - 2$ است.



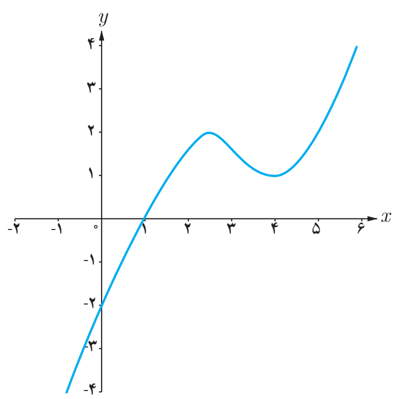
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

منابع

۱ استوارت، جیمز. (۲۰۱۲) **حساب دیفرانسیل و انتگرال**. ترجمهٔ حمیدی، ارشک. جلد اول. تهران : انتشارات فاطمی (۱۳۹۵).

۲ اسدی، محمدباقر. رنجبری، علی. ریحانی، ابراهیم. طاهری تنجانی، محمدتقی. قربانی آرانی، مجتبی. مین‌باشیان، هادی. (۱۳۹۶). **حسابان (۱) ـ پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه**، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران.

۳ اصلاح‌پذیر، بهمن. بروجردیان، ناصر. ریحانی، ابراهیم. طاهری تنجانی، محمدتقی و عالمیان، وحید. (۱۳۹۵). **حسابان سال سوم متوسطه**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران.

۴ امیری، حمیدرضا. بیژن‌زاده، محمدحسن. بهرامی سامانی، احسان. حیدری قزلجه، رضا. داورزنی، محمود. ریحانی، ابراهیم. سیدصالحی، محمدرضا. قربانی آرانی، مجتبی. (۱۳۹۵). **ریاضی (۱) ـ پایهٔ دهم دورهٔ دوم متوسطه**، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران.

۵ ایرانمنش، علی. جمالی، محسن. ربیعی، حمیدرضا. ریحانی، ابراهیم. شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید. (۱۳۹۲) **ریاضیات۲ سال دوم آموزش متوسطه**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران.

۶ بیژن‌زاده محمدحسن. پاشا، عین‌الله. یوحنایی، که‌کو. (۱۳۹۰). **ریاضی عمومی. دوره پیش‌دانشگاهی، رشته تجربی**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران.

۷ بیژن‌زاده محمدحسن. عالمیان، وحید و فرشادی، غلامعلی. (۱۳۹۶) **حساب دیفرانسیل و انتگرال، دورهٔ پیش‌دانشگاهی ـــ رشتهٔ علوم ریاضی**، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران.

۸ تلگینی، محمود. خردپژوه، فروزان. رجالی، (۱۳۷۸). **حساب دیفرانسیل و انتگرال ۱ و ۲**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران.

۹ حیدری قزلجه، رضا. خداکریم، سهیلا. ریحانی، ابراهیم. سیدصالحی، محمدرضا. عراقی، محمدعلی. قصاب، علی و کمیجانی، آناهیتا. (۱۳۹۶). **ریاضی (۲) ـ پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه**، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۰ رستمی، محمدهاشم. عطوفی، عبدالحمید. گودرزی، محمد. امیری، حمیدرضا. (۱۳۹۵). **ریاضیات۳. سال سوم علوم تجربی**. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی. وزارت آموزش و پرورش. تهران : شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران.

۱۱ ریحانی، ابراهیم. رحیمی، زهرا. کلاهدوز، فهیمه. نوروزی، سپیده. یافتیان، نرگس. شریف‌پور، شقایق. عابدی، ربابه. کتابدار، زهره. سیدصالحی، محمدرضا، امیری، محمدرضا. ایزدی، مهدی. زمانی، ایرج. بهرامی سامانی، احسان. پرنگ، حسن. مین‌باشیان،هادی و نیرو، محمد. (۱۳۹۵). **تحلیل خط‌مشی‌ها، اسناد مصوب،پژوهش‌ها و منابع معتبر با حوزهٔ یادگیری ریاضی**، واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی.

۱۲ Berchie Holliday (۲۰۰۸). **California Algebra ۲. Concepts, Skills, and Problem Solving**. Glencoe/McGraw–Hill.

۱۳ Bittinger, M. L., Ellenbogen, D., & Surgent, S. A. (۲۰۰۰). **Calculus and its application**. Reading, MA, Harlow: Addison–Wesley.

۱۴ Briggs. W. L., Cochran, L., & Gillett, B. (۲۰۱۴) **Calculus for scientists and engineers: Early transcendentals**. Pearson Education.

۱۵ Cohen D., Lee T. & Sklar D. (۲۰۱۰). **Precalculus: A Problems–Oriented Approach**. Sixth Edition. Brooks/Cole.

۱۶ Hughes–Hallett. D., Gleason. A. M., Flath. D., Lock, P. F., Gordon, S. P., Lemen, D. O., ... & Pacquale, A. (۱۹۹۸). **Calculus: Single Variable**. Wiley.

۱۷ Larson. Ron. & Hodgkins. Amme V. (۲۰۱۳). **college algebra and caculus an applied approach**. The Pennsylvania State University, The Behrend College, second edition.

۱۸ Lial, M. L., Greenwell. R. N., & Ritchey, N. P. (۲۰۰۸). **caculus with applications**. Pearson/Addison Wesley.

۱۹ Lial, M. L., Greenwell. R., & Ritchey, N. P. (۲۰۱۷). **caculus with applications**. Person Education.

۲۰ Rogawski, J., & Adams, C. (۲۰۱۵). **Culculus: Early Transcendenetals**. Palgrave Macmillan.

۲۱ Sullivan, M. (۲۰۰۸). **Algebra and Trigonometry**. Eighth edition, Pearson Prentice Hall.

۲۲ Sullivan, M. (۲۰۱۵). **Precalculus: Concepts Through Function A Unit Circle Approach To Trigonometry**. Third eddition, Pearson Education.

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت‌کننده در اعتبارسنجی کتاب حسابان(۲) ــ کد ۱۱۲۲۱۴

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان دربارهٔ کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانهٔ راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائهٔ نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	سهیلا ستاری	آذربایجان شرقی	۲۸	موسی آور	فارس
۲	مریم عبدالملکی	کردستان	۲۹	مهدی باهنر	خراسان جنوبی
۳	عباس امیدوار	شهر تهران	۳۰	مهران خوشبختیان	مرکزی
۴	فاطمه رحیمی	شهرستانهای تهران	۳۱	علیرضا رافعی بروجنی	چهارمحال وبختیاری
۵	مهری میرفخار	قزوین	۳۲	حسن رستم زاده	فارس
۶	رضا رخ فروز کیسمی	گیلان	۳۳	محمدعلی تیموری ماسوله	گلستان
۷	نرگس ملایی نژاد	سیستان وبلوچستان	۳۴	ایرج پویا	آذربایجان غربی
۸	زهرا عباسی	مازندران	۳۵	مجتبی بیات	همدان
۹	معصومه ایزدی	همدان	۳۶	عبدالصاحب بابائیان چم علیشاهی	خوزستان
۱۰	سید محسن حسینی	کردستان	۳۷	صدیقه باهنر	خراسان جنوبی
۱۱	نادر بلال زاده	آذربایجان شرقی	۳۸	محمود مهاجر وطن	گلستان
۱۲	فیروزه شاهین شالکوهی	گیلان	۳۹	هما ترحمی	سمنان
۱۳	ژاله لطف اللهی	شهرتهران	۴۰	علی ندیری	مرکزی
۱۴	مرجان رستمی	ایلام	۴۱	کبری پور قبادی	لرستان
۱۵	سمیه قلی زاده دوگاهه	کرمانشاه	۴۲	وحید سجادپور	کهگیلویه وبویراحمد
۱۶	الهام پاکمهر	آذربایجان غربی	۴۳	عبدالرضا حیدری	بوشهر
۱۷	علی همتی دهکردی	چهارمحال وبختیاری	۴۴	فرزانه کد خدایی	لرستان
۱۸	حمید قره گزلو	شهرستانهای تهران	۴۵	جمال نوین	یزد
۱۹	ناهید محمدی	ایلام	۴۶	میکائیل صدقی	اردبیل
۲۰	سمیرا کشاورز	البرز	۴۷	سکینه حبیبی	لرستان
۲۱	رحیمه قربانیان	آذربایجان شرقی	۴۸	عارف درآیش	هرمزگان
۲۲	صفیه باقری هامانه	یزد	۴۹	منصور قاسم زاده باریکی	مازندران
۲۳	پوران نوروزی	خوزستان	۵۰	جواد کاوانلویی	خراسان شمالی
۲۴	اکبر ایروانی	اصفهان	۵۱	فاطمه پاپری مقدم برازجانی	بوشهر
۲۵	محمد طالبی	خراسان رضوی	۵۲	محسن اسلامی نیا	کرمان
۲۶	علی اکبر حسینی	سیستان وبلوچستان	۵۳	نسرین نقوی	کرمان
۲۷	احسان غلامی	کرمانشاه	۵۴	ابوالفضل شعبانی	سمنان