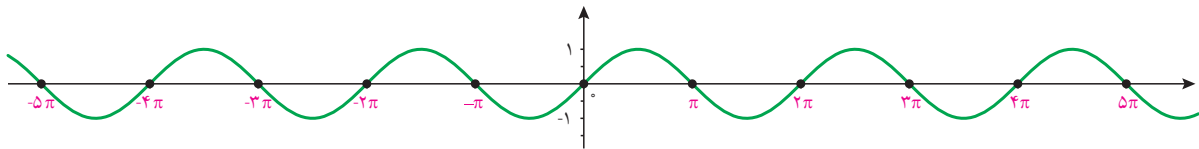


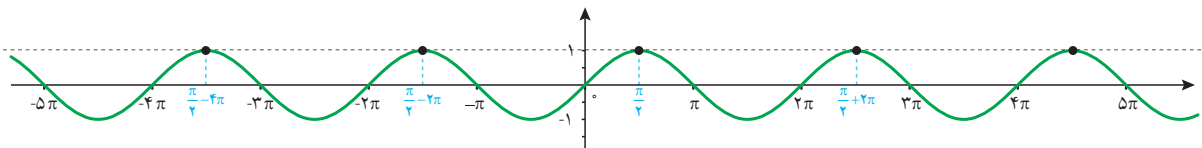
معادلات مثلثاتی

معادلات مثلثاتی

معادله‌ای که در آن اطلاعاتی از نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه مجهول داریم، یک معادله مثلثاتی نام دارد.
مثال: تابع مثلثاتی $y = \sin x$ را که نمودار آن در زیر رسم شده است در نظر بگیرید.



همان‌طور که از نمودار پیداست، صفرهای این تابع جواب‌های معادله مثلثاتی $\sin x = 0$ می‌باشد. به عبارت دیگر جواب‌های این معادله که به صورت $\dots, 3\pi, 2\pi, \pi, 0, -\pi, -2\pi, -3\pi, \dots$ می‌باشند، محل تقاطع تابع ثابت $y = 0$ (یعنی محور x ها) و تابع $y = \sin x$ است.
 این جواب‌ها را می‌توان به صورت کلی $x = k\pi$ که k یک عدد صحیح است نمایش داد.
 به‌طور مشابه جواب‌های معادله $\sin x = 1$ مقداری از x هستند که به ازای آنها مقدار $\sin x$ برابر ۱ می‌شود.
 این مقادیر محل تقاطع $y = \sin x$ و $y = 1$ است که در نمودار زیر رسم شده‌اند.



جواب‌های این معادله به صورت

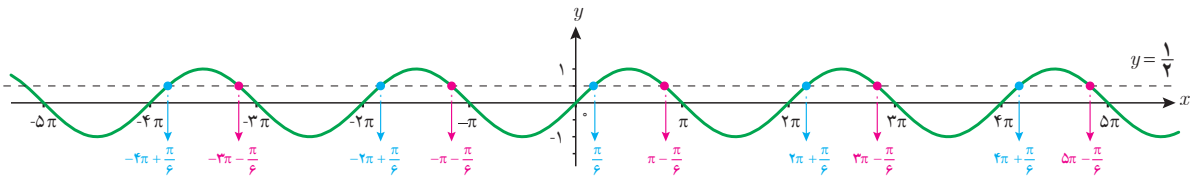
$$x = \dots, \frac{\pi}{2} - 4\pi, \frac{\pi}{2} - 2\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 2\pi, \dots$$

می‌باشند که به صورت کلی $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ قابل نمایش است.

اکنون معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ را در نظر می‌گیریم. فعالیت بعد به شما کمک می‌کند تا جواب‌های این معادله را بیابید.

۱ چند زاویه را که مقدار سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است مثال بزنید.

۲ خط $y = \frac{1}{4}$ و نمودار $y = \sin x$ را در زیر رسم کرده‌ایم. مقادیری را که مثال زده‌اید روی نمودار پیدا کنید. این مقادیر متناظر با چه نقاطی از شکل زیر می‌باشند؟ آیا مقادیری که پیدا کرده‌اید در بین نقاط نمایش داده شده در زیر هستند؟

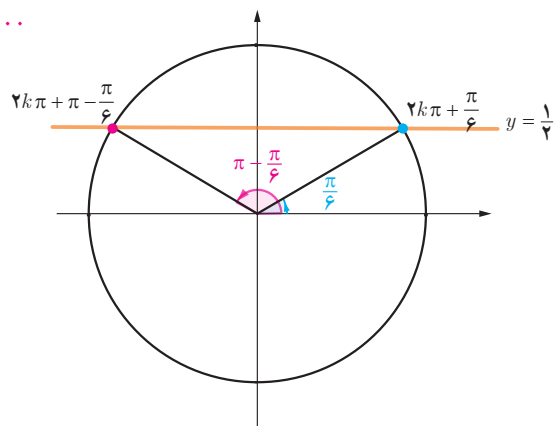


۳ طول تعدادی از نقاط تقاطع دو نمودار $y = \sin x$ و $y = \frac{1}{4}$ را که در شکل فوق مشخص شده‌اند، در معادله $\sin x = \frac{1}{4}$ جایگذاری کنید. آیا در معادله صدق می‌کنند؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۴ در دایره مثلثاتی زیر خط $y = \frac{1}{4}$ و زوایای $\frac{\pi}{6}$ و $\pi - \frac{\pi}{6}$ که سینوس آنها برابر $\frac{1}{4}$ است رسم شده‌اند. کدام دسته از زوایای مشخص شده بر روی نمودار سؤال قبل هم انتها با زاویه $\frac{\pi}{6}$ و کدام دسته هم انتها با زاویه $\pi - \frac{\pi}{6}$ هستند؟ آنها را در جاهای خالی زیر مرتب کنید. آیا می‌توانید دو دسته زیر را از دو طرف ادامه دهید؟

هم انتها با $\frac{\pi}{6}$: $\dots, 2\pi + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, -2\pi + \frac{\pi}{6}, \dots$

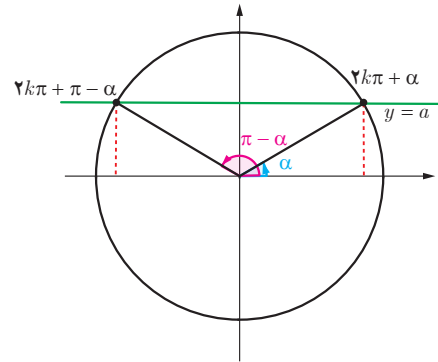
هم انتها با $\pi - \frac{\pi}{6}$: $\dots, 3\pi - \frac{\pi}{6}, \pi - \frac{\pi}{6}, -\pi - \frac{\pi}{6}, \dots$



برای عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ که $\sin x = a$ ، زاویه‌ای مانند α وجود دارد که برای آن داریم $\sin \alpha = a$. بنابراین معادله $\sin x = a$ به صورت $\sin x = \sin \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\sin x = \sin \alpha$ باید رابطه بین کمان‌های x و α را بیابیم.

با توجه به دایره مثلثاتی زیر رابطه بین کمان معلوم α و کمان‌های مجهول x به طوری که $\sin x = \sin \alpha$ در دوران‌های مختلف به صورت زیر است:

$$\sin x = \sin \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = (2k+1)\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$



جواب‌های کلی معادله $\sin x = \sin \alpha$ به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = (2k+1)\pi - \alpha$ می‌باشد که $k \in \mathbb{Z}$.

❖ مثال: معادله $\sin x = -\frac{1}{2}$ را حل کنید.

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

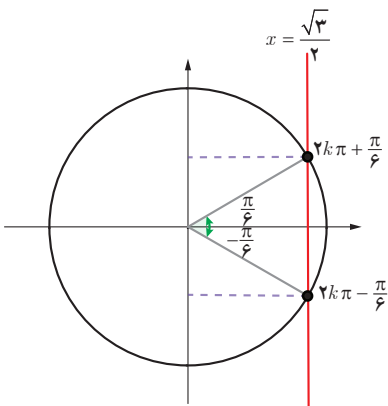
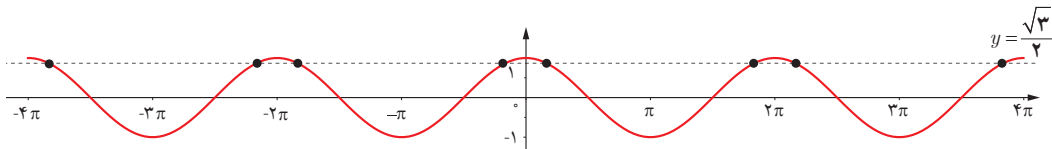
$$\sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \\ x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

الف) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$

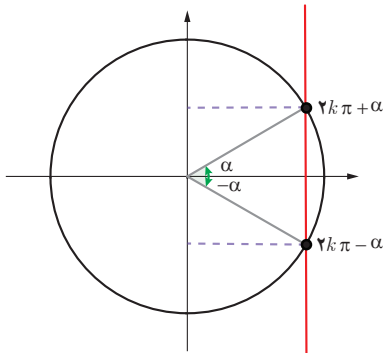
ب) $4\sin x + \sqrt{8} = 0$

نمودار تابع $y = \cos x$ و خط $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ در زیر رسم شده‌اند. مشابه فعالیت قبل به سؤالات زیر پاسخ دهید تا جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را بیابید.



الف) برخی از جواب‌های معادله $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ را با توجه به نقاط تقاطع دو نمودار پیدا کنید.

ب) با استفاده از دایره مثلثاتی روبه‌رو و محل تقاطع خط $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ با دایره مثلثاتی، جواب‌های معادله فوق را به دست آورید.
برای هر عدد حقیقی $-1 \leq a \leq 1$ در معادله $\cos x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که $\cos \alpha = a$.



بنابراین برای حل معادله فوق کافی است ابتدا آن را به صورت $\cos x = \cos \alpha$ نوشته و سپس رابطه بین زوایای x و α را با توجه به دایره مثلثاتی روبه‌رو به صورت زیر به دست آوریم.

$$\cos x = \cos \alpha \Rightarrow x = 2k\pi + \alpha \quad \text{و} \quad x = 2k\pi - \alpha, \quad k \in \mathbb{Z}$$

جواب‌های کلی معادله $\cos x = \cos \alpha$ به صورت $x = 2k\pi \pm \alpha$ می‌باشند که $k \in \mathbb{Z}$.

❖ **مثال:** جواب‌های معادله $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ را به دست آورید. کدام جواب‌ها در بازه $[-3\pi, \pi]$ می‌باشند؟

می‌دانیم $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ پس معادله به صورت $\cos x = \cos \frac{\pi}{3}$ می‌باشد. بنابراین جواب‌های کلی معادله به صورت زیر هستند:

$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اکنون با جایگذاری مقادیر صحیح به جای k در عبارت فوق نتیجه می‌شود که جواب‌های $x = -2\pi - \frac{\pi}{3}, -2\pi + \frac{\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}$

از معادله فوق در بازه داده شده می‌باشند.

❖ **مثال:** معادله $\sin 2x = \sin 3x$ را حل کنید.

می‌دانیم که جواب‌های این معادله به شکل زیر هستند:

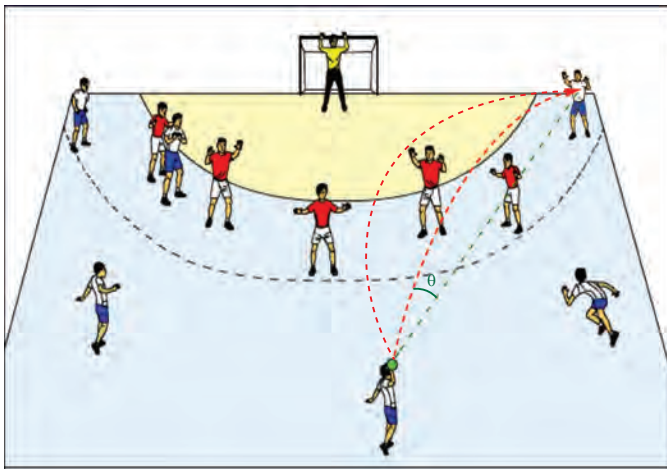
$$\begin{cases} 2x = 2k\pi + 3x \Rightarrow x = 2k\pi, & k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - 3x \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{5}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

❖ **مثال:** معادله $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.

$$2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin 3x = \sqrt{2}$$

$$\sin 3x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin 3x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} + \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \\ 3x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{3} - \frac{\pi}{12}, & k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$



❖ **مثال:** یک بازیکن هندبال توپ را با سرعت

16 m/s برای هم‌تیمی خود که در $12/8$ متری او

قرار دارد پرتاب می‌کند. اگر رابطه بین سرعت توپ

v (بر حسب متر بر ثانیه)، مسافت طی شده افقی d (بر

حسب متر) و زاویه پرتاب θ به صورت زیر باشد، آنگاه

زاویه پرتاب توپ چقدر بوده است؟

$$d = \frac{v^2 \sin 2\theta}{g}$$

از رابطه داده شده به دست می‌آید :

$$12/8 = \frac{(16)^{\frac{1}{2}} \sin 2\theta}{1^{\circ}} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{12/8 \times 1^{\circ}}{256} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} 2\theta = 2k\pi + \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \\ 2\theta = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

با توجه به شکل، جواب قابل قبول $\theta = \frac{\pi}{12}$ و $\theta = \frac{5\pi}{12}$ می‌باشد.

❖ **مثال:** جواب‌های معادله $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{3}}{4}$ را به دست آورید.

$$2 \sin x \cos x = 2 \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \\ 2x = (2k+1)\pi - \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{(2k+1)\pi}{2} - \frac{\pi}{6} & , k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

❖ **مثال:** معادله $\cos x (2 \cos x - 9) = 5$ را حل کنید.

ابتدا این معادله را به صورت $2 \cos^2 x - 9 \cos x - 5 = 0$ می‌نویسیم. با تغییر متغیر $\cos x = t$ می‌توان معادله فوق را به معادله درجه دوم

$2t^2 - 9t - 5 = 0$ تبدیل کرد. جواب‌های این معادله $t = -\frac{1}{2}$ و $t = 5$ است. بنابراین جواب‌های معادله مثلثاتی بالا از حل

دو معادله ساده $\cos x = 5$ و $\cos x = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آیند. از آنجا که $\cos x = 5$ جواب ندارد (چرا؟) فقط جواب‌های معادله

$\cos x = -\frac{1}{2}$ را به دست می‌آوریم.

$$\cos x = -\frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3} , k \in \mathbb{Z}$$

❖ **مثال:** معادله $\sin x + \cos x = 1$ را در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ حل کنید.

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sin x = 1 - \cos x$$

$$\sin^2 x = (1 - \cos x)^2 \quad \text{طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم.}$$

$$\sin^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x \quad \text{استفاده از رابطه } \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$1 - \cos^2 x = 1 - 2 \cos x + \cos^2 x$$

$$2 \cos^2 x - 2 \cos x = 0$$

$$2 \cos x (\cos x - 1) = 0 \Rightarrow 2 \cos x = 0 \text{ یا } \cos x - 1 = 0$$

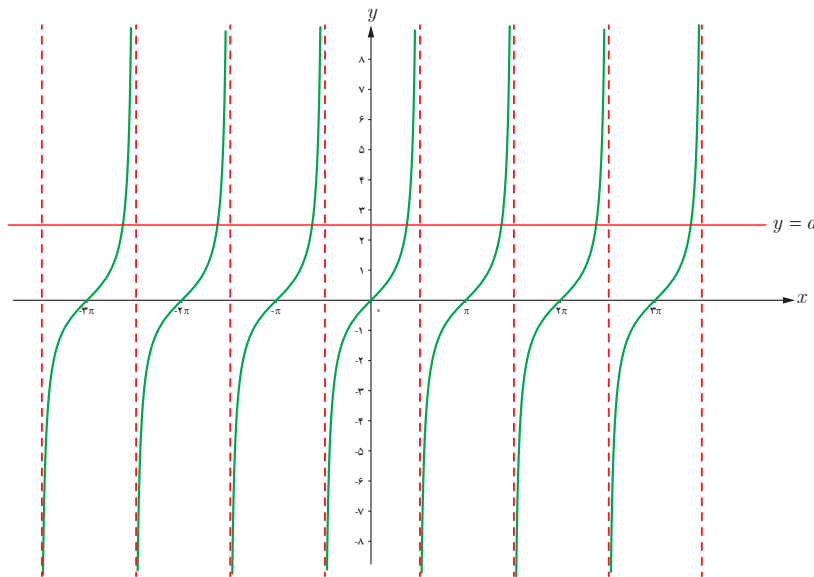
اکنون جواب‌های معادله‌های به‌دست آمده را در بازه $0 \leq x \leq 2\pi$ می‌یابیم:

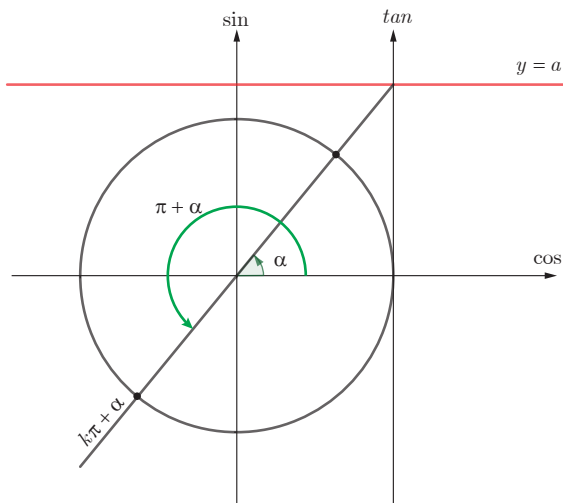
$$2 \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$$

$$\cos x - 1 = 0 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow x = 0, 2\pi$$

از آنجا که در گام سوم از به‌توان رساندن استفاده کرده‌ایم باید جواب‌های به‌دست آمده فوق را در معادله گذاشته و درستی آنها را تحقیق کنیم (چرا؟). پس از بررسی معلوم می‌شود که $x = \frac{3\pi}{2}$ جواب معادله داده شده نیست و بنابراین غیرقابل قبول است اما $x = 0, \frac{\pi}{2}, 2\pi$ مقادیر به‌دست آمده جواب معادله در بازه داده شده هستند.

در شکل زیر نمودار تابع $y = \tan x$ و خط $y = a$ که a یک عدد حقیقی است رسم شده‌اند. از روی نمودار این دو تابع می‌توان مشاهده کرد که جواب‌های معادله $\tan x = a$ همان طول نقاط تقاطع دو نمودار است. در واقع همواره برای عدد حقیقی a ، که $\tan x = a$ زاویه‌ای چون α وجود دارد که برای آن داریم $\tan \alpha = a$. بنابراین معادله $\tan x = a$ به‌صورت $\tan x = \tan \alpha$ بازنویسی می‌شود. اکنون برای یافتن جواب‌های معادله $\tan x = \tan \alpha$ باید رابطه بین زوایای x و a را بیابیم.





از دایره مثلثاتی و محور تانژانت در شکل مقابل می‌توان دریافت که رابطه بین زوایای x و α به صورت $x = k\pi + \alpha$ که k یک عدد صحیح است، می‌باشد.

در نمودار بالا اگر $a = 1$ باشد، داریم:

$$\tan x = 1 \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

جواب‌های کلی معادله $\tan x = \tan \alpha$ به صورت $x = k\pi + \alpha$ می‌باشد که در آن $k \in \mathbb{Z}$.

❖ **مثال:** معادله $\tan x = \tan 5x$ را حل کنید.

$$x = k\pi + 5x \Rightarrow 4x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{4}$$

حل:

جواب‌هایی قابل قبول اند که باقی‌مانده k ($k \in \mathbb{Z}$) بر ۴ برابر ۲ نباشد. (چرا؟)

تانژانت مجموع و تفاضل دو زاویه

از روابط مجموع و تفاضل زوایا برای نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس می‌توان روابط مجموع و تفاضل زوایا را برای تانژانت به صورت زیر به دست آورد.

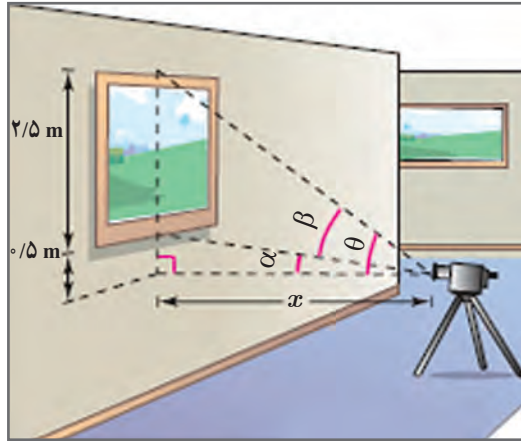
$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta} \\ &= \frac{\frac{\sin \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} \end{aligned}$$

همچنین با تغییر β به $-\beta$ در رابطه فوق رابطه تفاضل زوایا به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

❖ **مثال:** نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه دید دوربین (β) با فاصله افقی آن با تابلو نقاشی به صورت زیر است.

$$\tan \beta = \frac{2/5 x}{x^2 + 1/5}$$



سپس زاویه دید را در حالتی که فاصله افقی برابر یک متر است به دست آورید.

حل: با توجه به شکل برای مثلث قائم الزاویه پایین شکل داریم:

$$\tan \alpha = \frac{1/5}{x}$$

همچنین برای مثلث بزرگ که یک زاویه آن θ است داریم:

$$\tan \theta = \frac{3}{x}$$

اکنون با استفاده از رابطه تفاضل زوایا برای تانژانت به دست می‌آید:

$$\tan \beta = \tan(\theta - \alpha) = \frac{\tan \theta - \tan \alpha}{1 + \tan \theta \tan \alpha} = \frac{\frac{3}{x} - \frac{1/5}{x}}{1 + \frac{3}{x} \times \frac{1/5}{x}} = \frac{\frac{3 - 1/5}{x}}{\frac{x^2 + 3}{x^2}} = \frac{2/5 x}{x^2 + \frac{3}{2}}$$

وقتی فاصله افقی برابر یک متر آنگاه داریم:

$$x = 1 \rightarrow \tan \beta = \frac{2/5 \times 1}{1^2 + \frac{3}{2}} = \frac{2/5}{2/5} = 1$$

از طرفی می‌دانیم که $\tan \frac{\pi}{4} = 1$ پس جواب‌های معادله $\tan \beta = 1$ به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\beta = k\pi + \frac{\pi}{4}$$

لیکن با توجه به شکل تنها جواب منطقی در حالت $k=0$ که مقدار $\beta = \frac{\pi}{4}$ را به دست می‌دهد قابل قبول می‌باشد.

۱ معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\sin \frac{\pi}{4} = \sin 3x$

ب) $\cos^2 x - \cos x + 1 = 0$

پ) $\cos x = \cos^2 x$

ت) $\cos^2 x - 3 \sin x + 1 = 0$

ث) $\cos^2 x - \sin x = \frac{1}{4}$

ج) $\sin x - \cos^2 x = 0$

ح) $\tan(2x-1) = 0$

ح) $\tan^3 x = \tan \pi x$

۲ مثلثی با مساحت ۳ سانتی متر مربع مفروض است. اگر اندازه دو ضلع آن به ترتیب ۲ و ۶ سانتی متر باشند، آنگاه چند مثلث با این خاصیت‌ها می‌توان ساخت؟