

«حوادث آینده را نمی‌توان دقیقاً پیش‌بینی کرد،

اما احتمال پیش‌آمدهای آینده را می‌توان محاسبه کرد.»

## فصل دوم

### احتمال (اندازه‌گیری مقدار شانس)

هدفهای رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیر انتظار می‌رود:

- ۱- مفهوم مجموعه را با مثال بیان کرده، اجتماع، اشتراک و متمم را تعریف کند.
- ۲- آزمایش و فضای نمونه‌ای را تعریف کند.
- ۳- پیشامد و انواع آن را تبیین نماید.
- ۴- برداشتهای مختلف از احتمال را بیان کند.
- ۵- اصول قراردادی (موضوعه) احتمال را برشمارد.
- ۶- احتمال پیشامدها را بر مبنای فراوانی نسبی محاسبه کند.
- ۷- احتمال متمم یک پیشامد را محاسبه کند.
- ۸- احتمال اجتماع و اشتراک دو پیشامد را محاسبه کند.
- ۹- احتمال شرطی را برای پیشامدها محاسبه کند.

#### مقدمه

واژه «احتمال» را در صحبت‌های روزمره اشخاص زیاد شنیده‌اید. مثلاً وقتی هوا ابری است، می‌گویند: احتمال دارد که باران بیارد و یا فرضاً دانش‌آموزی که با جدیت درس می‌خواند می‌گویند که: احتمال قبول شدن این دانش‌آموز در امتحانات زیاد است و در مورد دانش‌آموزی که وقت خود را بیهوده تلف می‌کند و کار مدرسه‌اش را جدی نمی‌گیرد، می‌گویند: احتمال قبول شدن در امتحانات برای این دانش‌آموز کم است. به کار بردن واژه‌های «زیاد» و «کم» در کنار کلمه احتمال این معنی

را می‌رساند که احتمال قابل اندازه‌گیری است. در این فصل، با مفهوم احتمال و چگونگی اندازه‌گیری آن آشنا خواهید شد.

امروزه از موضوع و تئوری احتمال در برنامه‌ریزیهای اقتصادی، اجتماعی تکنولوژیکی، سیاسی و بسیاری دیگر از پدیده‌های علمی نظیر زیست‌شناسی، روانشناسی، جامعه‌شناسی، آموزش و پرورش، پزشکی و غیره استفاده می‌شود.

**نکته:** به طور کلی احتمالات درباره پدیده‌هایی قابل طرح است که نمی‌توان نتیجه قطعی آنها را قبل از وقوع تعیین کرد. چنین پدیده‌هایی را پدیده‌های تصادفی می‌گویند.

## مروری بر نظریهٔ مجموعه‌ها

در این قسمت برخی از مفاهیم اساسی نظریهٔ مجموعه‌ها را، که در طرح مباحث احتمال مورد نیاز خواهد بود، یادآوری می‌کنیم.

### مجموعه چیست؟

هر فهرست یا گردآورده‌ای از اشیا را «مجموعه» گویند. اشیایی را که مجموعه شامل آنها می‌شود عناصر یا اعضای مجموعه نامند. همه مجموعه‌های تحت بررسی، زیر مجموعه‌ای از مجموعهٔ ثابتی به نام «مجموعهٔ جهانی» فرض می‌شوند. مجموعهٔ جهانی را غالباً با علامت  $\Omega$  و مجموعهٔ تهی، یعنی مجموعهٔ بدون عضو را با علامت  $\emptyset$  نشان می‌دهند.

### اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه  $A$  و  $B$  عبارت است از مجموعه‌ای که عناصر آن یا به  $A$  تعلق دارد، یا به  $B$  (و یا به هر دو). اجتماع  $A$  و  $B$  را با نماد  $A \cup B$  نشان می‌دهند.

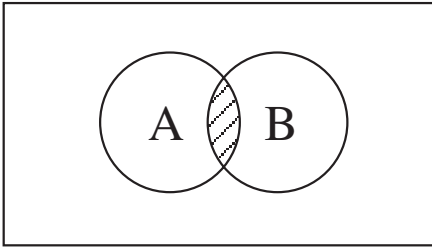
### اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه  $A$  و  $B$  که با نماد  $A \cap B$  نشان داده می‌شود، عبارت است از مجموعه‌ای

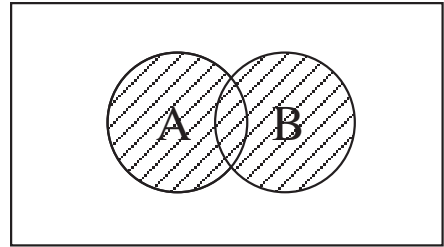
که عناصر آن هم به A تعلق دارند و هم به B. اگر  $A \cap B = \emptyset$  باشد، A و B را مجزاً از هم می‌نامند.

متمم دو مجموعه (= مکمل دو مجموعه)

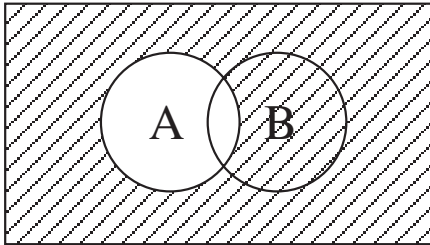
متمم مطلق یک مجموعه مانند A از یک مجموعه جهانی که با علامت  $A^c$  یا  $A'$  نشان داده می‌شود، عبارت از مجموعه‌ای است که عناصر آن به A تعلق ندارند. (گروهی از ریاضی دانان واژه مکمل را به جای متمم به کار می‌برند.) در نمودارهای ۱ تا ۴ که به نمودارهای ون<sup>۲</sup> شهرت دارند، مفاهیم بالا را به صورت هندسی نشان داده‌ایم.



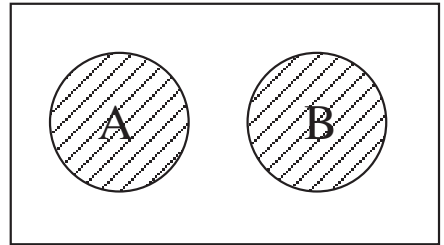
نمودار ۲-  $A \cap B$  سایه خورده است.



نمودار ۱-  $A \cup B$  سایه خورده است.



نمودار ۴-  $A^c$  سایه خورده است.



نمودار ۳-  $A \cup B$  سایه خورده است.

۱- حرف C بالای A از کلمه Complementary گرفته شده است که به معنای مکمل می‌باشد.

۲- ون «Ven» دانشمندی است که اولین بار از این نمودارها استفاده کرده است.

زیر پیشامد (= زیر مجموعه)

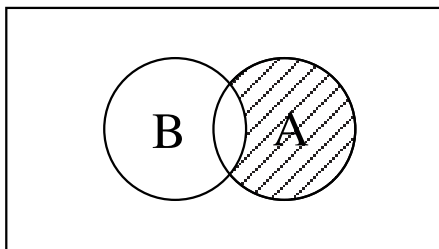
اگر هر پیشامد ساده که در  $A$  هست در  $B$  نیز وجود داشته باشد، می‌گویند  $A$  زیرپیشامد  $B$  است (که به صورت  $B \supset A$  نشان داده می‌شود). توجه دارید که رخ دادن  $A$  باعث رخ دادن  $B$  می‌شود، اما لزوماً عکس آن درست نیست.

### پیشامدهای برابر

اگر  $A$  زیرپیشامد  $B$  و  $B$  زیرپیشامد  $A$  باشد می‌گویند  $A$  و  $B$  برابرند. (که به صورت  $A = B$  نشان داده می‌شود).

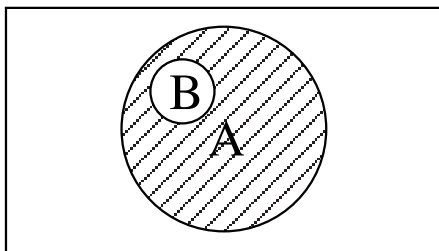
### تفاضل دو پیشامد $A$ و $B$

پیشامدی که از تمام پیشامدهای ساده که در  $A$  هستند ولی در  $B$  نباشند تشکیل شده باشد، تفاضل  $A$  از  $B$  نامیده شده و به صورت  $A - B$  ( $A$  نه  $B$ ) نشان داده می‌شود. به تصویر زیر نگاه کنید:



نمودار ۵-  $A-B$  هاشور خورده است.

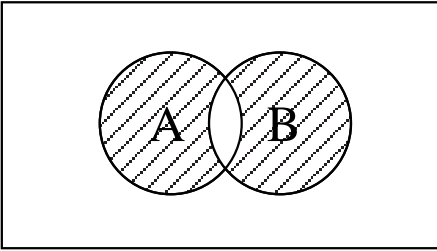
ممکن است  $A$  زیرمجموعه  $B$  باشد، در این صورت  $A - B$  را یک تفاضل واقعی می‌نامند. در تصویر زیر تفاضل واقعی  $A - B$  سایه خورده است.



نمودار ۶-  $A-B$  به صورت تفاضل واقعی

## تفاضل متقارن A و B

پیشامدی که از تمام پیشامدهای ساده که یا در A یا در B اما نه در هر دو باشند، تشکیل شده باشد، تفاضل متقارن A و B نامیده می‌شود که با علامت  $A \Delta B$  نشان داده می‌شود. (یا A یا B نه هر دو) در تصویر مقابل تفاضل متقارن A و B را مشاهده می‌کنید.



نمودار  $A \Delta B$  سایه خورده است.

مثال زیر می‌تواند در بیان مفاهیم اساسی نظریه مجموعه‌ها، شما را کمک کند.\*

مثال — فرض کنید دو عدد کارت سفید با شماره‌های ۱ و ۲، سه عدد کارت قرمز با شماره‌های ۳، ۴، ۵ و دو عدد کارت سبز با شماره‌های ۶ و ۷ را که هم اندازه و هم شکل هستند به خوبی مخلوط کرده، به طور تصادفی یک کارت از هفت کارت را بیرون بیاوریم در این صورت اگر A پیشامد کارت بزرگتر از ۱ و B پیشامد کارت کوچکتر از ۵ باشد خواهیم داشت:

$$A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

با این ترتیب می‌توان نوشت:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cap B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4\}$$

$$A - B = \{1\}$$

$$B - A = \{5, 6, 7\}$$

$$A - B = \{5, 6, 7\}$$

$$B - A = \{1\}$$

$$A \Delta B = \{1, 5, 6, 7\}$$

فضای نمونه‌ای

اجتماع دو پیشامد A و B

اشتراک دو پیشامد A و B

مکمل پیشامد A

مکمل پیشامد B

تفاضل B از A

تفاضل A از B

تفاضل متقارن A و B

\* این مثال از کتاب آمار و احتمال مقدماتی تألیف دکتر جواد بهبودیان اقتباس شده است.

## مفاهیم اساسی احتمال (اصطلاحات)

### آزمایش و انواع آن

واژه آزمایش در مبحث احتمال به معنای هر نوع تحقیق عملی است، که بر اثر انجام آن، داده‌های آماری به دست می‌آیند. دو نوع آزمایش متمایز، وجود دارد:

**آزمایش تجربی** — آزمایش تجربی عبارت است از فرآیند شناخته شده‌ای که به نتیجه معینی منجر شود و در شرایط کنترل شده قابلیت تکرار را داشته باشد. مانند نتایجی که در آزمایشهای درس شیمی، انتظار آنها را داریم. مثل اینکه بر اثر واکنش اسیدسولفوریک گرم و غلیظ و مس، انتظار داریم که سولفات مس و انیدرید سولفور و دو مولکول آب حاصل شود.

**آزمایش تجربی — تصادفی** — آزمایشهای تجربی — تصادفی به آن دسته از آزمایشها گویند که عامل تصادف در نتیجه آنها دخالت داشته باشد. و به همین دلیل، نتیجه قطعی آنها را قبل از انجام آزمایش نمی‌توان پیش‌بینی کرد. مانند نتیجه پرتاب یک سکه سالم (ایده‌آل) که یا روی سکه یا پشت سکه ظاهر خواهد شد.

تئوری احتمالات در مورد آزمایشهای تجربی کاربردی ندارد، زیرا در شرایط اطمینان، انجام می‌شوند، در حالی که این تئوری می‌تواند در مورد آزمایشهای تجربی — تصادفی، که در شرایط عدم اطمینان انجام می‌شوند، کاربردهای فراوانی داشته باشد. می‌توان گفت به‌طور کلی هرگاه انسان با عدم یقین مواجه می‌شود، واژه احتمال را به کار می‌برد.

### فضای نمونه‌ای چیست؟

مجموعه نتایج ممکن و متمایز یک آزمایش تجربی — تصادفی را «فضای نمونه‌ای» گویند که با علامت S نشان داده می‌شود. مثلاً اگر روی سکه را با علامت H (از کلمه Head) و پشت سکه را با نماد T (از واژه Tail) نشان دهیم، در پرتاب یک سکه سالم، خواهیم داشت  $S = \{H, T\}$ . اگر تعداد عضوهای یک فضای نمونه‌ای به گونه‌ای باشند که بتوان عددی را به تعداد عناصر فضای نمونه‌ای نسبت داد، فضا را متناهی (محدود) می‌نامند و در غیر این صورت، فضای نمونه‌ای را نامتناهی (نامحدود) گویند. مثلاً اگر سکه‌ای را آنقدر بریزید تا سرانجام روی سکه ظاهر شود، فضای

۱- سکه سالم یا ایده‌آل سکه‌ای است که دو طرف آن برای بالا قرار گرفتن، شانس مساوی داشته باشند. چنین سکه‌هایی را، سکه‌های ناریب گویند.

نمونه‌ای از نوع نامتناهی خواهد بود، زیرا معلوم نیست که در چندمین نوبت، روی سکه ظاهر خواهد شد. نگاه کنید:

$$S = \{ H, TH, TTH, TTT, \dots \}$$

چنانچه عضوهای فضاهای نمونه‌ای متناهی یا نامتناهی شمارش پذیر باشند، می‌گویند فضای نمونه‌ای گسسته است. اما اگر فضای نمونه‌ای، مجموعه‌ای مشتمل بر تمامی اعداد متعلق به یک فاصله یا اجتماع چند فاصله باشد، آن فضا را اصطلاحاً پیوسته می‌نامند. طول خطوط، سطح زیرمنحنیها و حجم اجسام فضایی از نوع فضاهای نمونه‌ای پیوسته محسوب می‌شوند.

برآمد چیست؟

به هر نتیجه از نتایج ممکن یک آزمایش تجربی - تصادفی یک «برآمد» گفته می‌شود. مثلاً اگر سکه‌ای را سه بار پرتاب کنیم، فضای نمونه‌ای شامل  $(2^3 = 8)$  برآمد زیر خواهد بود:

$$S = \{ HHH - HHT - HTH - HTT - THH - THT - TTH - TTT \}$$

تذکر: برای تعیین تعداد عضوهای هر فضای نمونه‌ای گسسته، تعداد حالت‌های یک بار آزمایش را به توان تعداد تکرار آزمایش برسانید.

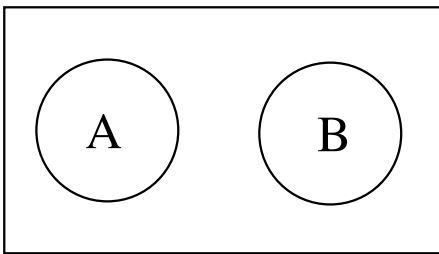
تذکر: تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای پیوسته، مانند طول یا سطح یا حجم بی‌نهایت بوده و قابل شمارش نیست.

پیشامد (رویداد) چیست؟

هر زیر مجموعه از مجموعه فضای نمونه‌ای  $S$  را یک «پیشامد» گویند. پیشامدها را با حروف  $A, B, C$  و... نشان می‌دهند. پیشامد می‌تواند ساده یا مرکب باشد. اگر تنها یک برآمد، در کل برآمدها دارای خصوصیتی مشخص و قابل تعریف کردن باشد، پیشامد مزبور را ساده نامند. مانند: آمدن دقیقاً سه بار روی سکه در پرتاب یک سکه سه بار. اما اگر یک پیشامد، مجموعه‌ای از چند برآمد باشد که خصوصیت مشترکی را دارا باشند، اصطلاحاً به آن «پیشامد مرکب» گفته می‌شود. مانند ظاهر شدن دوبار روی سکه در پرتاب یک سکه سه بار.

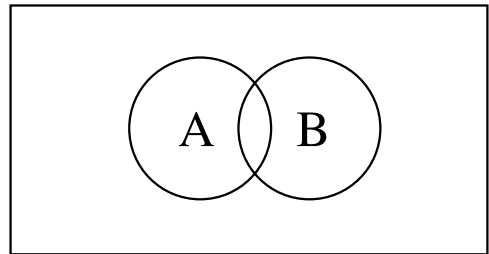
## پیشامدهای ناسازگار و سازگار<sup>۱</sup>

A و B را ناسازگار گویند هرگاه نتوانند همزمان رخ دهند. مانند تولد پسر و دختر در یک زایمان با یک فرزند. یا آمدن روی سکه و پشت سکه به طور همزمان در پرتاب یک سکه یک بار. اما دو پیشامد A و B، سازگار خواهند بود، هرگاه بتوانند همزمان رخ دهند. مثل اینکه در یک جعبه، پنج مهرهٔ زرد با شماره‌های ۱ تا ۵ و پانزده مهرهٔ سفید با شماره‌های ۱ تا ۱۵ وجود داشته باشد و یک مهره به تصادف بیرون بیاوریم و بخواهیم مهرهٔ استخراج شده، زرد یا عددی کوچکتر از چهار باشد. در نمودارهای ۸ و ۹ با پیشامدهای سازگار و ناسازگار به صورت هندسی آشنا می‌شوید:



$$A \cap B = \emptyset$$

نمودار ۹ — دو پیشامد ناسازگار



$$A \cap B \neq \emptyset$$

نمودار ۸ — دو پیشامد سازگار

پیشامدهای مستقل (ناسته) و غیرمستقل (وابسته) — هرگاه وقوع A تأثیری در مقدار احتمال وقوع B نداشته باشد، پیشامدهای A و B را مستقل گویند، اما اگر وقوع A در مقدار احتمال B مؤثر باشد و مقدار احتمال را تغییر دهد، A و B را غیرمستقل گویند. مثلاً اگر از یک گلدان با ۱۰ مهرهٔ سفید و ۲۰ مهرهٔ سیاه، دو مهره یک بار متوالیاً و با جایگذاری و یک بار متوالیاً و بدون جایگذاری استخراج کنیم و بخواهیم هر دو مهره سفید باشند، در حالت اول سفید بودن مهرهٔ اول و سفید بودن مهرهٔ دوم دو پیشامد مستقل خواهند بود، اما در حالت دوم، این دو پیشامد غیرمستقل محسوب می‌شوند، زیرا در حالت بدون جایگذاری، سفید بودن مهرهٔ اول در احتمال سفید بودن مهرهٔ دوم تأثیر خواهد گذاشت.

پیشامدهای حتمی، غیرممکن و تصادفی — پیشامدهای موجود را از نظر شدت و ضعف مقدار ریاضی احتمال به ۳ دسته تقسیم می‌کنند:

— پیشامدهای حتمی (یقینی) — پیشامدی را حتمی گویند که تحت هر شرایطی به‌طور

۱— پیشامدهای ناسازگار را مانع‌الجمع و پیشامدهای سازگار را غیرمانع‌الجمع نیز می‌گویند.



اجتناب ناپذیری رخ خواهد داد. در صفحات بعد، خواهیم دید که مقدار احتمال چنین پیشامدهایی مساوی واحد ( $= 1$ ) خواهد بود (یعنی امکان وقوع آنها صددرصد است).

— **پیشامدهای غیرممکن (محال)** — پیشامدی را غیرممکن گویند که تحت هیچ شرایطی امکان وقوع نداشته باشد. مقدار احتمال چنین پیشامدهایی مساوی صفر است.

— **پیشامدهای تصادفی (احتمالی)** — به پیشامدهایی که امکان وقوع یا عدم وقوع آنها وجود دارد، پیشامدهای تصادفی گفته می‌شود. مقدار احتمال چنین پیشامدهایی بین صفر و یک است.

برای مثال اگر در داخل یک گلدان ۵ سکه  $10^{\circ}$  ریالی وجود داشته باشد و یک سکه به طور تصادفی بیرون بیاوریم، آمدن یک سکه  $10^{\circ}$  ریالی، یک پیشامد حتمی و آمدن یک سکه  $20^{\circ}$  ریالی یک پیشامد غیرممکن است، اما اگر علاوه بر ۵ سکه  $10^{\circ}$  ریالی در داخل گلدان، ۵ سکه  $20^{\circ}$  ریالی نیز وجود داشته باشد و یک سکه بیرون بیاوریم، آمدن یک سکه  $10^{\circ}$  ریالی یک پیشامد تصادفی است.

**خودآزمایی** — در زندگی شخصی خودتان سه پیشامد حتمی و سه پیشامد غیرممکن و سه پیشامد احتمالی بیان نمایید.

## برداشت‌های مختلف از احتمال

واژه احتمال را می‌توان معادل کلمه «شانس» وقوع و یا عدم وقوع پیشامدهای معین تلقی کرد. مثلاً وقتی یک سکه را پرتاب می‌کنیم، احتمال آمدن روی سکه، معادل است با شانس آمدن روی سکه. یا احتمال اینکه دانشجویی از سلف سرویس دانشکده‌ای استفاده کند، معادل است با شانس استفاده کردن دانشجو از سلف سرویس. و یا احتمال اینکه کالای جدیدی در بازار موفق باشد، در حقیقت منظور همان شانس موفقیت کالای جدید در بازار می‌باشد. هر کدام از این سه مثال، نشان‌دهنده برخوردی خاص با مفهوم احتمال است. در مثال اول (پرتاب سکه) پیشامد مطرح شده به فضای نمونه‌ای تعلق دارد با تعدادی برآمد هم شانس. چنین برداشتی را «**احتمال کلاسیک**» نام داده‌اند. هر یک از برآمدها در چنین آزمایشها، شانسی مساوی  $\frac{1}{n}$  خواهند داشت. (اگر آزمایش دارای

$n$  برآمد باشد.)

اولین بار «لاپلاس» در قرن هفدهم، تئوری احتمال را با این برداشت، پایه‌گذاری کرد.

در مثال دوم (احتمال استفاده کردن دانشجو از سلف سرویس) پیشامدی مطرح شده که فضای نمونه‌ای آن دارای برآمدهای هم شانس نیستند، یعنی تعداد کل موفقیتها و تعداد کل پیشامدهای ممکن از قبل مشخص نیستند بلکه بر اساس مشاهدات نمونه‌ای معلوم خواهند شد. چنین برداشتی را «احتمال تجربی – کلاسیک» گویند.

اما در مثال سوم (احتمال موفقیت کالای جدید در بازار) نمی‌توان به صورت عینی، تعداد موفقیتها و تعداد کل حالات را مشخص کرد و لذا محاسبه احتمال، جنبه ذهنی و شخصی پیدا کرده، متکی بر ادراک و شخصیت فرد در حدس زدن می‌باشد. به چنین برداشتی «احتمال ذهنی – شخصی» نام داده‌اند. اکثر تصمیم‌گیرهای اقتصادی – تجاری با تکیه بر چنین برداشتی از احتمال صورت می‌پذیرند. برداشت احتمال کلاسیک را به این دلیل که فضای نمونه‌ای آن حامل برآمدهای هم‌شانس می‌باشد، «مدل احتمال یکنواخت» و برداشت احتمال تجربی – کلاسیک را به این دلیل که فضای نمونه‌ای آن حامل برآمدهای غیر هم‌شانس می‌باشد، «مدل احتمال غیر یکنواخت» می‌نامند.

## اصول قراردادی (موضوعه) احتمال

چون برداشتهای سه‌گانه احتمال، دارای این ضعف مهم هستند که برای تعریف احتمال، از خود واژه احتمال استفاده می‌کنند، لذا ریاضیدان معروف روس، آندره کولموگروف<sup>۱</sup> احتمال را یک مفهوم ثابت و غیرقابل تعریف در نظر گرفت، (مثل اینکه در هندسه نقطه را یک مفهوم ثابت و تعریف‌نشده در نظر می‌گیرند.) و سه اصل زیر را به عنوان اصول بدیهی، ثابت و بی‌نیاز از استدلال، عنوان کرد:

### اصل اول

احتمال رخ دادن هر برآمد در هر فضای نمونه‌ای، یک عدد غیرمنفی است، به طوری که اگر فضای نمونه‌ای S را با برآمدهای  $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$  در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$0 \leq P \leq 1$$

(فرمول ۱)

<sup>۱</sup> – Kolmogorov André

## اصل دوم

مجموع احتمالهای رخ دادن تمامی برآمدهای فضای نمونه‌ای S، مساوی یک خواهد بود.  
یعنی اگر S دارای چند برآمد باشد:

$$\begin{aligned} S &= e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_n \\ P(S) &= P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + \dots + P(e_n) = 1 \end{aligned} \quad (\text{فرمول ۲})$$

## اصل سوم

احتمال رخ دادن هر پیشامد مشخص (مانند پیشامد A) برابر است با مجموع احتمالهای رخ دادن برآمدهایی که پیشامد مورد نظر را تشکیل می‌دهند. مثلاً برای پیشامد A که از چند برآمد ناسازگار تشکیل شده است:

$$\begin{aligned} A &= e_1 + e_2 + e_3 + \dots + e_k \\ P(A) &= P(e_1) + P(e_2) + P(e_3) + \dots + P(e_k) \end{aligned} \quad (\text{فرمول ۳})$$

تذکر: سایر قوانین احتمال را می‌توان با کمک سه اصل بالا استنتاج کرد.

## فرمولهای ریاضی احتمال

### تعریف احتمال بر مبنای فراوانی نسبی (= احتمال نظری)

از سه نظریه و برداشتهای مختلف احتمال و با استفاده از منطق فراوانی نسبی (که در درس مفاهیم و روشهای آماری (۱) با آن آشنا شده‌اید.) می‌توان قانونمندی زیر را برای محاسبه احتمال یک پیشامد بیان کرد:

$$\text{مقدار احتمال هر پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالات مساعد آن پیشامد}}{\text{تعداد کل حالات ممکن آزمایش}}$$

توجه نمایید که از دستور بالا فقط وقتی استفاده می‌کنیم که نتایج یک آزمایش هم‌شانس باشند.  
مثلاً اگر پیشامدی مانند A را در فضای نمونه‌ای S در نظر بگیریم، و احتمال را با علامت P

(از کلمه انگلیسی Probability) نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$P_{(A)} = \frac{n(A)}{n(S)}$$

(فرمول ۴)

برای توجیه بیشتر این دستور، به یک مثال توجه کنید : شما وقتی یک سکه سالم را یک بار پرتاب می کنید، چرا و به کدامین دلیل احتمال آمدن روی سکه را مساوی  $\frac{1}{2}$  می پندارید؟ آیا از هر دو بار پرتاب یک سکه سالم حتماً یک بار آن روی سکه بالا قرار می گیرد؟

طبیعی است که جواب این سؤال منفی است. اما چرا احتمال روی سکه را  $\frac{1}{2}$  می دانند؟ دلیل این امر، آن است که اگر سکه سالم باشد<sup>۱</sup> (سکه ناریب باشد). با افزوده شدن بر دفعات تکرار آزمایش، نسبت دفعاتی که روی سکه بالا قرار می گیرد، به کل دفعات پرتاب به سمت  $\frac{1}{2}$  میل می کند. درحالی که اگر سکه اریب باشد، (مثلاً چکش خورده باشد). نسبت مزبور به سوی احتمالی متفاوت از  $\frac{1}{2}$  گرایش پیدا می کند :

هرگاه تعداد آزمایشهای تصادفی را به سمت بی نهایت میل دهیم، فراوانی نسبی نیز به سمت مقدار احتمال پیشامد مورد نظر، میل خواهد کرد.

**تذکر:** هرگاه شمارش حالات مساعد و حالات ممکن، به علت بی شمار بودن آنها امکان پذیر نباشد، برای محاسبه احتمال از طول یا مساحت یا حجم حالات مساعد و حالات ممکن، استفاده می کنند. این شیوه محاسبه احتمال را اصطلاحاً «احتمال هندسی» نام داده اند.

**مثال ۱-** در گلدانی ۴ مهره سفید، ۶ مهره سیاه و ۱۰ مهره آبی وجود دارد. (مهره ها صرف نظر از رنگ، کاملاً یکسان هستند). از این ظرف، یک مهره به تصادف بیرون می آوریم. احتمال اینکه این مهره سیاه باشد، چقدر است؟

$$P_{\text{(سیاه بودن)}} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$

۱- به سکه سالم یا به تاس سالم، اصطلاحاً سکه ایده ال یا تاس ایده ال گفته می شود.

این مثال، از مدل احتمال غیر یکنواخت، تبعیت می کند زیرا برآمدهای سفید و سیاه و آبی هم شانس نیستند.

مثال ۲- سکه سالمی را دوبار پشت سر هم پرتاب می کنیم، احتمال آمدن هر دو بار پشت سکه چقدر است؟

$$S = \{ HH - HT - TH - TT \}$$

$$P_{(TT)} = \frac{1}{4}$$

ملاحظه می کنید که این مثال، منطبق با مدل احتمال یکنواخت می باشد. ( زیرا هر یک از برآمدهای HH - HT - TH و TT هم شانس هستند. )

### احتمال متمم یک پیشامد

با توجه به اینکه اگر A یک پیشامد از S باشد،  $A^c$  پیشامدی است به نام متمم A (یا مکمل A) به طوری که عضوهایش به جز عضوهای A باشند<sup>۱</sup>. و با توجه به اصل دوم از اصول قراردادی (موضوعه) احتمال. (مجموع احتمالهای رخ دادن تمامی برآمدهای فضای نمونه ای S باید مساوی یک باشند.) می توان نوشت :

$$\boxed{P(A) + P(A^c) = 1} \quad \text{بنابراین} \quad \Rightarrow P_{(A^c)} = 1 - P(A) \quad \text{(فرمول ۵)}$$

معمولاً از رابطه بالا وقتی استفاده می کنیم که بخواهیم احتمال رخ ندادن یک پیشامد را محاسبه نماییم.

مثال ۳- کارمندان یک شرکت را از نظر اهلیت و جنسیت، مورد بررسی قرار داده ایم، جدول

زیر حاصل شده است :

اهلیت → ↓ جنسیت	تهرانی	شیرازی	تبریزی	کرمانی	مشهدی	جمع
زن	۵	۴	۳	۶	۷	۲۵
مرد	۸	۷	۵	۱۰	۱۵	۴۵
جمع	۱۳	۱۱	۸	۱۶	۲۲	۷۰

۱- بنابراین می توان گفت که بین A و  $A^c$  رابطه  $A \cap A^c = \emptyset$  برقرار است.

اگر یک کارمند را به طور تصادفی انتخاب کنیم، چقدر احتمال هست :

اولاً - تبریزی باشد؟ (A)

ثانیاً - تبریزی نباشد؟ (A<sup>c</sup>)

$$P_{(A)} = \frac{1}{V_0} = \frac{4}{35}$$

$$P_{(A^c)} = 1 - \frac{4}{35} = \frac{31}{35}$$

مثال بالا، مثال بسیار ساده‌ای برای استفاده از احتمال متمم «یا احتمال مکمل» است. در مواردی که مثال اندکی پیچیده‌تر می‌شود، قانون ۲-۵ راهگشا خواهد بود. به عنوان نمونه می‌توان به موردی اشاره کرد که مثلاً بخواهیم احتمال این امر را محاسبه کنیم که از افراد یک خانواده ۵ نفره چقدر احتمال هست که حداقل ۲ نفرشان در یک روز متولد شده باشند؟

حل: احتمال حداقل ۲ نفر از ۵ نفر در یک روز از سال متولد شده باشند

پس  $P_{(A)}$  را محاسبه کرده، مقدار آن را از یک کم می‌کنیم

احتمال آنکه تولد هر ۵ نفر در یک روز نباشد  $P_{(A^c)}$

$$P_{(A^c)} = \frac{365 \times 364 \times 363 \times 362 \times 361}{(365)^5}$$

$$P_{(A)} = 1 - \frac{365 \times 364 \times 363 \times 362 \times 361}{(365)^5}$$

و در نتیجه :

توضیح: توجه دارید که مخرج کسر بالا (یعنی تعداد عضوهای فضای نمونه‌ای) طبق اصل ضرب برای ۵ نفر از  $365 \times 365 \times 365 \times 365 \times 365$  یعنی  $(365)^5$  به دست آمده است زیرا هر کدام از افراد خانواده می‌توانسته‌اند در یکی از ۳۶۵ روز سال متولد شده باشند. (سال کبیسه را صرف نظر کرده‌ایم.)

### احتمال اجتماع دو پیشامد

اگر A و B دو پیشامد ناسازگار باشند، احتمال اجتماع آنها از فرمول ۶ به دست می‌آید :

$$P_{(A \cup B)} = P_{(A)} + P_{(B)}$$

(فرمول ۶)

در حالی که اگر A و B سازگار باشند، احتمال اجتماع آنها، طبق فرمول ۷ محاسبه خواهد شد.

$$P_{(A \cup B)} = P_{(A)} + P_{(B)} - P_{(A \cap B)} \quad (\text{فرمول ۷})$$

مثال ۴- اگر از جدول مثال ۳ یک نفر به طور تصادفی انتخاب کنیم چقدر احتمال دارد که اولاً فرد انتخاب شده، تهرانی یا تبریزی باشد؟ ثانیاً، احتمال اینکه فرد انتخاب شده تهرانی یا زن باشد، چقدر است؟

$$P_{(\text{تهرانی یا تبریزی})} = P_{(\text{تهرانی})} + P_{(\text{تبریزی})} = \frac{13}{70} + \frac{8}{70} = \frac{21}{70} = \frac{3}{10}$$

$$P_{(\text{تهرانی یا زن})} = P_{(\text{تهرانی})} + P_{(\text{زن})} - P_{(\text{تهرانی و زن})} = \frac{13}{70} + \frac{25}{70} - \frac{5}{70} = \frac{33}{70}$$

### احتمال اشتراک دو پیشامد

اگر A و B دو پیشامد مستقل از همدیگر باشند، طبق اصل ضرب، احتمال اشتراک آنها از حاصلضرب احتمالهایشان به دست خواهد آمد. (به شرط آنکه احتمال هریک از پیشامدهای A و B مخالف صفر باشد.)

$$P_{(A \cap B)} = P_{(A)} \times P_{(B)} = P_{(B)} \times P_{(A)} \quad (\text{فرمول ۸})$$

فرمول ۸ شرط مستقل بودن دو پیشامد A و B نیز خواهد بود.

مثال ۵- احتمال اینکه کارمندی در یک اداره در مرخصی باشد،  $\frac{1}{2}$  و احتمال اینکه به کارمندی حکم جدیدی داده شود،  $\frac{1}{10}$  است.

احتمال اینکه کارمندی در مرخصی باشد و حکم جدیدی نیز برایش صادر شود، چقدر است؟ توجه دارید که دو پیشامد «در مرخصی بودن» و «صدور حکم جدید»، دو پیشامد مستقل هستند.

$$P_{(A \cap B)} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{20}$$

تذکره: اگر در فرمول ۸ پیشامد A مشروط به پیشامد B باشد، که با نماد  $A|B$  نشان داده می‌شود، باید فرمول ۸ را به صورت زیر بنویسیم:

$$P_{(A \cap B)} = P_{(B)} \cdot P_{(A|B)} \quad (\text{فرمول ۹})$$

۱- احتمال شرطی را با نماد  $A|B$  نیز نشان می‌دهند.

مثال ۶- در داخل یک انبار، از انبارهای اتومبیل‌های ساخته شده یک کارخانه، ۸۰ اتومبیل سواری و ۲۰ اتومبیل وانت وجود دارد. دو اتومبیل به طور تصادفی از انبار خارج می‌کنیم. احتمال این که هر دو اتومبیل سواری باشند، چقدر است؟

$$P_{\text{(اولی سواری باشد)}} = \frac{80}{100}$$

$$P_{\text{(دومی سواری باشد)}} = \frac{79}{99}$$

$$P_{\text{(هر دو سواری باشد)}} = \frac{80}{100} \times \frac{79}{99} = \frac{316}{495}$$

مثال ۷- در یک قفسه در یک بانک، ۱۰ کارت حساب جاری و ۲۰ کارت حساب پس‌انداز وجود دارد. اگر بخواهیم سه کارت به طور تصادفی انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد که هر سه کارت از نوع حساب جاری باشند؟

$$P = \frac{10}{30} \times \frac{9}{29} \times \frac{8}{28} = \frac{6}{203}$$

تذکر: مثالهایی نظیر مثال ۷ را می‌توان با کمک ترکیب (یا سایر عوامل آنالیز ترکیبی) نیز حل کرد. مثلاً می‌توان مثال ۷ را به صورت زیر حل کرد.

$$P = \frac{\text{حالات مساعد}}{\text{حالات ممکن}} = \frac{C_{10}^3}{C_{30}^3} = \frac{6}{203}$$

مثال ۸- در یک انبار، ۱۰ کارتن یخچال، ۲۰ کارتن فریزر و ۲۰ کارتن یخچال - فریزر وجود دارد که از نظر ظاهر، شبیه هم هستند. اگر به طور تصادفی ۳ جعبه از آنها را انتخاب کنیم، چقدر احتمال هست که:

$$P = \frac{C_{10}^3}{C_{50}^3} \quad \text{اولاً - هر سه کارتن یخچال باشند؟}$$

$$P = \frac{C_{20}^2 \times C_{10}^1}{C_{50}^3} \quad \text{ثانیاً - دو عدد فریزر و یکی یخچال - فریزر باشد؟}$$

$$P = \frac{C_{10}^1 \times C_{20}^1 \times C_{20}^1}{C_{50}^3} \quad \text{ثالثاً - هیچ کدام مثل هم نباشند؟}$$



مثال ۹— در یک جعبه، ۱۰ مهره سفید و ۳۰ مهره سیاه وجود دارد که از نظر شکل و اندازه و وزن کاملاً یکسان هستند. دو مهره، متوالیاً، یک بار با جایگذاری و یک بار بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. احتمال سفید بودن هر دو مهره را در دو حالت با جایگذاری و بدون جایگذاری محاسبه کنید.

توضیح: در روش با جایگذاری، هر مهره که بیرون آورده می‌شود، مجدداً به داخل جعبه برگردانده می‌شود، در حالی که در روش بدون جایگذاری هر مهره که از جعبه خارج می‌شود، کنار گذاشته شده، مهره بعدی از بقیه مهره‌ها، بیرون آورده می‌شود.

$$P = \frac{10}{40} \times \frac{10}{40} = \frac{1}{16} \quad \text{در روش با جایگذاری}$$

$$P = \frac{10}{40} \times \frac{9}{39} = \frac{3}{52} \quad \text{در روش بدون جایگذاری}$$

مثال بالا را می‌توان با کمک آنالیز ترکیبی به صورت زیر نیز حل کرد:

در روش با جایگذاری با کمک ترتیبهایی با تکرار

$$P = \frac{P_{10}^2}{P_{40}^2} = \frac{10^2}{40^2} = \frac{10 \times 10}{40 \times 40} = \frac{1}{16}$$

در روش بدون جایگذاری با کمک ترتیبهایی بدون تکرار

$$P = \frac{P_{10}^2}{P_{40}^2} = \frac{10!}{38!} = \frac{10 \times 9}{40 \times 39} = \frac{3}{52}$$

### تفاوت « مستقل بودن » و « ناسازگار بودن » پیشامدها

گاهی مفاهیم « مستقل بودن » و « پیشامد و ناسازگار بودن » دو پیشامد، با هم اشتباه می‌شوند. برای دوری از چنین اشتباهی، توضیح این نکته ضروری است که هرگاه در مورد مستقل بودن دو پیشامد A و B سخن به میان می‌آید، منظور این است که وقوع پیشامد A، هیچ ارتباطی به پیشامد B ندارد. درحالی که وقتی صحبت از ناسازگار بودن A و B می‌شود، مقصود این است که، A و B نمی‌توانند همزمان رخ دهند. شاید این اشتباه، از آنجا ناشی شده است که در نمودارهای ون، تصور بر این است که، دو پیشامد مستقل A و B نباید هیچ نقطه مشترکی داشته باشند، در حالی که این تصور برای دو پیشامد ناسازگار درست است، نه برای دو پیشامد مستقل. مثلاً اگر A پیشامدی باشد با

احتمالی برابر  $0/2$  و  $B$  پیشامد دیگری باشد با احتمالی مساوی  $0/3$  به طوری که بشود نوشت :

$$P_{.A} = 0/2 \text{ و } P_{.B} = 0/3$$

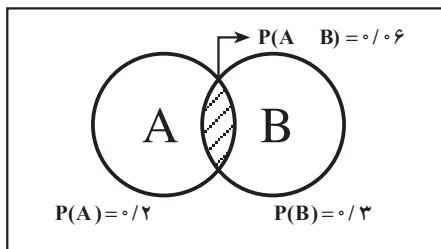
حال اگر  $A$  و  $B$  مستقل از یکدیگر باشند، خواهیم داشت :

$$P_{.A \ B} = P_{.A} \cdot P_{.B} = 0/2 \times 0/3 = 0/06$$

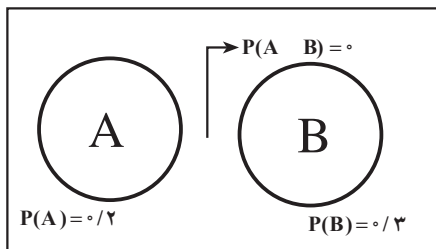
در حالی که اگر  $A$  و  $B$  دو پیشامد ناسازگار باشند، باید  $A \ B = .$  باشد، و چون  $P_{..} = 0$  است، بنابراین :

$$P_{.A \ B} = 0$$

در نمودارهای  $1^0$  و  $11$  وضعیت دو پیشامد ناسازگار و دو پیشامد مستقل را به صورت هندسی مشاهده می کنید :



نمودار ۱۱ - دو پیشامد مستقل



نمودار  $1^0$  - دو پیشامد ناسازگار

### محاسبهٔ احتمال شرطی

دو پیشامد را شرطی گویند، هرگاه وقوع یکی مشروط به وقوع « یا عدم وقوع » دیگری باشد در فرمول ۹، اگر  $P_{(A|B)}$  را مجهول در نظر بگیریم و  $P(B)$  و  $P(A \ B)$  معلوم باشند، باید طرف معلوم را بر ضریب مجهول تقسیم کنیم تا مقدار مجهول محاسبه شود :

$$P_{(A|B)} = \frac{P(A \ B)}{P(B)} \quad (\text{فرمول } 10)$$

در واقع در احتمالات شرطی، فضای نمونه‌ای محدود به موارد شرط (یعنی  $B$ ) خواهد شد. فرمول بالا را می‌شود به صورت خلاصه شده زیر نیز بیان کرد :

$$\text{مقدار احتمال شرطی} = \frac{\text{از موارد شرط آن تعداد که مورد سؤال هستند}}{\text{موارد شرط}}$$

$$P_{(A|B)} = \frac{\text{تعداد حالت‌هایی که A و B می‌توانند رخ دهند}}{\text{تعداد حالت‌هایی که B می‌تواند رخ دهد}}$$

توجه دارید که در این صورت  $P_{(A|B)}$  بزرگتر از  $P_{(A)}$  خواهد بود، مگر موقعی که A و B دو پیشامد مستقل باشند، که در این صورت احتمال شرطی، مساوی احتمال غیر شرطی خواهد بود. یعنی:

$$P_{(A|B)} = \frac{P_{(A \cap B)}}{P_{(B)}} \Rightarrow \frac{P_{(A)} \cdot P_{(B)}}{P_{(B)}} = P_{(A)} \quad (\text{فرمول ۱۱})$$

**تذکر:** توجه داشته باشید که فرمول احتمال شرطی، زمانی درست است که  $P_{(B)}$  مخالف صفر باشد، چه پیشامدها از مدل احتمال یکنواخت تبعیت کنند و چه از مدل احتمال غیر یکنواخت.

**مثال ۱۰**— دو مکعب شش وجهی منتظم (تاس) را که اعداد ۱ تا ۶ روی وجوه مختلف آنها نوشته شده با هم می‌ریزیم. احتمال اینکه حداقل، شماره یکی از مکعبها ۲ باشد، چقدر است؟ (اگر بدانیم که مجموع شماره‌های دو مکعب، مساوی ۶ است.)  
**حل:** اگر A را پیشامد «حداقل، شماره یک مکعب ۲ باشد» بدانیم و B را پیشامد «مجموع دو مکعب شش». در این صورت می‌توان نوشت:

$$n_{(S)} = 6^2 = 36$$

$$A = \{(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)\}$$

$$B = \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)\}$$

$$(A \cap B) = \{(2,4), (4,2)\}$$

$$P_{(A|B)} = \frac{P_{(A \cap B)}}{P_{(B)}} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

**مثال ۱۱**— احتمال اینکه احمد در مرحله اول کنکور دانشگاهها قبول شود،  $7/10$  است و احتمال اینکه اگر در مرحله اول قبول شده، در مرحله دوم نیز قبول شود،  $8/10$  است. احتمال اینکه

احمد در هر دو مرحله، قبول شود، چقدر است؟

$$P_{(A|B)} = \frac{P_{(A \cap B)}}{P_{(B)}} \Rightarrow 0/8 = \frac{P_{(A \cap B)}}{0/7} \Rightarrow P_{(A \cap B)} = 0/56$$

مثال ۱۲- در مثال ۱۰ آیا A و B دو پيشامد مستقل اند؟ چرا؟

حل: برای اینکه A و B دو پيشامد مستقل باشند باید رابطه زیر بین آنها برقرار باشد:

$$P_{(A \cap B)} = P_{(A)} \cdot P_{(B)}$$

$$P_{(A)} = \frac{11}{36}, \quad P_{(B)} = \frac{5}{36}, \quad P_{(A \cap B)} = \frac{2}{36}$$

$$\frac{11}{36} \times \frac{5}{36} = \frac{55}{1296}$$

مشاهده می کنیم که شرط مستقل بودن بین A و B برقرار نیست زیرا:

$$\frac{55}{1296} \neq \frac{2}{36}$$

تذکر ۱: مفهوم حداقل x بار، معادل  $X \geq x$  و مفهوم حداکثر x بار معادل

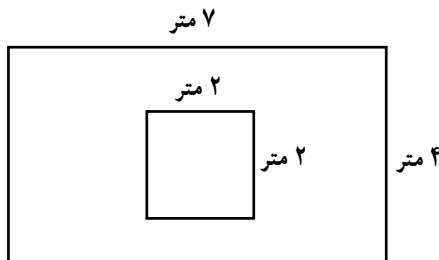
$X \leq x$  می باشد.

تذکر ۲: همه مسائلی که در این فصل بیان شده مربوط به مجموعه های

شمارش پذیر بودند. توجه داشته باشید که احتمالات در مورد مجموعه های شمارش ناپذیر مانند مساحت اشکال هندسی و یا حجم و یا طول و نظایر آن نیز کاربردهای فراوانی دارد. تمرینهای ۱۸ و ۱۹ همین فصل نمونه ای از احتمالات هندسی هستند.

مثال ۱۳- در تصویر زیر، اگر تیری به سمت مستطیل رها شود، احتمال آن که تیر، به مربع

برخورد کند، چقدر است؟



حل: در این مسأله، هم فضای نمونه‌ای (یعنی مساحت مستطیل) و هم عضوهای حالت‌های مساعد (مساحت مربع) از نوع فضاهای نمونه‌ای پیوسته هستند.

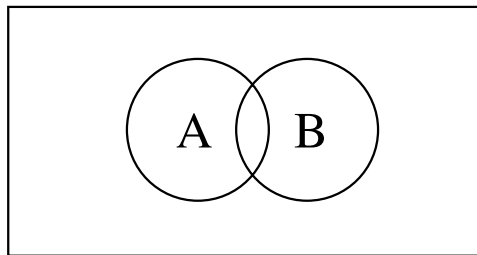
$$\text{مقدار احتمال} = \frac{\text{مساحت مربع}}{\text{مساحت مستطیل}} = \frac{2 \times 2}{7 \times 4} = \frac{4}{28} = \frac{1}{7}$$

## تمرینهای فصل دوم

- ۱- اجتماع دو پیشامد را تعریف کرده، علامت آن را نشان دهید.
- ۲- اشتراک دو پیشامد را تعریف کرده، علامت آن را نشان دهید.
- ۳- مفهوم تهی را توضیح داده، علامت آن را نشان دهید.
- ۴- آزمایش تصادفی چیست؟ انواع آن را نام ببرید و برای هر کدام مثالی ذکر کنید.
- ۵- فضای نمونه‌ای را تعریف کرده، برای فضاهای نمونه‌ای محدود و نامحدود مثال بیاورید.
- ۶- پیشامد را تعریف کنید. برای پیشامدهای سازگار و ناسازگار مثال ذکر کنید.
- ۷- برداشتهای مختلف از احتمال را شرح دهید.
- ۸- سه اصل اساسی احتمال را که به اصول قراردادی (موضوعه) احتمال معروفند، توضیح

دهید.

- ۹- در نمودار زیر  $(A \cap B)^c$  را سایه بزنید.



- ۱۰- احمد، محمود و حامد در یک مسابقه علمی شرکت کرده‌اند. اگر بدانیم احتمال برنده شدن احمد دو برابر برنده شدن محمود و احتمال برنده شدن محمود دو برابر برنده شدن حامد است، احتمال برنده شدن هر یک از این سه نفر را معلوم کنید.
- ۱۱- اگر احتمال بالا قرار گرفتن روی سکه‌ای، دو برابر احتمال بالا قرار گرفتن پشت آن باشد، چقدر احتمال دارد که در دو بار پرتاب این سکه، هر دو بار روی سکه بالا قرار گیرد؟
- ۱۲- در یک شرکت بیمه، ۱۰ بیمه‌نامه تنظیم شده که چهار عدد آنها مربوط به بیمه اتومبیل و ۶ عدد بقیه، مربوط به بیمه آتش سوزی می‌باشند. اگر به طور تصادفی سه عدد از بیمه‌نامه‌ها را انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد:
  - الف) هر سه، بیمه‌نامه اتومبیل باشند؟
  - ب) دو عدد از بیمه‌نامه‌ها، از نوع بیمه آتش سوزی باشند؟

ج) حداقل یکی از آنها مربوط به بیمه اتومبیل باشد؟  
 د) حداکثر دو بیمه نامه از نوع بیمه آتش سوزی باشند؟  
 ۱۳- ۲۵۰ نفر از دانش آموزان یک دبیرستان را از نظر رشته تحصیلی و کلاس، مطابق جدول زیر مورد بررسی قرار داده ایم. اگر یک دانش آموز به طور تصادفی از این گروه انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد که:

- الف) کلاس سوم باشد؟  
 ب) کلاس سوم نباشد؟  
 ج) کلاس اول یا دوم باشد؟  
 د) رشته حسابداری و کلاس سوم باشد؟  
 ه) رشته حسابداری یا کلاس دوم باشد؟  
 و) رشته بازرگانی باشد به شرطی که بدانیم کلاس اول است؟  
 ز) آیا کلاس چهارم بودن و رشته حسابداری بودن، دو پیشامد مستقل اند؟ چرا؟

کلاس → رشته ↓	اول	دوم	سوم	چهارم
تجربی	۲۰	۱۵	۲۵	۸
ریاضی	۱۰	۵	۱۵	۱۰
حسابداری	۳۰	۱۵	۱۰	۱۲
بازرگانی	۴۰	۲۰	۱۰	۵

۱۴- اگر از جدول تمرین ۱۳، چهار نفر به طور تصادفی انتخاب کنیم، احتمال اینکه رشته های آنها متفاوت باشد، چقدر است؟ و احتمال اینکه هر چهار نفر از یک رشته باشند، چقدر است؟  
 ۱۵- ۷۰٪ دانش آموزان یک دبیرستان، درس آمار را و ۴۰٪ آنها درس ریاضیات عمومی و ۳۰٪ دانش آموزان هر دو درس را انتخاب کرده اند. اگر یک دانش آموز را به صورت تصادفی انتخاب کنیم، احتمال اینکه:

الف) آمار یا ریاضی را انتخاب کرده باشد، چقدر است؟

ب) هیچ کدام از این دروس را انتخاب نکرده باشند، چقدر است؟

۱۶- احتمال اینکه آقای  $x$  یک مسأله را حل کند  $\frac{2}{9}$  و احتمال اینکه همین مسأله را آقای  $y$

حل کند  $\frac{3}{5}$  است. این مسأله را به هر دو نفر ارائه می‌دهیم تا حل کنند. چقدر احتمال دارد که:

الف) هر دو نفر مسأله را حل کنند.

ب) مسأله حل شود.

ج) فقط یکی از آنها مسأله را حل کند.

۱۷- در یک دانشکده، کلاس A دارای ۱۵ دانشجوی تهرانی و ۲۵ دانشجوی شهرستانی و

کلاس B دارای ۲۰ دانشجوی تهرانی و ۴۰ دانشجوی شهرستانی است. اگر از هر کلاس یک دانشجو به صورت تصادفی انتخاب کنیم، چقدر احتمال دارد که از کلاس A تهرانی و از کلاس B شهرستانی باشند؟ اگر بخواهیم از هر دو کلاس شهرستانی باشند، احتمال را معلوم کنید. اگر بخواهیم هر دو نفری که انتخاب می‌شوند یا تهرانی باشند یا شهرستانی، مقدار احتمال چقدر خواهد بود؟

۱۸- دایره‌ای به شعاع R را در نظر بگیرید. اگر به طور تصادفی نقطه‌ای در داخل این دایره

انتخاب شود، احتمال آنکه این نقطه به مرکز دایره نزدیکتر از محیط دایره باشد، چقدر است؟

راهنمایی - فضای نمونه‌ای، مجموعه شمارش ناپذیر مساحت یک دایره به شعاع R است.

۱۹- مستطیلی به طول ۲۵ و عرض ۲۰ سانتی‌متر را در نظر بگیرید که در داخل آن دایره‌ای به

شعاع ۱۰ سانتی‌متر واقع شده باشد. اگر تیری به سمت مستطیل رها شود، احتمال آنکه به دایره اصابت نماید چقدر است؟

۲۰- اگر سه پیشامد A، B و C دو به دو با همدیگر ناسازگار باشند و بدانیم که  $P(A) = 0/1$ ،

$P(B) = 0/3$  و  $P(C) = 0/3$  باشد،  $P(A \cap B \cap C)$  چقدر است؟

---



## ----- تستهای چهار گزینه‌ای -----

۱- A و B مستقل اند  $P_{A \cdot B} = \frac{1}{8}$ ،  $P_{A \cdot} = \frac{1}{4}$  است.  $P_{B \cdot}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$       (۲)  $\frac{1}{16}$       (۳)  $\frac{3}{8}$       (۴)  $\frac{5}{8}$

۲- از ظرفی با ۲ مهره سفید و ۳ مهره سیاه، ۲ مهره با هم بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه حداقل یک مهره سیاه بیرون آمده باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{8}$       (۲)  $\frac{6}{10}$       (۳)  $\frac{7}{8}$       (۴)  $\frac{9}{10}$

۳- اگر A و B دو پیشامد مستقل و  $P_{A \cdot} = \frac{3}{10}$  و  $P_{B \cdot} = \frac{2}{10}$  باشند،  $P_{A \cdot B}$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{1}{4}$       (۲)  $\frac{3}{44}$       (۳)  $\frac{3}{5}$       (۴)  $\frac{56}{10}$

۴- یک تاس را دوبار می‌اندازیم. احتمال آنکه جمع دو شماره، حداقل برابر  $10^\circ$  باشد، کدام است؟

- (۱)  $\frac{2}{36}$       (۲)  $\frac{3}{36}$       (۳)  $\frac{4}{36}$       (۴)  $\frac{6}{36}$

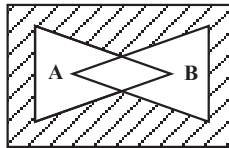
۵- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند،  $P_{A|B}$  کدام است؟

- (۱)  $P_{B \cdot}$       (۲)  $P_{A \cdot}$       (۳) ۱      (۴) صفر

۶- یک سکه سالم را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال آنکه دو بار روی سکه بیاید، کدام است؟

- (۱)  $\frac{3}{8}$       (۲)  $\frac{5}{8}$       (۳)  $\frac{6}{8}$       (۴)  $\frac{1}{2}$

۷- در تصویر زیر کدام بخش، هاشور خورده است؟



(۱)  $A \cdot B$       (۲)  $A \cdot B^c$

(۳)  $A^c \cdot B^c$       (۴) گزینه‌های ۲ و ۳ درست است.

۸- هرگاه  $S = 1, 5, 2, 8$ ،  $A = 1, 5$  و  $B = 8$  باشد، کدام پیشامد در یک آزمایش

تصادفی حتمی است؟

- (۱) A      (۲) B      (۳) A · B      (۴) S

۹- احتمال اینکه احمد یک مسأله را درست حل کند،  $\frac{3}{5}$  است و احتمال اینکه محمود همان

مسأله را درست حل کند،  $\frac{1}{4}$  است. این مسأله را به هر دو شخص می‌دهیم تا حل کنند. احتمال آنکه

مسأله درست حل شود، کدام است؟

$$\frac{3}{20} (1) \quad \frac{14}{20} (2) \quad \frac{17}{20} (3) \quad \frac{20}{20} (4)$$

۱۰- در جعبه A دو مهرهٔ سبز و سه مهرهٔ قرمز و در جعبه B سه مهرهٔ قرمز و دو مهرهٔ زرد وجود دارد. از هر جعبه، یک مهره به تصادف اختیاری کنیم. احتمال هم‌رنگ بودن مهره‌ها کدام است؟

$$\frac{4}{25} (1) \quad \frac{6}{25} (2) \quad \frac{9}{25} (3) \quad \frac{16}{25} (4)$$

۱۱- اگر از کلاسی که ۱۰ دانش‌آموز تهرانی و ۲۰ دانش‌آموز غیرتهرانی در آن درس

می‌خوانند، دو نماینده انتخاب کنیم، احتمال آن که هر دو نماینده تهرانی باشند، کدام است؟

$$\frac{3}{29} (1) \quad \frac{1}{9} (2) \quad \frac{1}{10} (3) \quad \frac{2}{29} (4)$$

۱۲- در تست ۱۱ احتمال آن که هر دو نماینده غیرتهرانی باشند، کدام است؟

$$\frac{4}{9} (1) \quad \frac{38}{87} (2) \quad \frac{38}{90} (3) \quad \frac{19}{87} (4)$$

۱۳- در تست ۱۱ چقدر احتمال هست که یکی از نمایندگان تهرانی و دیگری غیرتهرانی باشد؟

$$\frac{10}{87} (1) \quad \frac{20}{87} (2) \quad \frac{40}{87} (3) \quad \frac{80}{87} (4)$$

۱۴- در تست ۱۱ احتمال آن که لااقل یکی از نمایندگان تهرانی باشد، کدام است؟

$$\frac{20}{87} (1) \quad \frac{40}{87} (2) \quad \frac{31}{87} (3) \quad \frac{49}{87} (4)$$

۱۵- در داخل یک جعبه ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه هم شکل و هم وزن وجود دارد. اگر از

داخل این جعبه دو مهره متوالیاً و بدون جایگذاری بیرون بیاوریم. احتمال آن که مهره دومی سفید

باشد، کدام است؟

$$\frac{54}{90} (1) \quad \frac{24}{90} (2) \quad \frac{30}{90} (3) \quad \frac{48}{90} (4)$$

۱۶- در تست ۱۵ احتمال آن که لااقل یکی از مهره‌ها سفید باشد، کدام است؟

$$\frac{42}{90} \text{ (۴)}$$

$$\frac{39}{90} \text{ (۳)}$$

$$\frac{78}{90} \text{ (۲)}$$

$$\frac{12}{90} \text{ (۱)}$$

