«عمل شمردن حالتها را خیلی ساده تصوّر نکنیم. در نظر داشته باشیم که ده نفر می‌توانند به ۳۶۲۸۸۰۰ طریق در یک صف جابجا شوند.»

فصل اوّل

آنالیز ترکیبی

هدفهای رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ـ اصول شمارش (اصل جمع و اصل ضرب) را تعریف کند.

۲ـ مفهوم فاکتوریل را تعریف کند.

۳ـ محاسبات مربوط به فاکتوریل را انجام دهد.

۴ـ ابزارهای شمارش (تبدیل،ترتیب و ترکیب) را همراه با کاربرد آنها توجیه کند.

۵ـ مسائل مربوط به آنالیز ترکیبی را حل کند.

با توجه به اینکه بسیاری از مسائل احتمالات، متکّی بر شمردن تعداد عضوهای متعلّق به مجموعه‌های معیّن می‌باشند، در این فصل با مهمترین فنون شمارش آشنا خواهید شد تا در حل مسائل احتمالات بتوانید از آنها کمک بگیرید.

دو اصل مهم در شمارش

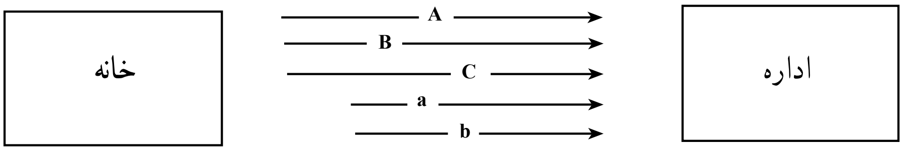
اصول شمارش بر پایه دو اصل بدیهی زیر بنا شده‌اند :

اصل جمع (اصل « یا »)

اگر عمل A را بتوان به m طریق مختلف و عمل B را بتوان به n طریق متفاوت انجام داد، آنگاه A یا B را می‌توان به m + n طریق به انجام رساند.

مثال ۱ــ کارمندی برای رفتن از خانه به اداره، می‌تواند از یکی از سه خطّ اتوبوسرانی B،A یا C و یا یکی از خطوط مینی بوسرانی a یا b استفاده کند. این کارمند به چند صورت می‌تواند وسیلهٔ رفتن خود را برگزیند؟

جواب: ۵ = ۲ + ۳



مثال ۲ــ در یک سلف‌سرویس چهار نوع چلو و خورش و پنج نوع خوراک بدون برنج وجود دارد. یک مشتری به چند طریق می‌تواند غذای خود را برگزیند؟

$m + n = ۴ + ۵ = ۹$

اصل ضرب (اصل « و »)

اگر عمل A را بتوان به m طریق مختلف و عمل B را بتوان به n طریق متفاوت انجام داد، A وB را می‌تواند به $m \times n$ طریق به انجام رساند.

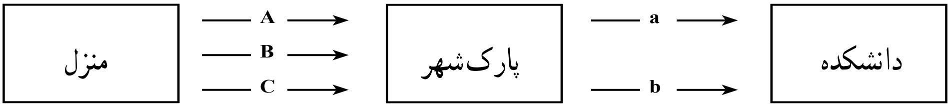
توجّه داشته باشیم که اصول جمع و ضرب برای بیش از دو عمل نیز قابل تعمیم هستند و به‌طور کلی می‌توان گفت : برای تعیین تعداد راههای ممکن انجام یک امر که دارای چند مرحله متوالی است، باید تعداد راه‌حلهای ممکن هر مرحله را درهم ضرب کرد.

> **تذکّر:** حرف ربط « یا » در اصلِ جمع و « و » در اصلِ ضرب نقش تعیین‌کننده‌ای در تشخیص این اصول خواهند داشت البته ممکن است مفاهیم « یا » و « و » در جمله مستتر باشند.

مثال ۳ــ دانشجویی برای رفتن از منزل به دانشکده باید ابتدا با استفاده از یکی از خطوط اتوبوسرانی A، B یا C، خود را به پارک شهر برساند و سپس با استفاده از یکی از خطوط مینی‌بوسرانی

a یا b به دانشکده برود. این دانشجو، به چند طریق می‌تواند از منزل به دانشکده برود؟

جواب: $۳\times۲=۶$



در بسیاری از مسائل عملی، اصول جمع و ضرب به صورت توأم مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثال۴ــ از بین چهار اقتصاددان و دو جامعه‌شناس و سه حسابدار، به چند طریق می‌شود، کمیته‌ای دو نفره تشکیل داد، به‌طوری که اعضای کمیته دارای یک نوع تخصص نباشند؟

جواب: این کمیته را می‌توان به $۸=۲\times۴$ طریق از بین اقتصاددانان و جامعه‌شناسها یا به $۱۲=۳\times۴$ طریق از بین اقتصاددانان و حسابدارها، یا به $۶=۳\times۲$ طریق از بین جامعه‌شناسها و حسابدارها و در نتیجه به : $۲۶=۶+۱۲+۸$ طریق متمایز تشکیل داد.

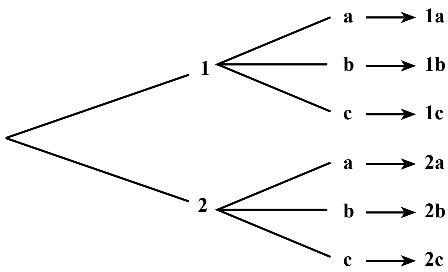
خودآزمایی ــ دو مثال برای اصل جمع و دو مثال برای اصل ضرب بیان کنید.

به نظر شما کدام اصل بیشتر کاربرد دارد؟

مثال ۵ــ احمد پنج شلوار و چهار کت دارد. او به چند طریق می‌تواند کت و شلوار بپوشد؟

$m\times n=۵\times۴=۲۰$

برای درک بیشتر اصل ضرب می‌توان از روش درختی (= شاخه‌ای) نیز کمک گرفت. مثلاً اگر $A=\{۱,۲\}$ ، $B=\{a,b,c\}$ باشد، حاصلضرب $A\times B$ طبق اصل ضرب برابر $۶=۳\times۲$ و طبق روش درختی این شش عضو به‌صورت زیر خواهند بود :



توجّه داشته باشیم که در اصل ضرب گاهی اوقات انتخابها وابسته به انتخابهای قبلی هستند و گاهی اوقات انتخابها، مستقل از انتخابهای قبلی خواهند بود. مثلاً اگر بخواهیم با ارقام ۱ ، ۲ ، ۳ و

۴ اعداد سه رقمی بدون تکرار را بنویسیم، خواهیم داشت :

$$\boxed{۴\ |\ ۳\ |\ ۲} = ۴\times ۳\times ۲ = ۲۴$$

امّا اگر هدف ما نوشتن همه اعداد سه رقمی «با تکرار یا بدون تکرار» باشد، خواهیم داشت :

$$\boxed{۴\ |\ ۴\ |\ ۴} = ۴\times ۴\times ۴ = ۶۴$$

توجّه دارید که در نوشتن اعداد سه رقمی بدون تکرار، انتخابها وابسته به انتخابهای قبلی، امّا در مورد اعداد سه رقمی با تکرار، انتخابها مستقل از انتخابهای قبلی هستند.

فاکتوریل[1] چیست؟

حاصلضرب اعداد صحیح و مثبت ۱،۲،۳،...،n را فاکتوریل n گویند،که با نماد $n!$ نشان داده می‌شود. با توجه به تعریف بالا می‌توان نوشت :

(فرمول۱)

$$\boxed{۱\times ۲\times ۳\times \quad \times (n-۱)\times n = n! \quad \text{یا} \quad n! = n(n-۱)(n-۲)\times \quad \times ۳\times ۲\times ۱}$$

به بیان دیگر می‌شود گفت : $n!$ یعنی ضرب کردن n در همه اعداد صحیح متوالی قبل از خودش تا یک.

مثلاً :

$$۶! = ۶\times ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱ = ۷۲۰ \qquad ۵! = ۵\times ۴\times ۳\times ۲\times ۱ = ۱۲۰$$

از ترکیب دو مثال بالا می‌توان نتیجه گرفت که : $۶! = ۶\times ۵!$

و حالت کلی این مطلب را، می‌توان به صورت فرمول ۲ بیان کرد :

(فرمول ۲) $\boxed{n! = n(n-۱)!}$

ضمناً $۰!$ و $۱!$ را مساوی یک در نظر می‌گیرند. (در ادامه این فصل دلیل این مطلب را خواهید دید.)

مثال۶ــ حاصلضرب اعداد زیر را به‌صورت فاکتوریل یک عدد طبیعی بنویسید.

۱ــ Factorial واژه فاکتوریل از واژه Factor به معنی عامل گرفته شده است.

$$\begin{array}{ccc} ۶ & \times & ۲۰ = \\ \downarrow & & \downarrow \\ \multicolumn{3}{c}{۱\times۲\times۳\times۴\times۵ = ۵!} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} ۲۴ & \times & ۳۰ = \\ \downarrow & & \downarrow \\ \multicolumn{3}{c}{۱\times۲\times۳\times۴\times۵\times۶ = ۶!} \end{array}$$

$$۳!\times۵! = ۶\times۵! = ۶!$$

مثال ۷ــ کسرهای زیر را ساده کنید :

$$\frac{۴!}{۶!} = \frac{۴!}{۶\times۵\times۴!} = \frac{۱}{۳۰}$$

$$\frac{۱۰!\ ۸!}{۱۲!\ ۷!} = \frac{۱۰!\times۸\times۷!}{۱۲!\ ۷!} = \frac{۱۰!\times۸}{۱۲\times۱۱\times۱۰!} = \frac{۲}{۳۳}$$

$$\frac{a!}{(a-۲)!} = \frac{a(a-۱)(a-۲)!}{(a-۲)!} = a^۲ - a$$

$$\frac{a!(b-۱)!}{b!(a-۱)!} = \frac{a(a-۱)!\ (b-۱)!}{b(b-۱)!\ (a-۱)!} = \frac{a}{b}$$

نکته: توجه داشته باشید که اعداد را به صورت فاکتوریل نمی‌توان با هم‌دیگر جمع یا تفریق یا ضرب یا تقسیم کرد. بلکه ابتدا باید هر عدد فاکتوریل دار را به صورت یک عدد صحیح در آورده، سپس اعداد صحیح را در عملیات چهار عمل اصلی شرکت دهیم. مثلاً :

$$۳!\times۲! \neq ۶!$$

$$۳! = ۶$$

$$۲! = ۲$$

$$۳!\times۲! = ۶\times۲ = ۱۲$$

ابزارهای شمارش

منظور از «ابزارهای شمارش» که گاهی (آنالیز ترکیبی) نامیده می‌شوند، سه ابزار تبدیل، ترتیب و ترکیب می‌باشند که بر پایهٔ اصول شمارش (= اصلهای جمع و ضرب) و تعریف فاکتوریل، ساخته و پرداخته شده‌اند.

تبدیل[1] (جایگشت)

جابجا کردن n شیء متمایز را به صورتهای مختلف در کنار هم، تبدیل n شیء گویند. که با نماد P_n نشان داده می‌شود.

برای تعیین تعداد کل تبدیلهای n شیء، می‌توان n خانه (حُجره) را درنظر گرفت که برای پر کردن خانه اوّل یکی از n شیء و پس از آن، برای پر کردن خانه دوم یکی از $n-۱$ شیء باقیمانده و... و سرانجام برای پر کردن خانهٔ آخر، فقط یک شیء باقیمانده را می‌توان مورد استفاده قرار داد و طبق اصل ضرب، پر کردن این خانه‌ها به :

$$n(n-۱)(n-۲)\times\ldots\times۱$$

طریق، امکان‌پذیر خواهد بود.

خانه اول	خانه دوم	خانه سوم		خانه آخر
به n طریق	به ۱ــ n طریق	به ۲ــ n طریق	و . . . و	به (۱) طریق

به کمک این استدلال می‌توان نوشت :

(فرمول ۳) $\boxed{P_n = n!}$

برای درک بیشتر فرمول ۳ (فرمول تبدیل) به یک مثال دیگر توجه کنید : فرض کنید در یک ردیف از یک سالن سخنرانی، چهار صندلی در کنار هم قرار دارد و قرار است چهار نفر از بیرون وارد سالن شده، روی صندلیها بنشینند. نفر اولی که وارد می‌شود، می‌تواند به چهار طریق جای خود را انتخاب کند. نفرات دوم، سوم و چهارم به‌ترتیب می‌توانند به ۲،۳ و ۱ طریق صندلی خود را برگزینند. اگر انتخاب محلّ نشستن را توسط هر یک از این چهار نفر، یک عمل جداگانه درنظر بگیریم، عمل اول به ۴ طریق، عمل دوم به ۳ طریق، عمل سوم به ۲ طریق و عمل چهارم به ۱ طریق امکان‌پذیر می‌باشد و طبق اصل ضرب، این چهار عمل را به $۱\times۲\times۳\times۴$ طریق، می‌توان انجام داد. با توجه به تعریف فاکتوریل که حاصلضرب اعداد صحیح و مثبت ۳،۲،۱ و ۴ را چهار فاکتوریل (=!۴) می‌نامیم، داریم :

$$P_۴ = ۴! = ۴\times۳\times۲\times۱ = ۲۴$$

مثال ۸ ــ پنج پروندهٔ مالیاتی مختلف را به چند طریق می‌توان در یک قفسه چید؟

---

۱ ــ Permutation

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$$

مثال ۹ــ کتابداری می‌خواهد شش کتاب متفاوت با نامهای مختلف را در یک قفسه کتابخانه بدون در نظر گرفتن هیچ شرطی از راست به چپ، بچیند. این کار را به چند صورت می‌تواند انجام دهد؟

$$P_6 = 6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$$

تبدیلهای حلقوی ــ اگر n شیء مختلف را بخواهیم روی یک حلقهٔ بسته (مثلاً روی محیط یک دایره) به شکلهای مختلف قرار دهیم، تعداد حالتها، از رابطهٔ $(n-1)!$ به‌دست می‌آید. علت این امر آنست که اگر تمامی n شیء مزبور که بر محیط بسته‌ای چیده شده‌اند، در یک جهت تغییر مکان دهند، صورت جدیدی پدیدار نخواهد شد، لیکن اگر یکی از n شیء را ثابت نگه داریم و $n-1$ شیء باقیمانده را جابجا کنیم صورتهای تازه‌ای فراهم می‌شود. با این توضیح، می‌توان نوشت :

$$\boxed{{}^*P_n = (n-1)!} \qquad \text{(فرمول ۴)*}$$

مثال ۱۰ــ پنج نفر اعضای شورای یک دادگاه، به چند صورت می‌توانند دور یک میز بنشینند؟

$${}^*P_5 = (5-1)! = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

تبدیلهای با تکرار ــ اگر از n شیء مفروض، r_1 شیء از یک نوع، r_2 شیء از نوع دیگر و... و سرانجام r_k شیء از نوع دیگری باشند، به‌طوری‌که $r_1 + r_2 + \quad + r_k = n$ باشد، تعداد تبدیلهای کل آنها از رابطهٔ $\frac{n!}{r_1!r_2! \quad r_k!}$ تعیین خواهد شد. به بیان دیگر، هرگاه یک مجموعه n عضوی به k زیرمجموعه $r_1, r_2, \quad , r_k$ عضوی افراز شده باشد، تعداد تبدیلهای ممکن از فرمول ۵ معلوم خواهد شد.

$$\boxed{{}^*P_n = \frac{n!}{r_1!r_2! \quad r_k!}} \qquad \text{(فرمول ۵)*}$$

برای روشن شدن مطلب و درک فرمول۵ به مثال عینی زیر توجه کنید.

فرض کنید می‌خواهیم با حروف به کار رفته در کلمه « دبیر »، بدون توجه به معنی کلمات ساخته شده، کلمات چهار حرفی بسازیم، چون حروف به کار رفته در کلمه «دبیر»، متفاوت هستند، طبق تعریف تبدیل از رابطهٔ :

$$P_4 = 4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

---

* وجود علامت ستاره در برخی از فرمولها، به معنی استثنایی بودن آن موارد است.

تعداد کلمات را می‌توان معلوم کرد. اما اگر بخواهیم با حروف به کار رفته در کلمهٔ «دیدم» کلمات چهار حرفی بسازیم، چون جابجا کردن دو حرف «د»، تغییری در کلمات به‌وجود نمی‌آورد، لذا باید !۴ را بر!۲ تقسیم کرد (در حقیقت با این عمل !۲ ضرب اضافی به عمل آمده در !۴ را به خاطر حرف «د» جبران خواهیم کرد). در این صورت باید بنویسیم :

$$*P_{۴} = \frac{۴!}{۲!} = ۱۲$$

و اگر در کلمات دیگر، به‌جای یک دسته حروف تکراری، چند دسته حروف تکراری داشته باشیم، (نظیر کلمه ساسانیان که دارای دو حرف «س» و سه حرف «الف» و دو حرف «ن» می‌باشد.)باید $n!$ را بر فاکتوریل هر یک از دسته‌های تکراردار، تقسیم کنیم. مثلاً برای واژهٔ (ساسانیان) تعداد کلمات هشت حرفی از رابطهٔ $\frac{۸!}{۲!۳!۲!}$ معلوم خواهد شد.

مثال ۱۱ــ با حروف به کار رفته در واژه «بابا خانیان» چند کلمهٔ ده حرفی می‌توان نوشت؟

$$*P_{۱۰} = \frac{۱۰!}{۲!۴!۲!} = ۳۷۸۰۰$$

مثال ۱۲ــ با ارقام به‌کار رفته در عدد **۳۴۳۳۴**، چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟

$$*P_{۵} = \frac{۵!}{۳!۲!} = ۱۰$$

مثال ۱۳ــ به چند طریق متمایز می‌توان چهار خودکار آبی و پنج خودکار سبز و دو خودکار قرمز را در کنار هم چید؟

$$*P_{۱۱} = \frac{۱۱!}{۴!۵!۲!} = ۶۹۳۰$$

توجه داشته باشید که اگر این یازده خودکار به لحاظ تفاوتهایی که مثلاً در اندازه یا حجم یا اسم یا شماره آنها وجود دارد، متمایز بودند، به :

$P_{۱۱} = ۱۱! = ۳۹۹۱۶۸۰۰$ طریق می‌شد آنها را کنار هم چید.

ترتیب[۱]

تعریف ــ جابجا کردن r شیء از n شیء مختلف را $(r \le n)$ ترتیب r شیء از n شیء، یا ترتیب n شیء r به r گویند که با نمادهای P_n^r یا A_n^r نشان داده می‌شود.[۲] برای به‌دست آوردن

۱ــ Arrangement

۲ــ ترتیب را با نماد $P_{(n,r)}$ نیز نشان می‌دهند.

تعداد ترتیبهای r عنصری از n شیء مختلف، می‌توان n خانهٔ مختلف را در نظر گرفت که برای پر کردن خانه اول یکی از n شیء، پس از آن برای پر کردن خانهٔ دوم یکی از $n-۱$ شیء باقیمانده و برای پر کردن خانه سوم یکی از $n-۲$ شیء به جا مانده و... و سرانجام برای پر کردن خانهٔ r اُم یکی از $n-(r-۱)$ یا $n-r+۱$ شیء را در نظر گرفت :

خانه r اُم		خانه سوم	خانه دوم	خانه اول
با یکی از $n-r+۱$ شیئ	....	با یکی از $n-۲$ شیئ	با یکی از $n-۱$ شیئ	با یکی از n شیئ

حال اگر بخواهیم همهٔ این خانه‌ها را پر کنیم (بخواهیم تمام r عمل را انجام دهیم)، طبق اصل ضرب خواهیم داشت :

$$\boxed{P_n^r = n(n-۱)(n-۲)\times\ldots\times(n-r+۱)}$$ (فرمول ۶)

اگر رابطه بالا را یک‌بار در $(n-r)!$ ضرب و یک‌بار بر $(n-r)!$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت :

$$P_n^r = \frac{n(n-۱)(n-۲)\times \quad \times(n-r+۱)\times(n-r)!}{(n-r)!}$$

ضمناً طبق فرمول ۱ می‌توان نوشت :

$$n(n-۱)(n-۲)\times \quad \times(n-r+۱)\times(n-r)! = n!$$

بنابراین فرمول ۶ را به‌صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد :

$$\boxed{P_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}}$$ (فرمول ۷)

تذکّر: به کمک فرمولهای تبدیل و ترتیب، می‌توان نتایج زیر را به‌دست آورد :

طبق فرمول ترتیب (۱) $P_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{۰!}$

طبق فرمول تبدیل (۲) $P_n^n = n!$

نتیجه (۳) $\frac{n!}{۰!} = n!$

و رابطهٔ (۳)، زمانی با معنی خواهد بود که : $\boxed{۰! = ۱}$ باشد.

با بیان این تذکّر، متوجّه می‌شویم که ترتیب، حالت خاصّی از تبدیل است که در آن $r \le n$ است. چنانچه $r = n$ باشد، اصطلاح تبدیل و درصورتی که $r < n$ باشد، اصطلاح ترتیب به‌کار برده می‌شود.

برای تفهیم بهتر فرمول ترتیب، به یک مثال عینی توجه کنید :

فرض کنید در یک ردیف از یک سالن سخنرانی، ۸ صندلی وجود دارد و قرار است ۳ نفر وارد سالن شوند و روی صندلیها بنشینند.

نفر اول می‌تواند به ۸ طریق جای خود را برگزیند، نفر دوم به ۷ طریق و نفر سوم به ۶ طریق می‌توانند جاهای خود را انتخاب کنند، طبق اصل ضرب، این سه نفر می‌توانند به ۶×۷×۸ طریق جاهای خود را برگزینند و با این ترتیب، می‌توان نوشت :

$$P_{۸}^{۳} = ۸ \times ۷ \times ۶ = n(n-۱)(n-r+۱)$$

و این همان فرمول ۶ است، از طرفی می‌توان نوشت :

$$P_{۸}^{۳} = ۸ \times ۷ \times ۶ = \frac{۸!}{۵!} = \frac{۸!}{(۸-۳)!}$$

و این نیز همان فرمول ۷ می باشد.

مثال ۱۴ــ یک خانوادهٔ چهار نفری به چند طریق می‌توانند سه به سه در کنار هم، عکس بگیرند؟

$$P_{۴}^{۳} = \frac{۴!}{(۴-۳)!} = ۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$$

مثال ۱۵ــ در یک شرکت، ۱۰ کارمند کار می‌کنند، به چند صورت می‌توان از بین آنها یک شورای ۳ نفره تشکیل داد که شامل یک رئیس شورا، یک معاون شورا و یک بازرس شورا باشد؟

$$P_{۱۰}^{۳} = \frac{۱۰!}{(۱۰-۳)!} = \frac{۱۰ \times ۹ \times ۸ \times ۷!}{۷!} = ۷۲۰$$

ترتیبهای با تکرار ــ هرگاه تکرار یک یا چند شیء از n شیء در ترتیبهای ساخته شده مجاز باشد، « ترتیب با تکرار » حاصل خواهد شد. فرض کنید شما می‌خواهید با استفاده از ارقام ۱،۲،۳و۴، تمام اعداد سه رقمی ممکن را بسازید. برای تعیین تعداد آنها، از استدلال زیر استفاده خواهید کرد :

جای یکان	جای دهگان	جای صدگان
به چهار طریق	به چهار طریق	به چهار طریق

زیرا در هر یک از خانه‌های یکان، دهگان و صدگان می‌توان ۱ یا ۲ یا ۳ و یا ۴ را قرار داد و طبق اصل ضرب، هر سه جا را می‌توان به ۴×۴×۴ یا $۴^۳$ طریق پرکرد.

به طور کلی فرمول ۸ را برای ترتیبهای با تکرار به‌کار می‌برند :

(فرمول ۸)* $\boxed{{}^*P_n^r = n^r}$

همان‌طور که قبلاً اشاره شد، فرمول ۸ درحالتی است که انتخابهای بعدی مستقل از انتخابهای قبلی هستند.

مثال زیر تفاوت ترتیبهای بدون تکرار و با تکرار را نشان می‌دهد.

مثال ۱۶ــ دو خودکار آبی و مشکی(A و M) را به چند صورت می‌توان به ۳ نفر داد؟ چنانچه :

الف) دادن بیش از یک خودکار به هر نفر مجاز نباشد.

ب) دادن بیش از یک خودکار به هر نفر مجاز باشد.

حل: موضوع بند « الف »، ترتیبهای بدون تکرار است.

عمل دوم		عمل اول
خودکار مشکی را به یکی از ۲نفر باقیمانده می‌توان داد.	آنگاه ⟵	خودکار آبی را می‌توان به یکی از ۳ نفر داد.
به دو طریق		به سه طریق

و طبق اصل ضرب، دادن دو خودکار متمایز به سه نفر از رابطهٔ ۶ = ۲×۳ معلوم می‌شود. امّا موضوع بند « ب »، مربوط به ترتیبهای با تکرار خواهد بود :

خودکارمشکی را هم می‌توان به یکی از ۳ نفر داد.	آنگاه ⟵	خودکار آبی را می‌توان به یکی از ۳ نفر داد.

و طبق اصل ضرب، هر دو عمل را به ۹ = ۳×۳ طریق می‌توان انجام داد.

مثال ۱۷ــ با ارقام ۳،۲،۱،۰ و ۵ چند عدد دو رقمی با تکرار مجاز ارقام، می‌توان نوشت؟

جای یکان		جای دهگان
با همه ارقام	و آنگاه ⟵	با همه ارقام بجز صفر
به پنج طریق		به چهار طریق

لذا طبق اصل ضرب، داریم : $P_۵^۲ = ۴ \times ۵ = ۲۰$

تذکّر: بهتر است مسائل تبدیل و ترتیب را با کمک اصل ضرب حل کنیم تا با سرعت بیشتری به جواب برسیم. مثلاً اگر در مثال ۱۷ گفته شود که چند عدد دو رقمی زوج می‌توان نوشت با کمک اصل ضرب به صورت زیر عمل خواهیم کرد :

جای دهگان	جای یکان	
همه ارقام بجز صفر	فقط صفر یا ۲	$P_۵^۲ = ۴ \times ۲ = ۸$
به چهار طریق	به دو طریق	

در حالی که اگر بخواهیم این مثال را ابتدا با کمک فرمولِ ترتیبهای با تکرار حل کنیم، خواهیم داشت :

کلّ اعداد $\qquad P_n^r = n^r \Rightarrow P_۵^۲ = ۵^۲ = ۲۵$

سپس باید اعدادی را که سمت چپ‌شان صفر است و نیز اعدادی را که یکانشان فرد است، محاسبه کرده، از کلّ اعداد کنار بگذاریم.

آن تعداد که سمت چپشان صفر است. $\qquad ۲۵ \times \frac{۱}{۵} = ۵$

آن تعداد که سمت چپشان صفر نیست. $\qquad ۲۵ - ۵ = ۲۰$

آن تعداد که یکانشان فرد است. $\qquad ۲۰ \times \frac{۳}{۵} = ۱۲$

آن تعداد که یکانشان زوج است. $\qquad ۲۰ - ۱۲ = ۸$

مشاهده می‌کنید که راه‌حلّ اول (استفاده از اصل ضرب) بسیار کوتاه‌تر از راه‌حل دوم (استفاده از فرمول ترتیبهای با تکرار و منطق ریاضی) می‌باشد.

نکته: در مسایلی که ترتیب قرارگرفتن اشیاء مورد توجه باشد، یا از تبدیل استفاده خواهیم کرد و یا از ترتیب. مانند نوشتن کلمات با حروف و یا نوشتن اعداد با ارقام. حال اگر کل اشیاء بخواهند جابه‌جا شوند فرمول «تبدیل» کاربرد پیدا می‌کند و اگر بخشی از کل اشیاء بخواهند جابه‌جا شوند، دستور «ترتیب» مورد استفاده قرار می‌گیرد.

ترکیب[1]

تعریف ــ درهم آمیختن r شیء از n شیء مختلف را ترکیب r شیء از n شیء گویند، که با نمادهای C_n^r یا $\binom{n}{r}$ نشان داده می‌شود.[2]

به بیان دیگر می‌توان گفت که ترکیب، انتخابی از اشیا را گویند که در آن، ترتیب قرار گرفتن اجزا در کنار هم مهمّ نباشد، بلکه با هم بودن اجزا مَدّ نظر باشد.

در ترکیب (برخلاف ترتیب) جابجا شدن اشیا در هر نمونه r عضوی، نمونهٔ تازه‌ای فراهم نمی‌کند. با این ترتیب می‌توان ترکیب را معادل مفهوم «زیر مجموعه» در ریاضیّات دانست. برای تشخیص تفاوت بین ترتیب و ترکیب و رابطهٔ آنها به یک مثال توجه کنید.

حروف A، B و C را درنظر بگیرید. اگر بخواهید کلمات دو حرفی بدون تکرار را که می‌توان با این حروف ساخت، بنویسید، با موضوع ترتیب روبرو خواهید بود و خواهید داشت :

$$AB-AC-BC-BA-CA-CB$$
$$P_{۳}^{۲}=۳\times۲=۶$$

ترتیبهای دو شیء از سه شیء مختلف

توجه دارید که در این صورت AB و BA با هم فرق دارند حال اگر همان سه حرف را نمایندهٔ ۳ رنگ مثلاً آبی (A)، بنفش (B)، سرخ (C) در نظر بگیرید و بخواهید رنگهایی مرکب از دو رنگ مختلف بسازید، موضوع مسأله به «ترکیب» مربوط می‌شود :

$$\left.\begin{array}{l} AB \to \text{بنفش و آبی} \\ CA \to \text{آبی و سرخ} \\ CB \to \text{بنفش و سرخ} \end{array}\right\} \text{ترکیبهای دو عضوی از یک مجموعهٔ سه عضوی}$$

توجه دارید که در این صورت AB و BA یک معنی خواهند داشت، زیرا رنگهای آبی و بنفش، همان رنگهای بنفش و آبی هستند. مشاهده می‌شود که **تعداد ترکیبها همواره به اندازهٔ $\frac{۱}{r!}$ تعداد ترتیبها خواهند بود.** و با کمک همین استدلال می‌نویسیم :

$$C_n^r=\frac{۱}{r!}\times P_n^r=\frac{۱}{r!}\times\frac{n!}{(n-r)!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

---

۱ ــ Combination

۲ــ مفهوم ترکیب را با نماد $C_{(n,r)}$ نیز نشان می‌دهند.

و با این ترتیب، فرمول زیر برای تعیین تعداد ترکیبها ساخته خواهد شد :

$$\boxed{C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}} \ ، \ n \geq r$$ (فرمول۹)

نکته: برای تعیین تعداد ترکیبها، می‌توانید ابتدا تعداد ترتیبها را محاسبه کرده، نتیجه را بر $r!$ تقسیم نمایید.

مثال ۱۸ــ به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ حساب جاری در یک بانک، به‌طور تصادفی دو حساب جاری را به‌عنوان یک نمونه، انتخاب کرد؟

$$C_{۱۰}^{۲} = \frac{۱۰!}{۲!۸!} = ۴۵$$

مثال ۱۹ــ دبیر حسابداری در امتحان آخر ترم ۲۰ سؤال به دانش‌آموزان خود داده است که آنها به‌طور دلخواه به ۱۸ سؤال پاسخ دهند. دانش‌آموزان به چند طریق می‌توانند سؤالات خود را برگزینند؟

$$C_{۲۰}^{۱۸} = \frac{۲۰!}{۱۸!۲!} = ۱۹۰$$

مثال ۲۰ــ تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی را که می‌توان از مجموعهٔ :
$\{ a, ۲, ج, \square, \Delta, 8 \}$ ساخت، معلوم کنید.

$$C_{۶}^{۳} = \frac{۶!}{۳!۳!} = \frac{۶\times۵\times۴}{۶} = ۲۰$$

خودآزمایی (۱) ــ ترکیبهای زیر را حل کرده، برای هر کدام یک قانونمندی ثابت بیان کنید :

$$C_{۵}^{۰}, C_{۵}^{۱}, C_{۵}^{۲}, C_{۵}^{۳}, C_{۵}^{۴}, C_{۵}^{۵}$$

خودآزمایی(۲) ــ ترکیبهای عنوان شده در خودآزمایی (۱) را محاسبه کرده، مجموع آنها را به‌صورت توانی از ۲ بنویسید.

روابط زیر شما را در پیدا کردن جواب ترکیب‌ها، کمک می‌کند :

$$۱)\ C_n^{۰} = C_n^n = ۱$$

$$۲)\ C_n^{۱} = C_n^{n-۱} = n$$

$$۳)\ C_n^{۲} = C_n^{n-۲} = \frac{n(n-۱)}{۲!}$$

۴) $C_n^{3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$

۵) $C_n^{r}=C_n^{n-r}$

۶) $C_n^{0}-C_n^{1}+C_n^{2}-C_n^{3}+\quad C_n^{n}=0$

ترکیبهای با تکرار ــ اگر در n شیء مورد نظر، برخی از اشیا مثل هم و یکسان باشند و بخواهیم ترکیبهایی rتایی بسازیم، در برخی از ترکیبها اشیای تکراری خواهیم داشت. (مثلاً AA می‌تواند یک ترکیب دو حرفی با تکرار از مجموعهٔ حروف A و A وB و C وD باشد.) به چنین مواردی ترکیبهای با تکرار گفته می‌شود.

چون اثبات و توضیح فرمول ترکیبهای با تکرار، خارج از برنامه درسی است، لذا این فرمول را بدون ذکر دلیل نشان می‌دهیم :

$$\boxed{{}^{*}C_{(n+r-1)}^{r}=\frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}}$$ (فرمول ۱۰)

مثال ۲۱ــ به چند طریق می‌توان از بین ۵ فوتبالیست، یک دروازه‌بان و یک کاپیتان انتخاب کرد؟ با توجّه به این که یک فرد نیز می‌تواند هر دو کار را انجام دهد.

$$C_{(5+2-1)}^{2}=\frac{(5+2-1)!}{2!(5-1)!}=\frac{6!}{2!4!}=\frac{6\times5}{2}=15$$

توضیح: در مثال بالا اگر قرار بر این باشد که از بین پنج فوتبالیست دو نفر را برای وظایف مختلف (مثلاً دروازه‌بانی و دفاع) انتخاب کنیم، تعداد حالتهای انتخاب از ترکیبهای بدون تکرار به‌صورت $C_5^{2}=10$ معلوم می‌شوند. توجّه دارید که اختلاف در این دو حالت ۵ مورد است. ($15-10=5$) که این موارد به حالتهایی برمی‌گردد که هر یک از پنج فوتبالیست در حالت اول می‌توانستند هم دروازه‌بان باشند و هم کاپیتان، درحالی که در حالت دوم دروازه‌بان و دفاع حتماً باید دو نفر مختلف باشند.

تمرینهای فصل اوّل

۱ــ اصل « جمع » و اصل « ضرب » را همراه با ذکر مثال توضیح دهید.

۲ــ فاکتوریل را تعریف کنید.

۳ــ تساوی مقابل را با استفاده از آنالیز ترکیبی توجیه کنید : $۰!=۱!=۱$

۴ــ با همه حروف به کار رفته در کلمه « مالیات »، چند کلمهٔ شش حرفی می‌شود نوشت؟

۵ــ کسرهای زیر را ساده کنید :

$$\frac{(n+۱)!}{n!},\ \frac{(a+۲)!}{(a-۲)!},\ \frac{a!}{(a-۲)!},\ \frac{۵!۸!}{۷!۱۰!},\ \frac{۱۰!}{۱۲!}$$

۶ــ هفت نفر افراد یک خانواده به چند طریق می‌توانند در یک صف بایستند؟ این افراد به چند طریق می‌توانند در دو اتومبیل به ظرفیتهای ۴ نفره و ۳ نفره سوار شوند؟

۷ــ اگر تکرار ارقام در اعداد مجاز باشد، با ارقام ۵،۳،۲،۱ و ۷ چند عدد سه رقمی می‌شود نوشت؟ چند تای آنها زوج است؟

۸ــ درستی تساویهای زیر را نشان دهید.

۱) $C_n^n = C_n^{\circ}$ ‏ ‏ ‏ ‏ ۲) $C_n^r = \frac{P_n^r}{r!}$

۹ــ از ده کارمند مرد و ۵ کارمند زن شاغل در یک شرکت، به چند صورت می‌شود یک شورای چهار نفره انتخاب کرد؟ اگر بخواهیم دو نفر از اعضای شورا مرد و دو نفر دیگر آن زن باشند، این عمل را به چند طریق می‌توان انجام داد؟

۱۰ــ در یک امتحان، ۱۲ سؤال در اختیار دانش‌آموزان قرار داده شده است که باید ۱۰ سؤال را به دلخواه انتخاب کرده، حل کنند، چنانچه مجبور باشند سؤالات (۱) و (۲) را حتماً انتخاب کنند این عمل را به چند طریق می‌توانند انجام دهند؟

۱۱ــ شش نفر افراد شاغل در حسابداری یک اداره، به چند طریق می‌توانند دور یک میز بنشینند؟

۱۲ــ به چند صورت می‌توان پنج پروندهٔ مالی و چهار پروندهٔ اداری را در یک قفسه چید، به‌طوری که پرونده‌های مالی در سمت راست باشند؟

۱۳ــ حاصل عبارت $P_n^{n-۱}$ را معلوم کنید.

۱۴ــ اگر تعداد ترتیبهای x شیء از پنج شیء، x برابر تعداد ترتیبهای $x-۱$ شیء از پنج شیء باشد، مقدار x را به‌دست آورید.

۱۵ــ در یک آزمون ۱۰ سؤال ریاضی و ۸ سؤال آمار داده شده که دانش‌آموزان باید به ۱۲ سؤال از آن‌ها پاسخ دهند. معلوم کنید دانش‌آموزان به چند طریق می‌توانند سؤالات خود را انتخاب کنند، اگر بخواهیم به نیمی از سؤالات آمار پاسخ داده باشند؟

۱۶ــ با حروف کلمه حسابداری چند کلمه مختلف می‌شود، نوشت؟

۱۷ــ به چند طریق می شود از بین ۱۰ نفر افراد یک شرکت، شورایی شامل یک رئیس، یک منشی و یک حسابدار انتخاب کرد؟

۱۸ــ در یک هتل سه اطاق خواب وجود دارد که یکی از آنها سه نفره و دوتای دیگر دو نفره هستند. مدیر این هتل هفت مسافر را به چند طریق می‌تواند در اطاقهای مختلف استقرار دهد.

۱۹ــ در یک کشور اروپایی پلاکهای اتومبیل‌ها را با استفاده از دو حرف الفبا در سمت چپ و یک عدد چهار رقمی در سمت راست تنظیم می‌کنند با توجه به این‌که ۲۶ حرف الفبا دارند، چند اتومبیل را می‌توانند پلاک بدهند؟

۲۰ــ به چند طریق می‌توانید هفت شمع مختلف را دور یک کیک دایره‌ای شکل برای یک فرد هفت ساله بچینید؟

تستهای چهار گزینه‌ای

۱ــ حاصل عبارت $\frac{P_n^r}{P_{n+1}^{r+1}}$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{n+1}$ ۲) $\frac{r}{n}$ ۳) $\frac{1}{(n+1)!}$ ۴) $\frac{r+1}{n+1}$

۲ــ با ارقام صفر، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی بزرگتر از ۳۰۰، بدون تکرار ارقام می‌شود نوشت؟

۱) ۴۰ ۲) ۶۰ ۳) ۸۰ ۴) ۱۲۰

۳ــ یک تاس و یک سکه را با هم پرتاب می‌کنیم. تعداد صورتهایی که در آنها عدد زوج آمده، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۱

۴ــ سه کتاب ریاضی و ۲ کتاب اقتصاد را که با هم متفاوت‌اند، به چند طریق می‌توان در یک قفسه کنار هم قرار داد به طوری که کتابهای هم موضوع، همواره کنار هم باشند؟

۱) ۶۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۵ــ اگر ترکیب $m=\binom{a+b}{a}$ باشد، مقدار ترکیب $\binom{a+b}{b}$ کدامست؟[1]

۱) m ۲) bm ۳) am ۴) (a+b) m

۶ــ شخصی از میان ۱۰ کتاب خود، می‌خواهد دو کتاب را انتخاب کرده، به یکی از دوستانش هدیه کند. این عمل به چند صورت ممکن است؟

۱) ۴۰ ۲) ۴۵ ۳) ۹۰ ۴) ۲۰

۷ــ مجموعه $\{a , b , c , d , e\}$ چند زیرمجموعه ۲ عضوی دارد؟

۱) ۲۵ ۲) ۲۰ ۳) ۱۵ ۴) ۱۰

۸ــ بین ۵ دبیر و ۴ دانش‌آموز، چند کمیتهٔ ۵ نفری مرکب از ۳ دبیر و ۲ دانش‌آموز می‌توان تشکیل داد؟

۱) ۶ ۲) ۱۰ ۳) ۱۵ ۴) ۶۰

۱ــ نماد ترکیب را به دو صورت C_{a+b}^{a} یا $\binom{a+b}{a}$ می‌نویسند.

۹ــ اگر $P_n^۲=۲۰$ باشد، مقدار n کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۱۰ ۴) ۲۰

۱۰ــ جواب معادله $C_x^۲=۲x$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۱۱ــ در یک آزمون، ده سؤال دو جوابی صحیح یا غلط داده شده است. به چند طریق می‌شود به این سؤالات پاسخ داد؟

۱) $۲^{۱۰}$ ۲) $۱۰^۲$ ۳) ۲×۱۰ ۴) ۱۰

۱۲ــ ده تیم فوتبال به چند طریق می توانند، دو به دو با هم مسابقه بدهند؟

۱) ۹۰ ۲) ۴۵ ۳) ۵۵ ۴) ۲۰

۱۳ــ با ارقام ۱، ۲، ۳ ، ۴ ، ۵ ، ۰ چند عدد دو رقمی بدون تکرار ارقام می‌شود نوشت؟

۱) ۲۰ ۲) ۳۶ ۳) ۲۵ ۴) ۳۰

۱۴ــ با حروف واژه «ترازنامه» چند کلمه هشت حرفی می‌شود نوشت؟

۱) $۸!$ ۲) $۸^۸$ ۳) ۸×۸ ۴) $\frac{۸!}{۲!}$

۱۵ــ پنج کارمند حسابداری یک شرکت به چند طریق می‌توانند دور یک میز کنفرانس بنشینند؟

۱) ۶۰ ۲) ۲۰ ۳) ۱۲۰ ۴) ۲۴