

مقدمه

امروزه برای رفع بسیاری از مشکلات فرهنگی، اقتصادی، اجتماعی، نظامی و حتی سیاسی، از ریاضیات استفاده می‌شود. به عبارت دیگر، پاسخ دادن به خیلی از سؤالات با استفاده از ریاضیات عملی‌تر است. مسئولین سطوح مختلف سازمان‌ها، برای تعیین اغلب اقلام مجهول و نامشخص، مثل پیش‌بینی نرخ تورّم یا قیمت نفت در سطح جهان یا نرخ بیکاری، از معادلات با متغیرها و درجات مختلف استفاده می‌کنند.

هم‌چنین، مدیران برای برنامه‌ریزی دقیق در موقعیت‌های بحرانی و حسّاسی که متغیرهای زیادی در امور دخالت دارند، ناچارند از تحقیق در عملیات استفاده کنند. بدیهی است کسانی می‌توانند تحقیق در عملیات را به خوبی به کار ببرند که با ریاضیات آشنا باشند. در این کتاب سعی شده است، با استفاده از ریاضیات، به حل برخی از مسائل موجود در امور مالی پرداخته شود. امید است با همکاری معلمان محترم مسائل بیش‌تری در زمینه‌های مربوط مطرح و در کلاس ارائه و حل و بحث گردد.

مؤلف

هدف کلی

ایجاد توانایی در انجام محاسبات به منظور تسلط در ثبت
عملیات حسابداری.

محاسبات ذهنی

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیرنده انتظار می‌رود:

- ۱- ضرب و تقسیم‌های اعداد در «۵، ۵۰، ۵۰۰ و ...» و «۲۵، ۲۵۰، ۲۵۰۰ و ...» را به‌طور ذهنی انجام دهد.
- ۲- «اعداد بین ۱۰ و ۲۰»، «اعداد دورقمی مختوم به ۵» و «مضارب ده‌دهی آن‌ها» را به‌صورت ذهنی درهم ضرب کند.
- ۳- اعداد قابل تبدیل به‌صورت $(a \cdot b)^2$ و اتحاد مزدوج را (که شکل ساده پیدا نمایند) با تبدیل آن‌ها به‌طور ذهنی ضرب نماید.
- ۴- «کسرهای متشکل از صورت و مخرج به شکل عوامل ضرب» را با مهارت ساده نماید و قابلیت تقسیم اعداد به ۲ تا ۱۱ را تشخیص دهد.
- ۵- کاربرد محاسبات ذهنی را در امور مالی انجام دهد.

۱- محاسبات ذهنی

۱-۱ ضرب اعداد در «۵، ۵۰، ۵۰۰ و ...»

برای ضرب کردن هر عدد در «۵» راه‌های متعددی وجود دارد که به یک روش ساده‌ی آن اشاره می‌گردد.

۱-۱-۱ اگر بخواهیم عددی را در «۵» ضرب کنیم، می‌توانیم ابتدا عدد مورد نظر را در

«۱۰» ضرب و سپس بر «۲» تقسیم کنیم.

مثال ۱- عدد ۱۶۵ را در ۵ ضرب کنید.

$$۱۶۵ \times ۵ = ۱۶۵ \times \frac{۱}{۲} = \frac{۱۶۵}{۲} = ۸۲.۵$$

انجام عملیات به صورت ذهنی: صفر را در سمت راست عدد قرار می‌دهیم تا به ۱۶۵° تبدیل شود. حال از سمت چپ عدد شروع به تقسیم می‌نماییم $\frac{۱۶}{۲} = ۸$ سپس ۵ را به ۲ تقسیم می‌کنیم که نتیجه‌ی آن ۲ می‌شود و یک باقی می‌ماند. عدد یک با توجه به صفر، تبدیل به ده می‌شود که به ۲ تقسیم می‌گردد و پنج نتیجه‌ی آن است. پس، جواب ۸۲۵ می‌شود.

مثال ۲- عدد ۱۸۴ را در ۵ ضرب کنید.

یک صفر، در سمت راست عدد مزبور قرار می‌دهیم تا به ۱۸۴° تبدیل شود. حال از سمت چپ عدد، شروع به تقسیم می‌نماییم. ۱۸ تقسیم بر ۲ می‌شود ۹، چهار تقسیم بر ۲ می‌شود ۲ و بالأخره صفر تقسیم بر ۲ می‌شود صفر. پس ۹۲° جواب سؤال ماست.

۲-۱- ضرب اعداد در «۲۵، ۲۵۰، ۲۵۰۰ و ...»: برای ضرب کردن هر عدد در ۲۵ راه‌های متعددی وجود دارد. اما در این جا تنها به دو روش اشاره می‌گردد.

الف) برای ضرب کردن عددی مانند $A = a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0$ در ۲۵ کافی است به روش‌های ذکر شده، عدد مورد نظر را دوبار در ۵ ضرب نماییم.

$$۲۷ \times ۲۵ = ۲۷ \times ۵ \times ۵ \quad \text{مثال ۳- حاصل ضرب عدد ۲۷ در ۲۵ را بیابید.}$$

$$(۲۷ \times ۵) \times ۵ = ۱۳۵ \times ۵ = ۶۷۵ \quad ۲۷ \text{ را دوبار در ۵ ضرب می‌کنیم.}$$

یادآوری می‌شود برای ضرب هر عدد در ۵ پس از انجام چند تمرین، احتیاجی به قلم و کاغذ نیست.

ب) برای ضرب کردن عددی مانند A در ۲۵ می‌توانیم آن عدد را در ۱۰° ضرب و بر ۴ تقسیم نماییم. به عبارت دیگر، برای ضرب هر عدد در ۲۵، کافی است دو صفر در سمت راست آن عدد قرار داده، سپس به روش ذهنی، عدد جدید را به ۴ تقسیم نماییم.

مثال ۴- حاصل ضرب ۱۴ در ۲۵ را به صورت ذهنی پیدا کنید.

$$۱۴ \times ۲۵ = \frac{۱۴۰۰}{۴} = ۳۵۰$$

بدیهی است اگر حاصل ضرب عددی در ۲۵° یا ۲۵۰۰ مورد نظر باشد کافی است آن عدد را در ۲۵ ضرب کنیم. سپس یک یا دو صفر به سمت راست عدد حاصل اضافه نماییم.

مثال ۵- حاصل ضرب ۲۴۵ در ۲۵۰۰ را به صورت ذهنی محاسبه کنید.

$$245 \times 2500 = (245 \times 25) \times 100 = \frac{24500}{4} \times 100 = 612500$$

و یا

$$(245 \times 5) \times 5 \times 100 = (1225 \times 5) \times 100 = 612500$$

۲-۱ تقسیم اعداد بر «۵، ۵۰، ۵۰۰ و ...»

۱-۲-۱ برای تقسیم هر عدد بر ۵، کافی است آن عدد را در ۲ ضرب و بر ۱۰ تقسیم نماییم.

مثال ۶- حاصل تقسیم ۱۴۰ بر ۵ را بیابید.

$$140 : 5 = \frac{140 \times 2}{10} = \frac{280}{10} = 28$$

۲-۲-۱ برای تقسیم هر عدد بر ۵۰، می‌توان آن عدد را در ۲ ضرب نمود و بر ۱۰۰ تقسیم کرد. برای تقسیم بر ۵۰۰ و ۵۰۰۰ ... نیز به همین شکل، قابل محاسبه است.

مثال ۷- حاصل تقسیم ۱۸۶ بر ۵۰ را محاسبه کنید.

$$186 : 50 = \frac{186 \times 2}{100} = \frac{372}{100} = 3/72$$

مثال ۸- حاصل تقسیم ۲۷۰۰۰ بر ۵۰۰ را پیدا نمایید.

$$27000 : 500 = \frac{27000 \times 2}{1000} = \frac{54000}{1000} = 54$$

۳-۱ تقسیم اعداد بر «۲۵، ۲۵۰، ۲۵۰۰ و ...»

۱-۳-۱ برای تقسیم هر عدد بر ۲۵، می‌توان آن را در ۴ ضرب و بر ۱۰۰ تقسیم کرد. (زیرا

$$25 = \frac{100}{4} \text{ است.})$$

مثال ۹- ۶۲۵ را بر ۲۵ تقسیم و سپس پاسخ را مشخص کنید.

$$625 : 25 = \frac{625 \times 4}{100} = \frac{2500}{100} = 25$$

۲-۳-۱ برای تقسیم هر عدد بر ۲۵۰ یا ۲۵۰۰ ... کافی است آن عدد را در ۴ ضرب و بر

۱۰۰۰ یا ۱۰۰۰۰ و یا ... تقسیم کنیم، زیرا $\frac{1}{250} = \frac{4}{1000}$ و $\frac{1}{2500} = \frac{4}{10000}$ است.

مثال ۱۰- حاصل تقسیم ۳۵۰۰ بر ۲۵۰ را محاسبه کنید.

$$۳۵۰۰ : ۲۵۰ = ۳۵۰۰ \times \frac{۴}{۱,۰۰۰} = \frac{۱۴۰۰۰}{۱,۰۰۰} = ۱۴$$

مثال ۱۱- حاصل تقسیم ۴۵۶۰ بر ۲۵۰۰ را پیدا کنید.

$$۴,۵۶۰ : ۲,۵۰۰ = ۴,۵۶۰ \times \frac{۴}{۱۰,۰۰۰} = \frac{۱۸۲۴۰}{۱۰,۰۰۰} = ۱/۸۲۴$$

۴-۱ ضرب عدد دورقمی بین ۱۰ و ۲۰ در خودش

برای ضرب دو عدد دورقمی که بین ۱۰ و ۲۰ قرار دارند باید به این نکته توجه داشت که نتیجه، عددی سه رقمی بین ۱۰۰ = ۱۰^۲ و ۴۰۰ = ۲۰^۲ است.

برای پیدا کردن حاصل ضرب اعداد دو رقمی بین ۱۰ و ۲۰ در خودش به طریق زیر عمل می‌کنیم.

الف) رقم یکان آن دو عدد را در هم ضرب می‌کنیم. اگر حاصل یک رقمی است، آن را به نشانه‌ی اولین رقم سمت راست می‌نویسیم و اگر دو رقمی است رقم یکان آن را می‌نویسیم و دهگان آن را، یعنی ده بر یک یا بیست بر دو و یا ... در حافظه‌ی خود نگه می‌داریم.

ب) رقم یکان آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم و اگر دهگانی از قبل داشته باشیم به آن می‌افزاییم و به نشانه‌ی دومین رقم ثبت می‌نماییم. بدیهی است در صورتی که دهگانی داشته باشد به حافظه می‌سپاریم.
ج) رقم دهگان آن‌ها را در هم ضرب می‌کنیم و در صورتی که از قبل دهگانی در حافظه داشته باشیم با آن جمع می‌کنیم و به نشانه‌ی سومین رقم در کنار رقم‌های قبلی می‌نویسیم.

مثال ۱۲- عدد ۱۳ را در خودش ضرب و نتیجه را محاسبه کنید.

الف) حاصل ضرب ۳×۳ رقم یکان را تشکیل می‌دهد.

$$۱۳ \times ۱۳$$

ب) حاصل جمع ۳+۳ رقم دهگان را تشکیل می‌دهد.

$$۱۶۹$$

ج) حاصل ضرب ۱×۱ رقم صدگان را تشکیل می‌دهد.

مثال ۱۳- حاصل ضرب ۱۴×۱۴ را به دست آورید.

الف) حاصل ضرب ۴×۴ می‌شود ۱۶؛ آن را به نشانه‌ی رقم یکان می‌نویسیم و ۱ را در حافظه نگه می‌داریم.

ب) حاصل جمع ۴+۴ می‌شود ۸؛ آن را با عدد ۱ قبلی جمع می‌کنیم، حاصل رقم دهگان را

تشکیل می دهد (یعنی ۹).

ج) حاصل ضرب 1×1 برابر با ۱ خواهد بود که رقم صدگان را مشخص می نماید. در نتیجه جواب ۱۹۶ است.

مثال ۱۴- 19×19 را محاسبه نمایید.

الف) حاصل ضرب 9×9 می شود ۸۱؛ ۱ را به نشانه ی رقم یکان می نویسیم و هشتاد بر هشت را در حافظه نگه می داریم.

ب) حاصل جمع $9 + 9$ می شود ۱۸، به علاوه ۸ قبلی می شود ۲۶؛ ۶ را به نشانه ی رقم دهگان می نویسیم و بیست بر دو را در حافظه نگه می داریم.

ج) حاصل ضرب 1×1 برابر با یک است، که با ۲ قبلی جمع می شود و حاصل آن ۳ می گردد که آن را به نشانه ی رقم صدگان در نظر می گیریم. پس جواب نهایی ۳۶۱ است.

مثال ۱۵- حاصل ضرب 15×15 را محاسبه نمایید.

الف) $5 \times 5 = 25$ اولین رقم ۵ است.

ب) $5 + 5 = 10$ ، با ۲ قبلی جمع می شود پس دومین رقم (دهگان) ۲ است.

ج) $1 \times 1 = 1$ ، با ۱ قبلی جمع می شود پس رقم صدگان نیز ۲ است.

در نهایت، جواب ما ۲۲۵ است.

۵- ضرب اعداد دورقمی مختوم به ۵ در خودش

برای پیدا کردن حاصل ضرب این گونه اعداد باید به این نکته توجه نمود که نتیجه، عددی سه یا چهاررقمی است و دو رقم سمت راست حاصل ضرب این نوع اعداد، همیشه ۲۵ خواهد بود. برای پیدا کردن حاصل ضرب به طریق زیر عمل می کنیم.

به رقم دهگان یکی از اعداد، یک می افزاییم و در رقم دهگان دیگری ضرب می نماییم. حاصل ضرب را می نویسیم و ۲۵ را در سمت راست آن عدد قرار می دهیم.

$$\overline{a5} \times \overline{a5} = \overline{(a+1) \times (a)(25)}$$

دو رقم سمت راست حاصل ضرب این نوع اعداد همیشه ۲۵ خواهد بود.

مثال ۱۶- حاصل ضرب 35×35 را محاسبه کنید.

یک عدد به ۳ می افزاییم و در ۳ ضرب می نماییم $(3+1)(3) = 12$

حاصل ۱۲ است. سپس ۲۵ را در سمت راست آن قرار می دهیم.

جواب می‌شود ۱۲۲۵

نتیجه برابر است با حاصل ضرب ۳۵×۳۵

مثال ۱۷- حاصل ضرب ۸۵×۸۵ را پیدا کنید.

جواب می‌شود ۷۲۲۵ $۷۲(۸) = (۸+۱)$

۶- ضرب دو عدد با استفاده از اتحاد مزدوج

یادآوری: اتحاد مزدوج $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

در ضرب دو عدد، گاهی می‌توان از اتحاد مزدوج استفاده نمود و جواب را محاسبه کرد.

زمانی که فاصله‌ی اضافی و نقصانی دو عدد نسبت به عدد مختوم به صفر مثل ۱۰۰ یا ۱,۰۰۰ یا ۵۰ و یا ... به یک اندازه باشد، می‌توان از این اتحاد استفاده نمود و پاسخ را محاسبه کرد.

مثال ۱۸- حاصل ضرب ۱۰۱×۹۹ را پیدا کنید.

چون فاصله هر دو عدد نسبت به ۱۰۰ به یک اندازه است، از اتحاد مزدوج استفاده می‌نماییم.

$$(۱۰۰+۱)(۱۰۰-۱) = ۱۰,۰۰۰ - ۱ = ۹,۹۹۹$$

عدد مختوم به صفر را a فرض می‌کنیم و فاصله‌ی آن اعداد تا a را b می‌نامیم.

به عبارت دیگر، نصف مجموع دو عدد را a و نصف تفاضل آن دو عدد را b فرض می‌کنیم و

با استفاده از فرمول اتحاد مزدوج، پاسخ به راحتی قابل محاسبه است.

مثال ۱۹- حاصل ضرب ۹۹۷×۱۰۰۳ را محاسبه کنید.

حاصل جمع این دو عدد ۲۰۰۰ است، در نتیجه نصف آن ۱۰۰۰ می‌شود.

تفاضل این دو عدد ۶ است؛ در نتیجه نصف آن ۳ می‌شود.

$$۱۰۰۳ \times ۹۹۷ = ۱,۰۰۰,۰۰۰ - ۹ = ۹۹۹,۹۹۱ \quad \text{بنابراین:}$$

مثال ۲۰- حاصل ضرب $۹,۹۹۵ \times ۱۰۰۰۵$ را محاسبه کنید.

مجموع این دو عدد ۲۰۰۰۰ است، در نتیجه نصف آن ۱۰۰۰۰ می‌شود.

تفاضل این دو عدد ۱۰ است، در نتیجه نصف آن ۵ می‌شود.

$$(۱۰,۰۰۰+۵)(۱۰,۰۰۰-۵) = ۱۰۰,۰۰۰,۰۰۰ - ۲۵ = ۹۹,۹۹۹,۹۷۵ \quad \text{بنابراین:}$$

مثال ۲۱- حاصل ضرب ۶۱×۵۹ را پیدا کنید.

نصف مجموع این دو عدد ۶۰ و نصف تفاضل این دو عدد ۱ است.

$$(۶۰+۱)(۶۰-۱) = ۳۶۰۰ - ۱ = ۳,۵۹۹ \quad \text{بنابراین:}$$

۷-۱ مجذور نمودن اعداد با استفاده از اتحاد اول و دوم

یادآوری :

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

اتحاد اول

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

اتحاد دوم

برای مجذور کردن اعدادی که نزدیک به اعداد مختوم به صفرند، می‌توان از این اتحادها استفاده نمود و به صورت ذهنی پاسخ را پیدا کرد. در این گونه موارد باید بتوان عدد مورد نظر را که قرار است مجذور شود، تبدیل به مجموع یا تفاضل دو عددی نمود که لااقل یکی مختوم به صفر باشد سپس با استفاده از فرمول پاسخ را مشخص نمود. به مثال‌های زیر توجه کنید تا موضوع روشن‌تر شود.

مثال ۲۲- عدد ۱,۰۰۱ را به توان ۲ برسانید.

فرض می‌کنیم $a=1000$ و $b=1$ است. بنابراین، با استفاده از اتحاد اول می‌توان نوشت :

$$(1,000+1)^2 = 1,000,000 + 1 + 2,000 = 1,002,001$$

مثال ۲۳- عدد ۱,۹۹۹ را به توان ۲ برسانید.

فرض می‌کنیم $a=2,000$ و $b=1$ است؛ بنابراین، با استفاده از اتحاد دوم، می‌توان نوشت :

$$(2,000-1)^2 = 4,000,000 + 1 - 4,000 = 3,996,001$$

۸-۱ نحوه‌ی تعیین باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد بر ۲ تا ۱۱

اگر بخواهیم ببینیم در عدد a چند عدد b وجود دارد، باید a را بر b تقسیم کنیم. a را مقسوم و b را مقسوم‌علیه نامند. از تقسیم این دو، عددی مانند q به نام خارج قسمت به دست می‌آید که نشانگر تعداد b هایی است که در a وجود دارد و هم چنین ممکن است باقی‌مانده‌ای کوچک‌تر از مقسوم‌علیه داشته باشد که آن را با r نمایش می‌دهیم. این رابطه $a = b \times q + r$ وقتی درست است که $0 \leq r < b$ باشد. بدیهی است در صورتی که $r=0$ باشد، آن‌گاه می‌توان گفت که a بر b قابل تقسیم است. مثل ۷۶ که بر ۲ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی آن صفر است. اما ۷۷ بر ۲ قابل قسمت نیست و باقی‌مانده‌ی آن مخالف صفر است (باقی‌مانده‌ی آن ۱ است).

۸-۱-۱ قابلیت تقسیم بر ۲: عددی به ۲ قابل قسمت است که رقم یکان آن زوج یا صفر

باشد. چنانچه آخرین رقم سمت راست آن عدد فرد باشد، نتیجه می‌گیریم که آن عدد بر ۲ قابل قسمت نیست و باقی‌مانده‌اش یک است.

مثال ۲۴- آیا ۴۲۱ بر دو قابل قسمت است؟ چنانچه جواب منفی است، باقی مانده‌ی آن را پیدا کنید.

چون آخرین رقم سمت راست این عدد فرد است؛ بنابراین بر ۲ قابل قسمت نیست و باقی مانده‌ی آن یک است.

مثال ۲۵- آیا ۷۱۸ بر دو قابل قسمت است؟ باقی مانده‌ی آن را نیز معین کنید. چون آخرین رقم سمت راست آن زوج است، پس به ۲ قابل قسمت است و باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۲، صفر است.

۸-۲- ۱-قابلیت تقسیم بر ۳: عددی بر ۳ قابل قسمت است که مجموع ارقامش بر ۳ قابل قسمت باشد. در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۳ صفر است. چنانچه عددی بر ۳ قابل قسمت نباشد، باقی مانده‌ی آن عدد بر ۳، یک یا دو است. برای پیدا کردن باقی مانده‌ی عددی که به ۳ قابل قسمت نیست، باید از مجموع ارقام آن مضرب‌های ۳ را کسر نمود.

مثال ۲۶- آیا ۲۳۱ بر ۳ قابل قسمت است؟ باقی مانده‌ی تقسیم آن را بر ۳ نیز تعیین کنید. چون $2 + 3 + 1 = 6$ است و عدد ۶ مضرب ۳ است، پس این عدد به ۳ قابل قسمت است و باقی مانده‌ی آن صفر است.

مثال ۲۷- آیا ۳۲۲ بر ۳ قابل قسمت است؟ باقی مانده‌ی تقسیم آن را بر ۳ نیز معین نمایید. چون $3 + 2 + 2 = 7$ ، مضرب ۳ نیست پس عدد ۳۲۲ بر ۳ قابل قسمت نیست. برای تعیین باقی مانده، کافی است نزدیک‌ترین مضرب ۳ را از مجموع ارقام آن کم نماییم:

$$7 - 6 = 1$$

یا عدد ۷ را بر ۳ تقسیم کرد، تا باقی مانده‌ی یک به دست آید.

پس باقی مانده‌ی تقسیم ۳۲۲ بر ۳، برابر با ۱ است.

۸-۳- ۱-قابلیت تقسیم بر ۴: عددی به ۴ قابل قسمت است که دو رقم سمت راست آن صفر یا بر ۴ قابل قسمت باشد. چنانچه عددی بر ۴ قابل قسمت نباشد، باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۴ عدد ۱، ۲ یا ۳ است. برای یافتن باقی مانده‌ی عددی که به چهار قابل قسمت نباشد، باید نزدیک‌ترین عدد مضرب ۴ را از آن عدد کم نمود تا باقی مانده‌ای کوچک‌تر از ۴ به دست آید.

مثال ۲۸- آیا عدد ۵۱۲۴ به ۴ قابل قسمت است؟

چون ۲۴ به ۴ قابل قسمت است، پس این عدد به ۴ قابل قسمت است و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر ۴، صفر است.

مثال ۲۹— آیا عدد ۷۲۴۳ به ۴ قابل قسمت است؟ باقی مانده‌ی تقسیم آن را بر ۴ نیز پیدا کنید.
از آن جا که ۴۳ به ۴ قابل قسمت نیست عدد ۷۲۴۳ نیز به ۴ قابل قسمت نیست. روشن است
که باقی مانده‌ی تقسیم ۴۳ بر ۴ عددی به جز ۳ نیست. بنابراین، باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۴ عدد
۳ است.

روش دیگر: رقم یکان را در ۲ و رقم دهگان را در ۲ ضرب و حاصل آن‌ها را با هم جمع
می‌نماییم. اگر حاصل بزرگ‌تر یا مساوی ۴ باشد مضارب ۴ را از آن کم می‌کنیم تا مانده به کم‌تر از
چهار برسد.

$$(3 \times 2) + (4 \times 2) = 3 + 8 = 11$$

$$11 - 8 = 3$$

۴— ۸— ۱ قابلیت تقسیم بر ۵: عددی بر ۵ قابل قسمت است که رقم اول سمت راست آن
صفر یا پنج باشد. درغیراین صورت، آن عدد بر ۵ قابل قسمت نیست. برای تعیین باقی مانده‌ی آن عدد
بر ۵ کافی است به رقم اول سمت راست آن توجه کنیم. اگر این رقم از ۵ کوچک‌تر است، پس
باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۵، خود این عدد است. ولی اگر این رقم بیش‌تر از ۵ باشد باید ۵ واحد
از آن کم کرد تا باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۵ مشخص گردد.

مثال ۳۰— آیا عدد ۴۶۵ به ۵ قابل قسمت است؟ باقی مانده‌ی آن را نیز تعیین کنید.
چون رقم اول سمت راست آن ۵ است، پس این عدد به ۵ قابل قسمت است و باقی مانده‌ی
تقسیم آن بر ۵، صفر است.

مثال ۳۱— آیا عدد ۷۵۳۸ به ۵ قابل قسمت است؟ باقی مانده‌ی تقسیم آن را بر ۵ نیز معین کنید.
از آن جا که رقم اول سمت راست آن صفر یا پنج نیست، پس این عدد بر پنج قابل قسمت نیست
و باقی مانده‌ی آن بر پنج برابر ۳ است، زیرا

$$8 - 5 = 3$$

۵— ۸— ۱ قابلیت تقسیم بر ۶: عددی بر ۶ قابل قسمت است که هم بر ۲ و هم بر ۳ قابل
قسمت باشد. در این صورت باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۶، صفر است. اگر عددی بر ۶ قابل
قسمت نباشد، باقی مانده‌ی تقسیم آن بر ۶، عددی کوچک‌تر از آن است. برای پیدا کردن باقی مانده
کافی است نزدیک‌ترین عدد مضرب ۶ را از آن عدد کم نمود تا باقی مانده‌ای کوچک‌تر از ۶ به دست
آید.

مثال ۳۲— آیا عدد ۷۶۷۱ بر ۶ قابل قسمت است؟

با توجه به این که این عدد، زوج نیست پس بر ۲ قابل قسمت نیست، در نتیجه بر ۶ نیز قابل قسمت نخواهد بود. برای پیدا کردن باقی مانده کافی است عدد ۷۶۶۸ را که نزدیک ترین عدد مضرب ۶ به آن عدد است از آن کم نمود.

$$7671 - 7668 = 3$$

پس باقی مانده برابر با ۳ است.

مثال ۳۳- آیا عدد ۴۳۲ بر ۶ قابل قسمت است؟

از آن جا که این عدد زوج است، پس بر ۲ قابل قسمت است. از طرفی مجموع ارقامش $(4+3+2=9)$ ، ۹ است که بر ۳ قابل قسمت است. در نتیجه، این عدد بر ۶ قابل قسمت و باقی مانده ی آن صفر است.

۶- ۸- ۱- قابلیت تقسیم بر ۷: عددی بر هفت قابل قسمت است که باقی مانده ی آن بر هفت

صفر است. برای این که باقی مانده ی تقسیم عدد $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0}$ ، بر ۷ را به دست آوریم، به شرح زیر عمل می کنیم:

اولین رقم سمت چپ عدد مورد نظر یعنی a_{n-1} را سه برابر می کنیم و با رقم بعدی یعنی a_{n-2} جمع می نماییم. سپس مضرب های هفت آن را کسر و باقی مانده را سه برابر می کنیم و با a_{n-3} جمع می نماییم. پس از کسر مضارب هفت از آن، مجدداً به همین روش ادامه می دهیم تا باقی مانده ی نهایی حاصل شود.

مثال ۳۴- باقی مانده ی تقسیم عدد ۵۴۷۲ بر ۷ را پیدا کنید.

$$5 \times 3 = 15$$

رقم ۵ را ابتدا سه برابر و سپس آن را با ۴ جمع می کنیم.

$$15 + 4 = 19$$

$$19 - 14 = 5$$

مضرب ۷ یعنی ۱۴ را از آن کم می کنیم؛ باقی مانده ۵ می شود.

$$5 \times 3 = 15$$

$$15 + 7 = 22$$

۵ را ابتدا سه برابر و سپس آن را با ۷ جمع می کنیم.

$$22 - 21 = 1$$

مضرب هفت یعنی ۲۱ را از آن کسر می نماییم.

$$1 \times 3 = 3$$

نتیجه یعنی ۱ را سه برابر و سپس آن را با ۲ جمع می کنیم.

$$3 + 2 = 5$$

عدد ۵ حاصل می شود که باقی مانده تقسیم عدد ۵۴۷۲ بر ۷ است.

مثال ۳۵- آیا عدد ۱۸۱۳ به هفت قابل قسمت است؟

$$1 \times 3 = 3$$

اولین رقم را سه برابر می‌نماییم و نتیجه را با دومین رقم جمع می‌کنیم.

$$3 + 8 = 11$$

$$11 - 7 = 4$$

مضرب ۷ را از آن کسر و مجدداً سه برابر می‌کنیم.

$$4 \times 3 = 12$$

$$12 + 1 = 13$$

$$13 - 7 = 6$$

$$6 \times 3 = 18$$

$$18 + 3 = 21$$

$$21 - 21 = 0$$

و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم.

نتیجه صفر می‌شود، پس عدد ۱۸۱۳ بر ۷ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی آن بر ۷، صفر است.
۷-۸-۱ قابلیت تقسیم بر ۸: عددی به ۸ قابل قسمت است که عدد متشکل از سه رقم اول سمت راست آن، به هشت قابل قسمت باشد، و یا سه رقم سمت راست آن صفر باشد.

برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2} \dots a_2a_1a_0}$ بر ۸ کافی است باقی‌مانده‌ی عدد $\overline{a_2a_1a_0}$ را بر ۸ محاسبه نماییم. به عبارت دیگر باقی‌مانده‌ی سه رقم اول سمت راست آن عدد را بر ۸ حساب می‌کنیم یعنی رقم یکان را در 2^0 ، رقم دهگان را در 2^1 و رقم صدگان را در 2^2 ضرب و حاصل آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم، در صورتی که حاصل بزرگ‌تر یا مساوی ۸ باشد، مضارب ۸ را از آن کم می‌کنیم تا مانده به کم‌تر از ۸ برسد.

مثال ۳۶- آیا عدد ۱۸۴۸ به هشت قابل قسمت است؟

از آن‌جا که ۸۴۸ به هشت قابل قسمت است، پس ۱۸۴۸ نیز به هشت قابل قسمت است.
(برای پیدا کردن باقی‌مانده‌ی ۸۴۸ به ۸، اولین رقم سمت چپ را با ۸ مقایسه می‌کنیم تا در صورتی که بزرگ‌تر یا مساوی ۸ باشد ۸ را از آن کسر نماییم، سپس باقی‌مانده را با رقم بعدی یعنی ۴ کنار هم قرار می‌دهیم و مجدداً مضرب ۸ را از آن کم می‌کنیم و بالأخره باقی‌مانده را با آخرین رقم یعنی ۸ کنار هم قرار می‌دهیم و مضرب ۸ را از آن کم می‌کنیم. باقی‌مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۸ مشخص می‌گردد.)

مثال ۳۷- آیا عدد ۵,۴۷۳,۰۰۰ به ۸ قابل قسمت است؟

چون سه رقم سمت راست آن صفر است، پس این عدد به ۸ قابل قسمت است و باقی‌مانده‌ی تقسیم آن بر ۸، برابر با صفر است.

مثال ۳۸- آیا عدد ۷۴۵۵ به ۸ قابل قسمت است؟

چون ۴۵۵ به ۸ قابل قسمت نیست (عدد فرد است)، پس ۷۴۵۵ نیز به ۸ قابل قسمت نیست. اما برای یافتن باقی مانده که عددی بزرگتر از صفر و کمتر از ۸ است، لازم است نزدیکترین عدد سه رقمی مضرب ۸ به ۴۵۵ را پیدا نمود و از ۴۵۵ کم کرد که آن عدد ۴۴۸ است.

$$455 - 448 = 7$$

بنابراین، باقی مانده‌ی تقسیم عدد ۷۴۵۵ بر ۸، برابر با ۷ است. بدیهی است اگر از عدد ۷۴۵۵ عدد ۷ را کم کنیم، عددی باقی می ماند که به ۸ قابل قسمت است.

$$7455 - 7 = 7448$$

$$(5 \times 2^0) + (5 \times 2^1) + (4 \times 2^2) = 5 + 10 + 16 = 31$$

رقم یکان را در 2^0 ، رقم دهگان را در 2^1 و رقم صدگان را در 2^2 ضرب می کنیم و حاصل آن ها را با هم جمع می کنیم. چون ۳۱ بزرگتر از ۸ است ۲۴ را از آن کم می کنیم $31 - 24 = 7$ پس باقی مانده‌ی تقسیم عدد ۷۴۵۵ بر ۸ برابر با ۷ است.

ملاحظه می شود که ۷۴۴۸ به ۸ قابل قسمت است زیرا ۴۴۸ به ۸ قابل قسمت است.

۸-۸-۱ قابلیت تقسیم بر ۹: عددی به ۹ قابل قسمت است که مجموع ارقامش به ۹ قابل قسمت باشد. بدیهی است اگر از مجموع ارقامش نزدیکترین مضرب ۹ را کسر کنیم و باقی مانده، عددی کوچکتر از ۹ شود، این عدد، باقی مانده‌ی تقسیم بر ۹ است.

مثال ۳۹- آیا ۲۹۳۴ به ۹ قابل قسمت است؟

$$2 + 9 + 3 + 4 = 18$$

مجموع ارقام آن عدد را محاسبه می نماییم :

چون ۱۸ مضرب ۹ است، پس آن عدد به ۹ قابل قسمت است.

مثال ۴۰- آیا ۵۳۷۶ به ۹ قابل قسمت است؟

$$5 + 3 + 7 + 6 = 21$$

مجموع ارقام آن عدد را محاسبه می کنیم :

$$21 - 18 = 3$$

مضرب ۹ را از آن کم می نماییم :

پس، این عدد به ۹ قابل قسمت نیست و باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۹، برابر با ۳ است.

۹-۸-۱ قابلیت تقسیم بر ۱۰: عددی به ۱۰ قابل قسمت است که اولین رقم سمت راست آن صفر باشد. بدیهی است اگر رقم سمت راست آن، رقمی غیر از صفر باشد، همان رقم باقی مانده‌ی تقسیم آن عدد بر ۱۰ است.

مثال ۴۱— آیا ۲۶۵۴ بر ۱۰ قابل قسمت است؟ اگر جواب منفی است باقی مانده‌ی آن را محاسبه کنید.

چون اولین رقم سمت راست آن صفر نیست، پس این عدد بر ۱۰ قابل قسمت نیست و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر ۱۰، عدد ۴ است زیرا اولین رقم سمت راست آن ۴ است.

مثال ۴۲— آیا ۵۶۷۰ بر ۱۰ قابل قسمت است؟ چون رقم اول سمت راست آن عدد صفر است، پس بر ۱۰ قابل قسمت است و باقی مانده‌ی آن صفر خواهد بود.

۱۰-۸-۱ قابلیت تقسیم بر ۱۱: فرض کنیم عدد صحیح A شامل n رقم باشد $A = \overline{a_{n-1}a_{n-2}\dots a_2a_1a_0}$. مکان ارقام A را از راست به چپ، به ترتیب زوج و فرد، در نظر می گیریم و سپس ارقام در مکان های زوج را پس از جمع، از مجموع ارقام مکان های فرد منها می کنیم، اگر باقی مانده صفر باشد، عدد بر ۱۱ قابل قسمت است. ولی اگر باقی مانده مثبت و کم تر از ۱۱ بود، همان عدد باقی مانده‌ی تقسیم عدد A بر ۱۱ خواهد بود. اما اگر باقی مانده منفی یا مثبت و بزرگ تر از ۱۱ بود، آن گاه باید مضرب ۱۱ را به آن اضافه یا کم نمود تا باقی مانده‌ی واقعی که کوچک تر از ۱۱ است، به دست آید.

مثال ۴۳— بررسی کنید که عدد ۲۷۴۹۳ بر ۱۱ بخش پذیر است یا خیر؟

چنان چه جواب منفی است، باقی مانده‌ی آن را بر ۱۱ پیدا کنید.

$$(3+4+2)-(9+7)=9-16=-7$$

$$-7+11=4$$

ارقام در مکان های زوج را با هم و ارقام در مکان های فرد را نیز با هم جمع می نماییم. تفاوت آن ها ۷- است، که با اضافه کردن ۱۱ به آن، نتیجه ۴ می شود. پس، این عدد بر ۱۱ قابل قسمت نیست و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر ۱۱، عدد ۴ است.

مثال ۴۴— آیا ۱۱۹۳۵ بر ۱۱ قابل قسمت است؟

$$5+9+1=15$$

ارقام در مکان های زوج را با هم

$$3+1=4$$

و ارقام در مکان های فرد را با هم جمع می نماییم.

$$15-4=11$$

تفاوت آن ها ۱۱ است.

چون ۱۱ مضرب ۱۱ است، پس آن عدد به ۱۱ قابل قسمت است و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر ۱۱ نیز، صفر می شود.

۹-۱ ساده کردن کسر

اگر صورت و مخرج کسری، دارای عامل مشترکی مخالف صفر و غیر از یک باشند، می‌توانیم آن‌ها را بر آن عامل مشترک تقسیم کنیم. به عبارت دیگر، برای ساده کردن کسر باید صورت و مخرج آن را جداگانه به عوامل ضرب تجزیه نمود. سپس در صورت اشتراک عوامل ضرب، مخالف صفر بین صورت و مخرج آن‌ها را حذف کرد.

بدیهی است چنان‌چه هیچ عامل مشترکی بین صورت و مخرج به جز ۱ نباشد، نتیجه می‌گیریم که این کسر ساده نیست. به این نوع کسرها، کسر تحویل‌ناپذیر گویند.

مثال ۴۵- در صورت امکان، کسر $\frac{21}{22}$ را ساده کنید.

$$\frac{21}{22} = \frac{3 \times 7}{2 \times 11}$$

چون در صورت و مخرج کسر هیچ عامل مشترکی یافت نمی‌شود این کسر تحویل‌ناپذیر است و ساده نمی‌شود.

مثال ۴۶- در صورت امکان، کسر $\frac{150}{21}$ را ساده کنید.

$$\frac{150}{21} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 5}{3 \times 7}$$

تنها عامل مشترک بین صورت و مخرج ۳ است. پس:

$$\frac{150}{21} = \frac{50}{7}$$

مثال ۴۷- در صورت امکان، کسر $\frac{210}{315}$ را ساده کنید.

$$\frac{210}{315} = \frac{2 \times 3 \times 5 \times 7}{3 \times 5 \times 7 \times 3}$$

$$\frac{210}{315} = \frac{2}{3}$$

عوامل مشترک ۳، ۵، ۷ بین صورت و مخرج قابل حذف کردن‌اند. بنابراین، با حذف آن‌ها

کسر $\frac{2}{3}$ حاصل می‌گردد.

۱۰-۱ کاربرد محاسبات ذهنی در امور مالی

همان‌طور که در درس حسابداری خوانده‌اید، حسابداران معمولاً در پایان دوره‌ی مالی، فهرستی از حساب‌های دفتر کل و مانده‌ی آن‌ها را تحت عنوان «تراز آزمایشی» تهیه می‌کنند تا بر این اساس راحت‌تر بتوانند صورت‌های مالی را تهیه نمایند. از طرف دیگر اگر جمع کل ارقام ستون بدهکار و ستون بستانکار تراز آزمایشی با هم برابر باشد، حسابداران از صحت ثبت، انتقال و مانده‌گیری حساب‌ها تا حد بسیار بالایی اطمینان حاصل می‌کنند. اما اگر جمع کل ارقام ستون بدهکار و ستون بستانکار تراز آزمایشی با هم برابر نباشد، در این صورت اشتباهی رخ داده و حسابدار موظف است آن را بیابد و برطرف نماید. برای این که حسابداران بتوانند اشتباه را از میان انبوه ثبت‌های دفتر روزنامه و نیز صفحات دفتر کل سریع‌تر پیدا کنند، باید از محاسبات ذهنی استفاده کنند. به این ترتیب که اگر اختلاف جمع دو ستون بدهکار و بستانکار تراز آزمایشی قابل تقسیم بر عدد ۲ باشد در این صورت به احتمال زیاد، اشتباهاً یک بدهکار در سمت بستانکار ثبت شده یا بالعکس. برای مثال، اگر در انتقال ارقام از دفتر روزنامه به دفتر کل ۲۵۰ ریال بدهکار حساب دریافتنی را اشتباهاً به بستانکار حساب دریافتنی در دفتر کل منتقل کرده باشیم در این صورت وقتی تراز آزمایشی را از روی مانده‌ی ارقام دفتر کل تهیه می‌کنیم، بین ستون بدهکار و بستانکار جمعاً ۵۰۰ ریال اختلاف وجود دارد که ۵۰۰ عددی قابل تقسیم بر عدد ۲ است. از تقسیم ۵۰۰ بر ۲ عدد ۲۵۰ به دست می‌آید و به این ترتیب حسابدار متوجه می‌شود که برای رفع اشتباه موجود باید عدد ۲۵۰ را در دفتر روزنامه و دفتر کل ردیابی کند. مثال دیگر این که اگر اختلاف دو ستون بدهکار و ستون بستانکار تراز آزمایشی قابل تقسیم بر عدد ۹ باشد، در این صورت اختلاف موجود می‌تواند ناشی از جا انداختن یا اضافه نوشتن یک صفر آخر اعداد یا ثبت مقلوب (مثلاً ۳۲ را اشتباهاً ۲۳ بنویسیم) باشد. برای مثال، اگر رقم وجه نقد را به جای ۲۱۰۰۰ ریال اشتباهاً ۲۱۰۰ ریال به دفتر کل منتقل کنیم در این صورت در تراز آزمایشی جمع ۲ ستون بدهکار و بستانکار به اندازه‌ی ۱۸۹۰۰ ریال = (۲۱۰۰۰ - ۲۱۰۰) اختلاف خواهد داشت. از آن‌جا که ۱۸۹۰۰ عددی قابل تقسیم بر ۹ و حاصل این تقسیم برابر ۲۱۰۰ است، بنابراین حسابدار به این موضوع رهنمون می‌شود که به احتمال زیاد اشتباه مربوط به موردی بوده که عدد آن ۲۱۰۰ است و این عدد را ردیابی می‌کند.

همان‌طور که ملاحظه کردید، محاسبات ذهنی می‌تواند به حسابداران در یافتن اشتباهاتشان، که کار وقت‌گیری است، تا حدود زیادی کمک کند که دو مورد مذکور نمونه‌ای از آن بود.

تمرین‌های فصل اول

در حد امکان، سعی کنید مسائل را به‌طور ذهنی پاسخ دهید.

۱- حاصل ضرب ۴۱، ۲۰۰، ۳۴، ۴۵۶، ۵۰ در ۵۰ را به‌صورت ذهنی محاسبه کنید.

۲- حاصل ضرب ۸۸، ۹۷۲، ۳۵۹، ۱۴، ۷۵۲ در ۲۵۰ را به‌صورت ذهنی محاسبه کنید.

۳- حاصل ضرب‌های زیر را به‌صورت ذهنی پاسخ دهید.

$$۱,۳۰۰ \times ۱۳۰ =$$

$$۱۹,۰۰۰ \times ۱۹ =$$

$$۱۷ \times ۱۷۰ =$$

$$۱,۸۰۰ \times ۱,۸۰۰ =$$

۴- حاصل ضرب‌های زیر را به‌صورت ذهنی پاسخ دهید.

$$۳۵ \times ۳۵۰ =$$

$$۱۵۰,۰۰۰ \times ۱,۵۰۰ =$$

$$۹۵۰۰ \times ۹۵ =$$

$$۶۵,۰۰۰ \times ۶۵,۰۰۰ =$$

۵- این اعداد را بر ۵ تقسیم کنید و پاسخ را به روش ذهنی به‌دست آورید.

$$۱۸۰$$

$$۲,۳۵۵$$

$$۶۷,۵۰۰$$

$$۲,۰۰۵$$

۶- حاصل تقسیم این اعداد بر ۲۵۰ را به‌صورت ذهنی پیدا کنید.

$$۴۴,۷۵۰$$

$$۳۹,۷۵۰$$

$$۵,۰۰۰$$

$$۷۳۸,۷۵۰$$

۷- با استفاده از اتحاد، حاصل ضرب‌های زیر را محاسبه کنید.

$$۱۰۷ \times ۹۳ =$$

$$۹۹۹ \times ۹۹۹ =$$

$$۲۰۱ \times ۱۹۹ =$$

$$۳,۹۹۸ \times ۳,۹۹۸ =$$

$$۱۰,۰۰۱ \times ۱۰,۰۰۱ =$$

$$۵,۰۰۳ \times ۵,۰۰۳ =$$

۸- کسرهای زیر را ساده کنید:

$$\frac{۷۸}{۱۱۴} \quad \frac{۳۵۰}{۷۳۵} \quad \frac{۱۹۸۰}{۵۹۴۰} \quad \frac{۱۰۵}{\frac{۲۸۰}{\frac{۳۲۲}{۱۱۲}}}$$

۹- عددی به قابل قسمت است که به ۲ و قابل قسمت باشد.

- ۱۰- عددی به قابل قسمت است که به ۳ و ۴ قابل قسمت باشد.
- ۱۱- عددی به ۱۰ قابل قسمت است که به ۲ و قابل قسمت باشد.
- ۱۲- عددی به ۳۳ قابل قسمت است که به و ۱۱ قابل قسمت باشد.
- ۱۳- عددی به ۳۹ قابل قسمت است که به و قابل قسمت باشد.
- ۱۴- ۲,۵۰۰ واحد از کالایی را با نرخ ۲۵۰ ریال به فروش رسانده‌ایم. اگر ۵ درصد از این مبلغ سود باشد، سود حاصله را به‌روش ذهنی محاسبه نمایید.
- ۱۵- با استفاده از اتحادها حاصل 999^2 را به‌دست آورید.
- ۱۶- به‌جای a در عدد $45a2$ چه رقم یا ارقامی می‌توان قرار داد تا آن عدد به ۳ و ۴ بخش‌پذیر باشد؟

۱۷- شرکتی می‌خواهد تعداد ۵۷۶۲ واحد از تولیدات خود را بین ۱۱ مرکز بخش به‌طور مساوی توزیع نماید. آیا این عمل امکان‌پذیر است؟ اگر نیست چه باید کرد؟

۱۸- فرض کنید حسابدار شرکتی به‌هنگام ثبت فروش نسیه به مبلغ ۴۸۰۰۰ ریال، حساب‌های دریافتنی را ۴۸۰۰۰ ریال بدهکار و فروش را به مبلغ ۴۸۰۰۰ ریال بستانکار کرده است. این اشتباه چه تأثیری بر مانده‌ی ستون‌های بدهکار و بستانکار تراز آزمایشی دارد و چگونه می‌توان از طریق محاسبات ذهنی این اشتباه را سریع‌تر کشف کرد؟

۱۹- در پایان دوره‌ی مالی هنگامی که حسابداران شرکت تراز آزمایشی را تهیه کردند متوجه شدند که جمع ستون بدهکار و بستانکار آن به میزان ۸۷۵۰۰ ریال اختلاف دارد و با این که وقت زیادی صرف کرده‌اند تا دلیل این اختلاف را متوجه شوند اما هنوز به نتیجه نرسیده‌اند. شما چه راهکاری را به آن‌ها پیشنهاد می‌دهید تا سریع‌تر بتوانند این اشتباه را بیابند؟