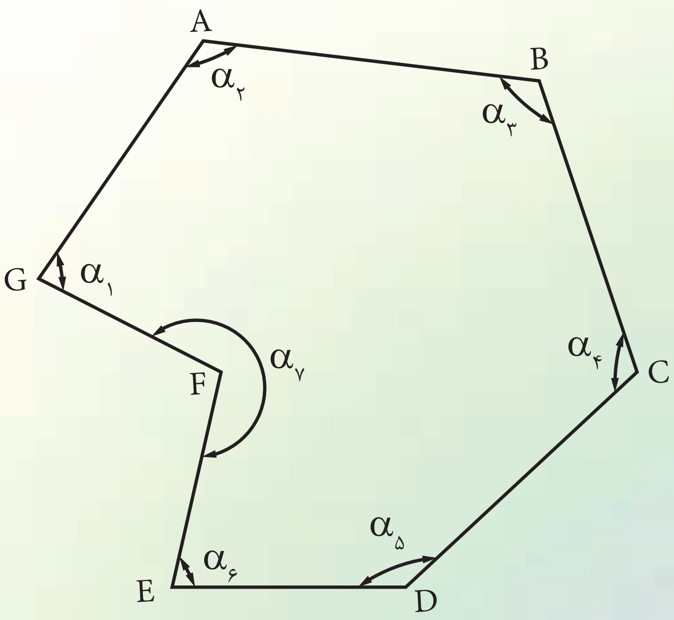
فصل چهارم

محاسبهٔ زاویه



$$\Sigma\alpha_i = (n-۲)۱۸۰^\circ$$

هدف‌های رفتاری

پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:

۱- زوایای مثلث را محاسبه کند.

۲- زوایای داخلی یک چندضلعی منتظم را محاسبه کند.

۴-۱ محاسبهٔ زوایای مثلث

۴-۱-۱- محاسبهٔ زوایای مثلث قائم‌الزاویه

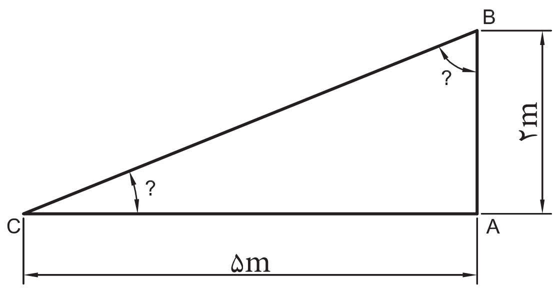
هرگاه در مثلث قائم‌الزاویه دو ضلع معلوم باشد، با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی می‌توان زوایای مثلث را محاسبه نمود.

مثال ۱: در مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۱ اندازهٔ زاویه‌های **B** و **C** چند درجه است؟

$$\tan\hat{C}=\frac{۲}{۵}=۰/۴$$

$$\Rightarrow \hat{C}=\tan^{-۱}(۰/۴)$$

$$\Rightarrow \hat{C}=۲۱/۸۰^\circ$$



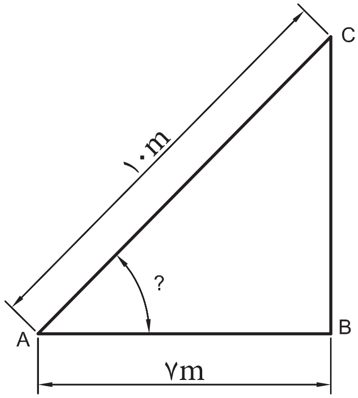
شکل ۱

$$\tan\hat{B}=\frac{۵}{۲}=۲/۵$$

$$\Rightarrow \hat{B}=\tan^{-۱}(۲/۵) \Rightarrow \hat{B}=۶۸/۲۰^\circ$$

مثال ۲: در شکل ۲ اندازهٔ زاویهٔ **A** چند درجه است؟

$$\cos A=\frac{۷}{۱۰}=۰/۷ \Rightarrow \hat{A}=۴۵^\circ ۳۴'$$



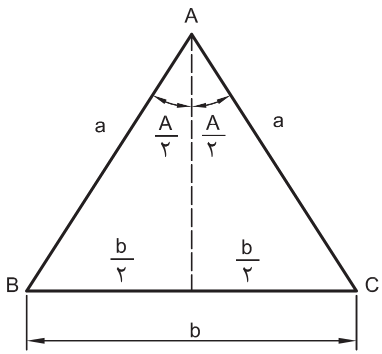
شکل ۲

۴-۱-۲- محاسبهٔ زوایای مثلث متساوی‌الساقین:

در مثلث متساوی‌الساقین **ABC** (شکل ۳) ارتفاع نظیر رأس **A**، نیم‌ساز زاویهٔ **A** و عمودمنصف ضلع مقابل به زاویهٔ **A** بر هم منطبق می‌باشند؛ بنابراین با توجه به روابط مثلثاتی داریم:

$$\sin(\frac{A}{۲}) = \frac{\frac{b}{۲}}{a} = \frac{b}{۲a}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sin(\frac{A}{۲}) = \frac{b}{۲a}}$$

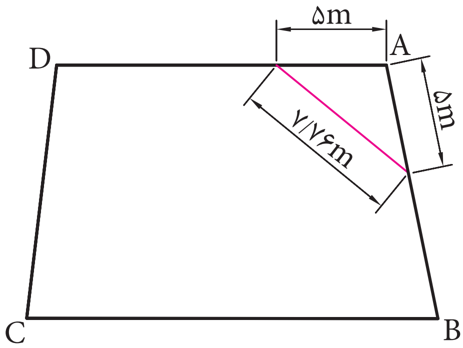


شکل ۳

با استفاده از رابطهٔ فوق مقدار زاویهٔ $(\frac{A}{۲})$ را محاسبه نموده و سپس زاویهٔ **A** را محاسبه می‌نمائیم. با توجه به این‌که زوایای **B** و **C** با هم برابرند، خواهیم داشت:

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{A}+۲\hat{B}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \boxed{\hat{B}=\hat{C}=\frac{۱۸۰^\circ - A}{۲}}$$

مثال: برای اندازه‌گیری زاویهٔ **A** در گوشهٔ یک زمین، دو طول مساوی ۵ متری در روی دو ضلع آن جدا کرده و سپس ضلع سوم آن‌را اندازه‌گیری نموده‌ایم (شکل ۴). اندازهٔ زاویهٔ **A** چند درجه است؟



شکل ۴

حل:

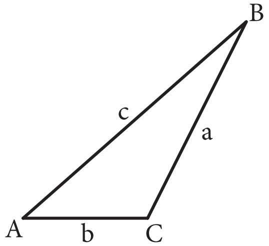
$$\sin\frac{A}{۲}=\frac{b}{۲a}=\frac{۷/۷۶}{۲\times ۵}=۰/۷۷۶\Rightarrow\frac{\hat{A}}{۲}=۵۰^\circ ۵۴'\Rightarrow\hat{A}=۱۰۱^\circ ۴۸'$$

۴-۱-۳- محاسبه‌ی زوایای داخلی مثلث غیرمشخص

الف) رابطه‌ی کسینوس‌ها:

هر گاه سه ضلع مثلثی معلوم باشد با استفاده از رابطه کسینوس‌ها می‌توان زوایای مثلث را محاسبه نمود.

در مثلث **ABC** شکل ۵ داریم:



شکل ۵

$$a^۲=b^۲+c^۲-۲bc\cos A$$
$$b^۲=a^۲+c^۲-۲ac\cos B$$
$$c^۲=a^۲+b^۲-۲ab\cos C$$

با استفاده از روابط بالا که به رابطهٔ کسینوس‌ها معروف است، می‌توانیم زوایای مثلث را به‌صورت زیر بنویسیم:

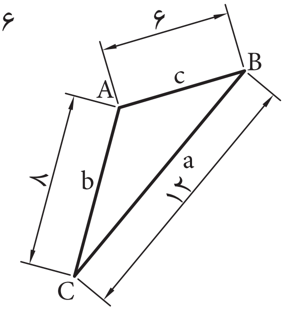
$$\boxed{\begin{aligned}\cos A &= \frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc}\\ \cos B &= \frac{a^۲+c^۲-b^۲}{۲ac}\\ \cos C &= \frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲ab}\end{aligned}}$$

مثال ۱: زوایای مثلث ABC (شکل ۶) چند درجه است؟

حل:

$$\cos A = \frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲bc} = \frac{۸^۲+۶^۲-۱۲^۲}{۲\times۸\times۶} = \frac{۶۴+۳۶-۱۴۴}{۲\times۸\times۶}$$

$$\cos A = -۰/۴۵۸۳ \Rightarrow \hat{A} \simeq ۱۱۷^\circ ۱۷'$$



شکل ۶

برای زاویهٔ B داریم:

$$\cos B = \frac{a^۲+c^۲-b^۲}{۲ac} = \frac{۱۲^۲+۶^۲-۸^۲}{۲\times۱۲\times۶} = \frac{۱۴۴+۳۶-۶۴}{۲\times۱۲\times۶} = ۰/۸۰۵۶ \Rightarrow \hat{B} = ۳۶^\circ ۲۰'$$

برای زاویهٔ C داریم:

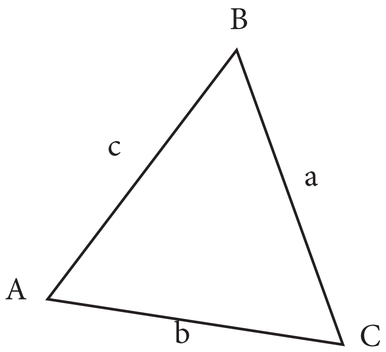
$$\cos C = \frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲ab} = \frac{۱۲^۲+۸^۲-۶^۲}{۲\times۱۲\times۸} = \frac{۱۴۴+۶۴-۳۶}{۲\times۱۲\times۸} = ۰/۸۹۵۸ \Rightarrow \hat{C} \simeq ۲۶^\circ ۲۳'$$

برای اطمینان از درستی محاسبات، زوایای به‌دست آمده را با هم جمع می‌کنیم که باید جمع آن‌ها ۱۸۰° شود.

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C} = ۱۱۷^\circ ۱۷' + ۳۶^\circ ۲۰' + ۲۶^\circ ۲۳' = ۱۸۰^\circ$$

ب) رابطه سینوس‌ها:

هر گاه دو ضلع و زاویه مقابل به یکی از آن‌ها در هر مثلث معلوم باشد با استفاده از رابطه سینوس‌ها می‌توان زوایای دیگر مثلث را محاسبه کرد.



شکل ۷

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

مثال۲: در مثلث ABC شکل ۷ اگر $a=۱۵m$ **و** $b=۱۰m$ **و** $A=۶۰^\circ$ **باشد، زوایای B و C را به‌دست آورید.**

حل:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$$

$$\frac{۱۵}{\sin ۶۰}=\frac{۱۰}{\sin B}\Rightarrow \sin B=\frac{۱۰\times \sin ۶۰}{۱۵}$$

$$\Rightarrow \sin B=۰/۵۷۷\Rightarrow B=\sin^{-۱}(۰/۵۷۷)$$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{B}=۳۵/۲۶^\circ}$$

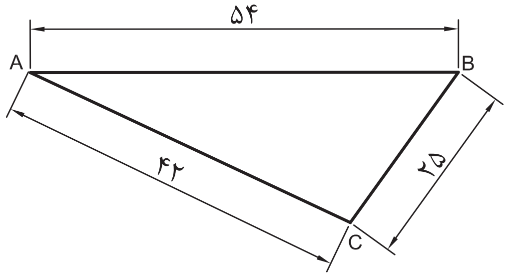
برای محاسبه زاویه C کافی‌است مجموع زوایای A و B را از ۱۸۰° **کم نمائیم.**

$$\hat{C}=۱۸۰^\circ-(\hat{A}+\hat{B})\Rightarrow \hat{C}=۱۸۰^\circ-(۶۰+۳۵/۲۶)$$

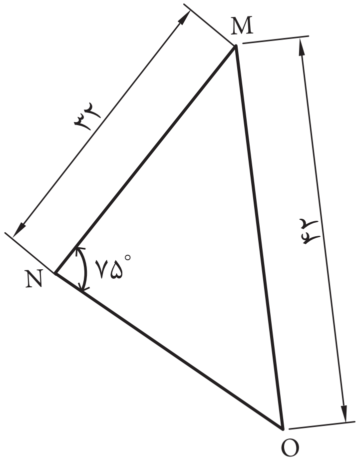
$$\Rightarrow \boxed{\hat{C}=۸۴/۷۴^\circ}$$

تمرین:

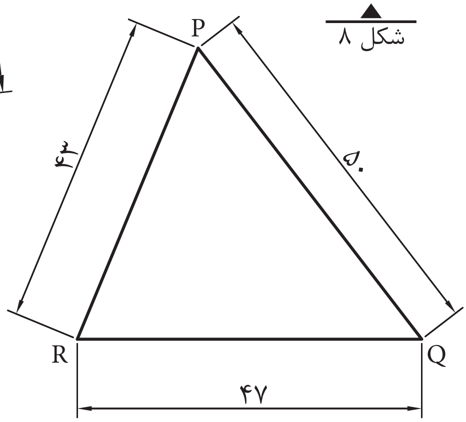
زوایای مثلث‌های شکل‌های ۸، ۹ و ۱۰ را محاسبه کنید.



شکل ۸



شکل ۹



شکل ۱۰

۴-۲ محاسبه زوایای داخلی یک چندضلعی منتظم

۴-۲-۱- تعریف چندضلعی منتظم:

به یک n ضلعی که اضلاع آن با هم برابر باشند، n ضلعی منتظم گفته می‌شود.

۴-۲-۲- مجموع زوایای داخلی یک n ضلعی برابر است با: $(n-۲)۱۸۰^\circ$

مثال: مجموع زوایای داخلی یک ۵ ضلعی برابر است: $(۵-۲)\times ۱۸۰^\circ = ۵۴۰^\circ$

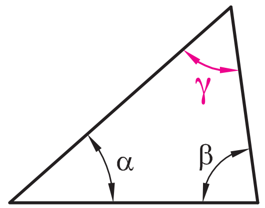
۴-۲-۳- اندازهٔ هر زاویهٔ یک n ضلعی منتظم عبارت‌است از: $\frac{n-۲}{n}\times ۱۸۰^\circ$

مثال: اندازهٔ هر زاویهٔ یک ۸ ضلعی منتظم عبارت‌است از: $\frac{۸-۲}{۸}\times ۱۸۰^\circ = ۱۳۵^\circ$

تمرین:

۱- در مثلث شکل ۱۱ مقدار زاویهٔ γ را به‌دست آورید.

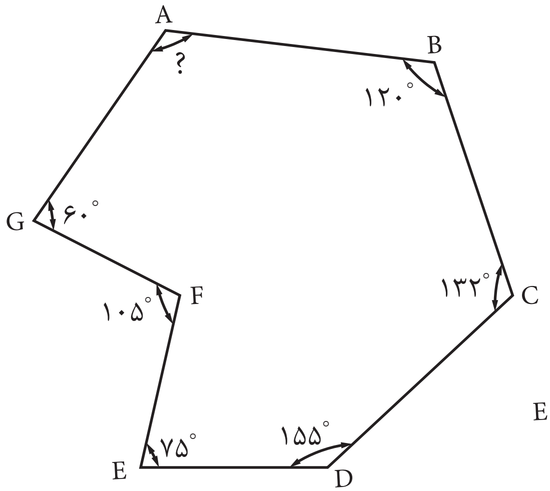
(α=۲۴°۱۸′ و β=۴۷°)



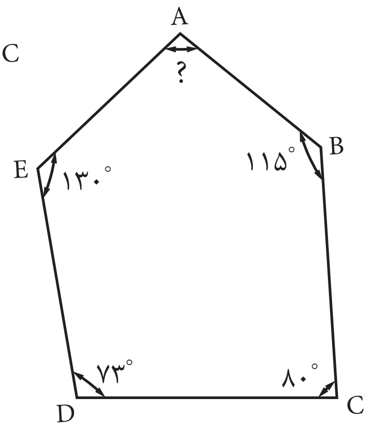
شکل ۱۱

۲- زاویهٔ بین دو ضلع را در شش‌ضلعی منتظم به‌دست آورید.

۳- در شکل‌های ۱۲ و ۱۳ مقدار زاویهٔ A را محاسبه نمائید.



شکل ۱۲



شکل ۱۳