

فصل
سوم

روش های محاسبه طول



هدف‌های رفتاری

- پس از آموزش این فصل از فراگیر انتظار می‌رود بتواند:
- ۱- رابطه فیثاغورث را بشناسد و کاربرد آن را بداند.
 - ۲- طول‌ها را با استفاده از نسبت تشابه شکل‌ها به دست آورد.
 - ۳- طول‌ها را با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی محاسبه نماید.
 - ۴- با استفاده از روابط سینوس‌ها و کسینوس‌ها در مثلث غیر مشخص طول‌ها را محاسبه کند.
 - ۵- محیط اشکال هندسی چندضلعی و دایره را به دست آورد.

۱-۳ محاسبه طول با استفاده از رابطه فیثاغورث

هرگاه دو ضلع از مثلث قائم‌الزاویه‌ای معلوم باشد ضلع سوم را می‌توان به کمک رابطه فیثاغورث محاسبه نمود.

قضیه فیثاغورث

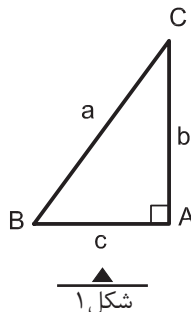
در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع وتر برابر است با مجموع مربع‌های دو ضلع دیگر

در تعریف فوق منظور از وتر، ضلع مقابل به زاویه قائمه می‌باشد.

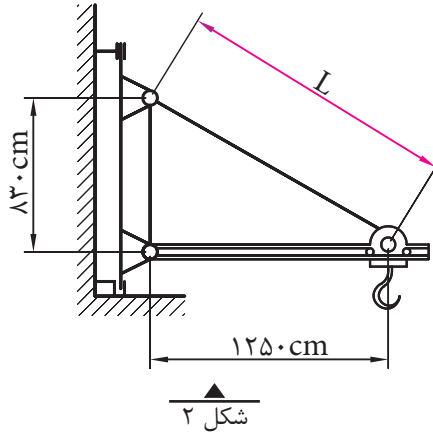
مثال: در مثلث ABC شکل ۱ زاویه $A = 90^\circ$ است.

پس داریم:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



مثال ۱: در حماله مطابق شکل ۲ اندازه L چه قدر است؟



طبق قضیه فیثاغورث داریم:

$$L^2 = 125^2 + 83^2$$

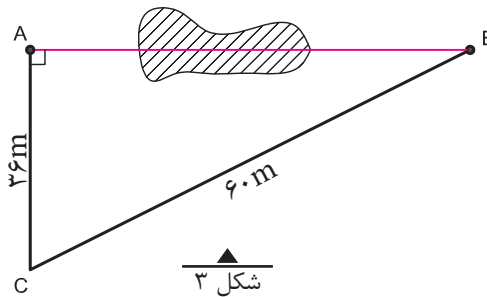
$$L^2 = 15625 + 6889 = 22514$$

$$L = \sqrt{22514}$$

$$L = 150.04 \text{ cm}$$

مثال ۲: می خواهیم فاصله دو نقطه A و B را که بین آن ها مانعی وجود دارد تعیین کنیم.

برای این کار، مطابق شکل ۳ مثلث قائم الزاویه ABC را تشکیل داده و اضلاع AC و BC را اندازه گیری کرده ایم. فاصله AB چند متر است؟



طبق رابطه فیثاغورث داریم:

$$(BC)^2 = (AC)^2 + (AB)^2$$

$$60^2 = 36^2 + (AB)^2 \Rightarrow (AB)^2 = 60^2 - 36^2$$

$$(AB)^2 = 2304$$

$$AB = \sqrt{2304} \Rightarrow AB = 48 \text{ m}$$

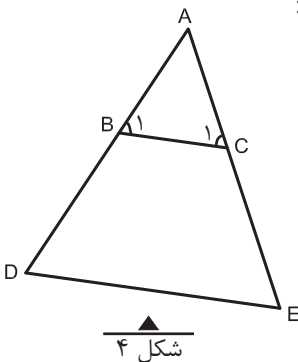
۲-۳ محاسبه طول با استفاده از نسبت تشابه شکل های هندسی

تعریف نسبت تشابه

در دو شکل متشابه، نسبت بین اضلاع متناظر عدد ثابتی است که به آن نسبت تشابه می گویند و آن را با حرف «K» نشان می دهند.

نکته: هر گاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، آن دو مثلث متشابه بوده که یکی از حالت های تشابه دو مثلث می باشد که در محاسبات فنی ساختمان کاربرد زیادی دارد.

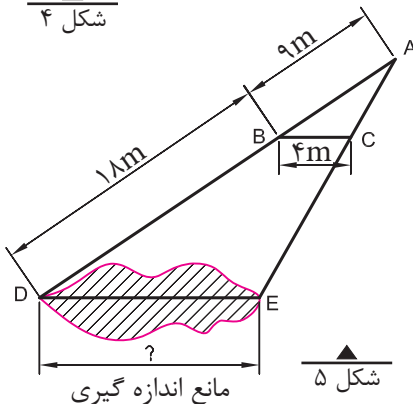
مثلاً در شکل (۴) اگر BC موازی DC باشد لذا زاویه B با D و زاویه C با E برابر می باشند و دو مثلث ABC و ADC متشابه خواهند بود و داریم:



$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE} = K$$

مثال ۱: در شکل ۵، خط BC

موازی ضلع DE است؛ یعنی دو مثلث ABC و ADE متشابه هستند و داریم:
متر ۹ AB = ، متر ۱۸ BD و
متر ۴ BC = ، طول ضلع DE چند متر است؟



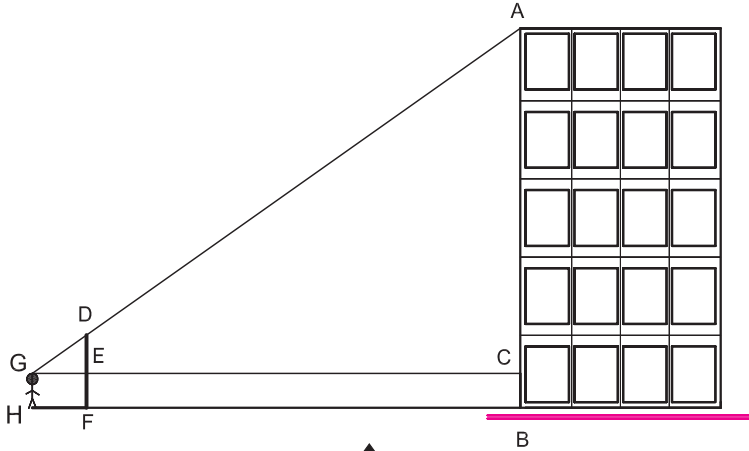
حل: طبق تعریف نسبت تشابه داریم:

$$\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DE}$$

$$\frac{9}{9+18} = \frac{4}{DE} \Rightarrow DE = \frac{4 \times (9+18)}{9} \Rightarrow \boxed{DE = 12m}$$

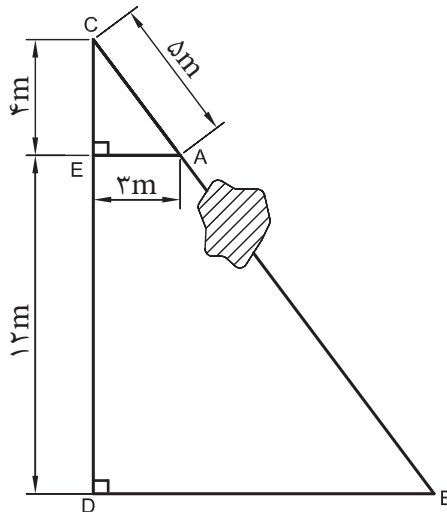
تمرین:

- ۱- برای تعیین ارتفاع یک ساختمان، از یک چوب به طول ۳ متر ($DF = 3m$) مطابق شکل ۶ استفاده شده است. در صورتی که فاصله چشم ناظر از زمین برابر $(GH = 1/70m) / 70m$ و $HF = 2m$ و $FB = 18m$ باشد، ارتفاع ساختمان AB را بر حسب متر تعیین کنید.



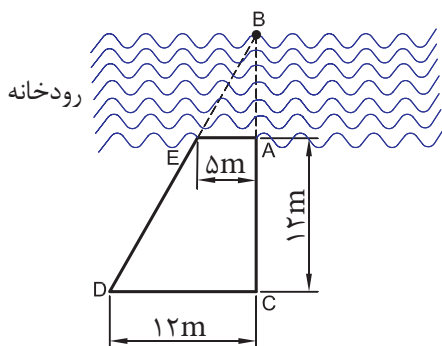
شکل ۶ - نمای یک ساختمان

- ۲- برای تعیین فاصله دو نقطه A و B که مانعی بین آنها وجود دارد، مثلث‌های قائم‌الزاویه ACE و BCD را بنا کرده‌ایم. فاصله دو نقطه A و B را بر حسب متر به دست آورید.



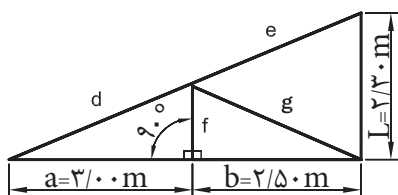
شکل ۷

۳- برای تعیین عرض یک رودخانه، طول‌های DC و AC و AE اندازه‌گیری شده‌اند. عرض رودخانه چند متر است؟

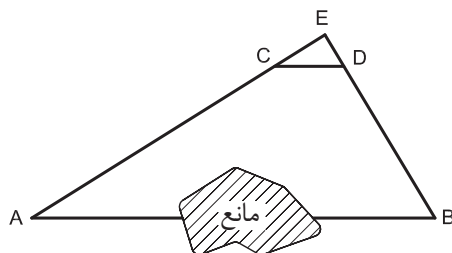


شکل ۸

۴- اندازه طول عضوهای d ، e ، f و g را در حماله مطابق شکل ۹ به دست آورید.



شکل ۹



شکل ۱۰

۵- برای تعیین فاصله دو نقطه A و B که مانعی بین آن‌ها وجود دارد، مثلث ABE بنا کرده و طول اضلاع AE و BE را اندازه گرفته‌ایم ($AE=35m$ و $BE=20m$). از طرفی، مثلث دیگری مانند CED را در نظر گرفته و طول اضلاع آن‌را اندازه‌گیری کرده‌ایم. ($CE=3/5m$ و $ED=2m$ و $CD=4m$). اگر CD موازی AB باشد فاصله نقاط A و B را بر حسب متر تعیین کنید.

۳-۳ محاسبه طول با استفاده از روابط مثلثاتی (نسبت های مثلثاتی)

۳-۳-۱- تعریف روابط اصلی مثلثاتی (نسبت های مثلثاتی):

در هر مثلث قائم الزاویه، روابط اصلی مثلثاتی (نسبت های مثلثاتی) به صورت جدول ۴

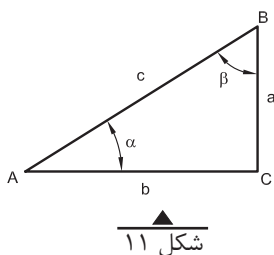
تعریف می شود.

جدول ۴

$\sin = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}} = \text{سینوس}$	$\tan = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} = \text{تانژانت}$
$\cos = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{وتر}} = \text{کسینوس}$	$\cot = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{ضلع مقابل}} = \text{کتانژانت}$

مثال: در مثلث قائم الزاویه ABC شکل ۱۱، روابط اصلی مثلثاتی برای زاویه α چنین

تعریف می شود:



$\sin \alpha = \frac{a}{c}$	$\cos \alpha = \frac{b}{c}$	$\tan \alpha = \frac{a}{b}$	$\cot \alpha = \frac{b}{a}$
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

آیا می دانید که ... (مطالعه آزاد)

اصطلاحات مثلثات مثل «سینوس و کسینوس و تانژانت» دقیقاً ترجمه واژه هایی است که در نوشته های ریاضی دانان ایرانی و به خصوص کتاب «کشف القناع» خواجه نصیرالدین طوسی به کار رفته است. در واقع در هیچ زمینه ای از ریاضیات محاسبه ای مثل حساب و جبر و مثلثات نمی توان قانون یا دستوری را یافت که به وسیله ریاضی دانان ایرانی کشف نشده باشد.

تمرین:

در مثلث قائم الزاویه ABC شکل ۱۱، روابط اصلی مثلثاتی را برای زاویه β در جدول بنویسید.

$\sin \beta = \text{_____}$	$\cos \beta = \text{_____}$	$\tan \beta = \text{_____}$	$\cot \beta = \text{_____}$
-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------	-----------------------------

۳-۳-۲- مقادیر عددی نسبت های مثلثاتی:

همیشه مقادیر نسبت های مثلثاتی برای هر زاویهٔ معین، مقدار ثابتی است. در جدول ۵ مقدار عددی نسبت های مثلثاتی زوایای 30° ، 45° و 60° را ملاحظه می کنید.

جدول ۵- نسبت های مثلثاتی زوایای 30° ، 45° و 60°

زاویه α	30°	45°	60°
نسبت مثلثاتی			
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan \alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	۱	$\sqrt{3}$
$\cotan \alpha$	$\sqrt{3}$	۱	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

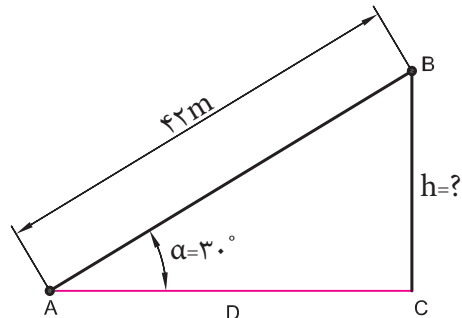
توجه: بهتر است اعداد جدول ۵ به خاطر سپرده شود و برای سایر زوایا، از ماشین های حساب استفاده گردد.

در مثلث قائم الزاویه هر گاه یک ضلع و یک زاویهٔ آن معلوم باشند به کمک نسبت های مثلثاتی می توان اندازهٔ اضلاع دیگر آنرا به دست آورد.

۳-۳-۳- کاربرد نسبت های مثلثاتی

مثال ۱: در شکل ۱۲ ارتفاع h را محاسبه می کنیم:

برای شکل مورد نظر از رابطهٔ سینوس استفاده می نماییم (دلیل آنرا توضیح دهید).



$$\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{وتر}}$$

$$\sin \alpha = \frac{h}{42}$$

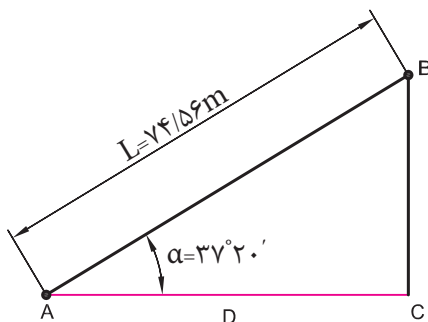
$$\sin 30^\circ = \frac{h}{42} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{h}{42} \Rightarrow h = \frac{42 \times 1}{2} = 21$$

شکل ۱۲

مثال ۲: طول شیب‌دار $AB = 74/56\text{m}$ را در روی زمین اندازه‌گیری کرده‌ایم. در صورتی که زاویه شیب $\alpha = 37^\circ 20'$ باشد، فاصله افقی بین A و B یعنی D چند متر است؟

حل: با توجه به شکل ۱۳ داریم:

$$\cos \alpha = \frac{D}{L} \Rightarrow D = L \cdot \cos \alpha$$



شکل ۱۳

داریم:

$$\cos \alpha = \cos 37^\circ 20' = 0.7951$$

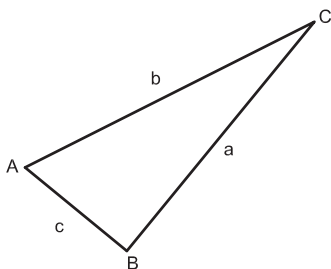
با جای‌گذاری آن‌ها در فرمول داریم:

$$D = 74/56\text{m} \times 0.7951 = 59/28\text{m}$$

۴-۳ محاسبه طول در مثلث غیرمستقیم

۳-۴-۱- رابطه سینوس‌ها: در هر مثلث غیرمستقیم مانند شکل ۱۴ هرگاه دو زاویه

و یک ضلع از مثلثی معلوم باشد، دو ضلع دیگر را می‌توان با استفاده از رابطه سینوس‌ها که به صورت زیر تعریف می‌شود، محاسبه نمود.



شکل ۱۴

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

مثال ۱: در مثلث ABC (شکل ۱۴)، $a = 45\text{m}$ طول و $\hat{A} = 37^\circ$ و $\hat{B} = 118^\circ$ است. طول b چند متر است؟
 حل: رابطه سینوس ها را می نویسیم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{45\text{m}}{\sin 37^\circ} = \frac{b}{\sin 118^\circ}$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sin 118^\circ}{\sin 37^\circ} \times 45\text{m} = \frac{0.8830}{0.6018} \times 45\text{m}$$

$$b = 66.02\text{m}$$

مثال ۲: در شکل ۱۵ اندازه سه زاویه و طول یک ضلع مثلث، معلوم است. طول دو ضلع دیگر چقدر است؟

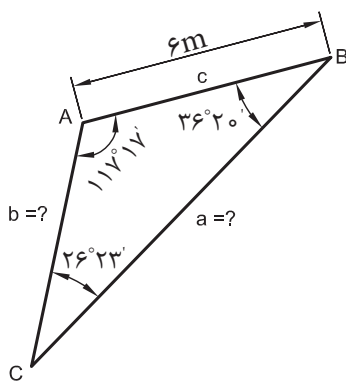
حل: رابطه سینوس ها را در نظر می گیریم:
 برای محاسبه a داریم:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$$

$$a(\sin C) = c(\sin A)$$

$$a = \frac{\sin A}{\sin C} \times c \Rightarrow a = \frac{\sin 117^\circ 17'}{\sin 26^\circ 23'} \times 6\text{m}$$

$$a = \frac{0.88875}{0.44437} \times 6\text{m} \Rightarrow \boxed{a = 12\text{m}}$$



شکل ۱۵

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \quad \text{یا} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A} \quad \text{برای محاسبه } b \text{ داریم:}$$

از یکی از دو رابطه فوق استفاده می‌کنیم:

$$b = \frac{\sin B}{\sin C} \times c$$

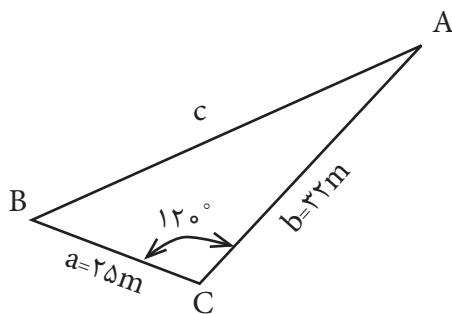
$$b = \frac{\sin 36^\circ 20'}{\sin 36^\circ 23'} \times 6m = \frac{0.59248}{0.44437} \times 6 = 7.9997 \Rightarrow b \approx 8m$$

۳-۴-۲- رابطه کسینوس‌ها: در هر مثلث غیرمستطیل مانند شکل ۱۴ اگر دو ضلع و زاویه بین آن‌ها (c و b و \hat{A}) معلوم باشد، با استفاده از رابطه کسینوس‌ها که به صورت زیر تعریف می‌شود می‌توان ضلع سوم مثلث یعنی a را محاسبه نمود.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

مثال: در شکل ۱۶ ضلع c را به دست آورید.

حل: رابطه کسینوس‌ها را با توجه به این که ضلع c مجهول می‌باشد به صورت زیر می‌نویسیم:



شکل ۱۶

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C}$$

$$c^2 = 25^2 + 32^2 - 2 \times 25 \times 32 \times \cos 12^\circ$$

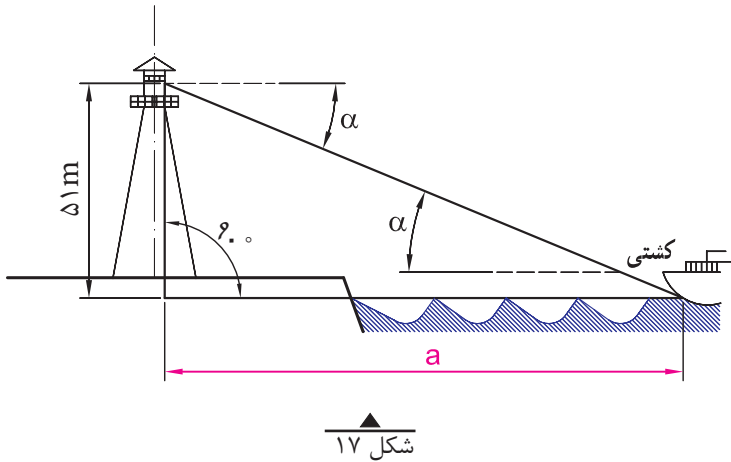
$$c^2 = 2449 \Rightarrow c = \sqrt{2449} \Rightarrow \boxed{c = 49.48}$$

تمرین:

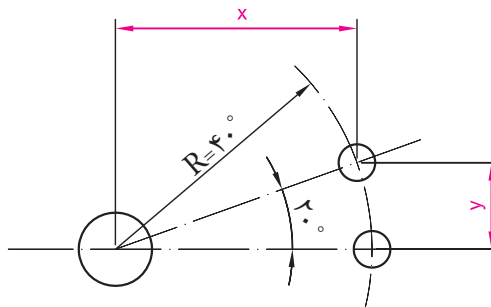
۱- مقادیر نسبت‌های مثلثاتی (\sin و \cos و \tan و \cotan) را برای زوایای زیر به دست آورید:

$۱۵^{\circ}۲۰'$, $۴۸^{\circ}۱۰'$, $۳۸^{\circ}۵۰'$, $۸۸^{\circ}۴۰'$, $۷۵^{\circ}۳۰'$

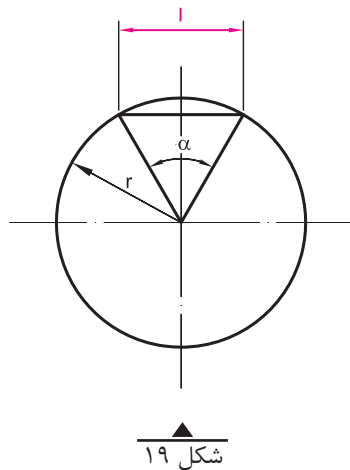
۲- یک دیده‌بان از برجی به ارتفاع ۵۱ متر، نزدیک شدن یک کشتی را تحت زاویه $۴^{\circ}۵۰'$ مشاهده می‌کند. فاصله کشتی تا برج را (حد فاصل a) به متر حساب کنید.



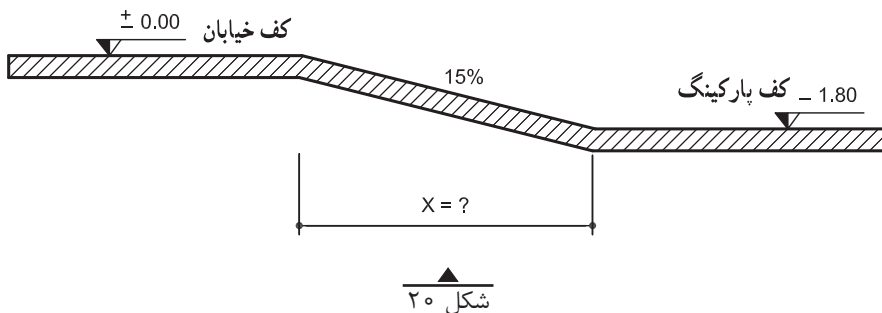
۳- در قطعه‌ای مطابق شکل ۱۸ برای استقرار پین، سوراخ‌هایی ایجاد خواهد شد. مقادیر x و y را به دست آورید.



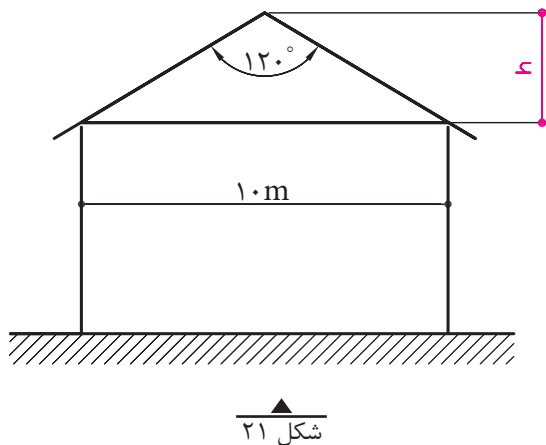
۵- رابطه‌ای برای محاسبه طول « l » قطعه دایره، بر حسب شعاع دایره و زاویه α بنویسید (شکل ۱۹).



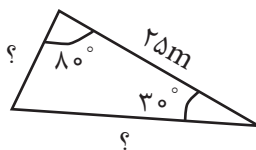
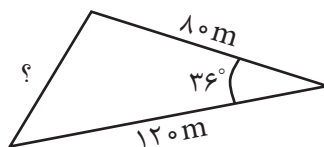
۶- کف پارکینگ یک ساختمان مسکونی، مطابق شکل ۲۰، ۲۰، ۱/۸۰ متر پایین‌تر از کف خیابان است. در صورتی که شیب رمپ ۱۵٪ باشد، طول افقی رمپ باید چند متر باشد؟ (رمپ، سطح شیب‌داری است که سطوح با اختلاف ارتفاع را به یکدیگر وصل می‌کند). شیب رمپ: نسبت اختلاف ارتفاع را به طول افقی رمپ، «شیب رمپ» می‌گویند.



۷- اندازه h را در سقف شیب دار مطابق شکل ۲۱ به دست آورید.

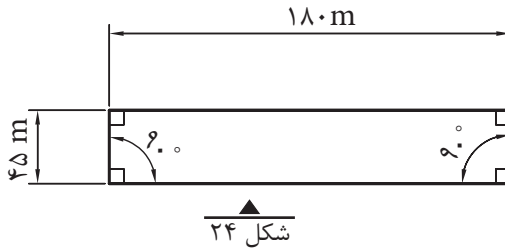


۸- اضلاع مجهول مثلث های شکل های ۲۲ و ۲۳ را به دست آورید.



۳-۵-۱- محیط چندضلعی‌ها (سه ضلعی، چهارضلعی، پنج ضلعی و ...) برابر است با مجموع اضلاع آن‌ها

مثال ۱: ابعاد زمینی مطابق شکل ۲۴ است. در صورتی که بخواهیم برای محصورکردن زمین از سیم خاردار استفاده کنیم و فاصله تیرک‌های چوبی سیم خاردار از هم ۳ متر باشد، چند عدد تیرک چوبی برای این کار لازم است؟ چنانچه از چهار ردیف سیم خاردار استفاده شود، طول سیم خاردار مصرفی چند متر است؟



حل: الف -

۱- طول محیط چهارضلعی را حساب می‌کنیم:

$$L = 180 + 45 + 180 + 45 = 450 \text{ m}$$

۲- طول محیط را تقسیم بر فاصله دو تیرک می‌کنیم:

$$n = \frac{\text{طول کل (محیط)}}{\text{فاصله دو تیرک از هم}} = \frac{450}{3} = 150 \quad \text{تعداد تیرک لازم}$$

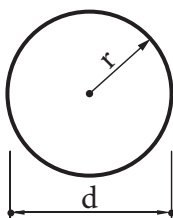
ب -

۳- برای محاسبه طول سیم خاردار، با توجه به این که چهار مرتبه به دور زمین می‌چرخد، به روش زیر عمل می‌کنیم:

$$450 \times 4 = 1800 \text{ m}$$

طول سیم خاردار لازم

۳-۵-۲- محیط دایره به شعاع r برابر است با: $u = \pi d$ یا $u = 2\pi r$

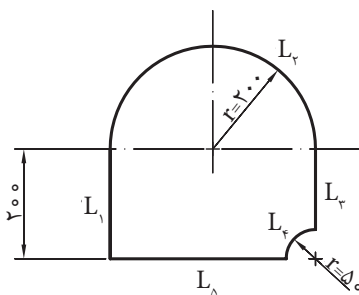


شکل ۲۵

مثال ۱: محیط دایره به شعاع ۵ سانتی متر برابر است با:

$$u = 2 \times 3.14 \times 5 \text{ cm} = 31.4 \text{ cm}$$

مثال ۲: با استفاده از روش برش با شعله، قطعه‌ای مطابق شکل ۲۶ از ورق فولادی بریده خواهد شد؛ طول مسیر برش چند متر است؟ (اندازه‌ها بر حسب میلی متر است.)



شکل ۲۶

حل: منظور از طول مسیر برش، همان محیط قطعه است. برای به دست آوردن محیط قطعه، ابتدا محیط آن را به طول‌های L_1 ، L_p ، L_r و L_d تفکیک می‌کنیم؛ سپس طول هر یک از آن‌ها را محاسبه کرده و آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم.

$$U = L_1 + L_r + L_r + L_f + L_\Delta$$

$$L_1 = 200 \text{ mm}$$

$$L_r = \frac{d_r \times \pi}{2} = \frac{400 \text{ mm} \times 3.14}{2} = 628 \text{ mm}$$

$$L_r = 200 \text{ mm} - 80 \text{ mm} = 120 \text{ mm}$$

$$L_f = \frac{d_f \times \pi}{4} = \frac{160 \text{ mm} \times 3.14}{4} = 125.6 \text{ mm}$$

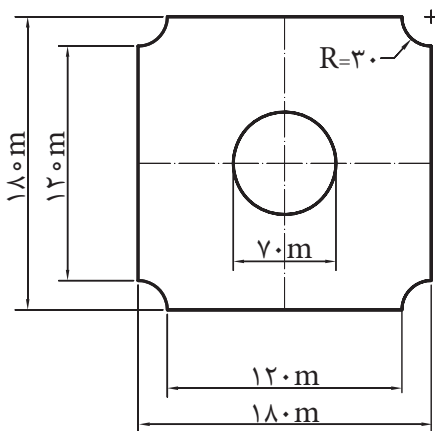
$$L_\Delta = 400 \text{ mm} - 80 \text{ mm} = 320 \text{ mm}$$

$$U = 200 \text{ mm} + 628 \text{ mm} + 125.6 \text{ mm} + 320 \text{ mm} = 1413.6 \text{ mm}$$

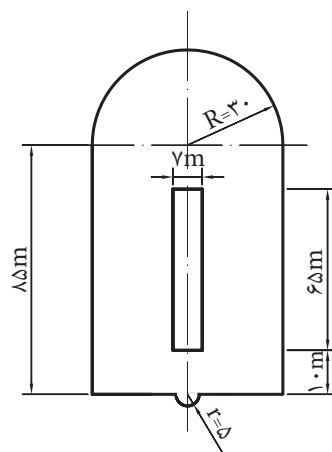
$$U = 1.414 \text{ m}$$

تمرین:

۱- محیط داخلی و خارجی شکل های ۲۷ و ۲۸ را با توجه به اندازه های داده شده محاسبه کنید. (اندازه ها بر حسب متر می باشد).

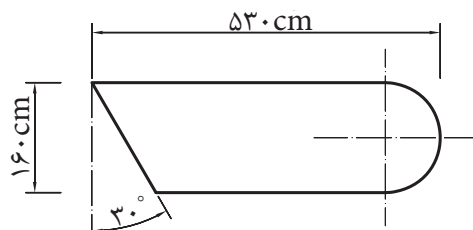


شکل ۲۸



شکل ۲۷

۲- محیط شالوده شکل ۲۹ را به دست آورید.



شکل ۲۹