فصل ۳

# استدلال و اثبات در هندسه

**اُدعُ اِلیٰ سَبیلِ رَبِّکَ بِالحِکمَةِ وَ المَوعِظَةِ الحَسَنَةِ وَ جادِلهُم بِالَّتی هِیَ اَحسَنُ ...**

با حکمت و اندرز نیکو به راه پروردگارت دعوت نما و با آنها به نیکوترین روش استدلال و مناظره کن! (سورهٔ نحل، آیهٔ ۱۲۵)

بارش برف از آسمان، رحمت الهی را با خود به زمین می‌آورد و در عین حال نماد زیبایی زمستان است. اما شاید جالب باشد بدانید که این دانه‌های زیبای متقارن که اغلب شش شاخه هستند، علی‌رغم آنکه میلیاردها دانه‌اند، امّا هر کدام شکل منحصر به خود را دارند و هیچ دو تایی از آنها «همنهشت» نیستند!

## فعالیت

متن‌های زیر را بخوانید و به سؤال‌ها پاسخ دهید :

۱ــ امیر و محسن برای دیدن مسابقه فوتبال به ورزشگاه رفتند. محسن به امیر گفت : «من مطمئن هستم که تیم مورد علاقهٔ من امروز هم می‌بازد.» امیر پرسید : «چگونه با این اطمینان حرف می‌زنی؟» محسن دلیل آورد که : «چون هر بار که به ورزشگاه رفته‌ام، تیم مورد علاقه من باخته است.»

آیا دلیلی که محسن آورده است، درست است؟ چرا؟

۲ــ عباس یک بیسکویت مستطیل شکل با ابعاد ۴ و ۸ سانتیمتر دارد. بیسکویت باقر از همان نوع، به همان ضخامت و مربع شکل به ضلع ۶ سانتیمتر است. با استفاده از دانش ریاضی خود نشان دهید که مقدار بیسکویت کدام یک بیشتر است.

۳ــ دلیلی که محسن در فعالیت ۱ برای ادعای خود آورده است را با دلیلی که شما در فعالیت ۲ آوردید مقایسه کنید. به‌نظر شما کدام قابل اطمینان‌تر است.

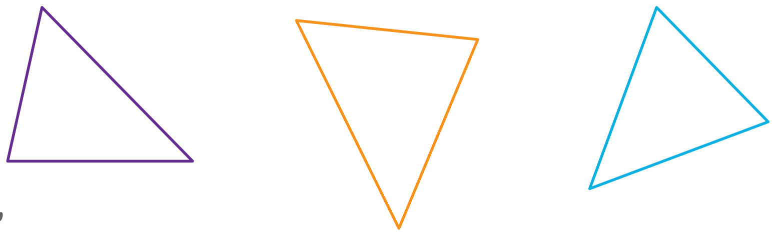
«استدلال» یعنی دلیل آوردن و استفاده از دانسته‌های قبلی، برای معلوم کردن موضوعی که در ابتدا مجهول بوده است.

همان‌گونه که در این موارد مشاهده کردید، حتی در بسیاری از کارهای روزمره نیز به استدلال نیاز پیدا می‌کنیم. راه‌های متفاوتی برای استدلال کردن هست که اعتبار و قابل اعتماد بودن آنها می‌تواند یکسان نباشد. به استدلالی که موضوع موردنظر را به‌درستی نتیجه بدهد، اثبات می‌گوییم.

## کار در کلاس

۱ــ مواردی را بازگو کنید که مانند فعالیت ۱ فردی با توجه به رویدادهای گذشته، نتیجه‌ای می‌گیرد که درست نیست.

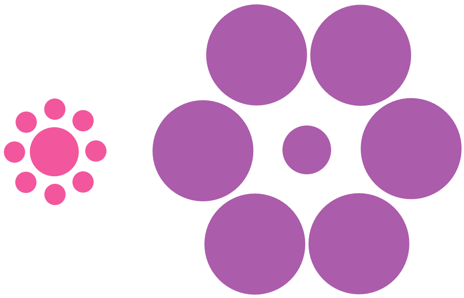
۲ــ دو ارتفاع از هر یک از مثلث‌های زیر، رسم کنید :



آیا با این مثال‌ها می‌توان نتیجه گرفت در هر مثلث، محل برخورد هر دو ارتفاع درون مثلث است؟
یک مثال بزنید که نتیجهٔ بالا را نقض کند.

اگر فردی با رسم ارتفاع‌های موردنظر در مثلث‌ها چنین نتیجه‌گیری کند که محل برخورد ارتفاع‌های هر مثلث، درون آن مثلث است، استدلال او مشابه کدام استدلال دو قسمت فعالیت قبل است؟

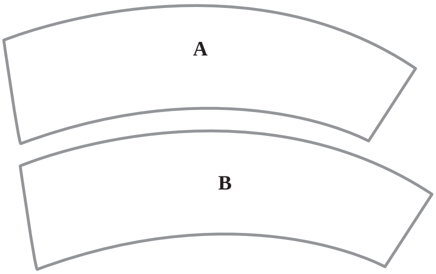
## فعالیت



۱ــ کدام یک از دو قرصی که در مرکز قرار گرفته، بزرگ‌تر است؟

الف) با مشاهده تشخیص دهید.

ب) یک کاغذ روی یکی از آنها قرار دهید. دایره محیط آن قرص را بکشید و با گذاشتن تصویر کشیده شده بر شکل دیگر، اندازهٔ آنها را با هم مقایسه کنید.




۲ــ اگر قطعه‌های A و B قطعه‌هایی از شیرینی موردعلاقه شما باشد، کدام قطعه را انتخاب می‌کنید؟ (قطعهٔ بزرگ‌تر کدام است؟)

با یک کاغذ شفاف این دو قطعه را مقایسه کنید؟ آیا حدس شما درست بود؟

۳ــ آیا مشاهده کردن و یا استفاده از سایر حس‌های پنج‌گانه برای اطمینان از درستی یک موضوع کافی است؟ چرا؟

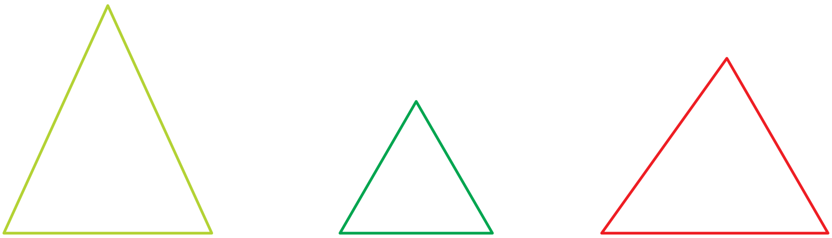
هرچند به‌طور معمول در ریاضیات و به‌ویژه در هندسه به‌کار بردن شکل‌ها، ترسیم آنها و استفاده از شهود به تشخیص راه‌حل‌ها و ارائهٔ حدس‌های درست کمک زیادی می‌کند، باید توجه کرد به تشخیصی که براساس این روش‌ها بوده است، نمی‌توانیم به‌طور کامل اطمینان کنیم.

## کار در کلاس

مواردی از درس علوم (مثل آزمایش تشخیص گرما و سرمای آب) مثال بزنید که حواس ما خطا می‌کند. در مورد نتایجی که از این مثال‌ها می‌گیرید با یکدیگر بحث کنید.

## تمرین

۱ــ در شکل‌های زیر عمودمنصف‌های سه ضلع مثلث‌ها را رسم کنید :



آیا فقط با توجه به این شکل‌ها، می‌توان نتیجه گرفت که محل برخورد عمودمنصف‌های هر مثلث همیشه درون مثلث قرار دارد؟ چگونه می‌توانید درستی ادعای خود را نشان دهید؟

۲ــ نیما و پژمان مشغول دیدن مسابقات وزنه‌برداری بودند. وزنه‌برداری قصد بلند کردن وزنه‌ای ۱۰۰ کیلویی را داشت. آنها هر دو عقیده داشتند که او نمی‌تواند وزنه را بلند کند؛ برای ادعای خود استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

**نیما** : زیرا هفتهٔ پیش این وزنه‌بردار تمرینات بهتری انجام داده بود با این‌حال نتوانست وزنهٔ ۹۰ کیلویی را بلند کند.

**پژمان** : امروز دوشنبه است. من بارها مسابقات این وزنه بردار را دیده‌ام. او هیچ‌گاه در روزهای زوج موفق نبوده است.

استدلال کدام یک قابل اعتمادتر است؟ در مورد استدلال‌ها بحث کنید.

۳ــ چون من تا به‌حال هیچ‌وقت تصادف نکرده‌ام در سفر آینده نیز تصادف نخواهم کرد.

این استدلال مشابه کدام‌یک از استدلال‌های زیر است؟

الف) چون برخی مثلث‌ها قائم‌الزاویه هستند پس مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم قائم‌الزاویه‌اند.

ب) همهٔ فیلم‌های جنگی که تاکنون دیده‌ام، جذاب بوده‌اند. فیلمی که دیروز دیدم جذاب بود،

پس فیلم جنگی بوده است.

ج) چون تمام بچه‌های خاله‌های من دختر هستند، پس بچهٔ خالهٔ کوچکم هم دختر خواهد بود.

د) چون همهٔ قرص‌های مسکن خواب‌آور است، پس در این قرص‌ها ماده‌ای هست که باعث خواب‌آلودگی می‌شود.

**۴ــ** دو نفر دربارهٔ چهار برادر به نام‌های علی، حسن، حسین و باقر می‌دانستند که : علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از باقر کوچک‌تر است و باقر از علی کوچک‌تر و حسن نیز از حسین کوچک‌تر است. هر دو نفر اعتقاد داشتند که علی از حسن بزرگ‌تر است، اما استدلال‌های متفاوتی می‌کردند.

اولی : در تمام خانواده‌هایی که من دیده‌ام که دو فرزند به نام‌های علی و حسن دارند، فرزند بزرگ‌تر را علی نامیده‌اند.

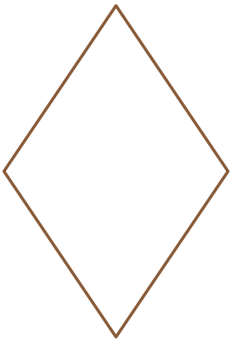
دومی : چون علی از حسین بزرگ‌تر و حسن از حسین کوچک‌تر است، پس علی از حسن بزرگ‌تر است.

استدلال کدام یک درست است؟ در مورد درستی استدلال‌ها بحث کنید.

## درس دوم: آشنایی با اثبات در هندسه

در درس گذشته یاد گرفتید که دیدن و استفاده از حواس و یا ارائهٔ مثال‌های متعدد و همچنین توجه به ابعاد ظاهری برای ایجاد اطمینان از درستی یک موضوع کفایت نمی‌کند و باید از دلیل‌های منطقی و قانع‌کننده کمک گرفت و با استدلال، درستی آن موضوع را ثابت کرد. در روند استدلالمان از اطلاعاتِ مسئله (فرض یا داده‌ها) و حقایق و اصولی که درستی آنها از قبل برای ما معلوم شده است برای رسیدن به خواستهٔ مسئله (حکم) استفاده می‌کنیم.

### فعالیت



۱ــ به گفت‌وگوی زیر توجه کنید:

**مهرداد**: آیا در هر لوزی زاویه‌های روبه‌رو با هم برابر است؟

**سعید**: بله، من در یک کتاب هندسه دیدم که اثبات کرده بود در متوازی‌الاضلاع زاویه‌های روبه‌رو، با هم مساوی است و لوزی هم نوعی متوازی‌الاضلاع است.

در این مسئله و اثبات آن، فرض، حکم و استدلال را در زیر کامل کنید:

**فرض**: شکل لوزی است.

**حکم**: ________ برابر است.

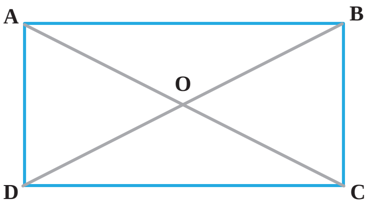
**استدلال**:

لوزی نوعی ________ است.
در متوازی‌الاضلاع ________ برابر است.
$\Rightarrow$ در لوزی زاویه‌های روبه‌رو ________

۲ــ اولین اقدامی که برای اثبات انجام می‌دهیم، تشخیص فرض، حکم و واقعیت‌های مرتبط با آن مسئله است که از قبل آنها را می‌دانستیم. در مسئلهٔ زیر فرض، واقعیت‌های از قبل ثابت شده یا دانسته و حکم را به زبان ریاضی بنویسید و عبارت‌ها را کامل کنید:

**فرض :** ABCD مستطیل است.

**حکم :** قطرهای مستطیل، مساوی است.



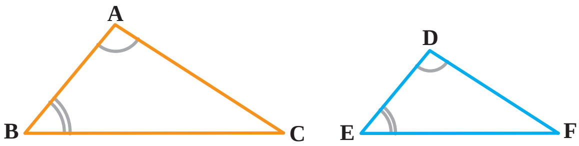

**فرض :**
$$\begin{cases} \hat{A} = \_\_\_ = \_\_\_ = \_\_\_ = 90^\circ \\ AB = \_\_\_ \quad , \quad AD = \_\_\_ \\ AB \parallel \_\_\_ \quad , \quad AD \parallel \_\_\_ \end{cases}$$

**حکم :** $AC = \_\_\_$

## کار در کلاس

فرض و حکم را برای مسئله‌های زیر مشخص کنید :

۱ــ در دو مثلث داده شده زوایای برابر در شکل مشخص شده است. ثابت کنید زاویه‌های سوم از دو مثلث نیز با هم برابر است.



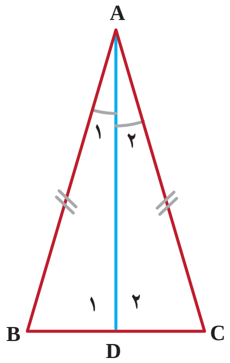

**فرض :**
$\_\_\_ = \_\_\_$
$\_\_\_ = \_\_\_$

**حکم :** $\_\_\_ = \_\_\_$

۲ــ اگر در یک مثلث دو زاویه نابرابر باشد، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ کوچک‌تر.

۳ــ اگر مجموع دو زاویه از چهارضلعی ABCD با مجموع دو زاویه از چهارضلعی EFGH برابر باشد، ثابت کنید مجموع دو زاویهٔ دیگر ABCD با مجموع دو زاویهٔ دیگر EFGH برابر است.

## فعالیت




۱ــ در مسئلهٔ زیر فرض و حکم را بنویسید و اشکال استدلال داده شده را بیابید :

مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الساقین است و AD نیمساز زاویهٔ A است.

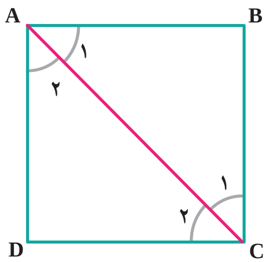
ثابت کنید AD میانه نیز هست :

**فرض :**

**حکم :**

**استدلال :** چون AD نیمساز زاویه A است، پس : $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{D}_1 = \hat{D}_2$ و ضلع AD در دو مثلث مشترک است، پس مثلث‌های ADB و ADC به حالت دو زاویه و ضلع بین (ز ض ز) با هم همنهشتند، پس اجزای متناظر آنها برابر است. درنتیجه : BD=DC

استدلال بالا را اصلاح کنید و نتیجه بگیرید در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز وارد بر قاعده، میانه هم هست. آیا در مثلث ABC می‌توان نتیجه گرفت که نیمساز زاویه B نیز میانه ضلع مقابل آن است؟ به عبارتی، آیا می‌توان خاصیت اثبات شده برای نیمساز A را به نیمساز دیگر تعمیم داد.




۲ــ با استدلال زیر به سادگی می‌توان نتیجه‌گیری کرد که قطر AC از مربع ABCD نیمساز زاویه‌های A و C است. چون دو مثلث ABC و ADC به حالت سه ضلع همنهشت است، زوایای متناظر با هم برابر است؛ بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و $\hat{C}_1 = \hat{C}_2$ و لذا AC نیمساز است.

آیا می‌توان با استدلالی مشابه، این خاصیت را به قطر دیگر نیز تعمیم داد و گفت به‌طور کلی در مربع هر قطر نیمساز زاویه‌های دو سر آن قطر است؟

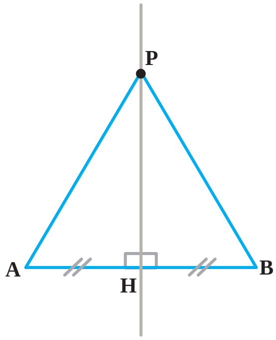
۳ــ به‌نظر شما چرا در فعالیت ۱ خاصیت موردنظر قابل تعمیم به نیمسازهای دیگر نبود، اما در فعالیت ۲ خاصیت موردنظر به قطر دیگر تعمیم داده می‌شود؟

وقتی خاصیتی را برای یک عضو از یک مجموعه ثابت کردیم، اگر تمام ویژگی‌هایی که در استدلال خود به‌کار برده‌ایم در سایر عضوهای آن مجموعه نیز باشد، می‌توان درستی نتیجه را به همهٔ عضوهای آن مجموعه تعمیم داد.

۴ــ نقطه‌ای مانند P، روی عمودمنصف پاره‌خط AB در نظر می‌گیریم و به دو سر پاره‌خط وصل می‌کنیم. چون دو مثلث AHP و BHP به حالت (ض ز ض) همنهشت است، نتیجه می‌شود پاره‌خط‌های PA و PB با هم برابر است.

بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ P، که روی عمودمنصف پاره‌خط AB است از دو سر پاره‌خط AB یکسان است.

آیا این اثبات برای اینکه نتیجه بگیریم نتیجهٔ بالا برای «هر» نقطهٔ روی عمودمنصف برقرار است، کافی است؟




## کار در کلاس

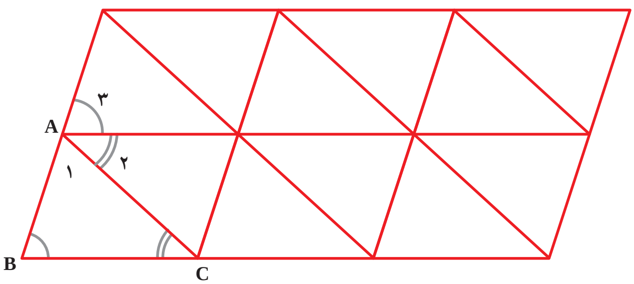
به استدلال‌هایی دقت کنید که چهار دانش‌آموز برای مسئلهٔ زیر آورده‌اند :

**مسئله :** مجموع زاویه‌های داخلی مثلث $180^\circ$ است.

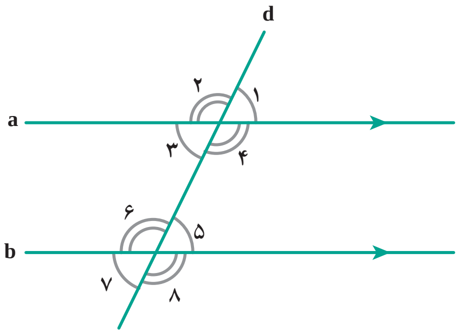
**استدلال حامد :** حامد گفت یک مثلث متساوی‌الاضلاع را درنظر می‌گیریم؛ چون سه زاویه دارد و هر زاویه $60^\circ$ است، مجموع زاویه‌های مثلث $180^\circ$ است.

**استدلال حسین :** حسین چند مثلث مختلف با حالت‌های گوناگون کشید و زوایای آنها را اندازه گرفت و دید که در همهٔ آنها مجموع زوایای داخلی برابر $180^\circ$ است و نتیجه گرفت که مجموع زوایای داخلی هر مثلث $180^\circ$ است.

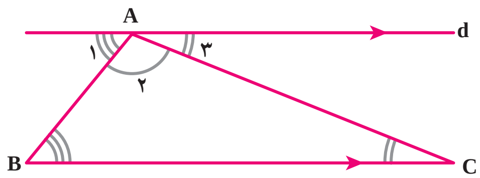
**استدلال مهدی :** مهدی شکل زیر، که از مثلث‌های همنهشت تشکیل شده است را کشید و با مشخص کردن زاویه‌های مثلث ABC به‌صورت مقابل، استدلالی با استفاده از شکل به‌صورت زیر آورد :




$$\hat{A}_1+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_1+\hat{A}_3+\hat{A}_2=180^\circ$$




**استدلال رضا :** رضا گفت می‌دانیم که «هر خطی که دو خط موازی را قطع کند با آنها هشت زاویه می‌سازد که مانند شکل چهار به چهار با هم مساوی است.»




حال مثلث دلخواه مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ را درنظر می‌گیریم؛ مانند شکل مقابل از رأس A خط d را موازی BC رسم می‌کنیم. سه زاویهٔ تشکیل شده در رأس A را با شماره‌های ۱، ۲ و ۳ نشان داده‌ایم که زاویهٔ $A_۲$ همان زاویهٔ A در مثلث است و با درنظر گرفتن AB به‌عنوان مورب داریم $\hat{B}=\hat{A}_۱$ و با درنظرگرفتن AC به‌عنوان مورب داریم $\hat{C}=\hat{A}_۳$ پس با جای‌گذاری $\hat{A}_۱$ و $\hat{A}_۳$ به‌ترتیب به جای $\hat{B}$ و $\hat{C}$ خواهیم داشت : $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_۲+\hat{A}_۱+\hat{A}_۳=۱۸۰^\circ$

استدلال رضا را می‌توان با استفاده از نمادهای ریاضی به‌صورت مرتب و خلاصه بدین‌صورت نوشت :

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{r}d \parallel BC \\ \text{و} \\ \text{مورب } AB\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B}=\hat{A}_۱ \\ \left.\begin{array}{r}d \parallel BC \\ \text{و} \\ \text{مورب } AC\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}=\hat{A}_۳\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=\hat{A}_۲+\hat{A}_۱+\hat{A}_۳=۱۸۰^\circ$$

دربارهٔ معتبربودن استدلال‌های این دانش‌آموزان بحث کنید.

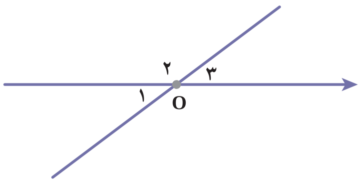
## فعالیت

**مسئله :** حمید، سعید و بهرام هر کدام مقداری پول دارند. مجموع پول‌های حمید و بهرام برابر ۵۰۰۰ تومان و مجموع پول‌های سعید و بهرام نیز برابر ۵۰۰۰ تومان است. به‌نظر شما پول حمید بیشتر است یا پول سعید؟ دلیل خود را توضیح دهید.

بین استدلالی که برای مسئلهٔ قبل و مسئلهٔ بعدی هست، چه شباهتی می‌بینید؟

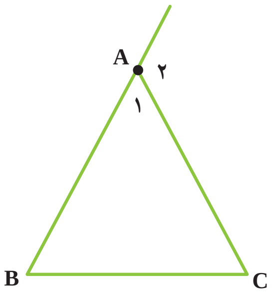
**مسئله :** نشان دهید زاویه‌های متقابل به رأس با هم برابر است.

فرض کنیم $\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۳$ مانند شکل زیر متقابل به رأس باشد، داریم :




$$\left.\begin{array}{l}\hat{O}_۱+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ\\ \hat{O}_۳+\hat{O}_۲=۱۸۰^\circ\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{O}_۱+\hat{O}_۲=\hat{O}_۳+\hat{O}_۲\Rightarrow \hat{O}_۱=\hat{O}_۳$$

## تمرین




۱ــ آیا اثبات مسئله زیر معتبر است؟ برای پاسخ خود دلیل بیاورید.

**مسئله :** در هر مثلث، اندازهٔ زاویهٔ خارجی با مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور با آن برابر است.

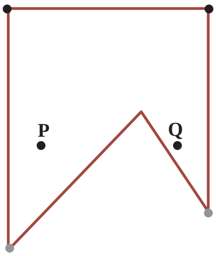
**اثبات :** مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را درنظر می‌گیریم.

می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث $۱۸۰^\circ$ است و زوایای $\hat{A}_۱$ و $\hat{B}$ و $\hat{C}$ هر کدام $۶۰^\circ$ است، بنابراین

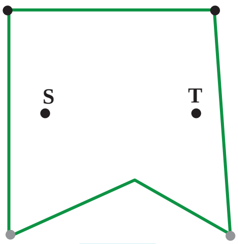
$$\hat{A}_۱+\hat{A}_۲=۱۸۰\rightarrow \hat{A}_۲=۱۸۰-\hat{A}_۱=۱۸۰-۶۰=۱۲۰$$

$$\hat{B}+\hat{C}=۶۰+۶۰=۱۲۰ \qquad\qquad \Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{B}+\hat{C}$$

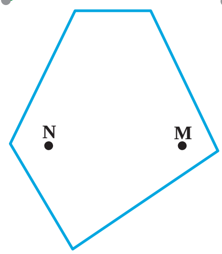
۲ــ در سال گذشته با تعریف چند ضلعی‌های محدب آشنا شدید. تعریف چندضلعی محدب را می‌توان بدین صورت هم آورد : «یک چندضلعی محدب است اگر هر پاره‌خطی که دو نقطهٔ دلخواهِ درون آن چندضلعی را به‌هم وصل می‌کند، به‌طور کامل درون آن چند ضلعی قرار بگیرد.» چند ضلعی که محدب نباشد، مقعر است. آیا تشخیص‌های دو دانش‌آموز در مورد محدب و مقعر بودن چندضلعی‌های زیر و دلایلی که ارائه کرده‌اند با توجه به تعریف بالا درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.




**نرگس** : چند ضلعی مقابل محدب نیست، زیرا نقاط P و Q درون آن قرار دارد اما پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند به‌طور کامل در آن قرار نمی‌گیرد.




**مهدیه** : چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط T و S درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.




**مریم** : چندضلعی مقابل محدب است، زیرا نقاط M و N درون آن قرار دارد و پاره‌خطی که آنها را به‌هم وصل می‌کند نیز به‌طور کامل در آن قرار دارد.

۳ــ آیا استدلال‌های زیر درست است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

الف)
هر مستطیل یک متوازی‌الاضلاع است.
چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع است.
$\Leftarrow$ ABCD مستطیل است.

ب)
در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.
ABCD مربع نیست.
$\Leftarrow$ همهٔ ضلع‌های ABCD، با هم برابر نیستند.

ج)
در هر مربع، ضلع‌ها با هم برابرند.
در چهارضلعی ABCD ضلع‌ها برابر نیستند.
$\Leftarrow$ ABCD مربع نیست.

۴ــ ثابت کنید هر نقطه که روی نیمساز زاویه قرار دارد از دو ضلع آن زاویه به یک فاصله است.

**یادآوری** : فاصلهٔ یک نقطه از یک خط برابر است با طول پاره‌خطی که از آن نقطه بر خط عمود می‌شود.

**راهنمایی** : یک زاویهٔ دلخواه بکشید و نیمساز آن را رسم، و یک نقطه روی این نیمساز مشخص کنید. ثابت کنید فاصلهٔ این نقطه از دو ضلع زاویه با هم برابر است و سپس علت اینکه این نتیجه برای همهٔ نقاطِ روی نیمساز درست است را بیان کنید.