بخش چهارم

فصل دوم

کاربرد مشتق (۱)

هدف کلی

استفاده از مشتق تابع برای رسم خط مماس و قائم در یک نقطه از نمودار تابع، تعیین نزولی یا صعودی بودن یک تابع و به دست آوردن نقطه‌های ماکزیمم یا مینیمم یک تابع.

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ معادله‌ی خط مماس در یک نقطه از نمودار یک تابع را بنویسد ؛

۲ــ معادله‌ی خط عمود بر یک منحنی را در نقطه‌ای واقع بر آن بنویسد ؛

۳ــ با استفاده از مشتق، صعودی یا نزولی بودن تابع را مشخص کند ؛

۴ــ جدول تغییرات تابع را تعیین کند ؛

۵ــ نقطه‌های ماکسیمم یا مینیمم یک تابع را مشخص کند.

پیش آزمون (۲)

۱ــ تابع $f(x)=-۲x^۲+۴x+۱$ در $\mathbb{R}$ تعریف شده است.

الف) $f(۲)$ را حساب کنید.

ب) اگر شیب خط مماس D که از نقطه‌ی به طول $x=۲$ می‌گذرد برابر $f'(۲)$ باشد مقدار آن را بیابید.

ج) معادله‌ی خط مماس (D) را که از نقطه‌ی به طول $x=۲$ می‌گذرد بنویسید.

د) نمودار منحنی $f(x)=-۲x^۲+۴x+۱$ و خط D را رسم کنید.

۲ــ مشتق تابع $f(x)=-۳x^۲+۳x+۱$ را در $\mathbb{R}$ تعیین علامت کنید.

۳ــ ماکسیمم مقدار تابع با ضابطه $f(x)=۶-۲x^۲$ را به‌دست آورید.

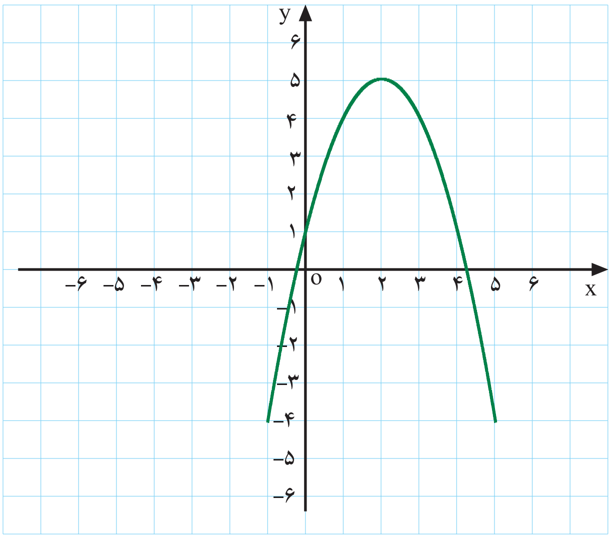
محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون (۲)

۲ـ۴ـ کاربردهای مشتق (۱)

۱ـ۲ـ۴ـ شیب خط مماس و عمود بر یک منحنی (ضریب زاویه)

فعالیت ۱ـ۴

نمودار منحنی $f(x)=-x^{۲}+۴x+۱$ را در شکل ۴ـ۴ مشاهده می‌کنید.



نمودار ۴ـ۴

الف) مقدار $f(۲)$ را حساب کنید.

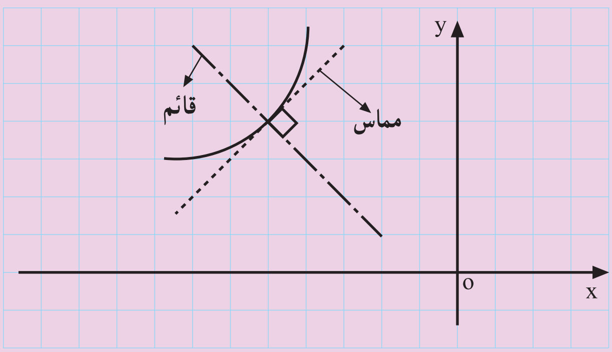
ب) مشتق f را به‌دست آورید.

ج) $f'(۲)$ را حساب کنید.

د) آیا می‌توان گفت $f'(۲)$ برابر شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی $x=۲$ است؟

پاسخ:

نتیجه: ضریب زاویه‌ی خط مماس بر منحنی تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ در نقطه‌ی به طول $x=a$ عبارت است از مشتق تابع در آن نقطه ؛ به بیان دیگر : (m ضریب زاویه است) $f'(a)=m=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$



نمودار۵ـ۴

ضریب زاویه‌ی خط عمودی که از نقطه‌ی به طول $x=a$ می‌گذرد برابر است با : (m' ضریب زاویه‌ی عمود)

(m' ضریب زاویه‌ی عمود است.) $m'=\frac{-۱}{m}$ یا $m'=\frac{-۱}{f'(a)}$

مثال : ضریب زاویه‌ی خط مماس و عمود بر منحنی تابع مقابل در نقطه‌ی داده شده را حساب کنید.

$$y=-۳x^۲+۵x+۷\ ,\ \ x=۱$$

حل: به ازای $x=۱$ ضریب زاویه‌ی خط مماس برابر است با :

$$y'=-۶x+۵\Rightarrow m=y'(۱)=-۶(۱)+۵\Rightarrow m=-۱$$

ــ ضریب زاویه‌ی خط عمود برابر است با :

$$m'=\frac{-۱}{m}\Rightarrow m'=\frac{-۱}{-۱}\Rightarrow m'=۱$$

مثال: ضریب زاویه‌ی خط مماس و عمود بر منحنی تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

$$y=\sqrt{۵x^۳+۳x+۴}\ ,\ \ x=۰$$

حل: ضریب زاویه‌ی خط مماس و خط عمود در نقطه‌ی $x=۰$ برابر است با :

$$y'=\frac{۱۵x^۲+۳}{۲\sqrt{۵x^۳+۳x+۴}}\Rightarrow m=y'(۰)=\frac{۳}{۴}\ \text{و}$$

$$m'=\frac{-۱}{m}=\frac{-۴}{۳}$$

تمرین: ضریب زاویه‌ی خط مماس بر منحنی تابع‌های زیر را در نقطه‌های داده شده به‌دست آورید.

۱) $f(x)=۳+۵\sin ۲x\ ,\ \ x=\pi$

۲) $f(x)=-۳x^۲+۵x+۷\ ,\ \ x=۲$

۳) $g(x)=\frac{-۳x}{۲x+۴}\ ,\ \ x=۱$

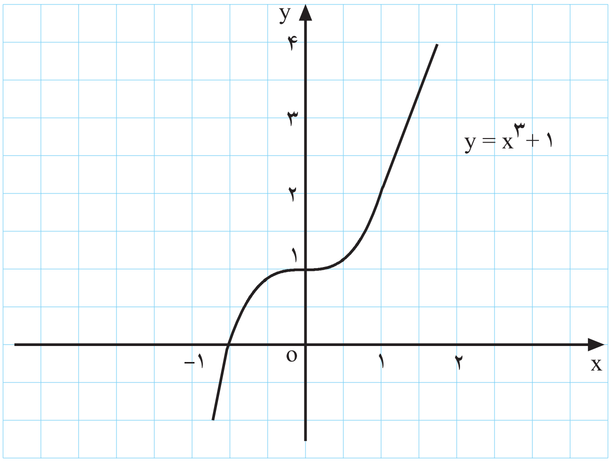
۴) $z(t)=\frac{۵}{t}\ ,\ \ t=۳$

۵) $f(x)=\sqrt{۲x+۵}\ ,\ \ x=۲$

۲ـ۲ـ۴ـ تعیین معادله‌ی خط مماس و خط عمود

فعالیت ۲ـ۴

تابع $f(x)=x^{۳}+۱$ و منحنی آن نمودار ۶ـ۴ رسم شده است.



نمودار ۶ـ۴

الف) مقدار $f(۲)$ را حساب کنید.

ب) مشتق f را به دست آورید.

ج) مقدار $f'(۲)$ را حساب کنید.

محل پاسخ:

$f(۲)=$

$f'(x)=$

$f'(۲)=$

د) آیا می‌توان گفت معادله‌ی روبه‌رو معادله‌ی خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی $x=۲$ است؟

بلی : ☐ خیر : ☐

$$y-f(۲)=f'(۲)(x-۲)$$

هـ) آیا معادله‌ی مقابل معادله‌ی خط عمود است؟

بلی : ☐ خیر : ☐

$$y-f(۲)=\frac{-۱}{f'(۲)}(x-۲)$$

نتیجه: هرگاه $A(a,f(a))$ روی منحنی $y=f(x)$ واقع باشد. معادله‌ی خط مماس بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=a$ برابر است با :

$$y-f(a)=f'(a)(x-a)$$

همچنین، معادله‌ی خط قائم بر منحنی $y=f(x)$ در نقطه‌ای به طول $x=a$ برابر با :

$$y-f(a)=\frac{-۱}{f'(a)}(x-a)$$

می‌دانیم که ضریب زاویه‌ی خط مماس برابر است با :

$$m=f'(a)$$

ـ ضریب زاویه‌ی خط عمود نیز برابر است با :

$$m'=\frac{-۱}{f'(a)}$$

مثال ۲: معادله‌ی خط مماس و خط عمود بر منحنی تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده بنویسید :

$$f(x) = -x^{۲} + ۳x \ , \ x = ۲$$

حل: $f(۲)$ در نقطه‌ی داده شده برابر است با :

$$f(۲) = -(۲)^{۲} + ۳(۲) = ۲$$

ـ از تابع مشتق می‌گیریم :

$$f'(x) = -۲x + ۳$$

ـ با قرار دادن x نقطه در مشتق، ضریب زاویه به‌دست می‌آید.

$$m = f'(۲) = -۲(۲) + ۳ = -۱$$

ـ مقدار $f(۲)$ و $f'(۲)$ را در معادله‌ی خط قرار می‌دهیم :

$$y - f(۲) = f'(۲)(x - ۲) \Rightarrow y - ۲ = -۱(x - ۲)$$

ـ در نتیجه معادله‌ی خط مماس برابر است با :

$$\Rightarrow y = -x + ۴$$

ـ ضریب زاویه‌ی خط مماس را عکس قرینه می‌کنیم و آن را ضریب زاویه‌ی خط عمود بر منحنی قرار می‌دهیم و معادله‌ی خط عمود را به دست می‌آوریم.

$$y - f(۲) = -\frac{۱}{f'(۲)}(x - ۲) \Rightarrow y - ۲ = \frac{-۱}{-۱}(x - ۲)$$

$$\Rightarrow y = x$$

مثال ۳: معادله‌ی خط مماس بر منحنی مقابل را در نقطه‌ی داده شده بنویسید.

$$y = -۲\sin ۲x \quad \text{و} \quad x = \frac{\pi}{۶}$$

حل: مقدار y به ازای $x = \frac{\pi}{۶}$ برابر است با :

$$f(\frac{\pi}{۶}) = -۲\sin ۲(\frac{\pi}{۶}) = -\sqrt{۳}$$

ـ y' را به ازای $x = \frac{\pi}{۶}$ محاسبه کرده و آن را برابر ضریب زاویه‌ی خط قرار می‌دهیم :

$$y' = -۴\cos ۲x \Rightarrow m = f'(\frac{\pi}{۶}) = -۴\cos\frac{\pi}{۳} = -۲$$

ـ معادله‌ی خط مماس برابر است با :

$$y - f(\frac{\pi}{۶}) = f'(\frac{\pi}{۶})(x - \frac{\pi}{۶})$$

ـ پس از ساده‌کردن خواهیم داشت :

$$y + \sqrt{۳} = -۲(x - \frac{\pi}{۶}) \Rightarrow y = -۲x + \frac{\pi}{۳} - \sqrt{۳}$$

مثال ۴: معادله‌ی خط عمود بر منحنی تابع f را در نقطه‌ی داده شده بنویسید.

$$f(x)=\tan x \quad \text{و} \quad x=\frac{\pi}{۴}$$

حل: به ازای x نقطه y نقطه برابر است با :

$$f(\frac{\pi}{۴})=\tan(\frac{\pi}{۴})=۱$$

ـ از تابع مشتق می‌گیریم

$$f'(x)=۱+\tan^{۲} x$$

ـ ضریب زاویه‌ی خط مماس به ازای x نقطه در رابطه‌ی مشتق برابر است با :

$$f'(\frac{\pi}{۴})=۱+\tan^{۲}(\frac{\pi}{۴})=۱+۱=۲$$

ـ معادله‌ی خط عمود بر منحنی برابر است با :

$$y-y_۱=\frac{-۱}{f'(\frac{\pi}{۴})}(x-x_۱)\Rightarrow$$

ـ به ازای مختصات نقطه، معادله‌ی خط به‌دست می‌آید.

$$y-۱=\frac{-۱}{۲}(x-\frac{\pi}{۴})\Rightarrow y=\frac{-۱}{۲}x+\frac{\pi}{۸}+۱$$

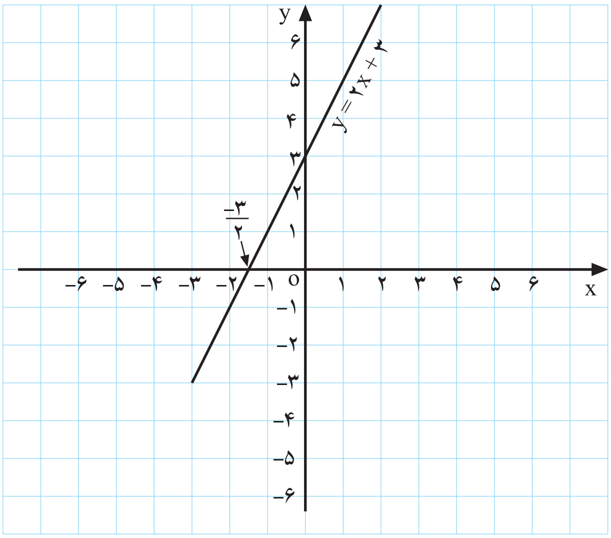
تمرین

معادله‌ی خط مماس و خط عمود بر منحنی تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی $x=۰$ و $x=۱$ به‌طور جداگانه بنویسید.

$$f(x)=x^{۳}+۵x-۴$$

شرح عملیات :

۳ــ۲ــ۴ــ مشتق و رفتار تابع



نمودار ۷ــ۴

فعالیت ۳ــ۴

خط $y=۲x+۳$ و نمودار آن ۷ــ۴ را مشاهده می‌کنید.

الف) به ازای $x_۱=-\frac{۳}{۲}$ و $x_۲=۰$، $f(x_۱)$ و $f(x_۲)$ را حساب کنید.

ب) آیا نتیجه‌ی روبه‌رو درست است؟

بلی : ☐ خیر : ☐ $\frac{f(x_۲)-f(x_۱)}{x_۲-x_۱}>۰$

ج) با توجه به $D_f=\mathbb{R}$ به ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ متعلق به دامنه، آیا می‌توان نتیجه‌ی مقابل را گرفت؟

$x_۱<x_۲\Rightarrow f(x_۱)<f(x_۲)$

ــ از طرفی y' همواره مثبت است.

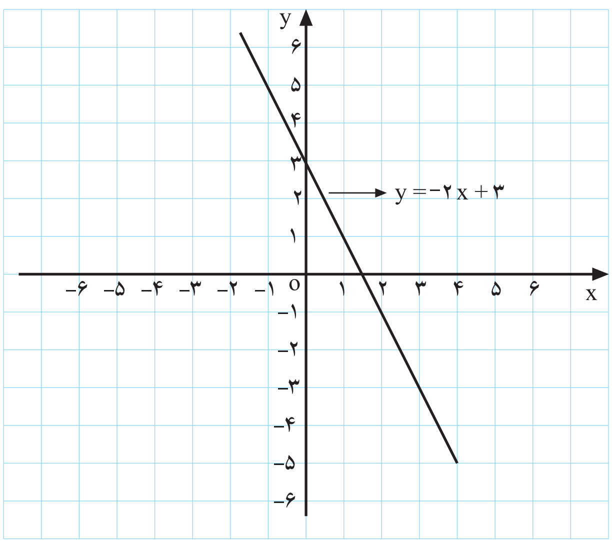
$y'=۲>۰$

اگر تابع $y=f(x)$ بر (a,b) تعریف شده باشد و بر این بازه $y'>۰$ $(y'<۰)$ آنگاه y بر (a,b) صعودی (نزولی) است.

مثال: هرگاه $y=-۲x+۳$، به ازای هر مقدار x از دامنه‌ی تابع $y'=-۲<۰$ باشد می‌گوییم تابع y نزولی است ؛ به بیان دیگر :

$$x_۱<x_۲\Rightarrow f(x_۱)>f(x_۲)$$

نمودار خط $y=-۲x+۳$ را در مقابل مشاهده می‌کنید.



نمودار ۸ــ۴

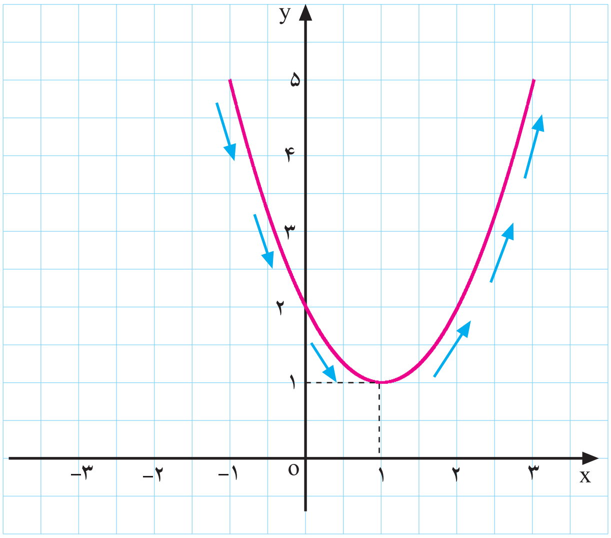
فعالیت ۴ـ۴

منحنی $y=x^۲-۲x+۲$ را در نمودار ۹ـ۴ مشاهده می‌کنید.

الف) آیا ریشه‌ی مشتق تابع y، یعنی $y'=۲x-۲$ برابر $x=۱$ است؟ بلی : ☐ خیر : ☐

ب) به ازای $x<۱$، علامت y' را مشخص کنید. آیا می‌توان گفت در فاصله‌ی $x\in(-\infty,۱)$ تابع نزولی است.

ج) به ازای $x>۱$، علامت y' را مشخص کنید. آیا تابع در فاصله‌ی $x\in(۱,+\infty)$ صعودی است؟



نمودار ۹ـ۴

د) با توجه به موارد بالا، جدول ۱ـ۴ را تکمیل کنید.

هـ) با توجه به نمودار ۹ـ۴ و جدول ۱ـ۴ نقطه‌ی مینیمم تابع $y=x^۲-۲x+۲$ چه نقطه‌ای است؟

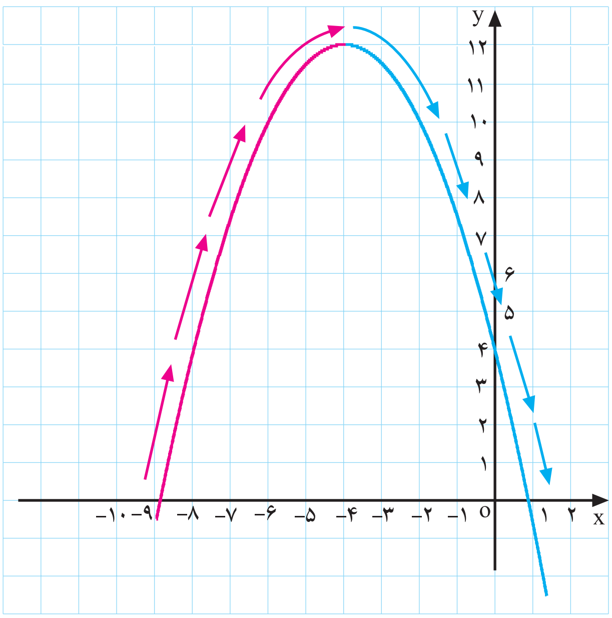
جدول ۱ـ۴

x	$-\infty$	$x<۱$	۱	$x>۱$	$+\infty$
$y'=۲x-۲$		☐	۰	☐	
y	$+\infty$	↘	☐	↗	$+\infty$

فعالیت ۵ـ۴

الف) با توجه به منحنی $y=\frac{-۱}{۲}x^۲-۴x+۴$ و جدول ۲ـ۴ منحنی این تابع را رسم کنید (نمودار ۱۰ـ۴).

ب) نقطه‌ی ماکزیمم تابع و علامت y' را روی دامنه‌اش مشخص کنید.



نمودار ۱۰ـ۴

جدول ۲ـ۴

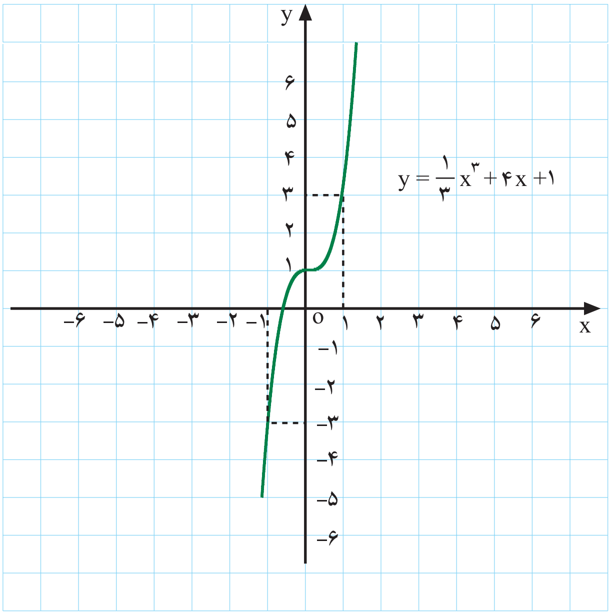
x	$-\infty$	$x<-۴$	-۴	$x>-۴$	$+\infty$
$y'=-x-۴$			۰		
	$-\infty$	↗	۱۲	↘	$-\infty$

قضیه‌ی ۱: فرض کنید تابع f بر بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد و برای هر نقطه‌ی x متعلق به I داشته باشیم $f'(x) \geq 0$ ، در این صورت تابع f بر I صعودی است.

مثال ۱: منحنی تابع $y = \frac{1}{3}x^3 + 4x + 1$ را مشاهده می‌کنید (نمودار ۱۱ــ۴).

ــ مشتق این تابع همواره صعودی است، زیرا

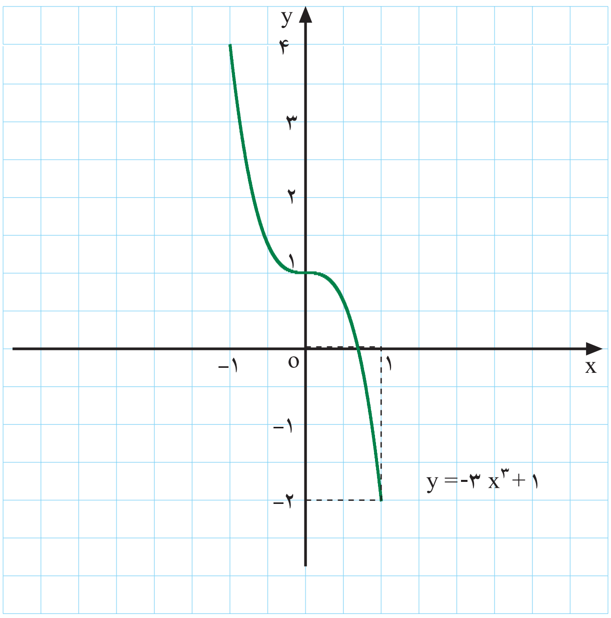
$y' = x^2 + 4 > 0$



نمودار ۱۱ــ۴ــ یک تابع صعودی

قضیه‌ی ۲: اگر تابع f بر بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد و برای هر نقطه‌ی x متعلق به I داشته باشیم $f'(x) \leq 0$ ، آنگاه تابع f بر I نزولی است.

مثال ۲: تابع $y = -3x^3 + 1$ مفروض است. چون $y' = -9x^2 \leq 0$ ، بنابراین تابع نزولی است (نمودار ۱۲ــ۴).



نمودار ۱۲ــ۴ ــ یک تابع نزولی

تعریف: تابع f را بر بازه‌ی I یکنوا گوییم در صورتی که f بر I صعودی یا نزولی باشد.

مثال ۳: رفتار تابع روبه‌رو را به‌دست آورید.

$$y = ۴x - ۱۰۵ \ , \ x \in (-\infty, +\infty)$$

حل: مشتق تابع برابر است با :

$$y' = ۴ > ۰ \ , \ x \in \mathbb{R}$$

بنابراین تابع $y = ۴x - ۱۰۵$ بر $\mathbb{R}$ صعودی است.

مثال ۴: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y = \frac{۳x + ۱}{۲x - ۱}, \ x \in (\frac{۱}{۲}, +\infty)$$

حل: مشتق تابع y را حساب می‌کنیم.

$$y' = \frac{۳(۲x - ۱) - ۲(۳x + ۱)}{(۲x - ۱)^۲} = \frac{۶x - ۳ - ۶x - ۲}{(۲x - ۱)^۲} \Rightarrow$$

$$y' = \frac{-۵}{(۲x - ۱)^۲} < ۰$$

ـ با توجه به علامت y'، تابع روی $(\frac{۱}{۲}, +\infty)$ نزولی است.

مثال ۵: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y = \tan x - x \ , \ x \in (-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$$

حل : با توجه به مشتق تابع، روی بازه‌ی $(-\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{\pi}{۲})$ صعودی است.

$$y' = \cancel{۱} + \tan^۲ x - \cancel{۱} \Rightarrow y' = \tan^۲ x \geq ۰$$

مثال ۶: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y = \cot ۳x - ۵x \ , \ x \in (\frac{\pi}{۳} \text{ و } \frac{۲\pi}{۳})$$

حل : با توجه به علامت y'، تابع روی $(\frac{\pi}{۳}$ و $\frac{۲\pi}{۳})$ نزولی است.

$$y' = -۳(۱ + \cot^۲ ۳x) - ۵ \Rightarrow y' = -۸ - ۳\cot^۲ ۳x < ۰$$

مثال ۷: رفتار تابع روبه‌رو را بررسی کنید.

$$y = \frac{-۱}{۳}x^۳ - ۵x + ۱۱$$

حل: با توجه به علامت y'، تابع نزولی است.

$$y' = -x^۲ - ۵ < ۰$$

مثال ۸: تابع y مفروض است. حدود b را چنان محاسبه کنید که تابع همواره در بازه‌ی $(-\infty, \frac{۵}{۳})$ در بازه‌ی نزولی باشد.

$$y = \frac{۲x + b}{۳x - ۵}$$

حل: مشتق تابع (y') را به دست می‌آوریم :

$$y' = \frac{۲(۳x - ۵) - ۳(۲x + b)}{(۳x - ۵)^۲} = \frac{۶x - ۱۰ - ۶x - ۳b}{(۳x - ۵)^۲}$$

چون می‌خواهیم تابع همواره نزولی باشد باید $y' \leq ۰$:

$$\Rightarrow y' = \frac{-۱۰-۳b}{(۳x-۵)^۲} \leq ۰ \Rightarrow -۱۰-۳b \leq ۰ \Rightarrow$$

ـ حدود b برابر است با :

$$-۳b \leq ۱۰ \Rightarrow b \geq -\frac{۱۰}{۳}$$

مثال ۹: رفتار تابع f را بررسی کنید.

$$f(x) = \begin{cases} ۳x^۳ + ۵x & x < ۰ \\ -۵x + ۴ & x > ۰ \end{cases}$$

حل: مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x) = \begin{cases} ۹x^۲ + ۵ & x < ۰ \\ -۵ & x > ۰ \end{cases}$$

ـ به ازای $x < ۰$ تابع همواره صعودی است، زیرا :

$$f'(x) = ۹x^۲ + ۵ > ۰$$

ـ به ازای $x > ۰$ تابع همواره نزولی است، زیرا :

$$f'(x) = -۵ < ۰$$

مثال ۱۰: ثابت کنید تابع مقابل بر دامنه‌اش یکنواست.

$$f(x) = \begin{cases} x^۲ + ۴x & x > ۱ \\ ۱ + ۲x & x < ۱ \end{cases}$$

حل: مشتق تابع f برابر است با :

$$f'(x) = \begin{cases} ۲x + ۴ & x > ۱ \\ ۲ & x < ۱ \end{cases}$$

ـ به ازای $x > ۱$ ، تابع f صعودی است، زیرا :

$$f'(x) = ۲x + ۴ > ۰ \quad , \quad x > ۱$$

ـ به ازای $x < ۱$ تابع f صعودی است، زیرا :

$$f'(x) = ۲ > ۰ \qquad x < ۱$$

ـ با توجه به مقادیر مشتق، تابع f یکنواست.

$$\Rightarrow f'(x) > ۰ \quad x \in \mathbb{R} - \{۱\}$$

تمرین

۱ــ رفتار تابع‌های زیر را بررسی کنید (صعودی یا نزولی بودن)

$$۱)\ y=(۲x-۳)^{۲}$$

$$۲)\ y=\frac{-۲x}{۴x+۵}$$

$$۳)\ y=۵\tan ۳x+۴x^{۳}$$

۲ــ تابع مقابل مفروض است. حدود m را در بازه‌ی $(-\frac{۲}{۵},+\infty)$ چنان بیابید که این تابع همواره نزولی باشد.

۳ــ تابع g در مقابل مفروض است. آیا g بر دامنه‌اش یکنواست.

۴ــ حدود b را درتابع مقابل چنان بیابید که همواره تابع f صعودی باشد.

محل پاسخ

$$y=\frac{-۳x+m}{۵x+۲}$$

$$g(x)=\begin{cases}-۲x+۱ & ,\ x>۰\\ x^{۲}+۴ & ,\ x<۰\end{cases}$$

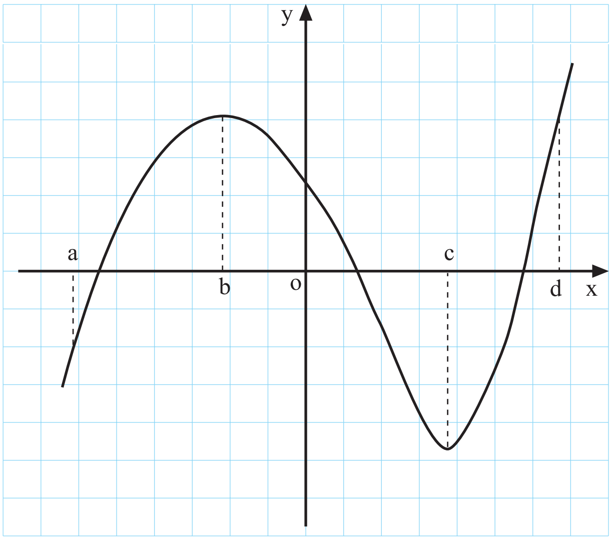
$$f(x)=(۳b+۲)x-۱۱$$

۴ـ۲ـ۴ـ تغییرات تابع: منحنی تابع f را در شکل ۴ـ۱۳ مشاهده می‌کنید.

ـ در بازه‌های (a,b) ، (c,d) تابع صعودی است.

ـ دربازه‌ی (b,c) تابع f نزولی است.

نکته: منظور از بررسی تغییرات تابع، معین‌کردن قسمت‌هایی از دامنه است که تابع در آن صعودی یا نزولی می‌باشد. که برای رسم دقیق نمودار یک تابع به کار برده می‌شود.



شکل ۴ـ۱۳

مثال ۱: تابع مقابل مفروض است. جدول تغییرات این تابع را مورد بررسی قرار دهید و منحنی آن را رسم کنید.

$$y=-۵+۲x^{۲}$$

حل: ریشه‌ی مشتق را به‌دست می‌آوریم.

$$y'=۴x=۰\Rightarrow x=۰$$

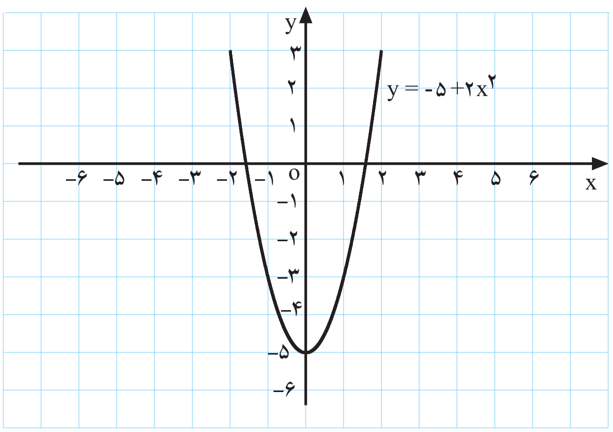
ـ جدول تغییرات تابع را با توجه به ریشه‌ی مشتق تابع تنظیم کرده و تابع را تعیین علامت می‌کنیم.

ـ با توجه به جدول ۴ـ۳ تابع در فاصله‌ی $(-\infty,۰)$ نزولی و در فاصله‌ی $(۰,+\infty)$ صعودی است.

جدول ۴ـ۳

x	$-\infty$		۰		$+\infty$
y'		$-$	۰	$+$	
y	$+\infty$	$\searrow$	-۵	$\nearrow$	$+\infty$
		نزولی		صعودی	

ـ نمودار ۴ـ۱۴ با توجه به جدول ۴ـ۳ رسم شده است.



نمودار تابع ۴ـ۱۴

مثال ۲: تغییرات تابع مقابل را بررسی کنید. (بدون رسم)

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x+2 \quad , \quad x\in\mathbb{R}$$

حل: از تابع مشتق می‌گیریم :

$$y'=x^2-x-2=(x-2)(x+1)=0$$

ـ ریشه‌های مشتق را به‌دست می‌آوریم ؛

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \Rightarrow x=2 \\ \text{یا} \\ x+1=0 \Rightarrow x=-1 \end{cases}$$

ـ با تعیین علامت ریشه‌های مشتق تغییرات تابع را در جدول ۴ـ۴ مشخص می‌کنیم.

جدول ۴ـ۴

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
y′		+	0	−	0	+	
y	$-\infty$	↗	$\frac{19}{6}$ max	↘	$-\frac{4}{3}$ min	↗	$+\infty$

با مشاهده‌ی جدول ۴ـ۴ در می‌یابیم که در بازه‌ی $(-\infty,-1)$ و بازه‌ی $(2,+\infty)$ تابع صعودی و در بازه‌ی $(-1,2)$ نزولی است.

مثال ۳: تغییرات تابع مقابل را بررسی کنید (بدون رسم)

$$y=(2x-1)^2+1 \ , \quad x\in\mathbb{R}$$

حل: ریشه‌های مشتق تابع را به دست می‌آوریم :

$$y'=4(2x-1)=0 \Rightarrow 2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$

ـ با توجه به جدول ۴ـ۵ تابع در بازه‌ی $(-\infty,\frac{1}{2})$ نزولی و در بازه‌ی $(\frac{1}{2},+\infty)$ صعودی است.

جدول ۴ـ۵

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
y′		−	0	+	
y	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

تمرین

تغییرات تابع‌های زیر را بررسی کنید (بدون رسم نمودار)

الف) $y=-2x^2+8x$

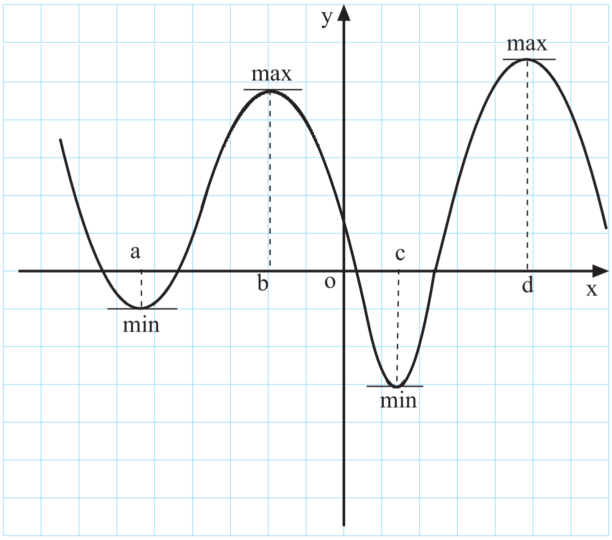
ب) $y=4x-\frac{1}{6}x^3$

محل پاسخ:

۵ــ۲ــ۴ــ ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع: در نمودار ۱۵ــ۴ تابع در نقاط b و d ماکسیمم نسبی و در نقاط a و c مینیمم نسبی دارد.

اگر بخواهیم با استفاده از جدول تغییرات و مشتق تابع این نقاط را به دست آوریم چه مراحلی باید انجام گیرد؟

برای این منظور فعالیت ۶ــ ۴ را انجام دهید.



نمودار ۱۵ــ۴

فعالیت ۶ــ۴

تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$f(x)=x^{۳}-۱۲x+۱$$

الف) حدهای روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\square \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=\square$$

ب) ریشه‌های مشتق تابع f را به‌دست آورید.

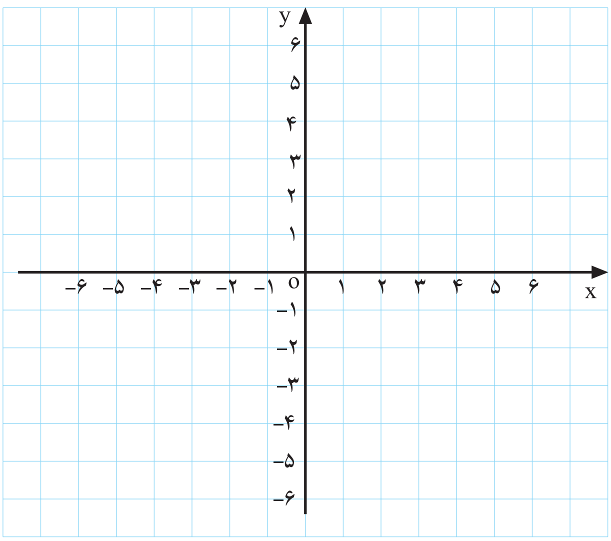
ج) جدول ۶ــ۴ را تکمیل کنید.

د) با توجه به تعیین علامت، نقاط ماکسیمم و مینیمم تابع را تعیین کنید.

جدول ۶ــ۴

x	$-\infty$	$\square$	$\square$	$+\infty$
y'		۰	۰	
y	$-\infty$	$\square$	$\square$	$+\infty$

هـ) با استفاده از جدول نمودار تابع f را رسم کنید.



نمودار ۱۶ــ۴

تعریف ۱: تابع f در نقطه‌ی $(x_0, f(x_0))$ دارای مینیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل x_0، مانند (a,b) 1 D_f باشد به قسمتی که برای هر x از این بازه داشته باشیم:

$$f(x_0) \le f(x)$$

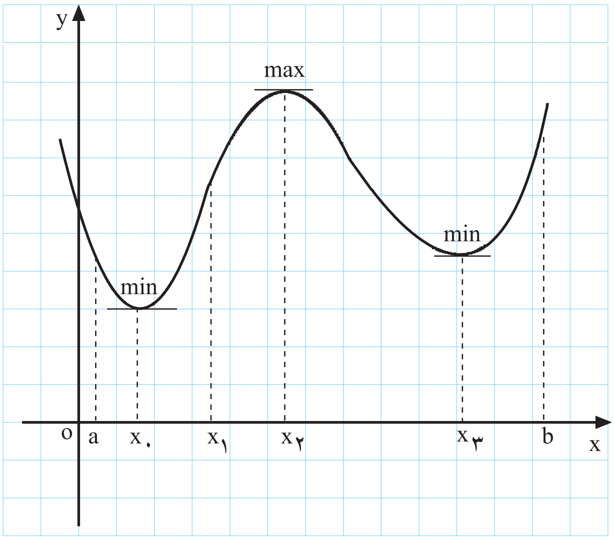
$f(x_0)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع می‌نامیم. (نمودار ۱۷ــ۴)

تعریف ۲: گوییم تابع f در نقطه‌ی $(x_2, f(x_2))$ دارای ماکسیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل x_2، مانند (a,b) 1 D_f باشد به قسمتی که برای هر x از این بازه داشته باشیم:

$$f(x_2) \ge f(x)$$

$f(x_2)$ را مقدار ماکسیمم نسبی تابع نامیم. (نمودار ۱۷ــ۴)

در شکل ۱۷ــ۴ نمودار $y = f(x)$ را مشاهده می‌کنیم که دارای چند نقطه‌ی ماکسیمم و مینیمم نسبی است.



نمودار ۱۷ــ۴: $y = f(x)$

شکل ۱۸ــ۴

تعریف ۳: نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع را نقاط اکسترمم تابع نامیم.

مثال ۱: برای تعیین جهت تغییرات و نقاط اکسترمم تابع با ضابطه $y=f(x)$ مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

$$y=x^{۳}-\frac{۱}{۳}x+۱$$

الف) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\lim_{x\to+\infty} y=\lim_{x\to+\infty} x^{۳}=+\infty \ , \ \lim_{x\to-\infty} y=-\infty$$

ب) ریشه‌های $y'=۰$ را در صورت وجود به‌دست می‌آوریم:

$$y'=۳x^{۲}-\frac{۱}{۳}=۰\Rightarrow ۳x^{۲}=\frac{۱}{۳}$$

$$\Rightarrow x^{۲}=\frac{۱}{۹}\Rightarrow\begin{cases}x_{۱}=-\frac{۱}{۳}\\ x_{۲}=+\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

ج) با توجه به موارد الف و ب جدول تغییرات را تشکیل می‌دهیم.

د) با استفاده از تغییرات علامت، نقاط max و min را مشخص می‌کنیم.

جدول ۷ـ۴

x	$-\infty$		$-\frac{۱}{۳}$		$\frac{۱}{۳}$		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{۲۹}{۲۷}$ max	$\searrow$	$\frac{۲۵}{۷}$ min	$\nearrow$	$+\infty$

نکته‌ی ۱: در صورتی که مشتق در نقطه‌ی $x_{۰}$ برابر صفر باشد ولی در دو طرف دارای یک علامت باشد تابع در $x_{۰}$ اکسترمم نسبی ندارد.

نکته‌ی ۲: هرگاه در تابع پیوسته‌ای معادله‌ی $y'=۰$ ریشه نداشته باشد تابع در دامنه‌اش همواره صعودی یا نزولی می‌باشد.

مثال ۲: اکسترمم‌های تابع مقابل را به دست آورید.

$$y=۳x-x^{۲}$$

حل: مشتق تابع را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$y'=۳-۲x=۰\Rightarrow x=\frac{۳}{۲}$$

ــ مشتق تابع را تعیین علامت می‌کنیم (جدول ۸ـ۴).

جدول ۸ـ۴

x	$-\infty$		$\frac{۳}{۲}$		$+\infty$
y'		+	۰	−	
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{۹}{۴}$ max	$\searrow$	$-\infty$

ــ با توجه به جدول ۸ـ۴ تغییرات و علامت مشتق بازه‌ی $(-\infty,\frac{۳}{۲})$ تابع صعودی و در بازه‌ی $(\frac{۳}{۲},+\infty)$ تابع نزولی است.

ـ نقطه‌ی $(\frac{۹}{۴},\frac{۳}{۲})$ نقطه‌ی ماکسیمم تابع است.

مثال ۳: جدول تغییرات تابع مقابل را به‌دست آورید و با رسم منحنی تابع، نقاط اکسترمم را نیز مشخص سازید.

$$y=\sin x+۲ \qquad ۰\le x\le ۲\pi$$

حل: ریشه‌های مشتق تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$y'=\cos x=۰$$

$$\cos x=۰\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲}+k\pi, x\in[۰,۲\pi]$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{۲} \text{ و } \frac{۳\pi}{۲}$$

ـ مشتق را تعیین علامت می‌کنیم (جدول ۹ـ۴).

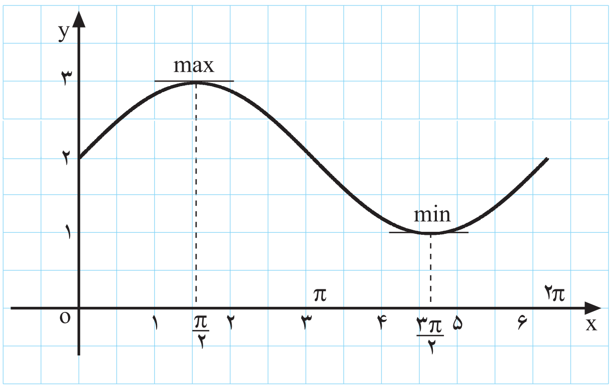
جدول ۹ـ۴

x	۰		$\frac{\pi}{۲}$		π (نقطه کمکی)		$\frac{۳\pi}{۲}$		۲π
y′		+	۰	−		−	۰	+	
y	۲	↗	۳ max	↘	۲	↘	min	↗	۲

ـ با توجه به تغییر علامت مشتق، تابع در بازه‌های $(۰,\frac{\pi}{۲})$ و $(\frac{۳\pi}{۲},۲\pi)$ صعودی و در بازه‌ی $(\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲})$ نزولی است.

ـ نقاط به‌دست آمده از جدول ۹ـ۴ را بر روی دستگاه مختصات تعیین می‌کنیم.

ـ با رسم نقاط به یکدیگر منحنی تابع به‌دست می‌آید.



نمودار ۱۹ـ۴

مثال ۴: اکسترمم تابع مقابل را در بازه‌ی $[-۲,۳]$ به‌دست آورید.

$$f(x)=۲x^۲-۸x+۳$$

حل ۳: ریشه‌های y' را پیدا می‌کنیم و در جدول ۱۰ـ۴ قرار می‌دهیم.

$$y'=۴x-۸=۰\Rightarrow x=۲$$

جدول ۱۰ـ۴

x	−۲		۲		۳
y′		−	۰	+	
y	۲۷	↘	−۵ min	↗	−۳

ـ با توجه به جدول ۱۰ـ۴ نقطه‌ی $(۲,-۵)$ نقطه‌ی مینیمم نسبی است.

مثال ۵: مقادیر a و b و c از تابع مقابل را چنان محاسبه کنید که نقاط (۳,۲۲−) و (۱,−۱۰) اکسترمم تابع و نقطه‌ی (۱,۷−) نقطه‌ای از تابع باشد.

$$y = ax^{۳} + bx^{۲} - ۹x + c$$

حل: از تابع مشتق می‌گیریم و آن را برابر صفر قرار می‌دهیم.

$$y' = ۳ax^{۲} + ۲bx - ۹$$

$$y' = ۳ax^{۲} + ۲bx - ۹ = ۰$$

ــ به جای متغیر در مشتق $x = -۳$ و $x = ۱$ را قرار می‌دهیم در نتیجه خواهیم داشت :

$$\begin{cases} ۳a(-۳)^{۲} + ۲b(-۳) - ۹ = ۰ \\ ۳a(+۱)^{۲} + ۲b(۱) - ۹ = ۰ \end{cases}$$

ــ برای محاسبه‌ی a و b دستگاه دو مجهولی درجه اول را از روش حذفی حل می‌کنیم.

$$\begin{array}{r} \\ ۳ \end{array}\begin{cases} ۲۷a - ۶b = ۹ \\ ۳a + ۲b = ۹ \end{cases}$$

ــ با حذف b مقدار a به‌دست می‌آید :

$$\begin{cases} ۲۷a - \cancel{۶b} = ۹ \\ +۹a + \cancel{۶b} = ۲۷ \end{cases}$$

$$۳۶a = ۳۶ \Rightarrow \boxed{a = ۱}$$

ــ مقدار a را در یکی از معادلات دستگاه قرار می‌دهیم تا b به‌دست آید :

$$۳(۱) + ۲b = ۹ \Rightarrow ۲b = ۹ - ۳ \Rightarrow \boxed{b = ۳}$$

ــ برای محاسبه‌ی c مقدار a و b را در تابع قرار می‌دهیم، در نتیجه :

$$y = x^{۳} + ۳x^{۲} - ۹x + c$$

ــ از طرفی با قراردادن مختصات نقطه‌ی (۱,۷−) از منحنی در رابطه‌ی به‌دست آمده خواهیم داشت.

$$۷ = (-۱)^{۳} + ۳(-۱)^{۲} - ۹(-۱) + c \Rightarrow ۷ = -۱ + ۳ + ۹ + c$$

ــ مقدار c برابر است با :

$$\Rightarrow c = ۷ - ۱۱ \Rightarrow \boxed{c = -۴}$$

مثال ۶: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. اگر این تابع در نقطه‌ی (۱,۷−) دارای اکسترمم باشد مقدار c و b را محاسبه کنید.

$$f(x) = x^{۳} + ۶bx + c$$

حل: مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x) = ۳x^{۲} + ۶b$$

ــ تابع در $x = -۱$ دارای اکسترمم است، پس :

$$f'(-۱) = ۰ \Rightarrow ۳(-۱)^{۲} + ۶b = ۰ \Rightarrow ۳ + ۶b = ۰$$

ـ مقدار b برابر است با :

$$\Rightarrow ۶b = -۳ \Rightarrow b = \frac{-۳}{۶} \Rightarrow \boxed{b = -\frac{۱}{۲}}$$

ـ به ازای $b = -\frac{۱}{۲}$ ضابطه‌ی تابع برابر است با :

$$f(x) = x^۳ + ۶(-\frac{۱}{۲})x + c \Rightarrow f(x) = x^۳ - ۳x + c$$

ـ نقطه‌ی $(-۱,۷)$ را در ضابطه‌ی تابع جایگزین می‌کنیم :

$$۷ = (-۱)^۳ - ۳(-۱) + c \Rightarrow ۷ = -۱ + ۳ + c$$

ـ مقدار c برابر است با :

$$c = ۷ - ۲ \Rightarrow \boxed{c = ۵}$$

مثال ۷: تابع g با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$g(x) = -x^۲ + ۵mx + n$$

نقطه‌ی $(۱,۳)$ اکسترمم تابع است. m و n را محاسبه کنید.

حل: نقطه‌ی $(۱,۳)$ بر نمودار g واقع است، پس :

$$g(۱) = ۳ \Rightarrow -(۱)^۲ + ۵m(۱) + n = ۳ \Rightarrow \boxed{۵m + n = ۴}$$

ـ مشتق تابع به ازای $x = ۱$ برابر صفر است، پس :

$$g'(x) = -۲x + ۵m \Rightarrow -۲(۱) + ۵m = ۰ \Rightarrow m = \frac{۲}{۵}$$

ـ به ازای $m = \frac{۲}{۵}$ مقدار n را حساب می‌کنیم :

$$۵(\frac{۲}{۵}) + n = ۴ \Rightarrow ۲ + n = ۴ \Rightarrow$$

$$n = ۴ - ۲ \Rightarrow \boxed{n = ۲}$$

مثال ۸: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است.

$$f(x) = (۳a + ۱)x^۳ + ۵ax^۲ + ۵x - ۷$$

مقدار a را چنان محاسبه کنید که در $x = -۱$ تابع دارای اکسترمم باشد.

حل: مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x) = ۳(۳a + ۱)x^۲ + ۱۰ax + ۵$$

ـ به ازای $x = -۱$ مشتق تابع برابر صفر است، پس :

$$f'(-۱) = (۹a + ۳)(-۱)^۲ + ۱۰a(-۱) + ۵ = ۰ \Rightarrow \boxed{a = +۸}$$

تمرین

۱ــ نقاط اکسترمم تابع‌های زیر را در بازه‌های داده شده مشخص کنید.

۱) $y=\cos x+\frac{۱}{۲}x \quad x\in[۰,۲\pi]$

۲) $y=-۵x^{۲}+۴x+۱ \quad x\in\mathbb{R}$

۳) $y=x^{۳}-\frac{۱}{۲}x^{۲}+۱ \quad x\in\mathbb{R}$

۲ــمقدار a و b را چنان بیابید که نقطه‌ی $(-۲,۴)$ ماکسیمم‌تابع $y=-۵x^{۲}+bx+a$ باشد.

۳ــ مقدار c را در تابع $f(x)=cx^{۳}+(۵-۲c)x+۵$ چنان بیابید که نقطه‌ی $x=۲$ نقطه‌ی اکسترمم تابع باشد.

آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۲)

۱ــ معادله‌ی خط مماس و خط عمود بر نمودار تابع $y=x^{۳}-۴x$ در نقطه‌ی $x=۲$ را بنویسید.

۲ــ صعودی و نزولی بودن تابع‌های زیر را از طریق تعیین علامت مشتق تابع مشخص کنید.

۱) $f(x)=x^{۳}-۹x^{۲}+۱ \quad x\in \mathbb{R}$

۲) $f(x)=۷-x^{۲} \quad x\in \mathbb{R}$

۳ــ به کمک مشتق، تابع‌های زیر را رسم کنید.

۱) $y=۴x-x^{۲}$

۲) $y=۲x^{۳}-۶x+۱$

۴ــ تابع f با ضابطه‌ی $f(x)=bx^{۳}+(۲b+۳)x^{۲}+۷x$ داده شده است. مقدار b را چنان به دست آورید که در $x=+۱$ تابع اکسترمم داشته باشد.

۵ــ جدول تغییرات تابع $y=\cos x+۳$ را در بازه‌ی $x\in[۰,\pi]$ یافته و سپس منحنی آن را رسم کنید.