۴ــ۱ــ۴ــ قضیه‌های مشتق

قضیه‌ی ۱: اگر تابع f در x=a مشتق داشته باشد در این نقطه پیوسته است.

مثال ۱: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است این تابع در $x=1$ مشتق‌پذیر است و مشتق آن برابر است با :

$$f(x)=x^{2}-3x$$

$$f'(x)=2x-3 \Rightarrow f'(1)=-1$$

ــ بنابراین با توجه به قضیه‌ی ۱ تابع پیوسته است، زیرا :

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)=-2$$

قضیه‌ی ۲: (مشتق حاصل‌جمع دو تابع)
اگر u و v دو تابع برحسب x و مشتق‌پذیر باشند و $f(x)=u+v$ ، آن‌گاه $f'(x)=u'+v'$

مثال ۲: مشتق تابع مقابل را به دست آورید.

$$y=x^{2}+x^{3}$$

x^{2} و x^{3} دو تابع مشتق‌پذیرند، پس :

$$y'=2x+3x^{2}$$

قضیه‌ی ۳: اگر u و v برحسب x، دارای مشتق باشند و $f=u\ \ v$ آن‌گاه : $f'=u'v+v'u$

مثال ۳: مشتق تابع مقابل را به‌دست آورید.

$$f(x)=(-6x^{2}+7x)(3x^{4}+\sqrt{x})$$

ــ با استفاده از قضیه‌ی ۳، مشتق f(x) برابر است با :

$$f'(x)=(-12x+7)(3x^{4}+\sqrt{x})+(12x^{3}+\frac{1}{2\sqrt{x}})(-6x^{2}+7x)$$

تذکر: مشتق حاصل‌ضرب دو تابع به حاصل‌ضرب تعداد متناهی تابع قابل تعمیم است.

مثال ۴: مشتق تابع مقابل را به ازای $x=2$ به دست آورید.

$$f(x)=(x-2)(x-5)(x+6)$$

حل: مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x)=(x-۲)'(x-۵)(x+۶)+(x-۲)(x-۵)'(x+۶)+(x-۲)(x-۵)(x+۶)'$$

ــ پس از محاسبه‌ی مشتق هر پرانتز خواهیم داشت :

$$\Rightarrow f'(x)=(x-۵)(x+۶)+(x-۲)(x+۶)+(x-۲)(x-۵)$$

ــ به جای x عدد ۲ را قرار می‌دهیم :

$$\Rightarrow f'(۲)=(۲-۵)(۲+۶)+(۲-۲)(۲+۶)+(۲-۲)(۲-۵)$$

پس مشتق $f(x)$ به ازای $x=۲$ برابر است با :

$$f'(۲)=-۲۴$$

قضیه‌ی ۴: (مشتق حاصل تقسیم دو تابع)

اگر $u'(x)$ و $v'(x)$ وجود داشته باشد و $f(x)=\frac{u(x)}{v(x)}$ به شرط $v(x)\neq ۰$ آن‌گاه داریم :

$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-v'(x).u(x)}{v^{۲}(x)}$$

مثال ۵: مشتق تابع مقابل را بنویسید.

$$y=\frac{-۷x+۵}{۳+۴x}$$

حل: با استفاده از قضیه‌ی ۴ داریم :

$$\Rightarrow y'=\frac{-۷(۳+۴x)-۴(-۷x+۵)}{(۳+۴x)^{۲}}$$

$$=\frac{-۲۱-۲۸x+۲۸x-۲۰}{(۳+۴x)^{۲}}$$

پس از ساده کردن، مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow y'=\frac{-۴۱}{(۳+۴x)^{۲}}$$

مثال ۶: مشتق تابع مقابل را به‌دست آورید.

$$f(x)=\frac{۵}{x^{۳}}$$

حل: طبق قضیه‌ی ۴ داریم :

$$f'(x)=\frac{۰\times x^{۳}-(۳x^{۲})\times ۵}{(x^{۳})^{۲}}=\frac{-۱۵x^{۲}}{x^{۶}}$$

ـ مشتق تابع برابر است با :

$$f(x)=-\frac{۱۵}{x^{۴}}$$

قضیه‌ی ۵: (مشتق ترکیب دو تابع)

اگر y تابعی برحسب u با ضابطه‌ی $y=f(u)$ و u نیز تابعی برحسب x با ضابطه‌ی $u=g(x)$ باشد، آن گاه y تابعی برحسب x با این ضابطه :

$$y=f(u)=f(g(x))=(fog)(x)$$

می‌باشد. حال اگر $u=g(x)$ در x مشتق‌پذیر و تابع f در $u=g(x)$ مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه y نیز در x مشتق‌پذیر است و همچنین :

$$y'=(fog)'(x)=f'(g(x)).g'(x)$$

مثال ۷: تابع‌های u و y در مقابل مفروض‌اند. مشتق y را برحسب x (y'_x) به‌دست آورید.

$$y=-۲u^{۳}\ ,\ u=۳x^{۲}+۵x$$

ـ با توجه به قضیه‌ی ۵ و رابطه‌ی y'_x خواهیم داشت :

$$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)\Rightarrow y'=(۶x+۵)(-۶u^{۲})$$

ـ درعبارت مشتق، به جای u، مساوی آن را قرار می‌دهیم، پس :

$$y'=-۶(۶x+۵)(۳x^{۲}+۵x)^{۲}$$

مثال ۸: تابع‌های u و y در مقابل مفروض‌اند ؛

$$y=۳u^{۲}+۵u-۳ \text{ و } u=\sqrt{۳x+۱}$$

ابتدا y'_x را یافته، سپس مقدار $y'_{(۵)}$ را حساب کنید.

حل: با کاربرد قضیه‌ی ۵ مشتق تابع مرکب عبارت است از :

$$y=f(u)\Rightarrow y'=u'f'(u)\Rightarrow$$

$$y'_x=\left(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}\right)(۶u+۵)\Rightarrow$$

ـ در مشتق تابع به جای u مقدار آن را قرار می‌دهیم :

$$y'_x=\left(\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۱}}\right)(۶\sqrt{۳x+۱}+۵)\Rightarrow$$

ـ برای محاسبه‌ی $y'_{(۵)}$ به جای x عدد ۵ را در مشتق قرار می‌دهیم.

$$y'_{(۵)}=\left(\frac{۳}{۲\sqrt{۳\times ۵+۱}}\right)(۶\sqrt{۳\times ۵+۱}+۵)$$

ـ مشتق تابع در $x=۵$ برابر است با :

$$\Rightarrow y'_{(۵)}=\left(\frac{۳}{۸}\right)(۲۹)\Rightarrow y'_{(۵)}=\frac{۸۷}{۸}$$

(مشتق توابع مثلثاتی)

الف) مشتق تابع سینوس

۱ـ اگر $y = \sin x$ آن‌گاه $y. = \cos x$

۲ـ اگر $y = \sin u$ (u برحسب x) آن‌گاه $y. = u. \cos u$

مثال‌های نمونه:

$y = \sin x . ۷x . \quad y. = \cos x . ۷$

$y = ۲\sin x . ۳\sin(x^۲ . x) .$

$y. = ۲\cos x . ۳(۲x . ۱)\cos(x^۲ . x)$

ب) مشتق تابع کسینوس

۱ـ اگر $y = \cos x$ آن‌گاه $y. = . \sin x$

$y = \cos\sqrt{x} . \quad y. = . \frac{۱}{۲\sqrt{x}}\sin\sqrt{x}$

۲ـ اگر $y = \cos u$ (u برحسب x) آن‌گاه $y. = . u.\sin u$

$y = \cos ۲x \quad ۷\cos ۳x . \quad y. = . ۲\sin ۲x . ۲۱\sin ۳x$

ج) مشتق تابع تانژانت

۱ـ اگر $y = \tan x$ آن‌گاه $y. = ۱ . \tan^۲ x = \frac{۱}{\cos^۲ x}$

$y = (۳x . ۵)\tan x . \quad y. = ۳\tan x . (۳x . ۵)(۱ . \tan^۲ x)$

۲ـ اگر $y = \tan u$ (u برحسب x) آن‌گاه

$y. = u.(۱ . \tan^۲ u) = \frac{u.}{\cos^۲ u}$

$y = \tan ۴x . \quad y. = ۴(۱ . \tan^۲ ۴x) = \frac{۴}{\cos^۲ ۴x}$

د) مشتق تابع کتانژانت

۱ـ اگر $y = \cot x$ آن‌گاه

$y. = . (۱ . \cot^۲ x) = \frac{۱}{\sin^۲ x}$

$y = \cot^۳ x . \quad y. = . ۳(۱ . \cot^۲ x)\cot^۲ x$

۲ـ اگر $y = \cot u$ آن‌گاه

$y. = . u.(۱ . \cot^۲ u) = \frac{u.}{\sin^۲ u}$

$y = \cot ۷x . \quad y. = . ۷(۱ . \cot^۲ ۷x) = \frac{۷}{\sin^۲ ۷x}$

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$$f(x)=۵x^{۲} \quad ۳\sin ۲x \ ، \ x=\frac{\pi}{۴}$$

حل: مشتق تابع را به ازای $x=\frac{\pi}{۴}$ حساب می‌کنیم.

$$f.(x)=۱۰x \quad ۶\cos ۲x \ . \quad f.(\frac{\pi}{۴})=۱۰(\frac{\pi}{۴}) \quad ۶\cos ۲(\frac{\pi}{۴})$$

ــ در $x=\frac{\pi}{۴}$ ، مشتق برابر است با :

$$. \quad f.(\frac{\pi}{۴})=\frac{۵\pi}{۲} \quad ۶\cos\frac{\pi}{۲}=\frac{۵\pi}{۲}$$

مثال ۱۰: مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

$$f(x)=\sin ۳x.\cos ۲x ، \ x=\frac{\pi}{۶}$$

حل: مشتق حاصل‌ضرب دو تابع برابر است با :

$$f.(x)=۳\cos ۳x\cos ۲x \quad ۲\sin ۲x.\sin ۳x \ .$$

ــ به ازای $x=\frac{\pi}{۶}$ ، مشتق برابر است با :

$$f.(\frac{\pi}{۶})=۳\cos\frac{\pi}{۲}\cos\frac{\pi}{۳} \quad ۲\sin\frac{\pi}{۳}\sin\frac{\pi}{۲} \ .$$

ــ پس از ساده کردن مشتق به‌دست می‌آید.

$$f.(\frac{\pi}{۶})=۳(۰)(\frac{۱}{۲}) \quad ۲ \ . \ \frac{\sqrt{۳}}{۲} \ . \ ۱= \ . \ \sqrt{۳}$$

مثال ۱۱: مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده به‌دست آورید.

$$f(x)=x\sqrt{۲x} \ و \ x=\frac{۹}{۲}$$

حل: مشتق حاصل‌ضرب دو تابع برابر است.

$$f.(x)=۱ \ . \ \sqrt{۲x} \ . \ \frac{۲}{۲\sqrt{۲x}} \ . \ x=\sqrt{۲x} \ . \ \frac{x}{\sqrt{۲x}}$$

ــ به ازای $x=\frac{۹}{۲}$ مقدار مشتق برابراست با :

$$. \quad f.(\frac{۹}{۲})=\sqrt{۹} \ . \ \frac{\frac{۹}{۲}}{\sqrt{۹}}=۳ \ . \ \frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۲}$$

مثال ۱۲: مشتق تابع مقابل را به ازای نقطه‌ی داده شده به‌دست آورید.

$$f(x)=۲x \ . \ \cot\frac{x}{۲} \ و \ x=\pi$$

حل: مشتق جمع دو تابع برابر جمع مشتق‌های آن دو تابع است ؛ در نتیجه داریم :

$$f.(x)=۲ \quad \frac{۱}{۲}(۱ \ . \ \cot^{۲}\frac{x}{۲}) . \quad f.(\pi)=۲ \quad \frac{۱}{۲}(۱ \ . \ \cot^{۲}\frac{\pi}{۲})$$

ــ به ازای $x=\pi$ مقدار مشتق برابر است با :

ــ پس از ساده کردن $f.(\pi)$ به‌دست می‌آید.

$$. \quad f.(\pi)=۲ \quad \frac{۱}{۲}(۱ \ . \ ۰)=۲ \quad \frac{۱}{۲}=\frac{۴ \quad ۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f'(\pi)=\frac{۳}{۲}$$

مثال ۱۳: مشتق تابع مقابل را به‌ازای عدد داده شده محاسبه کنید.

$$f(x)=\frac{۳}{۵x-۱} \text{ و } x=۱$$

ــ با استفاده از مشتق کسر به ازای $x=۱$ مشتق را به‌دست می‌آوریم :

$$f'(x)=\frac{۰\times(۵x-۱)-۵\times ۳}{(۵x-۱)^۲}=\frac{-۱۵}{(۵x-۱)^۲}\Rightarrow$$

$$f'(۱)=\frac{-۱۵}{۱۶}$$

مثال ۱۴: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده محاسبه کنید.

$$f(t)=\frac{۲t-۴}{۵-۴t}\ ،\ t=۴$$

ــ مشتق تابع کسری برابر است با :

$$f'(t)=\frac{۲(۵-۴t)-(-۴)(۲t-۴)}{(۵-۴t)^۲}=\frac{۱۰-۸t+۸t-۱۶}{(۵-۴t)^۲}$$

ــ به ازای $t=۴$ ، مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(t)=\frac{-۶}{(۵-۴t)^۲}\Rightarrow f'(۴)=\frac{-۶}{۱۲۱}$$

مثال ۱۵: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده محاسبه کنید.

$$y=\sqrt{۴+\sin ۲x} \text{ و } x=۰$$

حل: مشتق تابع به ازای $x=۰$ برابر است با :

$$y'=\frac{\cancel{۲}\cos ۲x}{\cancel{۲}\sqrt{۴+\sin ۲x}}\Rightarrow y'_{(۰)}=\frac{\cos(۰)}{\sqrt{۴+\sin(۰)}}=\frac{۱}{۲}$$

مثال ۱۶: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده محاسبه کنید.

$$f(0)=\sin^۳+.\ \cos^۷ 0\ ،\ =.\ \frac{\pi}{۲}$$

حل: مشتق برابر است با :

$$f'(0)=۳\cos 0\sin^۲-.\ ۷\sin 0\cos^۶ 0$$

ــ به ازای $\frac{\pi}{۲}$.= ، مقدار مشتق به‌دست می‌آید.

$$f'(\frac{\pi}{۲})=۳\cos\frac{\pi}{۲}\sin^۲\overset{۰}{\frac{\pi}{\cancel{۲}}}-۷\sin\frac{\pi}{\cancel{۲}}\overset{۰}{\cos^۶}\frac{\pi}{۲}\Rightarrow f'(\frac{\pi}{۲})=۰$$

مثال ۱۷: مشتق تابع مقابل را به ازای عدد داده شده حساب کنید.

$$f(x)=(x^۲+\cos x)(-۳x+۴)\ ،\ x=۰$$

حل: مشتق تابع حاصل ضرب برابر است با :

$$f'(x)=(2x-\sin x)(-3x+4)-3(x^2+\cos x)$$

ــ به ازای $x=0$ مقدار مشتق به‌دست می‌آید.

$$f'(0)=(2(0)-\sin(0))(-3(0)+4)-3(0^2+\cos(0))$$
$$\Rightarrow f'(0)=0-3\Rightarrow f'(0)=-3$$

۵ــ۱ــ۴ــ مشتق دوم یک تابع: با تکرار عمل مشتق‌گیری در صورت وجود مشتق می‌توان از مشتق تابع دوباره مشتق گرفت که به آن مشتق مرتبه‌ی دوم تابع می‌گوییم و آن را به صورت y'' یا $f''(x)$ نمایش می‌دهیم.

مثال:

$$f(x)=3x^5-6x^2+11$$
$$f'(x)=15x^4-12x$$
$$f''(x)=60x^3-12$$

نکته: اگر تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ روی بازه‌ی باز I مشتق‌پذیر باشد، اگر تابع f' روی I مشتق‌پذیر باشد آنگاه می‌گوییم تابع f روی I مشتق دوم دارد و مشتق دوم y را با $f''(x)$ نمایش می‌دهیم و به همین ترتیب مشتق مرتبه‌ی سوم را با $f'''(x)$ یا $f^{(3)}(x)$ و … و مشتق مرتبه‌ی nام را با $f^{(n)}(x)$ نمایش می‌دهیم.

$$f^{(3)}(x)=180x^2 \quad \text{و} \quad f^{(4)}(x)=360x$$
$$f^{(5)}(x)=360 \quad \text{و} \quad f^{(6)}(x)=0$$

مثال ۱: در تابع روبه‌رو $f''(x)$ را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$$f(x)=-3x^3+5x^2 \quad \text{و} \quad x=-2$$

ــ از مشتق اول دوباره مشتق می‌گیریم :

$$f'(x)=-9x^2+10x\Rightarrow f''(x)=-18x+10$$

ــ به ازای $x=-2$ مشتق دوم تابع برابر است با :

$$f''(-2)=-18(-2)+10\Rightarrow f''(-2)=46$$

مثال ۲: در تابع مقابل $f''(x)$ را در نقطه‌ی داده شده به‌دست آورید.

$$f(x)=\sin x+\cos x \quad x=\frac{\pi}{4}$$

ــ از مشتق اول دوباره مشتق می‌گیریم :

$$f'(x)=\cos x-\sin x\Rightarrow f''(x)=-\sin x-\cos x$$

ــ به ازای $x=\frac{\pi}{4}$ مشتق دوم تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f''(\frac{\pi}{4})=-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ــ پس از ساده کردن داریم :

$$\Rightarrow f''(\frac{\pi}{4})=-\sqrt{2}$$

مثال ۳: تابع مقابل مفروض است، هرگاه $y''_{(2)}=9$ باشد

$$y=\frac{1}{3}x^3-5Bx^2+3x$$

مقدار B را محاسبه کنید.

حل: مشتق اول و دوم تابع را پیدا می‌کنیم :

$$y' = x^{۲} - ۱۰Bx + ۳ \Rightarrow y'' = ۲x - ۱۰B$$

ـ مشتق را برابر عدد داده شده قرار می‌دهیم، B به‌دست می‌آید.

$$۹ = ۲(۲) - ۱۰B \Rightarrow ۱۰B = ۴ - ۹ \Rightarrow B = \frac{-۵}{۱۰} = \frac{-۱}{۲}$$

مثال ۴: تابع‌های f و g مفروض‌اند :

$$f(x) = x^{\frac{۴}{۳}} \text{ و } g(x) = x\sqrt{x}$$

نشان دهید بین مشتق‌های دوم آن‌ها رابطه‌ی روبه‌رو برقرار است :

$$f''(۸) + g''(۴) = \frac{۳۵}{۷۲}$$

حل: مشتق اول تابع با ضابطه f(x) برابر است با :

$$f(x) = x^{\frac{۴}{۳}} \Rightarrow f'(x) = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۴}{۳}-۱} = \frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}$$

ـ برای محاسبه‌ی $f''(x)$ از $f'(x)$ مشتق می‌گیریم :

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{۴}{۳}(\frac{۱}{۳})x^{\frac{۱}{۳}-۱} = \frac{۴}{۹}x^{-\frac{۲}{۳}} = \frac{۴}{۹x^{\frac{۲}{۳}}}$$

ـ به ازای $x = ۸$ مقدار $f''(x)$ برابر است با :

$$f''(x) = \frac{۴}{۹\sqrt[۳]{x^{۲}}} \Rightarrow f''(۸) = \frac{۴}{۹\sqrt[۳]{۸^{۲}}} = \frac{۱}{۹}$$

ـ مشتق اول g(x) برابر است با :

$$g'(x) = ۱ \times \sqrt{x} + \frac{۱}{۲\sqrt{x}} \times x \Rightarrow g'(x) = \sqrt{x} + \frac{x}{۲\sqrt{x}}$$

ـ برای محاسبه‌ی $g''(x)$ از $g'(x)$ مشتق می‌گیریم :

$$g''(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{۱ \times (۲\sqrt{x}) - x(۲ \times \frac{۱}{۲\sqrt{x}})}{(۲\sqrt{x})^{۲}}$$

ـ مشتق دوم g(x) برابر است با :

$$\Rightarrow g''(x) = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{\frac{۲x - x}{\sqrt{x}}}{۴x} = \frac{۱}{۲\sqrt{x}} + \frac{۱}{۴\sqrt{x}}$$

ـ به ازای $x = ۴$ مشتق دوم g(x) برابر است با :

$$\Rightarrow g''(۴) = \frac{۱}{۲\sqrt{۴}} + \frac{۱}{۴\sqrt{۴}} = \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} = \frac{۲+۱}{۸}$$

$$\Rightarrow g''(۴) = \frac{۳}{۸}$$

ـ با مقایسه‌ی مقادیر مشتق دوم نتیجه می‌گیریم که رابطه برقرار است.

$$f''(۸) + g''(۴) = \frac{۱}{۹} + \frac{۳}{۸} = \frac{۸ + ۲۷}{۷۲} = \frac{۳۵}{۷۲}$$

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۱)

۱ــ مشتق تابع‌های زیر را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

۱) $f(x)=۵-۳x$

۲) $f(x)=x^{۲}-۷x$

۲ــ با استفاده از تعریف مشتق، ثابت کنید تابع $f(x)=|x-۲|$ در نقطه‌ی $x=۲$ مشتق ندارد.

۳ــ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

۱) $y=\sqrt[۳]{(۲x^{۲}+۳x)^{۲}}$

۲) $y=(۳x^{۲}+۵x)^{۶}$

۳) $y=(-۶\sin ۲x+\cos ۳x)^{۴}$

۴) $y=\dfrac{۱-۷x}{۳x+۴}$

۴ــ مشتق دوم توابع زیر را به دست آورید.

الف) $y=۳\sqrt{۵x+۱}+۷x^{۲}$

ب) $y=۲\cos ۳x$

ج) $y=\dfrac{۳}{x}$

د) $y=(۳x^{۲}-۵x)^{۳}$