بخش چهارم

مشتق و کاربردهای آن

هدف کلی بخش

تعیین رفتار تابع‌ها و رسم دقیق نمودار آن‌ها

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	مشتق
دوم	کاربرد مشتق ۱

بخش چهارم

فصل اول

مشتق

هدف کلی

درک مفهوم مشتق و به‌دست آوردن مشتق توابع

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند :

۱ــ به کمک تعریف حد، مشتق توابع را به‌دست آورد ؛

۲ــ مشتق یک تابع را در یک نقطه تعریف کند ؛

۳ــ قضیه‌های مشتق و فرمول‌های آن را برای تعیین مشتق توابع دیگر به‌کار گیرد.

پیش آزمون (۱)

۱ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

$$f(x) = x^{۲} - ۲x$$

الف) $f(x+h)$ را حساب کنید.

ب) $f(x+h) - f(x)$ را به‌دست آورید.

ج) $\lim\limits_{h \to ۰} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ را حساب کنید.

۲ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

$$f(x) = x^{۲} + ۳$$

الف) $f(۲)$ را حساب کنید.

ب) $f(x) - f(۲)$ را به‌دست آورید.

ج) $\lim\limits_{x \to ۲} \frac{f(x) - f(۲)}{x - ۲}$ را حساب کنید.

۳ــ تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. هرگاه نمو x را Δx و نمو y را Δy بنامیم :

$$f(x) = -x^{۳} + ۵$$

الف) نمو y را بیابید. ($\Delta y = ?$)

ب) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ را تعیین کنید.

ج) مقدار $\lim\limits_{\Delta x \to ۰} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ را به‌دست آورید.

محل پاسخ به سؤالات پیش آزمون (۱)

۱ـ۴ـ نمو متغیر: اگر f تابعی با ضابطه‌ی $y = f(x)$ و با دامنه‌ی D_f و $x_۱$ و $x_۲$ دو مقدار متمایز از D_f باشند، در این‌صورت $x_۲ - x_۱$ را نمو متغیر گوییم و آن را با $. x$ نمایش می‌دهیم.

نمو متغیر: $. x = x_۲ - x_۱ \Rightarrow x_۲ = x_۱ + . x$

نمو تابع: اگر متغیر مستقل x نموی به اندازه‌ی $. x$ داشته باشد، آن‌گاه متغیر وابسته $f(x)$ نموی به اندازه‌ی $. y$ خواهد داشت. اگر $y_۱ = f(x_۱)$ و $y_۲ = f(x_۲)$ دو مقدار از تابع f با ضابطه‌ی $y = f(x)$ به‌ازای $x_۱$ و $x_۲$ باشند، در این‌صورت $y_۲ - y_۱$ را نمو تابع گوییم و آن را با $. y$ نمایش می‌دهیم :

نمو تابع: $. y = y_۲ - y_۱ = f(x_۲) - f(x_۱)$

$\Rightarrow . y = f(x_۱ + . x) - f(x_۱)$

$. y = f(x + . x) - f(x)$

مثال ۱: تابع f مفروض است، نمو تابع را به‌دست آورید :

$f(x) = ۳x^۲ + ۵$

حل: نمو تابع عبارت است از :

$. y = f(x + . x) - f(x)$

ــ در تابع اصلی به‌جای متغیر x مقدار $x + . x$ را قرار می‌دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت :

$. y = ۳(x + . x)^۲ + ۵ - (۳x^۲ + ۵) \Rightarrow$

ــ عبارت را ساده می‌کنیم :

$. y = \cancel{۳x^۲} + ۶x . . x + ۳ . x^۲ + \cancel{۵} - \cancel{۳x^۲} - \cancel{۵}$

$. y$ برابر است با :

$\Rightarrow . y = ۶x . . x + ۳ . x^۲$

مثال ۲: تابع f باضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است نمو تابع را به‌دست آورید.

$f(x) = x + ۷$

حل: نمو تابع برابر است با :

$. y = f(x + . x) - f(x) \Rightarrow . y = (x + . x) + ۷ - (x + ۷)$

ــ پس از ساده کردن عبارت، $. y$ برابر است با :

$\Rightarrow . y = x + . x + ۷ - x - ۷ \Rightarrow . y = . x$

مثال ۳: تابع f باضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است :

$f(x) = x^۲ - ۵x$

الف) به‌ازای $x = ۲$ و $. x = ۰/۱$ مقدار $. y$ را به‌دست آورید.

حل: نمو تابع برابر است با :

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$$

ــ $x+\Delta x$ را به‌جای متغیر $f(x)$ قرار می‌دهیم، آن‌گاه خواهیم داشت :

$$\Delta y=(x+\Delta x)^2-5(x+\Delta x)-(x^2-5x)$$

ــ پس از ساده کردن عبارت داریم :

$$\Rightarrow \Delta y=\cancel{x^2}+2x\Delta x+\Delta x^2-\cancel{5x}-5\Delta x-\cancel{x^2}+\cancel{5x}$$

$$\Delta y=2x\Delta x+\Delta x^2-5\Delta x$$

ــ Δy برابر است با :

ــ به‌ازای $x=2$ و $\Delta x=0/1$ ، Δy را محاسبه می‌کنیم :

$$\Delta y=2(2)(0/1)+0/1^2-5(0/1)\Rightarrow \Delta y=-0/09$$

ب) به‌ازای $x=2$ و $\Delta x=0/01$ ، مقدار Δy را به‌دست آورید.

حل: با توجه به قسمت الف، داریم :

$$\Delta y=2x\Delta x+\Delta x^2-5\Delta x\Rightarrow$$

ــ به‌ازای $\Delta x=0/01$ و $x=2$ مقدار Δy را به‌دست می‌آوریم :

$$\Delta y=2(2)(0/01)+(0/01)^2-5(0/01)=-0/0099$$

نکته: (در تابع پیوسته f) از مقایسه‌ی مقدار Δy درحالت الف و ب نتیجه می‌گیریم که هرقدر مقدار Δx کوچک‌تر شود مقدار Δy نیز کوچک‌تر خواهد شد.

۱ــ۱ــ۴ــ تعریف و محاسبه‌ی مشتق: مشتق تابع f را با f' نمایش می‌دهیم و به سه روش زیر تعریف می‌کنیم :

روش ۱: به‌طورکلی حد نمو تابع به نمو متغیر را مشتق تابع می‌نامیم، در صورتی‌که حد موجود و متناهی باشد. یعنی :

$$1)\ f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

روش ۲: با تعویض h به Δx خواهیم داشت :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

روش ۳: مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=a$:

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مثال ۱: مشتق تابع مقابل را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنید.

$$f(x)=۲-۵x$$

مراحل حل: رابطه‌ی مشتق برابر است با :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ـ $x+\Delta x$ را به‌جای متغیر تابع با ضابطه $f(x)$ جایگزین می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{۲-۵(x+\Delta x)-(۲-۵x)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to ۰}\frac{-۵\Delta x}{\Delta x}$$

ـ پس از ساده کردن صورت مشتق تابع به‌دست می‌آید.

$$f'(x)=-۵$$

مثال ۲: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست می‌آید :

$$f(x)=x^{۲}+۶$$

حل: رابطه‌ی مشتق برابر است با :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\Rightarrow$$

ـ به‌جای متغیر، در تابع مقدار $x+h$ را قرار می‌دهیم :

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{(x+h)^{۲}+۶-(x^{۲}+۶)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{\cancel{x^{۲}}+۲xh+h^{۲}+\cancel{۶}-\cancel{x^{۲}}-\cancel{۶}}{h}$$

ـ پس از ساده کردن، مشتق به‌دست می‌آید.

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{۲xh+h^{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{h(۲x+h)}{h}=\lim_{h\to ۰}۲x+h$$

$$\Rightarrow f'(x)=۲x$$

مثال ۳: مشتق تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$$f(x)=x^{۲}-۴\ ،\ x_{۰}=۵$$

حل: $f(۵)$ را حساب می‌کنیم،

$$f(۵)=۵^{۲}-۴=۲۵-۴\Rightarrow f(۵)=۲۱$$

ـ مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=۵$ برابر است با :

$$f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{f(x)-f(۵)}{x-۵}$$

ـ به‌جای $f(x)$ و $f(۵)$ مقدار آن‌ها را قرار می‌دهیم، پس :

$$\Rightarrow f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{(x^{۲}-۴)-۲۱}{x-۵}=\lim_{x\to ۵}\frac{x^{۲}-۲۵}{x-۵}$$

ـ با استفاده از اتحاد مزدوج کسر را ساده می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(۵)=\lim_{x\to ۵}\frac{\cancel{(x-۵)}(x+۵)}{\cancel{x-۵}}=\lim_{x\to ۵} x+۵$$

ـ مشتق تابع در $x=۵$ برابر است با :

$$\Rightarrow f'(۵)=۱۰$$

مثال ۴ : مشتق تابع مقابل را در نقطه‌ی داده شده به‌دست آورید.

$$f(x)=x^{۲}-۵x \ ، \ x_{\circ}=۳$$

حل: مقدار $f(۳)$ را حساب می‌کنیم :

$$f(۳)=۳^{۲}-۵(۳)\Rightarrow f(۳)=-۶$$

ـ مشتق تابع f در $x=۳$ برابر است با :

$$f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۵x-(-۶)}{x-۳}$$

ـ با استفاده از اتحاد جمله‌ی مشترک صورت کسر تابع را تجزیه می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(۳)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۵x+۶}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{(x-۲)\cancel{(x-۳)}}{\cancel{x-۳}}$$

ـ مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=۳$ برابر است با :

$$\Rightarrow f'(۳)=\lim_{x\to ۳} x-۲=۳-۲\Rightarrow f'(۳)=۱$$

می‌دانیم $\lim_{\Delta x\to \circ}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to \circ}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x)$ و از طرفی حد $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ وقتی Δx به صفر میل می‌کند درصورتی وجود دارد که حد چپ و راست آن برابر باشند ؛ به بیان دیگر تابع f با ضابطه‌ی $y=f(x)$ در $x=a$ دارای مشتق است هرگاه داشته باشیم :

$$\lim_{x\to a^{+}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^{-}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

مثال ۵ : مشتق‌پذیری تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده بررسی کنید.

$$f(x)=|x+۵| \ ، \ x_{\circ}=-۵$$

حل: رابطه‌ی مشتق تابع f در $x=a$ برابر با :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

ـ مقدار تابع f را در $x=-۵$ حساب می‌کنیم :

$$f(-۵)=|-۵+۵|=\circ$$

ـ مشتق تابع f در $x=-۵$ برابر است با :

$$f'(-۵)=\lim_{x\to -۵}\frac{f(x)-f(-۵)}{x-(-۵)}=\lim_{x\to -۵}\frac{|x+۵|-\circ}{x+۵}$$

ـ حد تابع را با استفاده از تعریف قدرمطلق حساب می‌کنیم.

ـ هرگاه $x > -۵$ حد تابع برابر است با :

$$\lim_{x\to -۵^+} \frac{|x+۵|}{x+۵} = \lim \frac{\cancel{(x+۵)}}{\cancel{x+۵}} = ۱$$

ـ هر گاه $x < -۵$ حد تابع برابر است با :

$$\lim_{x\to -۵^-} \frac{|x+۵|}{x+۵} = \lim \frac{\cancel{-(x+۵)}}{\cancel{x+۵}} = -۱$$

ـ مشتق f در $x = -۵$ وجود ندارد، زیرا :

$$۱ \neq -۱$$

مثال ۶: مشتق تابع مقابل را با استفاده از تعریف مشتق حساب کنید.

$$f(x) = ۳ + ۵x$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق را می‌نویسیم :

$$f'(x) = \lim_{.\, x\to ۰} \frac{f(x+.\, x) - f(x)}{.\, x}$$

با جای‌گذاری $f(x+.\, x)$ و $f(x)$ در رابطه داریم :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{.\, x\to ۰} \frac{۳+۵(x+.\, x) - (۳+۵x)}{.\, x}$$

ـ صورت کسر را ساده می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{.\, x\to ۰} \frac{\cancel{۳} + \cancel{۵x} + ۵.\, x - \cancel{۳} - \cancel{۵x}}{.\, x}$$

ـ مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{.\, x\to ۰} \frac{۵(.\, x)}{.\, x} = ۵$$

مثال ۷: مشتق تابع روبه رو را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

$$f(x) = \frac{۵}{x}$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق برابر است با :

$$f'(x) = \lim_{.\, x\to ۰} \frac{.\, y}{.\, x} = \lim_{.\, x\to ۰} \frac{f(x+.\, x) - f(x)}{.\, x}$$

ـ به جای متغیر x در تابع $x + .\, x$ قرار می‌دهیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{.\, x\to ۰} \frac{\frac{۵}{x+.\, x} - \frac{۵}{x}}{.\, x}$$

ـ از صورت کسر مخرج مشترک می‌گیریم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{.\, x\to ۰} \frac{\frac{\cancel{۵x} - \cancel{۵x} - ۵.\, x}{x(x+.\, x)}}{\frac{.\, x}{۱}}$$

ـ کسر مرکب را به کسر ساده تبدیل می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{.\, x\to ۰} \frac{-۵\cancel{.\, x}}{x(x+.\, x)} \times \frac{۱}{\cancel{.\, x}}$$

ـ حد تابع را حساب می‌کنیم.

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{.\, x\to ۰} \frac{-۵}{x(x+.\, x)} = \frac{-۵}{x(x+۰)}$$

مشتق تابع برابر است با :

$$f'(x)=\frac{-5}{x^2}$$

مثال ۸: مشتق تابع روبه رو را با استفاده از تعریف مشتق به‌دست آورید.

$$f(x)=x^3$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق برابر است با :

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}\Rightarrow$$

ــ با استفاده از اتحاد مکعب صورت را ساده می‌کنیم.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$

ــ از متغیر h در صورت فاکتور می‌گیریم.

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h(3x^2+3xh+h^2)}{h}$$

ــ مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(x)=\lim_{h\to 0}3x^2+3xh+h^2\Rightarrow f'(x)=3x^2$$

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ی خواسته شده حساب کنید.

$$f(x)=\sqrt{x}\ ،\ x=2$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ در $x=2$ برابر است با :

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

ــ با توجه به صورت کسر مخرج را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}=\lim\frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})}$$

ــ پس از رفع ابهام از تابع داریم :

$$\Rightarrow f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}}$$

ــ مشتق تابع f در $x=2$ برابر است با :

$$f'(2)=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

مثال ۱۰: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق در نقطه‌ی خواسته شده به‌دست آورید.

$$f(x)=x^2+5\ ،\ x=3$$

حل: مقدار $f(x)$ در $x=3$ برابر است با :

$$f(3)=3^2+5=14$$

ـ رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه f(x) در $x = ۳$ برابر است با :

$$f'(۳) = \lim_{x \to ۳} \frac{f(x) - f(۳)}{x - ۳}$$

ـ به جای f(x) مقدار تابع را جایگزین می‌کنیم :

$$f'(۳) = \lim_{x \to ۳} \frac{x^۲ + ۵ - ۱۴}{x - ۳} = \lim_{x \to ۳} \frac{x^۲ - ۹}{x - ۳}$$

ـ صورت کسر را با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه و ساده می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(۳) = \lim_{x \to ۳} \frac{(x - ۳)(x + ۳)}{x - ۳} = \lim_{x \to ۳} x + ۳$$

مشتق تابع با ضابطه f(x) در $x = ۳$ برابر است با :

$$\Rightarrow f'(۳) = ۳ + ۳ \Rightarrow f'(۳) = ۶$$

۲ـ۱ـ۴ـ برخی از رابطه‌های مشتق

قاعده‌ی ۱ : مشتق تابع ثابت :

$f(x) = c$ و $c \in \mathbb{R}$

مشتق تابع ثابت همواره برابر صفر است.

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to ۰} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \to ۰} ۰ = ۰$$

مشتق تابع ثابت همواره برابر صفر است ؛ به بیان دیگر :

$$f(x) = c \ , \ c \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(x) = ۰$$

مثال:

$$f(x) = -۲\sqrt{۵} \Rightarrow f'(x) = ۰$$

قاعده‌ی ۲ : مشتق تابع درجه اول :

$f(x) = ax + b$ ، $a \neq ۰, a, b \in \mathbb{R}$

ـ از رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه f(x) برابر است :

$$f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

ـ عبارت حاصل را حساب می‌کنیم :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{a(x + h) + b - (ax + b)}{h}$$

مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to ۰} \frac{ah}{h} = a$$

مشتق تابع با ضابطه $f(x) = ax + b$ برابر است با : $f'(x) = a$

مثال ۱: مشتق تابع روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$f(x) = -5x + 7$$

ـ مشتق تابع برابر است با ضریب x :

$$f'(x) = -5$$

مثال ۲: مشتق تابع روبه‌رو را به‌دست آورید.

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x - 5\pi$$

حل: مشتق تابع برابر است با ضریب x :

$$f'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

مثال ۳: مشتق تابع روبه‌رو را با استفاده از تعریف مشتق، محاسبه کنید.

$$f(x) = x^2$$

حل: رابطه‌ی کلی مشتق تابع با ضابطه $f(x)$ برابر است با :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow$$

ـ با استفاده از اتحاد مربع کامل عبارت را ساده می‌کنیم :

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + 2xh + h^2 - \cancel{x^2}}{h}$$

ـ پس از فاکتورگیری از h، مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2x + h \Rightarrow f'(x) = 2x$$

نتیجه: هرگاه $f(x) = x^2$ آن‌گاه $f'(x) = 2x$

در حالت کلی می‌توان قاعده‌ی ۳ را بیان کرد.

قاعده‌ی ۳: هرگاه $f(x) = x^n$ و $n \in \mathbb{R}$ آن‌گاه $f'(x) = nx^{n-1}$

مثال ۴: مشتق توابع زیر را به‌دست آورید.

$y = x^2$ $\quad$ $y' = 2x^{2-1} = 2x$

$y = x^7$ $\quad$ $y' = 7x^{7-1} = 7x^6$

$y = x^{-6}$ $\quad$ $y' = -6x^{-6-1} = -6x^{-7} = \frac{-6}{x^7}$

$y = x^{\frac{4}{3}}$ $\quad$ $y' = \frac{4}{3}x^{\frac{4}{3}-1} = \frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x}$

قاعده‌ی ۴: فرض کنید $f(x)=u^n$ ، (u برحسب متغیر x) $f'(x)=nu'u^{n-1}$

مثال ۵: مشتق تابع مقابل را بیابید.

$f(x)=(-4x+7)^3$

حل:

ـ مشتق تابع برابر است با :

$$y'=3(-4)(-4x+7)^{3-1}\Rightarrow y'=-12(-4x+7)^2$$

قاعده‌ی ۵: فرض کنید $f(x)=kg(x)$ ، (kمقدار ثابت) آن‌گاه : $f'(x)=kg'(x)$

اثبات قاعده‌ی ۵: رابطه‌ی کلی تعریف مشتق عبارت است از :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

ـ در رابطه‌ی کل به جای $f(x)$ مساوی آن یعنی $kg(x)$ را قرار می‌دهیم، پس :

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{kg(x+\Delta x)-kg(x)}{\Delta x}$$

$$=k.\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}$$

در نتیجه مشتق تابع برابر است با :

$$\Rightarrow \boxed{f'(x)=k.g'(x)}$$

مثال ۶: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x)=7x^5$

$$f'(x)=7\times 5\times x^4=35x^4$$

ب) $f(x)=-6(\frac{3}{2}x+5)^6$

$$f'(x)=(-6)(6)(\frac{3}{2})(\frac{3}{2}x+5)^{6-1}=-54(\frac{3}{2}x+5)^5$$

مثال ۷: مشتق توابع زیر را محاسبه کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x}$

$$f(x)=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}\Rightarrow y'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

ب) $f(x)=\sqrt{-3x+5}$

$$f(x)=(-3x+5)^{\frac{1}{2}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}(-3)(-3x+5)^{\frac{1}{2}-1}$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{-3}{2}(-3x+5)^{-\frac{1}{2}}=\frac{-3}{2}\times\frac{1}{(-3x+5)^{\frac{1}{2}}}$$

$$=\frac{-3}{2\sqrt{-3x+5}}$$

نتیجه‌ی ۱: اگر $y=\sqrt{u}$ (u برحسب x) آن‌گاه $y'=\dfrac{u'}{۲\sqrt{u}}$

اثبات نتیجه‌ی ۱: می‌دانیم $\sqrt[m]{u^n}=u^{\frac{n}{m}}$ $(m,n\in\mathbb{N})$

پس :

$$y=\sqrt{u}=u^{\frac{۱}{۲}}\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲}(u')\times u^{\frac{۱}{۲}-۱}=\frac{۱}{۲}u'.u^{-\frac{۱}{۲}}$$

ــ چون $n\in\mathbb{N}$ و $a^{-n}=\dfrac{۱}{a^n}$ مشتق برابر است با :

$$\Rightarrow y'=\frac{۱}{۲}u'\times\frac{۱}{u^{\frac{۱}{۲}}}\Rightarrow y'=\frac{u'}{۲\sqrt{u}}$$

نتیجه‌ی ۲: هرگاه $y=\sqrt[m]{u^n}$ آن‌گاه : $y'=\dfrac{nu'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$

مثال ۸: مشتق تابع مقابل را محاسبه کنید :

$$y=\sqrt[۳]{(-۴x+۳)^۲}$$

حل: با استفاده از نتیجه‌ی ۲ مشتق تابع برابر است با :

$$y'=\frac{۲(-۴)}{۳\sqrt[۳]{(-۴x+۳)^{۳-۲}}}=\frac{-۸}{۳\sqrt[۳]{-۴x+۳}}$$

مثال ۹: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده حساب کنید.

$f(x)=\sqrt{۲x+۵}$ و $x=۲$

حل: با استفاده از نتیجه‌ی ۲ مشتق تابع برابر است با :

$$y'=\frac{۲}{۲\sqrt{۲x+۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۲x+۵}}$$

ــ مقدار مشتق به ازای $x=۲$ برابر است با :

$$y'_{(۲)}=\frac{۱}{\sqrt{۲\times۲+۵}}=\frac{۱}{\sqrt{۹}}=\frac{۱}{۳}$$

مثال ۱۰: مشتق تابع روبه‌رو را در نقطه‌ی داده شده محاسبه کنید.

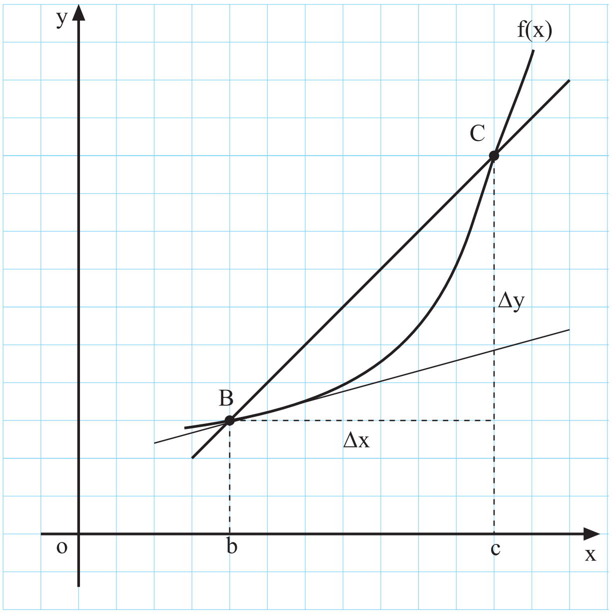
$f(x)=\sqrt[۵]{(۲x+۱)^۳}$ ، $x=۰$

حل: با استفاده از نتیجه ۲ مشتق تابع برابر است با :

$$y'=\frac{۲\times۳}{۵\sqrt[۵]{(۲x+۱)^{۵-۳}}}=\frac{۶}{۵\sqrt[۵]{(۲x+۱)^۲}}$$

مقدار مشتق به ازای $x=۰$ برابر است با :

$$\Rightarrow y'_{(۰)}=\frac{۶}{۵\sqrt[۵]{(۰+۱)^۲}}=\frac{۶}{۵}$$



نمودار ۱ــ۴

۳ــ۱ــ۴ــ تعبیر هندسی مشتق: نمودار ۱ــ۴ را مشاهده کنید : اگر $B(b,f(b))$ نقطه‌ای از منحنی باشد،

ــ شیب خط مماس برابر است با :

$$m = f'(b) = \lim_{\Delta x \to ۰} \frac{f(b+\Delta x) - f(b)}{\Delta x}$$

نتیجه: شیب خط مماس (ضریب زاویه) بر نمودار y=f(x) که از نقطه‌ی (b,f(b)) می‌گذرد برابر مشتق تابع f با ضابطه‌ی y=f(x) در نقطه‌ی x=b، یعنی : $m = f'(b)$

مثال ۱: معادله‌ی خط مماس بر منحنی روبه‌رو را که از نقطه‌ی $A(-۱,۱)$ می‌گذرد بنویسید.

$$f(x) = -x^{۲} + ۲$$

حل: شیب خط مماس بر منحنی تابع f(x) در $x = ۱$ برابر است با :

$$f'(x) = -۲x \Rightarrow m = f'(-۱) = -۲(-۱) \Rightarrow m = ۲$$

ــ معادله‌ی خط مماس بر منحنی که از نقطه‌ی $A\left|\begin{matrix} x_۱ \\ y_۱ \end{matrix}\right.$ می‌گذرد برابر است با :

$$y - y_۱ = m(x - x_۱) \quad (/\ )$$

$A\Big|_{1}^{-1}$ و $m=2$ را در رابطه‌ی (*) قرار می‌دهیم :

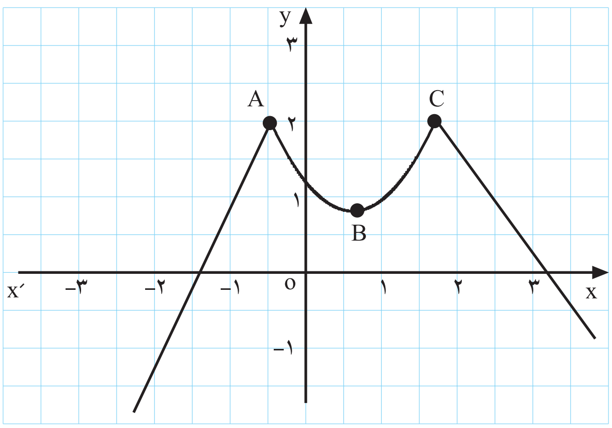
$$y-1=2(x+1) \Rightarrow y=2x+2+1 \Rightarrow$$

ــ معادله‌ی خط مماس که از نقطه‌ی A می‌گذرد برابر است با :

$$\boxed{y=2x+3}$$

نکته: درنقاطی که مماس بر نمودار وجود نداشته باشد، تابع مشتق ندارد.

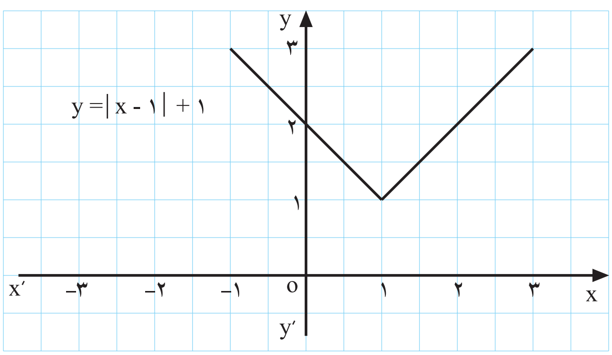
مثال ۲: در نقاط C و A در نمودار ۲ــ۴ مماس وجود ندارد، پس در این نقاط تابع f مشتق ندارد. ولی در نقطه‌ی B دارای مشتق است، زیرا می‌توان در نقطه‌ی B مماس بر منحنی رسم کرد.



نمودار ۲ــ۴

مثال ۳: با توجه به نمودار ۳ــ۴ آیا تابع مقابل در $x=+1$ دارای مشتق است؟ چرا؟

حل: خیر، زیرا نمی‌توان در نقطه‌ی $x=1$ مماس بر نمودار ۳ــ۴ رسم کرد.



نمودار ۳ــ۴