مثال: تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است :

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

با توجه به جدول ۲۲ــ۳ می‌بینیم که هرگاه x بزرگ‌و بزرگ‌تر شود به طوری که از هر عدد مثبتی بزرگ‌تر شود $(x \to +\infty)$ مقدار $f(x)$ به عدد ۰ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود $(y \to 0)$ یعنی با توجه به جدول ۲۳ــ۳ درمی‌یابیم که وقتی $x \to -\infty$، $f(x)$ با مقادیر منفی به صفر میل می‌کند، یعنی :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

جدول ۲۲ــ۳

x	۱ → ۱۰ → ۱۰۰ → ۱۰۰۰ → ۱۰۰۰۰ → ۱۰۰۰۰۰ → ۱۰۰۰۰۰۰ →
f(x)	۱ → ۰/۱ → ۰/۰۰۱ → ۰/۰۰۰۱ → ۰/۰۰۰۰۱ → ۰/۰۰۰۰۰۱ →

جدول ۲۳ــ۳

x	-10^{6} ـ . 10^{5} ـ . ۱۰۰۰ـ . ۱۰۰ـ . ۱۰ـ . ۱
f(x)	-10^{+6} ـ . 10^{+5} ـ . ۰/۰۰۱ـ . ۰/۰۱ـ . ۰/۱ـ . ۱

فعالیت ۹ــ۳

تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است (شکل ۴۲ــ۳) با تکمیل جدول‌های ۲۴ــ۳ و ۲۵ــ۳ به سؤالات زیر پاسخ دهید :

$$f(x)=\frac{x^{2}-1}{x^{2}+1}$$

جدول ۲۴ــ۳

x	۱ → ۱۰ → ۱۰۰ → ۱۰۰۰ → ۱۰۰۰۰
f(x)	۰ → ۰/۹۸۰۱۹۸ → ۰/۹۹۹۸ → □ → □

جدول ۲۵ــ۳

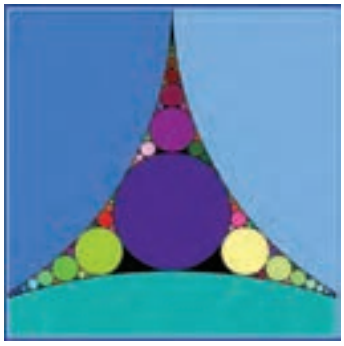
x	۱ (۰) ۱۰ . ـ ۱۰۰ . ـ ۱۰۰۰ . ـ ۱۰۰۰۰ ـ
f(x)	□ ۰/۹۸۰۱۹۸ □ ۰/۹۹۹۹۸ □

۱ــ وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند $(x \to +\infty)$، $f(x)$ به کدام عدد میل می‌کند؟

۲ــ وقتی $x \to -\infty$ مقدار $f(x)$ به چه عددی میل می‌کند؟

پاسخ:

قضیه‌ی ۵ــ۳ــ اگر n عددی صحیح و مثبت باشد، آن‌گاه : $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$



شکل ۴۳ــ۳

مثال: حد مقابل را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x^5}=?$$

بنابر قضیه‌ی ۵ــ۳ داریم :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{7}{x^5}=7\times\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^5}=7\times0=0$$

مثال: حد مقابل را به‌دست آورید :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x+2}{x-1}=?$$

حل: از x صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x}(3+\frac{2}{x})}{\cancel{x}(1-\frac{1}{x})}=$$

ــ بنابر قضیه‌ی ۵ــ۳ داریم :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3+\frac{2}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{3+0}{1-0}=3$$

مثال: حد مقابل را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+3}=?$$

از x^2 در صورت و مخرج کسر فاکتور می‌گیریم. با توجه به قضیه‌ی ۵ــ۳ داریم :

$$\lim\frac{2x^2-1}{x^2+3}=\lim\frac{\cancel{x^2}(2-\frac{1}{x^2})}{\cancel{x^2}(1+\frac{3}{x^2})}=\frac{2-0}{1+0}=2$$

ــ حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x}{x^3+x^2+1}=?$$

ـ از بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم.

ـ بنابر قضیه‌ی ۵ـ۳ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^n}=0$ داریم :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x(\frac{1}{x}-1)}{x^3(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{1}{x}-1}{x^2(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3})}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{0-1}{x^2(1+0+0)}=0$$

مثال: حد مقابل را بیابید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-7x}{x^2-x}=?$$

ـ از بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت و مخرج فاکتور می‌گیریم.

بنابر قضیه ۵ـ۳ خواهیم داشت :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-7x}{x^2-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3(1-\frac{7}{x^2})}{x^2(1-\frac{1}{x})}$$

تابع برابر است با :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty$$

مثال: حد مقابل را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{4x^2+x+2}{x^2+7x-3}=?$$

با فاکتورگیری x^2 از صورت و مخرج کسر و بنابر قضیه‌ی ۵ـ۳ داریم :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(4+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2})}{x^2(1+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2})}=\frac{4+0+0}{1+0-0}=4$$

نکته: در محاسبه‌ی $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$، (f(x) و g(x) چند جمله‌ای هستند) :

ـ اگر درجه‌ی f(x) کوچکتر از درجه‌ی g(x) باشد، آن‌گاه حد تابع برابر صفر است. مانند : $\lim_{x\to\infty}\frac{7x}{x^2+3}=0$

ـ هرگاه f(x) و g(x) هم درجه باشند مقدار حد برابر خارج قسمت ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی صورت به ضریب بزرگ‌ترین درجه‌ی مخرج است ؛ مانند :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^3+7x-4}{5x^3-4x^2+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x^3}{5x^3}=\frac{6}{5}$$

ـ اگر درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج بیش‌تر باشد حد تابع بی‌نهایت می‌شود ؛ مانند :

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^4+6x}{3x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5x^4}{3x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{5}{3}x^3=\begin{cases}+\infty\\-\infty\end{cases}$$

مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

$$f(x)=\frac{ax^{m}+x+1}{3x^{2}+7}$$

مقادیر a و m را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=4$$

مراحل حل: چون مقدار حد تابع عددی مخالف صفر شده است، بنابراین صورت و مخرج هم درجه‌اند، لذا داریم :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^{m}+x+1}{3x^{2}+7}=4\Rightarrow m=2$$

ـ با توجه به مقدار حد تابع، مقدار a برابر است با :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^{2}+x+1}{3x^{2}+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^{2}}{3x^{2}}=\frac{a}{3}=4\Rightarrow \boxed{a=12}$$

مثال: مقدار حد روبه‌رو را محاسبه نمایید.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+7}}}{5x+2}$$

ـ چون درجه‌ی صورت از درجه‌ی مخرج کمتر است بنابراین حد برابر صفر است، یعنی :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+\sqrt{x+7}}}{5x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x}}{5x}=0$$

تمرین

۱ـ حدهای زیر را به دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{3x^{2}+7x}{x^{2}-1}$

۲) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{(2x-1)(x+3)}{1-x+x^{2}}$

۳) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{7x+1}{-\frac{1}{3}x^{2}+2}$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{4}+3x-1}{4x^{3}+2x-x}$

۲ـ تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\dfrac{4ax^{m+1}+7x}{3x^{3}+9x-2}$ داده شده است. مقادیر a و m را طوری بیابید که داشته باشیم :

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=3$$

آزمون پایانی (۳)

۱ــ اگر داشته باشیم $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{ax^{m+1}-11x+4}{6x^3+4x^2-5}=\frac{3}{5}$، مقدار m و a را به دست آورید.

۲ــ اگر تابع f در $\mathbb{R}$ پیوسته باشد مقدار a و b را به دست آورید.

$$f(x)=\begin{cases}ax+5 & x>1\\ 3 & x=1\\ -bx+4 & x<1\end{cases}$$

۳ــ حدهای زیر را محاسبه کنید.

۱) $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^3-27}{5x^2-14x-3}$

۲) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x+1}{7x^2-4x}$

۳) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2-2x|x|+3}{5x^2-4x+3}$

۴) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^7-6x}{x^4+3x+1}$.

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی (۳)