

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$\begin{array}{r} f(x) \text{ مقسوم} \quad | \quad x-a \\ \hline L(x) \quad q(x) \text{ مقسوم علیه} \\ r \quad \text{خارج قسمت} \\ \hline \text{باقی مانده} \end{array}$$

$$f(x) = (x-a)q(x) + r, r \in \mathbb{R}$$

الف) $4x^2 - 7x + 6 \div x - 2$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 7x + 6 \quad | \quad x - 2 \\ \hline \quad \square \\ \hline \end{array}$$

$$4x(x-2) = 4x^2 - 8x$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 7x + 6 \quad | \quad x - 2 \\ \hline 4x^2 \quad 8x \quad \quad \square \\ \hline \quad x + 6 \\ \quad x \quad 2 \\ \hline \quad \quad 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 7x + 6 \quad | \quad x - 2 \\ \hline 4x^2 \quad 8x \quad \quad \square \\ \hline \quad x + 6 \\ \quad x \quad 2 \\ \hline \quad \quad 8 \end{array}$$

$$(4x+1)(x-2) + 8 = 4x^2 - 7x + 6$$

ب) $x^2 + 7x + 12 \div x + 4$

$$\begin{array}{r} x^2 + 7x + 12 \quad | \quad x + 4 \\ \hline \quad \square \\ \hline \end{array}$$

$$x(x+4) = x^2 + 4x$$

۱-۱-۳ بخش پذیری چند جمله ای ها بر $x-a$: اگر

$f(x)$ یک چند جمله ای از درجه n باشد، وقتی $f(x)$ را بر $x-a$ تقسیم می کنیم خارج قسمت و باقی مانده ی یکتایی مانند $q(x)$ و r به دست می آید.

در نتیجه به ازای هر x داریم:

مثال: باقی مانده و خارج قسمت تقسیم های مقابل را به دست

آورید:

حل: الف)

ابتدا $O = \frac{4x^2}{x} = 4x$ را در مقسوم علیه ضرب کرده و

حاصل را از مقسوم کم می کنیم؛ داریم:

سپس $\square = \frac{x}{x} = 1$ را در مقسوم ضرب کرده و حاصل

را از $x+6$ کم می کنیم؛ داریم:

$4x+1 =$ خارج قسمت

$= 8$ باقی مانده

حل: ب) ابتدا $O = \frac{x^2}{x} = x$ را در مقسوم علیه ضرب

کرده و حاصل را از مقسوم کم می کنیم؛ داریم:

$$\begin{array}{r} x^2 + 7x + 12 \quad | \quad x + 4 \\ x^2 \pm 4x \\ \hline 3x + 12 \end{array}$$

$$3(x+4) = 3x+12$$

سپس $\square = \frac{3x}{x} = 3$ را در مقسوم علیه ضرب کرده و

حاصل را از $3x+12$ کم می کنیم؛ داریم:

$$\begin{array}{r} x^2 + 7x + 12 \quad | \quad x + 4 \\ x^2 \pm 4x \\ \hline 3x + 12 \\ 3x \pm 12 \\ \hline 0 \end{array}$$

$$g(x) = \text{خارج قسمت} = x + 3$$

$$r = \text{باقی مانده} = 0$$

$$x^2 + 7x + 12 = (x+4)(x+3) + 0$$

نکته: اگر $f(x)$ یک چند جمله ای باشد باقی مانده ی تقسیم $f(x)$ بر $x-a$ برابر $r = f(a)$ خواهد بود.

مثال: باقی مانده ی تقسیم $f(x) = 4x^2 - 7x + 6$ بر $x-2$

را به دست آورید.

مراحل حل: ریشه ی مقسوم علیه را به دست می آوریم:

$$x-2=0 \Rightarrow x=2$$

– $f(2)$ یعنی باقی مانده ی تقسیم را حساب می کنیم:

$$r = f(2) = 4(2)^2 - 7(2) + 6 \Rightarrow r = 8$$

$$r = f(a) = 0$$

نکته: چند جمله ای $f(x)$ بر $x-a$ بخش پذیر است هرگاه:

از این خاصیت در تجزیه ی چند جمله ای ها استفاده می کنیم؛ یعنی هرگاه $f(a) = 0$ باشد می توانیم بنویسیم:

$$f(x) = (x-a)g(x)$$

مثال: مقدار m را طوری تعیین کنید که تابع f باضابطه ی

روبه رو بر $x-1$ بخش پذیر باشد.

$$f(x) = 3x^2 + 4x - 7m$$

مراحل حل: ریشه ی مقسوم علیه را به دست می آوریم:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

– به ازای $x=1$ ، $f(1)$ را حساب می‌کنیم و برابر صفر

قرار می‌دهیم:

$$x=1 \Rightarrow f(1) = 3 + 4 - 7m = 0$$

– با حل معادله مقدار m به دست می‌آید: $\Rightarrow 7 - 7m = 0 \Rightarrow 7m = 7 \Rightarrow m = 1$

نکته: در محاسبه‌ی حد $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ هرگاه f و g چند جمله‌ای اند

باشد مقدار حد به صورت $\left(\frac{0}{0}\right)^+$ در می‌آید، برای محاسبه‌ی $\lim_{x \rightarrow a} q(x)$ باید ابتدا عامل صفر کننده $(x-a)$ را از صورت و مخرج کسر حذف نمود و سپس حد را محاسبه کرد.

$$q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} q(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cancel{(x-a)} f_1(x)}{\cancel{(x-a)} g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

مثال ۱: حد مقابل را به دست آورید:

$$\lim_{x \rightarrow 1} q(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2} = ?$$

مراحل حل: حد صورت کسر وقتی $x \rightarrow 1$ برابر است

با:

$$\lim_{x \rightarrow 1} 2x^2 + x - 3 = 2(1)^2 + 1 - 3 = 0$$

– حد مخرج کسر در $x=1$ برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 1} x^2 + x - 2 = 0$$

– چون صورت و مخرج کسر بر $(x-1)$ بخش پذیر است،

بنابراین داریم:

$$2x^2 + x - 3 = (x-1)(2x+3)$$

$$x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$$

– برای رفع ابهام خواهیم داشت:

$$q(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x^2 + x - 2} = \frac{(x-1)(2x+3)}{(x-1)(x+2)} = \frac{2x+3}{x+2}$$

در نتیجه حد $q(x)$ وقتی $x \rightarrow 1$ را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 1} q(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x+3}{x+2} = \frac{5}{3}$$

مثال ۲: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = ?$$

حل: حد صورت و مخرج کسر وقتی $x \rightarrow 2$ صفر می‌شود.

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 5x + 6 = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 7x + 10 = 0$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$$

$$x^2 - 7x + 10 = (x-2)(x-5)$$

$$q(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-5)} = \frac{x-3}{x-5}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} q(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x-5} = \frac{2-3}{2-5} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 5x - 2}{3x^2 + 7x + 4} = ?$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 7x^2 + 5x - 2 = 7(-1)^2 + 5(-1) - 2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} 3x^2 + 7x + 4 = 3(-1)^2 + 7(-1) + 4 = 0$$

$$7x^2 + 5x - 2 = (x+1)(7x-2)$$

$$3x^2 + 7x + 4 = (x+1)(3x+4)$$

$$q(x) = \frac{7x^2 + 5x - 2}{3x^2 + 7x + 4} = \frac{(x+1)(7x-2)}{(x+1)(3x+4)} = \frac{7x-2}{3x+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} q(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x-2}{3x+4}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} q(x) = \frac{-7-2}{-3+4} = \frac{-9}{1} = -9$$

- صورت و مخرج کسر را به عاملی از $x-2$ تبدیل

می‌کنیم، بنابراین:

- برای رفع ابهام صورت و مخرج کسر را ساده می‌کنیم:

- حد تابع وقتی $x \rightarrow 2$ به دست می‌آید.

مثال ۳: حد تابع مقابل را به دست آورید.

- وقتی $x \rightarrow -1$ حد صورت برابر است با:

- وقتی $x \rightarrow -1$ حد مخرج کسر برابر است با:

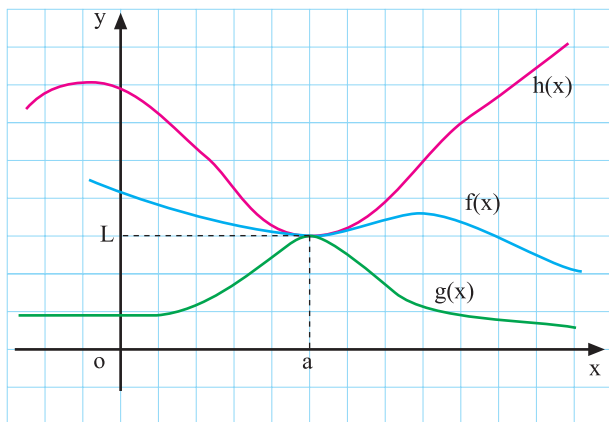
- چون صورت و مخرج کسر به ازای $x = -1$ برابر صفر

گردید، پس هر یک از آن‌ها بر $x+1$ بخش پذیرند، یعنی:

چون $x \rightarrow -1$ بنابراین $x \neq -1$ لذا داریم:

حد تابع را وقتی به $x \rightarrow -1$ به دست می‌آوریم:

بنابراین خواهیم داشت:



قضیه‌ی فشردگی: اگر به ازای هر x از بازه‌ی شامل a به

جز احتمالاً در $x = a$ داشته باشیم:

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

و $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ آن‌گاه داریم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = ?$$

حل: $\cos x$ در محدوده‌ی دو عدد -1 و 1 قرار دارد،

یعنی:

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

— از طرفی $x \rightarrow +\infty$ ، پس $x > 0$ و $\frac{1}{x} > 0$ بنابراین

خواهیم داشت:

$$\frac{-1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

— از طرفی حد $\frac{1}{x}$ و $\frac{-1}{x}$ وقتی x به سمت $+\infty$ میل

می‌کند برابر است با:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

— طبق قضیه‌ی فشردگی حد تابع برابر است با:

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \sin x}{x^3} = ?$$

حل: می‌دانیم که $-1 \leq \sin x \leq 1$ بنابراین داریم:

$$-3 \leq 3 \sin x \leq 3$$

از طرفی وقتی x عددی مثبت باشد می‌توان نوشت:

$$-\frac{3}{x^3} \leq \frac{3 \sin x}{x^3} \leq \frac{3}{x^3}$$

g(x) f(x) h(x)

از طرفی $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^3} = 0$ بنابراین با توجه

به قضیه‌ی فشردگی داریم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 \sin x}{x^3} = 0$$

فعالیت ۳-۷

با استفاده از جدول‌های ۳-۱۲ و ۳-۱۳ به سؤالات زیر

پاسخ دهید.

۱- وقتی x با مقادیر کوچک‌تر از 0 به عدد صفر میل

می‌کند ($x \rightarrow 0^-$) مقدار تابع به چه عددی میل می‌کند؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \square$$

جدول ۳-۱۲

x	$-\frac{\pi}{3^\circ}$	$-\frac{\pi}{18^\circ}$	$-\frac{\pi}{9^\circ}$
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$	0/998173	0/999949	0/999999998

جدول ۱۳-۳

x	°	$\frac{\pi}{90}$	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{\pi}{3}$
$f(x) = \frac{\sin x}{x}$		۰/۹۹۹۹۹۹۹۹۹۸	۰/۹۹۹۹۹۴۹	۰/۹۹۸۷۳

۲- وقتی x با مقادیر بزرگتر از ° به عدد صفر میل می کند مقدار تابع به چه عددی میل می کند؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \square$$

با توجه به فعالیت ۷-۳ همواره داریم:

قضیه ۱-۳- (x بر حسب رادیان است)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

مثال: حد روبه‌رو را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = ?$$

با توجه به این که $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

- در نتیجه مقدار حد برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \times \frac{1}{\cos 0} = 1 \times \frac{1}{1} = 1$$

مثال: حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{x}$$

حل: صورت و مخرج کسر را در عدد ۴ ضرب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 4 \cdot \frac{\tan 4x}{4x}$$

- با توجه به $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$ خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 4x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} 4 \frac{\tan t}{t} = 4 \times 1 = 4$$

مثال: حد مقابل را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \sqrt{2}x}{5x}$$

- صورت و مخرج کسر را در $\sqrt{2}$ ضرب می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \sqrt{2}x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2} \times \tan \sqrt{2}x}{5\sqrt{2}x}$$

- با فرض $\sqrt{2}x = t$ حد برابر است با

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan \sqrt{2}x}{5x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{\tan t}{t} = \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot 1 = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

نتیجه:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin ax} = \frac{1}{a} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\tan ax} = \frac{1}{a}, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{x} = a$$

مثال: حد روبه‌رو را حساب کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sqrt{x}}$$

حل: صورت و مخرج را در عدد 3 ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\tan 3x}{\sqrt{x}} = \frac{3 \tan 3x}{\sqrt{x} \times 3}$$

– با توجه به $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan t}{t} = 1$ حد را به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \tan 3x}{\sqrt{x} \times 3} = \frac{3}{\sqrt{x}} \times 1 = \frac{3}{\sqrt{x}}$$

مثال: حد روبه‌رو را محاسبه کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 2x} = ?$$

– چون $x \neq 0$ است صورت کسر را در $\frac{3}{3x}$ و مخرج را

$\frac{2}{2x}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{\sin 3x}{\sin 2x} = \frac{3 \cdot \frac{\sin 3x}{3x}}{2 \cdot \frac{\sin 2x}{2x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \times \frac{\sin 3x}{3x}}{2 \times \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}}{2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x}} = \frac{3 \times 1}{2 \times 1} = \frac{3}{2}$$

– در نتیجه مقدار حد برابر است با:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos 2x}$$

مثال: حد مقابل را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{1 - \cos 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2}{2 \sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x}{\sin x}$$

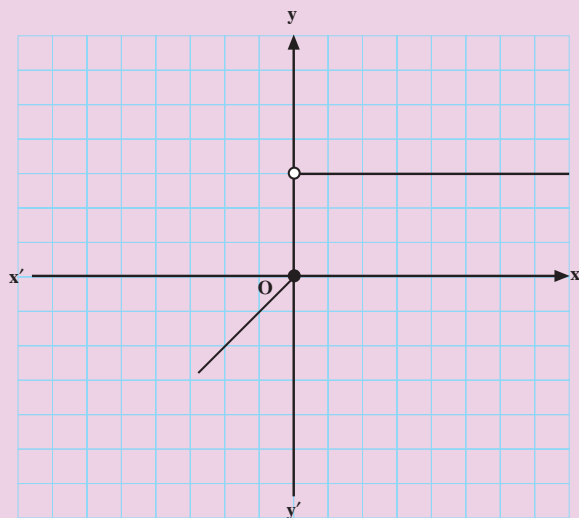
می‌دانیم که: $1 - \cos 2x = 2 \sin^2 x$ ، بنابراین داریم:

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1 \times 1 = 1$$

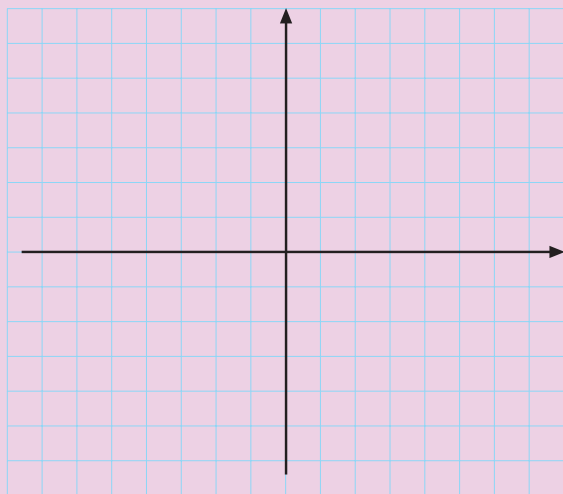
– در نتیجه مقدار حد برابر است با:

آزمون پایانی (۱)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۱)



شکل ۳-۱۵



شکل ۳-۱۶

۱- اگر تابع f در \mathbb{R} به صورت زیر تعریف شده باشد (شکل ۳-۱۵):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x > 0 \\ x & x \leq 0 \end{cases}$$

حاصل عبارت زیر را به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$$

۲- فرض کنید تابع f به صورت زیر در \mathbb{R} تعریف شده باشد:

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1 & x \neq 2 \\ 2x & x = 2 \end{cases}$$

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ را به دست آورید.

ج) در تساوی زیر a را بیابید.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = a \cdot f(2)$$

۳- حاصل حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4x^3 - 5x^2 + 1}{x^2 - 1}$

ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{(2x - \pi)}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}$