

بخش سوم

حد و پیوستگی

هدف کلی بخش

مفاهیم حد و به‌کارگیری آن در تعیین پیوستگی توابع

جدول عناوین فصل‌ها

شماره‌ی فصل	عنوان فصل
اول	حد
دوم	پیوستگی
سوم	تعمیم حد

بخش سوم

فصل اول

حد

هدف کلی

مفاهیم میل کردن یک متغیر به یک عدد و میل کردن مقادیرهای یک تابع به عدد و تعمیم مفهوم حد

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

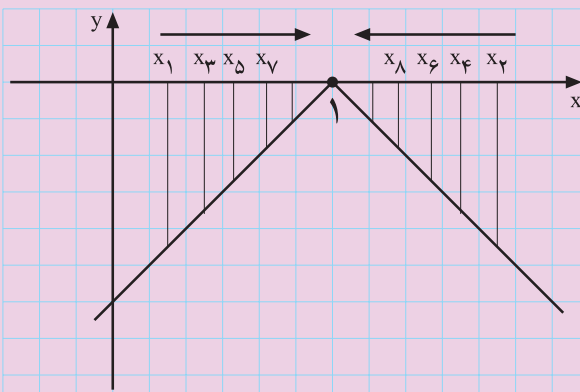
- ۱- میل کردن یک متغیر را از چپ و راست به یک عدد، به سوی $+\infty$ یا به سوی $-\infty$ تعریف کند؛
- ۲- حد تابع را تعریف کند؛
- ۳- حد چپ و راست یک تابع در یک نقطه را تعریف کند؛
- ۴- حد چپ و راست تابع را از روی نمودار آن تعیین کند؛
- ۵- حد چپ و راست تابع را از روی ضابطه‌ی آن تعیین کند.
- ۶- حد توابع کسری را که صورت و مخرج آن‌ها، (وقتی که $x \rightarrow a$) برابر صفر می‌شود، به دست آورد.
- ۷- قضیه فشردگی را در تعیین حد بعضی از توابع به کار برد.

پیش‌آزمون (۱)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۱)



شکل ۳-۱



شکل ۳-۲

۱- اعداد $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots$ بر روی محور اعداد حقیقی مشخص شده‌اند (شکل ۳-۱).
الف) این اعداد به کدام عدد نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

ب) این اعداد از کدام سمت (راست یا چپ) به این عدد نزدیک می‌شوند؟

۲- تابع با ضابطه‌ی $f(x) = -|x-1|$ در \mathbb{R} تعریف شده است. با توجه به شکل ۳-۲ به سوالات زیر پاسخ دهید.

الف) هرگاه x_1, x_3, x_5, \dots از چپ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر شوند، $f(x_1), f(x_3), \dots$ به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

ب) هرگاه مقادیر x_2, x_4, x_6, \dots از مقادیر بیشتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر گردند، $f(x_2), f(x_4), \dots$ به چه عددی نزدیک و نزدیک‌تر می‌شوند؟

۱-۳- حد

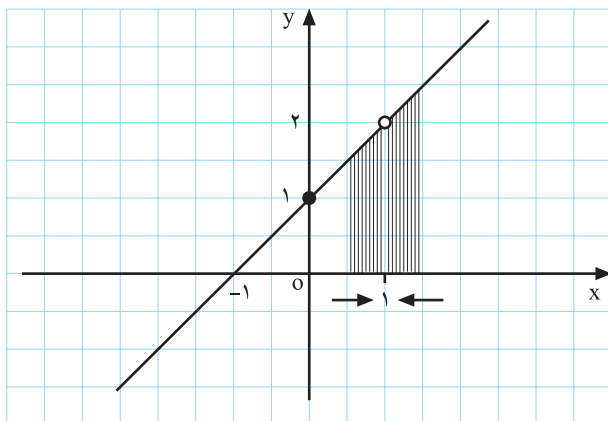
مفهوم حد یکی از مفاهیم پایه در ریاضیات است. در این بخش سعی شده که به صورت شهودی به بیان این مفهوم بپردازیم.

فعالیت ۱-۳

نمودارهای مقابل را نگاه کنید، سپس به سؤالات زیر پاسخ دهید.

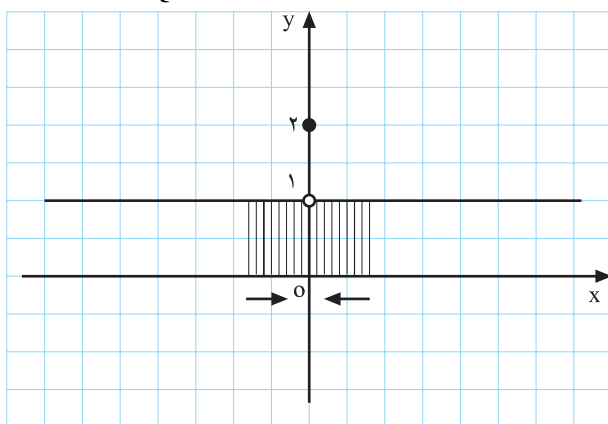
- در شکل ۳-۳ وقتی بر روی محور x ها به عدد ۱ نزدیک شویم مقدار y به کدام عدد نزدیک می شود؟
- آیا مقدار تابع در $x=1$ وجود دارد؟
 بله خیر

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} \text{ و } x \neq 1$$



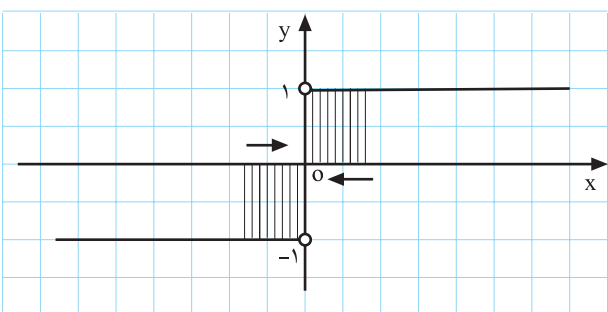
شکل ۳-۳

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$



شکل ۳-۴

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$



شکل ۳-۵

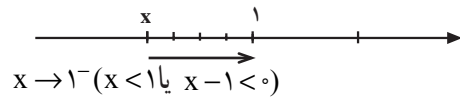
- در شکل ۳-۴ وقتی x از راست و یا از چپ به عدد صفر (0) نزدیک و نزدیک تر می شود مقدار y به کدام عدد نزدیک می شود؟
 پاسخ:

- در شکل ۳-۵ وقتی که x از سمت راست صفر یعنی از مقادیر بیشتر از صفر به عدد 0 نزدیک و نزدیک تر می شود مقدار $f(x)$ به کدام عدد نزدیک تر می شود؟
- در شکل ۳-۵ وقتی که x از سمت چپ صفر یعنی از مقادیر کم تر از 0 به عدد صفر نزدیک تر می شود $f(x)$ به کدام عدد نزدیک می شود؟

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1, \quad x \neq 1$$

جدول ۳-۱

x	0 →	0/8 →	0/9 →	0/99 →	0/999 →	0/9999 →	1
f(x)	1	1/8	1/9	1/99	1/999	1/9999	?



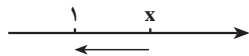
(میل کردن x به عدد ۱ از چپ)

مثال: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

جدول ۳-۱ مقادیر مختلف تابع را به ازای چند عدد نزدیک به ۱ نشان می‌دهد. همان‌طور که در جدول ۳-۱ مشاهده می‌کنید، هرچه مقدار x با مقادیر کمتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد (از چپ به عدد ۱ میل می‌کند) تابع f یا y به ۲ میل می‌کند و هرچه x با مقادیر بیشتر از ۱ به عدد ۱ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد (از راست به ۱ میل می‌کند) مقدار تابع f یا y به عدد ۲ نزدیک و نزدیک‌تر می‌شود (به عدد ۲ میل می‌کند) (جدول ۳-۲).

جدول ۳-۲

x	1) 1/0001) 1/001) 1/01) 1/1) 2
f(x)	?) 2/0001) 2/001) 2/01) 2/1) 3



$x \rightarrow 1^+ (x > 1 \text{ یا } x - 1 > 0)$

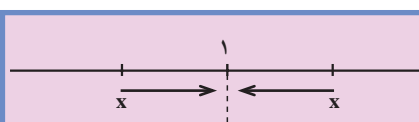
(میل کردن x به عدد ۱ از راست)

از ترکیب نماد جدول‌های ۳-۱ و ۳-۲ جدول

۳-۳ به دست می‌آید.

جدول ۳-۳

x	0 →	0/8 →	0/9 →	0/99 →	0/999 →	0/9999 →	1) 1/0001) 1/001) 1/01) 1/1) 2
f(x)	1	1/8	1/9	1/99	1/999	1/9999	2) 2/0001) 2/001) 2/01) 2/1) 3



(میل کردن x به عدد ۱)

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

نتیجه: حد تابع f وقتی x به ۱ میل می‌کند برابر ۲ می‌باشد و

آن را به صورت مقابل می‌نویسیم:

فعالیت ۲-۳

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$$

تابع f با ضابطه‌ی مقابل مفروض است:

با تکمیل جدول ۳-۴ به سؤال‌های زیر پاسخ دهید.

جدول ۳-۴

x	$-1 \rightarrow$	$-0/1 \rightarrow$	$-0/0/1 \rightarrow$	$-0/00/1 \rightarrow$	0	$0/00/1$	$0/0/1$	$0/1$	$0/5$	1
f	۱	<input type="checkbox"/>	۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱	<input type="checkbox"/>	۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = ?$$

۱- هرگاه x از چپ به عدد 0 میل کند $f(x)$ به کدام عدد

میل می‌کند؟

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = ?$$

۲- هرگاه x از راست به عدد صفر میل کند $f(x)$ به کدام

عدد میل می‌کند؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = ?$$

۳- حد $f(x)$ وقتی x به 0 میل می‌کند چیست؟

تابع f در نقطه‌ی $x = a$ زمانی دارای حد می‌باشد که حد چپ و حد راست تابع در این نقطه برابر باشند. به

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

بیان دیگر:

فعالیت ۳-۳

تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. با تکمیل جاهای

خالی به سؤال‌های ۱، ۲ و ۳ پاسخ دهید.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x} = \frac{\boxed{}}{x} = 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{|x|}{x} = \frac{\boxed{}}{x} = -1 & x < 0 \end{cases}$$

۱- با توجه به جدول ۵-۳ وقتی x از چپ به صفر میل

می کند f(x) به چه عددی میل می کند؟

جدول ۵-۳

x	۱.	۰/۱.	۰/۰۱.	۰/۰۰۱.	۰/۰۰۰۱.	۰
f(x)	۱	۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱	۱

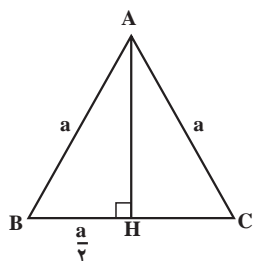
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \square$$

جدول ۶-۳

x	۰	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۷	۱
f(x)	۱	<input type="checkbox"/>	۱	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	۱

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \square$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \square$$



شکل ۶-۳

$$BH = \frac{BC}{2} = \frac{a}{2}$$

$$S = \frac{1}{2} BC \cdot AH \text{ و } AB = BC = AC = a \quad (1)$$

$$AB^2 = BH^2 + AH^2 \quad AH^2 = AB^2 - BH^2$$

$$AH^2 = AB^2 - \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \quad AH^2 = \frac{4AB^2 - AB^2}{4}$$

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AB \quad (2)$$

$$S = \frac{1}{2} (a) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} a\right) \quad S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

۲- با توجه به جدول ۶-۳ وقتی x از راست (با مقادیر

بیشتر از صفر) به عدد صفر میل می کند f(x) به چه عددی میل

می کند؟

۳- با توجه به سؤال های ۱ و ۲ آیا تابع f در $x = 0$ دارای

حد می باشد؟ چرا؟

مثال: در شکل ۶-۳ مثلث متساوی الاضلاع به طول

ضلع a رسم شده است. مساحت مثلث را بر حسب a حساب کنید.

حل: در مثلث متساوی الاضلاع میانه، ارتفاع و

عمود منصف بر یکدیگر منطبق می باشند، در نتیجه BH برابر است با:

— مساحت مثلث از رابطه‌ی مقابل به دست می آید:

— طول ارتفاع مثلث قائم الزاویه‌ی AHB را محاسبه

می کنیم:

— مقدار BH و AB را در رابطه قرار می دهیم و AH را

به دست می آوریم.

— با قراردادن مقدار AH و BC در رابطه‌ی مساحت

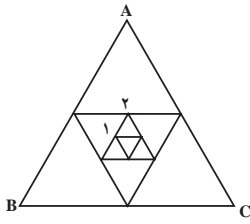
خواهیم داشت:

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$$

مساحت مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a برابر است با:

برای مثال، اگر طول ضلع برابر $a_0 = 4$ باشد داریم:

$$a_0 = 4 \Rightarrow S_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} (4)^2 \Rightarrow S_0 = 4\sqrt{3}$$



شکل ۳-۷

۲) هرگاه وسط ضلع‌های مثلث شکل ۳-۶ را به هم وصل کنیم مثلث جدیدی (شکل ۳-۷) به دست می‌آید. اگر a_1 طول ضلع و S_1 مساحت این مثلث باشد، a_1 و S_1 را حساب کنید.

۳- هرگاه عمل قبل را سه مرتبه‌ی دیگر ادامه دهیم (شکل ۳-۷) در هریک از مثلث‌های ایجاد شده طول ضلع مثلث و مساحت آن را محاسبه کنید.

$$a_1 = \frac{a_0}{2} = 2 \text{ و } S_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} (2)^2 = \sqrt{3}$$

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = 1 \text{ و } S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (1)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$a_3 = \frac{a_2}{2} = \frac{1}{2} \text{ و } S_3 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{16}$$

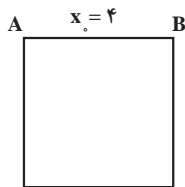
$$a_4 = \frac{a_3}{2} = \frac{1}{4} \text{ و } S_4 = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{64}$$

۴- هرگاه عمل فوق را n مرتبه تکرار کنیم مقدارهای a_n و S_n به چه عددی میل می‌کنند؟

$$a_0 = 4, a_1 = 2, a_2 = 1, a_3 = \frac{1}{2}, a_4 = \frac{1}{4},$$

همان طوری که می‌بینیم هر قدر تعداد این مراحل زیاد شود منجر کسرهای a_n و S_n رو به افزایش است به طوری که حاصل کسر از هر عدد کوچک مثبتی کمتر می‌شود یعنی به سمت صفر میل می‌کند.

$$S_0 = 4\sqrt{3}, S_1 = \sqrt{3}, S_2 = \frac{\sqrt{3}}{4}, S_3 = \frac{\sqrt{3}}{16}, S_4 = \frac{\sqrt{3}}{64},$$

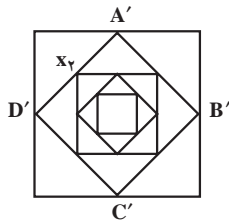


شکل ۳-۸

$$S_0 = x_0^2 \Rightarrow S_0 = 16$$

فعالیت ۳-۴

۱- در شکل ۳-۸ مربعی به طول ضلع ۴ را مشاهده می‌کنید. اگر x طول ضلع و S_0 مساحت مربع باشد مساحت مربع چقدر است؟



شکل ۹-۳

$$x_1^2 = 2^2 + \square^2 \Rightarrow x_1 = 2\sqrt{\square}$$

$$S_1 = x_1^2 = \square$$

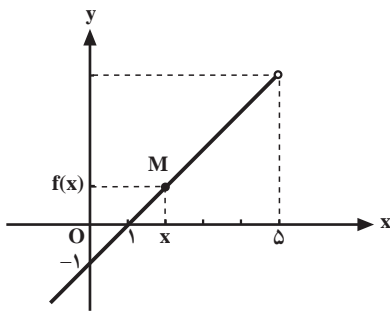
$$x_2^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 = 4 \Rightarrow x_2 = \square$$

$$S_2 = x_2^2 = \square$$

$$x_3^2 = \square^2 + 1^2 = 2, x_3 = \sqrt{2}, S_3 = x_3^2 = \square$$

$$x_4^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \square = 1, x_4 = \square, S_4 = x_4^2 = 1$$

$$S_n \rightarrow \square, x_n \rightarrow \square$$



$$\lim_{x \rightarrow \delta} f(x) = \square$$

شکل ۱۰-۳

۲- وسط ضلع‌های مربع را به یکدیگر وصل کنید (شکل

۳-۹) طول ضلع جدید را x_1 و مساحت آن را S_1 می‌نامیم. x_1 و S_1 را به دست آورید.

۳- عمل فوق را سه بار دیگر تکرار می‌کنیم.

در هر یک از مربع‌های ایجاد شده طول ضلع مربع و مساحت آن را محاسبه کنید.

۴- هرگاه $n \rightarrow +\infty$ ، x_n به چه عددی میل می‌کند؟

۵- هرگاه $n \rightarrow +\infty$ ، S_n به چه عددی میل می‌کند؟

مثال: در شکل مقابل متحرک M روی مسیر داده شده از

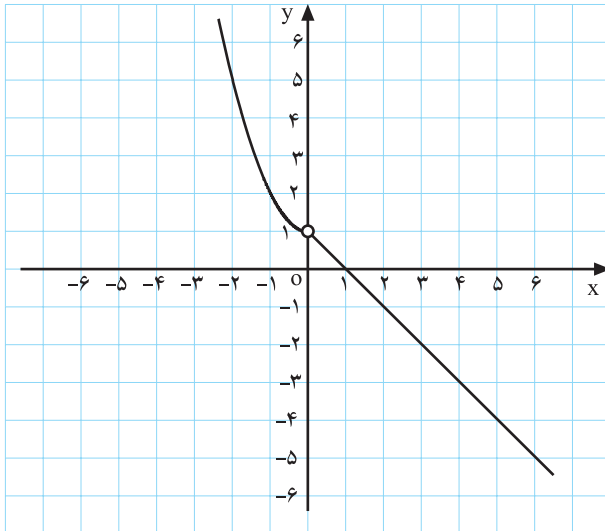
چپ به راست حرکت می‌کند، وقتی x به عدد ۵ نزدیک و نزدیک‌تر

شود، $f(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شود؟

تعریف حد: در یک بازه‌ی باز شامل عدد a، تابع $f(x)$ را گوییم دارای حد است اگر هر قدر متغیر x به عدد a نزدیک شود مقدار تابع به عدد L نزدیک گردد (ممکن است $f(a)$ تعریف نشده باشد). این موضوع را با نماد

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ ریاضی نشان می‌دهیم.}$$

فعالیت ۵-۳



شکل ۱۱-۳

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x < 0 \\ 1 - x & x > 0 \end{cases}$$

تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی

تعریف شده است (شکل ۱۱-۳).

۱- با توجه به شکل ۱۱-۳، حد $f(x)$ را وقتی $x \rightarrow 0$

به دست آورید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \square$$

جدول ۷-۳

x	0	$0/00001$	$0/001$	$0/01$	$0/1$	$0/7$	1
$f(x)$	$?$	$0/9999$	\square	\square	$0/9$	$0/3$	0

۲- جدول ۷-۳ را کامل کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \square$$

۳- وقتی $x \rightarrow 0^+$ ، حد $f(x)$ چیست؟

جدول ۸-۳

x	$-1 \rightarrow$	$-0/1 \rightarrow$	$-0/01 \rightarrow$	$-0/001 \rightarrow$	$-0/0001$	0
$f(x)$	2	$1/01$	\square	$1/00001$	\square	$?$

۴- جدول ۸-۳ را کامل کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \square$$

۵- وقتی $x \rightarrow 0^-$ ، حد $f(x)$ به چه عددی میل می کند؟

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \square$$

۶- با توجه به مراحل ۳ و ۵ حد مقابل را محاسبه کنید.

فعالیت ۶-۳

تابع f با ضابطه روبه‌رو مفروض است.

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & x > 0 \\ a + 3 & x < 0 \end{cases}$$

جدول ۳-۹

x	0^-	$0/0001^-$	$0/001^-$	$0/01^-$	$0/1^-$
$f(x)$	<input type="text"/>	<input type="text"/>	$1/002^-$	<input type="text"/>	$1/2^-$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \square$$

الف) جدول ۳-۹ را با توجه به مقادیر $f(x)$ تکمیل کنید.

ب) با توجه به جدول وقتی $x \rightarrow 0^+$ مقدار $f(x)$ به چه عددی میل می‌کند؟

ج) اگر تابع f در $x = 0$ دارای حد باشد مقدار a را محاسبه

کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \Rightarrow 1 = \square \Rightarrow a = -2$$

تمرین

۱- تابع f به صورت روبه رو تعریف شده است.

$$f(x) = \begin{cases} 1-2x & x > 2 \\ x-5 & x < 2 \end{cases}$$

خیر بلی

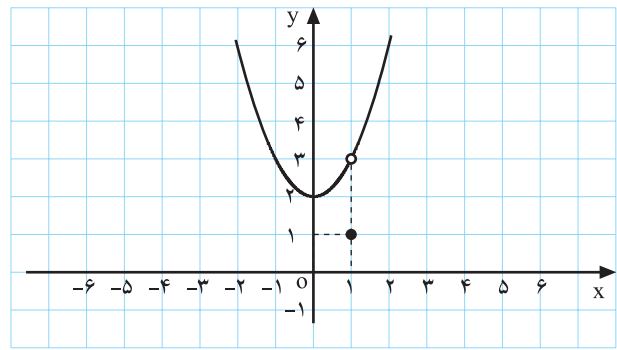
الف) نمودار این تابع را رسم کنید.

ب) آیا تابع f در $x=2$ دارای حد می باشد؟

۲- در هر یک از شکل های زیر مقدار حد را در صورت

وجود به دست آورید.

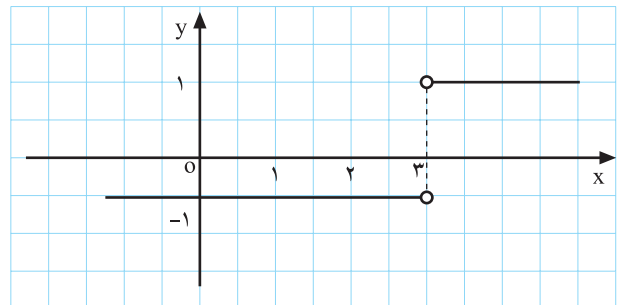
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases} \text{ (الف)}$$



شکل ۱۲-۳

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = ?$$

$$f(x) = \frac{|x-3|}{x-3} \text{ (ب)}$$



شکل ۱۳-۳

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = ?$$

۳- در هر یک از تمرین های زیر ابتدا جدول داده شده را

کامل کنید سپس مقدار حد را به دست آورید.

جدول های ۱۰-۳

x	$1/9 \rightarrow$	$1/99 \rightarrow$	$1/999 \rightarrow$	2	$2/001 \rightarrow$	$2/01 \rightarrow$	$2/1 \rightarrow$
$f(x)$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

(الف) $f(x) = 2x + 7$

$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \square$

جدول ۱۱-۳

x	۴/۰۰۰۰۱)	۴/۰۰۰۱)	۴/۰۱)	۴/۱
f(x)	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

(ب) $f(x) = \sqrt{x-4}$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \square$

۴- مقدار b را طوری بیابید که تابع f با ضابطه‌ی مقابل در نقطه‌ی $x = 3$ دارای حد باشد.

$$f(x) = \begin{cases} \cos \pi x + b & x < 3 \\ x^2 + 2 & x > 3 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{x}{|x|}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\square} = 1 & x > 0 \\ \frac{x}{\square} = \bigcirc & x < 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \square$ و $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \square$

خیر بله

۵- تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

نمودار آن را رسم کنید و سپس $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ را به‌دست آورید.

۶- تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است.

(الف) جاهای خالی را پر کنید.

(ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

(ج) با استفاده از نمودار رسم شده حدهای مقابل را به‌دست آورید.

(د) آیا تابع فوق در نقطه‌ی $x = 0$ دارای حد می‌باشد؟