

شکل ۲-۱۱۸

۴- وقتی $\sin x = 0$ باشد، می‌خواهیم تمامی زوایایی را تعیین کنیم که مقدار سینوس آن‌ها صفر باشد. در شکل ۲-۱۱۸ مشخص کنید چه زوایایی دارای سینوس صفر می‌باشند؟

$\sin \square = 0$ و $\sin \square = 0$ و $\sin 2\pi = 0$

$\sin(\pi + 2\pi) = ?$

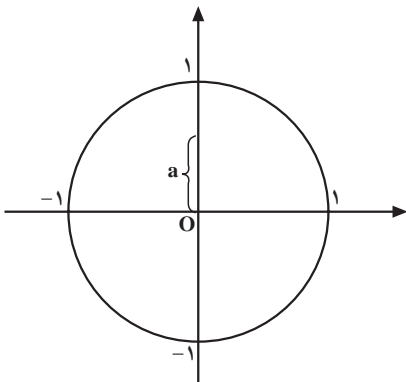
$\sin(\pi + 3\pi) = ?$ و $\sin(\pi + 2\pi) = ?$

$\sin(\pi + 4\pi) = ?$

۵- سینوس زوایای 0 ، π ، 2π برابر صفر است. آیا سینوس زوایای 3π ، 4π ، 5π و ... نیز صفر است؟ چرا؟

نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\sin x = 0$ برابر است با: $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

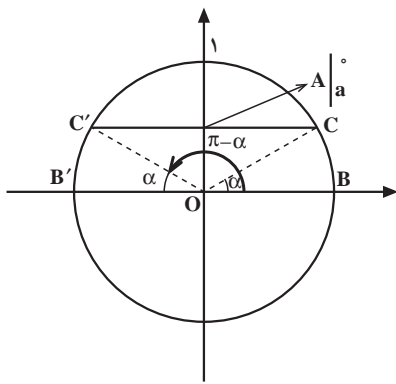
فعالیت ۲-۲۰



شکل ۲-۱۱۹

شکل ۲-۱۱۹ دایره‌ی مثلثاتی را نشان می‌دهد. برای پیدا کردن جواب‌های معادله‌ی $\sin x = a$ ، که $-1 \leq a \leq 1$ ، مراحل زیر را انجام دهید.

$\sin x = a$ و $-1 \leq a \leq 1$ و $x = ?$



شکل ۲-۱۲

$$\sin(\pi - \alpha) \boxed{} \sin \alpha$$

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = ? \text{ و } k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin((\pi - \alpha) + 2k\pi) = ?$$

۱- خط گذرا از نقطه‌ی $A(\alpha, a)$ و موازی با محور کسینوس‌ها را رسم کنید. این خط، دایره‌ی مثلثاتی را در چند نقطه قطع می‌کند؟ (شکل ۲-۱۲).

۲- نقاط C' و C را به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم. سینوس دو زاویه‌ی α و $\pi - \alpha$ با هم چه رابطه‌ای دارند؟ (شکل ۲-۱۲).

۳- اگر α یا $\pi - \alpha$ یک جواب معادله باشند آیا هر چند بار دور دایره گردش نمایم مقدار سینوس تغییر می‌کند؟

نتیجه: جواب کلی معادله‌ی مقابل عبارت است از:

$$\sin x = a = \sin \alpha, \quad -1 \leq a \leq 1$$

$$x = 2k\pi + \alpha \text{ یا } x = 2k\pi + (\pi - \alpha), \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2 \sin^2 x - \sin x = 0$$

مثال: جواب‌های معادله‌ی مقابل را بیابید.

$$\sin x (2 \sin x - 1) = 0$$

حل: از $\sin x$ فاکتور می‌گیریم، بنابراین خواهیم داشت:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi + 0 \Rightarrow x = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \\ 2 \sin x - 1 = 0 \Rightarrow 2 \sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \frac{1}{2} = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow \end{cases} \text{ می‌دهیم:}$$

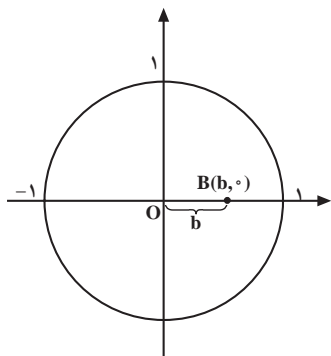
$$x = \frac{\pi}{6}, \quad x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

جواب‌های معادله را به دست می‌آوریم.

$$\Rightarrow \boxed{x = 2k\pi + \frac{\pi}{6}} \text{ و } \boxed{x = 2k\pi + \frac{5\pi}{6}}$$

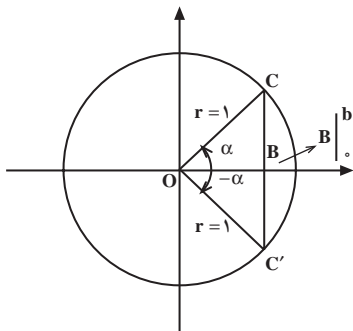
- جواب کلی معادله عبارت است از:

فعالیت ۲-۲۱



شکل ۲-۱۲۱

$$\cos x = b, -1 \leq b \leq 1$$



شکل ۲-۱۲۲

$$\cos(-\alpha) = \frac{OB}{r} \quad \square \quad \cos \alpha = \frac{OB}{r}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

بلی خیر

شکل ۲-۱۲۱ دایره‌ی مثلثاتی را نشان می‌دهد. برای پیدا کردن جواب‌های کلی معادله‌ی مقابل:

مراحل زیر را انجام دهید.

خط‌گذرا از نقطه‌ی $B(b, 0)$ و موازی با محور سینوس‌ها را رسم کنید. این خط دایره‌ی مثلثاتی را در نقطه‌ی C و C' قطع می‌کند (شکل ۲-۱۲۲).

نقاط C و C' را به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم (شکل

۲-۱۲۲).

دو زاویه‌ی ایجاد شده‌ی α و $-\alpha$ با هم چه رابطه‌ای

دارند؟

آیا می‌توانیم رابطه‌ی مقابل را قبول کنیم؟

۳- اگر α و $-\alpha$ یک جواب معادله باشند و چندین بار زاویه دور دایره گردش کند $(2k\pi)$ و بر روی α و $-\alpha$ قرار گیرد کسینوس برابر چه مقداری می‌باشد؟

$$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha = \square$$

$$\cos(2k\pi - \alpha) = \cos(-\alpha) = \square$$

$$\cos x = b = \cos \alpha, -1 \leq b \leq 1$$

$$x = 2k\pi \pm \alpha, k \in \mathbb{Z}$$

نتیجه: جواب کلی معادله‌ی مقابل عبارت است از:

$$\cos^2 x - 2 \cos x + \frac{3}{4} = 0$$

مثال: جواب کلی معادله‌ی مثلثاتی مقابل را پیدا کنید.

حل:

– حاصل جمع دو عدد $\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ برابر ۱ و ضربشان برابر

$$(\cos x - \frac{3}{4})(\cos x - \frac{1}{4}) = 0$$

$\frac{3}{4}$ است، پس:

با توجه به تغییرات $\cos x$ بین -1 و 1 ، جواب $\frac{3}{4}$ قابل قبول

نیست.

– به ازای $\frac{1}{4}$ جواب قابل قبول، و زاویه x برابر است با:

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x - \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow \cos x = \frac{3}{4} \\ \cos x = \frac{1}{4} = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

– با قرار دادن $\frac{\pi}{3}$ در رابطه کلی جواب‌های معادله را

به دست می‌آوریم.

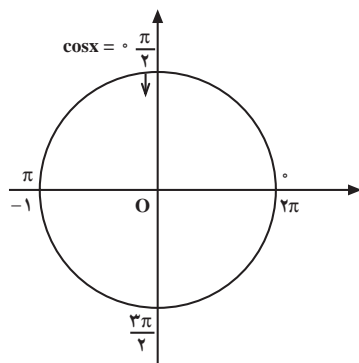
$$x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0$$

مثال: معادله‌ی مقابل را حل کنید.

حل: با توجه به شکل ۲-۱۲۳ به ازای $\frac{\pi}{2}$ و $\frac{3\pi}{2}$

معادله‌ی $\cos x = 0$ برابر صفر است.

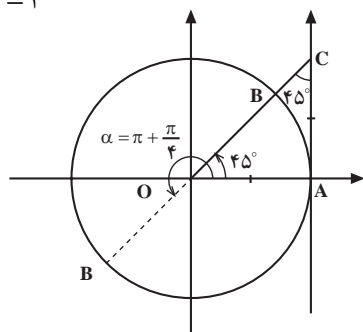


شکل ۲-۱۲۳

نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\cos x = 0$ عبارت است از: $x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$\tan x = 1$$

محور تانژانت‌ها



شکل ۲-۱۲۴

مثال: معادله‌ی مثلثاتی مقابل را حل کنید.

– برای پیدا کردن تمامی زوایایی که مقدار تانژانت آن‌ها

برابر با عدد ۱ می‌باشد مراحل زیر را انجام دهید.

۱- در شکل ۲-۱۲۴ بر روی محور تانژانت پاره خط AC

را به اندازه‌ی واحد جدا کنید. از C به مبدأ مختصات وصل می‌کنیم مقدار تانژانت زاویه‌ی حاصل (۴۵) برابر با چیست؟

$$\tan \frac{\pi}{4} = \square$$

۲- هرگاه نقطه‌ی B را به اندازه‌ی π واحد در جهت دایره‌ی مثلثاتی حرکت دهیم به نقطه‌ای مانند B' می‌رسیم. مقدار تانژانت زاویه‌ی $\pi + \frac{\pi}{4}$ برابر چیست؟

$$\tan(\pi + \frac{\pi}{4}) = ?$$

- هرگاه از B' به اندازه‌ی π واحد در جهت دایره‌ی مثلثاتی حرکت کنیم به نقطه‌ی B می‌رسیم. آیا مقدار تانژانت تغییر می‌کند؟

$$\tan(2\pi + \frac{\pi}{4}) = ?$$

- آیا رابطه‌ی مقابل صحیح است؟ چرا؟

$$\tan(k\pi + \frac{\pi}{4}) = 1 \text{ و } k \in \mathbb{Z}$$

نتیجه: جواب‌های کلی معادله‌ی $\tan x = m = \tan \alpha$ که $m \in \mathbb{R}$ برابر است با: $x = k\pi + \alpha, k \in \mathbb{Z}$

مثال‌های اضافی

مثال ۱: تابع روبه‌رو مفروض است.

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{\sin x - 1}}$$

الف) این تابع به ازای چه مقدار از x تعریف نمی‌شود؟
حل: به ازای ریشه‌های مخرج، تابع f تعریف نمی‌شود:

$$\sqrt{\sin x - 1} = 0 \Rightarrow \sin x = 1 \Rightarrow$$

$$\sin x = \frac{1}{1} = \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

جواب‌های کلی عبارت است از:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \\ x = 2k\pi + (\pi - \frac{\pi}{2}) = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$D_f = ?$$

ب) دامنه‌ی تابع f را به دست آورید.

حل: دامنه‌ی f عبارت از کلیه‌ی اعداد حقیقی به جز

ریشه‌ی مخرج است، پس:

$$D_f = \mathbb{R} - \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \text{ یا } x = 2k\pi + \frac{3\pi}{2} \right\}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3 - 9x}}$$

$$x^3 - 9x = x(x^2 - 9) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \end{cases}$$

جدول ۲-۲۸

x	-3	0	3
x	-	-	+
$x^2 - 9$	+	-	+
$x^3 - 9x$	-	+	-

جواب

$$D_f = (-3, 0) \cup (3, +\infty)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{3-5x}}$$

$$\frac{2x+1}{3-5x} \geq 0$$

$$2x+1=0 \Rightarrow 2x=-1 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$3-5x=0 \Rightarrow 3=5x \Rightarrow x=\frac{3}{5}$$

جدول ۲-۲۹

x	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$
$2x+1$	-	+
$3-5x$	+	-
$\frac{2x+1}{3-5x}$	-	+

جواب

$$-\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{5}$$

مثال ۲: تابع با ضابطه‌ی مقابل مفروض است. دامنه‌ی آن را به دست آورید.

حل: تابع f به ازای x هایی که $x^3 - 9x > 0$ تعریف شده است. نامعادله اخیر به روش تعیین علامت حل می‌شود.

ریشه‌ها را به ترتیب از کوچک به بزرگ در جدول ۲-۲۸ قرار داده و تعیین علامت می‌کنیم.

در نتیجه دامنه‌ی f برابر است با:

مثال ۳: تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است:

الف) به ازای چه مقادیری از x تابع f تعریف شده است؟
حل:

با توجه به زوج بودن فرجه‌ی رادیکال تابع f باید داشته باشیم:

ریشه‌های صورت و مخرج نامعادله را به دست می‌آوریم:

ریشه‌ها را به ترتیب نزولی به صعودی در جدول ۲-۲۹ قرار داده تعیین علامت می‌کنیم.

با توجه به نامعادله، تابع در $\left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$ تعریف شده است.

ب) دامنه‌ی تابع f را پیدا کنید.

حل:

با استفاده از جدول ۲۹-۲ دامنه‌ی f برابر است با:

$$D_f = \left\{ x \mid x \in \mathbb{R}, -\frac{1}{4} \leq x < \frac{3}{5} \right\} = \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{5} \right)$$

مثال ۴: تابع‌های f و g مفروض اند. مقادیر زیر را به دست آورید.

$$f(x) = 7x^2 - 5x, g(x) = 2 \sin x - 3$$

$$f(0) + g(0) = ? \quad (1)$$

f(0) و g(0) را از ضابطه‌ی مربوط به دست می‌آوریم و

با هم جمع می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} f(0) &= 7(0)^2 - 5(0) = 0 - 0 = 0 \\ g(0) &= 2 \sin 0 - 3 = 0 - 3 = -3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(0) + g(0) = -3$$

$$f(3) - g\left(\frac{\pi}{6}\right) = ? \quad (2)$$

$$f(3) = 7(3)^2 - 5(3) = 63 - 15 = 48$$

$$g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \sin \frac{\pi}{6} - 3 = 2 \times \frac{1}{2} - 3 = 1 - 3 = -2$$

f(3) و g(π/6) را از ضابطه‌ی مربوط به دست می‌آوریم

و از هم کم می‌کنیم.

$$\Rightarrow f(3) - g\left(\frac{\pi}{6}\right) = 48 - (-2) = 50$$

مثال ۵: دامنه و برد تابع با ضابطه‌ی مقابل را به دست آورید.

$$f(x) = -2 \sin 3x + 5$$

حل: دامنه‌ی تابع شامل کلیه‌ی اعداد حقیقی است:

$$D_f = \mathbb{R}$$

– تغییرات تابع سینوس بین -۱ و ۱ است، بنابراین:

$$-1 \leq \sin 3x \leq 1$$

– نامعادله را در عدد ۲- ضرب می‌کنیم، پس:

$$-1 \times (-2) \geq -2 \times \sin 3x \geq 1 \times (-2)$$

– چون نامعادله در عدد منفی ضرب شده است جهت

نامعادله تغییر می‌کند.

$$+2 \geq -2 \sin 3x \geq -2$$

به همه‌ی طرف‌های نامعادله عدد ۵ اضافه می‌کنیم.

$$2 + 5 \geq -2 \sin 3x + 5 \geq -2 + 5$$

– پس از ساده کردن برد تابع f برابر است با:

$$\Rightarrow 7 \geq f(x) \geq 3 \Rightarrow R_f = [3, 7]$$

مثال ۶: معادله‌ی مثلثاتی مقابل را حل کنید.

$$\sqrt{3} \tan^2 x - \tan x = 0$$

حل: از $\tan x$ فاکتور می‌گیریم و هر یک از عوامل را برابر

صفر قرار می‌دهیم:

$$\tan x(\sqrt{3} \tan x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \sqrt{3} \tan x - 1 = 0 \end{cases}$$

– اولین جواب به ازای $\tan x = 0$ برابر با:

$$\tan x = 0 \Rightarrow x = 0$$

– دومین جواب به ازای $\tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ برابر با:

$$\sqrt{3} \tan x - 1 = 0 \Rightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

– جواب‌های کلی معادله برابر است با:

$$\Rightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = k\pi + \frac{\pi}{6}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

تمرین

۱- زوایای $\frac{11\pi}{6}$ ، $\frac{2\pi}{3}$ و $\frac{5\pi}{6}$ را برحسب درجه

بنویسید.

۲- نسبت‌های مثلثاتی 30° و 50° را برحسب رادیان

بنویسید.

۳- معادله‌ی مقابل را حل کنید و جواب‌های کلی آن را

به دست آورید.

$$\cos^2 x - 3 \cos x + 2 = 0$$

۴- معادله‌ی مقابل را حل کنید و جواب‌های کلی را

به دست آورید.

$$\sin 2x = 0$$

فعالیت ۲۲-۲

دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند. جاهای خالی را در الف و ب تکمیل کنید.

$$f(x) = \sin^2 x + 3, \quad g(x) = -\cos^2 x + 4$$

الف) $D_f = \square$ و $D_g = \square$

ب) $R_f = \square$ و $R_g = \square$

ج) آیا می‌توان گفت: $f = g$ ؟ چرا؟

نتیجه: دو تابع f و g برابرند، هرگاه دو شرط را دارا باشند:

الف - دامنه‌های آن‌ها برابر باشند، یعنی $D_f = D_g$

ب - به ازای تمامی مقادیر x از دامنه، $f(x) = g(x)$ باشد.

مثال ۱: آیا دو تابع مقابل برابرند؟

$$f(x) = x + 2, \quad g(x) = \frac{x^2 + 2x}{x}$$

حل: D_f و D_g را به دست می‌آوریم، آن‌گاه ثابت می‌شود

برابر نیستند.

$$D_f = \mathbb{R}, \quad D_g = \mathbb{R} - \{0\} \Rightarrow D_f \neq D_g$$

مثال ۲: آیا دو تابع مقابل برابرند؟

$$f(x) = 2 - 2 \sin^2 x \quad \text{و} \quad g(x) = 2 \cos^2 x$$

حل: D_f و D_g را به دست می‌آوریم:

$$D_f = \mathbb{R} \quad \text{و} \quad D_g = \mathbb{R} \Rightarrow D_f = D_g$$

- برای هر x در دامنه‌ی تابع f ($D_f = D_g$)، $f(x) = g(x)$

زیرا

$$f = g, \text{ پس}$$

$$f(x) = 2 - 2 \sin^2 x = 2(1 - \sin^2 x) = 2 \cos^2 x$$

فعالیت ۲۳-۲

دو تابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & x \neq 2 \\ 3k + 1 & x = 2 \end{cases} \quad \text{و} \quad g(x) = x + 2$$

جاهای خالی زیر را تکمیل کنید.

الف) $D_f = (\mathbb{R} - \{2\})$ $\{2\} = \square$ و $D_g = \square$

ب) $g(2) = \square$

ج) هرگاه $f(2) = g(2) = k$ آن گاه $k = \square$

د) باتوجه به مقدار k ، آیا می توان گفت دو تابع f و g

برابرند؟

تمرین

کدام یک از زوج تابع های زیر برابرند؟

الف) $f(x) = \frac{x^2 + 7x + 12}{x + 3}$ و $g(x) = x + 4$

ب) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} & x \neq 1 \\ -2 & x = 1 \end{cases}$ و $g(x) = x - 3$

آزمون پایانی (۵)

محل پاسخ به سوالات آزمون پایانی (۵)

$$f(x) = \frac{\cos x}{2 \sin x - \sqrt{3}}$$

$$f(x) = x - 1, \quad g(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2 \sin x - 1 & \frac{\pi}{3} \leq x < \frac{5\pi}{6} \\ \cos x & x < 0 \end{cases}$$

۱- $C \in \mathbb{R}$ و $y = C$ یک تابع ثابت است. نمودار تابع با توجه به دو مقدار مختلف ($C > 0$ یا $C < 0$) در کدام قسمت از محور x ها قرار می‌گیرد؟ (بالا یا پایین محور)

۲- هرگاه $A = \{0, 1, 2\}$ تابعی از A بنویسید که مختص اول هر زوج آن برابر مختص دوم باشد.

۳- دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی مقابل را به دست آورید.

۴- آیا دو تابع f و g برابرند؟ چرا؟

۵- تابع f با ضابطه‌ی روبه‌رو مفروض است. مقدار زیر را محاسبه کنید.

$$3f\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

بخش دوم

فصل ششم

عملیات روی تابع‌ها

هدف کلی

تعیین ضابطه‌ی $f \pm g$ و $f \times g$ و f/g با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g و کاربرد آن‌ها

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

- ۱- چهار عمل اصلی روی دو تابع را تعریف کند؛
- ۲- با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g ، ضابطه‌ی تابع $f \pm g$ و $f \times g$ و f/g را بنویسد؛
- ۳- دامنه‌ی تابع‌های $f \pm g$ و $f \times g$ و f/g را تعیین کند؛
- ۴- چهار عمل اصلی تابع‌ها را در موارد کاربردی استفاده کند.

پیش‌آزمون (۶)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۶)

$$f(x) = \frac{1}{x-1} \text{ و } g(x) = \frac{x}{x-3}$$

$$f(x) = 7x + 1 \text{ و } g(x) = \sqrt{x}$$

$$f(x) = \{(-1, 0), (2, 5), (9, 11), (11, 20)\}$$

$$g(x) = \{(9, 17), (7, 9), (-1, 3)\}$$

۱- توابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند:

الف) دامنه‌ی f و g را بیابید.

ب) ضابطه‌های $f+g$ و $f \times g$ و $\frac{f}{g}$ را بیابید و

سپس دامنه‌ی هر یک را به دست آورید.

۲- توابع f و g با ضابطه‌های روبه‌رو مفروض‌اند.

مقادیر زیر را به دست آورید.

$$(f+g)(2) \text{ و } \left(\frac{g}{f}\right)(2)$$

۳- توابع f و g با ضابطه‌های مقابل مفروض‌اند.

حساب کنید:

الف) $f \times g$ و $2f + 3g$

ب) D_{f+g} و $D_{f \times g}$