

### مدارهای R - L - C جریان متناوب

#### هدف‌های رفتاری

- در پایان این فصل، از هنرجو انتظار می‌رود:
- ۱- مدار R-L-C سری، موازی و مختلط را بررسی و دیاگرام برداری جریان و ولتاژ آن‌ها را رسم کند و زوایای اختلاف فاز را از روی دیاگرام نشان دهد.
  - ۲- روابط مربوط به محاسبه‌ی مقاومت ظاهری و جریان ولتاژ، ضریب توان و توان‌ها را در مدارهای R-L-C سری، موازی و مختلط بنویسد و با استفاده از فرمول‌های مذکور، مقادیر خواسته شده را محاسبه کند.
  - ۳- تأثیر فرکانس را بر مقاومت ظاهری، جریان‌ها، توان‌ها و ضریب توان با نوشتن فرمول‌های مربوط در مدارهای سری و موازی بررسی کند.
  - ۴- فرکانس رزونانس را برای مدارهای R-L-C سری و موازی محاسبه کرده و موارد کاربرد فرکانس رزونانس را ذکر کند.
  - ۵- پهنای باند و ضریب کیفیت رزونانس مدارهای R-L-C سری و موازی را به دست آورد.
  - ۶- معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای R-L-C سری و موازی را به دست آورد.

#### ۱-۶- مقدمه

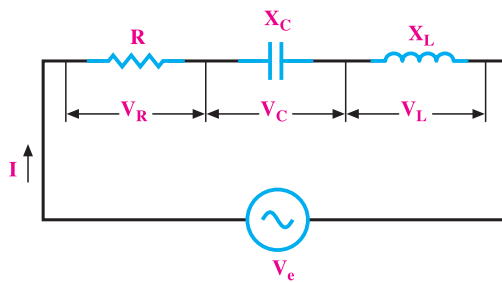
در یک شبکه‌ی الکتریکی، مصرف‌کننده‌های متنوعی تغذیه می‌شوند. این مصرف‌کننده‌ها با توجه به نوع کار در رده‌بندی مقاومت اهمی، سلفی و خازنی یا ترکیب سری یا موازی آن‌ها قرار می‌گیرند؛ مثلاً در یک واحد صنعتی، الکتروموتورهای پر قدرت، انرژی مکانیکی واحد صنعتی را

تأمین می‌کنند. می‌دانیم یک الکتروموتور شامل یک یا چند بوبین و سیم‌پیچ است و با یک مدار R-L، مدل می‌شود. در سیستم‌های مخابراتی از قبیل رادیو و تلویزیون، فرستنده‌های رادیویی و تلویزیونی مدارهای مکالمه‌ی تلفن و مدارهای مکالمه‌ی سیستم دروازکن، ترکیب‌های متنوعی از R-L-C در اتصال سری و موازی وجود دارد. در این فصل، ابتدا به بررسی اتصال سری و موازی R-L-C می‌پردازیم. سپس ترکیب‌های مختلط این مدارها را بررسی خواهیم کرد.

## ۶-۲- مدارهای R-L-C سری

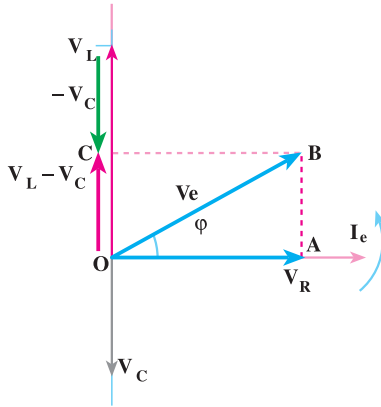
مدار الکتریکی R-L-C سری مطابق شکل ۶-۱ است. در این مدار سه عنصر R، L و C به‌طور متوالی اتصال دارند. اگر جریان سینوسی  $i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$  از این مدار سری عبور کند، در دو سر مقاومت اهمی ولتاژی به معادله‌ی  $v_R = I_m R (\sin \omega t + \theta_i)$  ایجاد می‌کند که این ولتاژ با جریان هم‌فاز است. در دو سر سلف، ولتاژی به معادله‌ی  $v_L = X_L I_m \sin(\omega t + \theta_i + 90^\circ)$  و در دو سر خازن، ولتاژی به معادله‌ی  $v_C = X_C I_m \sin(\omega t + \theta_i - 90^\circ)$  پدید می‌آید. به طوری که در شکل ۶-۱ مشاهده می‌شود، این ولتاژها هم‌فاز نیستند و راستای بردار آنها، بر روی هم منطبق نیست. به همین علت، ولتاژ کل مدار از جمع برداری رابطه‌ی ۶-۱ به‌دست می‌آید.

$$\vec{V}_e = \vec{V}_R + \vec{V}_C + \vec{V}_L \quad (۶-۱)$$



شکل ۶-۱- مدار R-L-C سری

دیاگرام برداری ولتاژها و جریان، مطابق شکل ۶-۲ خواهد شد. از آن‌جا که جریان در عناصر R، L و C یکسان است، دیاگرام برداری R-L-C سری، بر مبنای جریان در شکل ۶-۲ رسم شده است. در رسم این دیاگرام  $X_L > X_C$  فرض شده است و در مجموع مدار خاصیت R-L سری دارد. به طور کلی می‌توان نوشت:



شکل ۲-۶- دیاگرام برداری مدار R-L-C سری

۱- اگر  $X_L > X_C$  باشد، مدار در مجموع دارای خاصیت اهمی و سلفی است و ولتاژ بر جریان، تقدم فاز دارد.

۲- اگر  $X_L = X_C$  باشد، مدار کاملاً خاصیت اهمی دارد و ولتاژ و جریان هم‌فازند. (حالت تشدید)

۳- اگر  $X_L < X_C$  باشد، مدار خاصیت اهمی خازنی خواهد داشت و ولتاژ از جریان عقب‌تر خواهد بود.

۴- با تغییر عناصر R، L و C می‌توان در مدار اختلاف فاز بین  $90^\circ -$  تا  $90^\circ +$  الکتریکی ایجاد کرد، یعنی  $90^\circ < \phi < +90^\circ$

### ۱-۲-۶- محاسبه‌ی امپدانس مدار R-L-C سری: در مثلث OAB دیاگرام برداری

مدار R-L-C سری می‌توان نوشت:

$$\overline{OB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2$$

$$V_e^2 = V_R^2 + (V_L - V_C)^2 \quad (۲-۶)$$

اگر در رابطه‌ی ۲-۶ مقادیر  $V_C = I_e X_C$  و  $V_L = I_e X_L$ ،  $V_R = I_e R$ ،  $V_e = I_e Z$  را

جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$I_e^2 Z^2 = I_e^2 R^2 + (I_e X_L - I_e X_C)^2$$

$$I_e^2 Z^2 = I_e^2 R^2 + I_e^2 (X_L - X_C)^2$$

$$Z^2 = R^2 + (X_L - X_C)^2$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \quad (6-3)$$

۶-۲-۲- محاسبه‌ی ضرایب توان‌ها: در مثلث OAB شکل ۶-۲ می‌توان نوشت:

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{V_L - V_C}{V_R} = \frac{X_L I - X_C I}{RI} = \frac{X_L - X_C}{R}$$

بدین ترتیب،  $\varphi$  زاویه‌ی اختلاف فاز به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\tan \varphi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow \varphi = \tan^{-1} \frac{X_L - X_C}{R} \quad (6-4)$$

اگر  $X_L > X_C$  باشد،  $\varphi > 0$  و اگر  $X_L < X_C$  باشد،  $\varphi < 0$  خواهد شد.

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{V_R}{V_e} = \frac{I \times R}{I \times Z}$$

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} \quad (6-5)$$

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{|V_L - V_C|}{V} = \frac{|I \times X_L - I \times X_C|}{I \times Z}$$

$$\sin \varphi = \frac{|X_L - X_C|}{Z} \quad (6-6)$$

۶-۲-۳- مثلث توان‌ها: توان مصرفی در مقاومت اهمی، توان اکتیو و در سلف و خازن

از نوع راکتیو است.

$$P_e = I_e^2 R = V_e I_e \cos \varphi \quad (W) \quad (6-7)$$

$$P_{dL} = I_e^2 X_L \quad (\text{V.A.R}) \quad \text{سلفی}$$

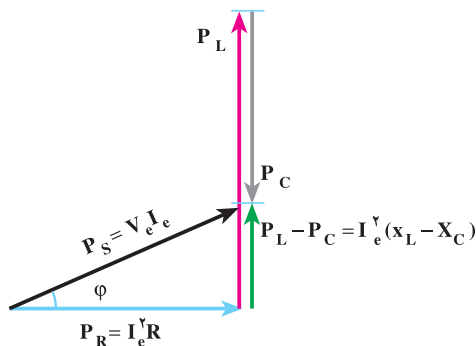
$$P_{dC} = -I_e^2 X_C \quad (\text{V.A.R}) \quad \text{خازنی}$$

توان راکتیو کل برابر است با:

$$P_d = P_{dL} + P_{dC} = I_e^2 X_L - I_e^2 X_C = I_e^2 (X_L - X_C)$$

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = I_e^2 (X_L - X_C) \quad (\text{V.A.R}) \quad (6-8)$$

با توجه به توان مفید مقاومت و توان‌های راکتیو سلف و خازن مثلث توان‌ها، مطابق شکل ۶-۳ رسم می‌شود.



شکل ۶-۳— مثلث توان‌های مدار R-L-C سری

اگر جریان  $i = I_m \sin \omega t$ ، یک مدار R-L-C سری را تغذیه کند، با توجه به روابط ولتاژهای دوسر مقاومت اهمی و سلفی و خازنی و رابطه‌ی زمانی توان‌ها می‌توان نوشت:

$$i = I_m \sin \omega t \quad \text{معادله‌ی زمانی جریان مدار}$$

$$V_m = I_m \times Z$$

ولتاژ دو سر مقاومت اهمی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$v_R = I_m R \sin \omega t$$

ولتاژ دو سر سلف برابر است با:

$$v_L = I_m X_L \sin(\omega t + \theta_i + \frac{\pi}{2})$$

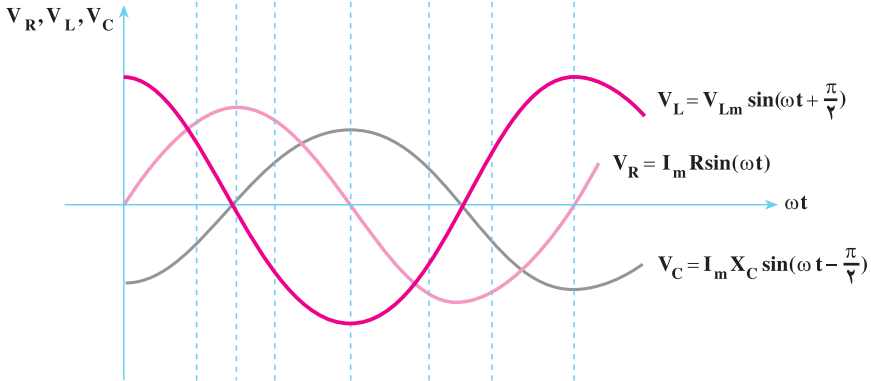
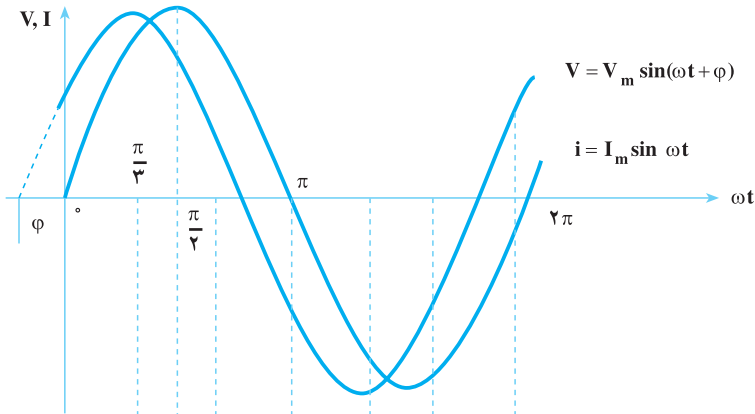
ولتاژ دو سر خازن برابر است با:

$$v_C = I_m X_C \sin(\omega t - \theta_i - \frac{\pi}{2})$$

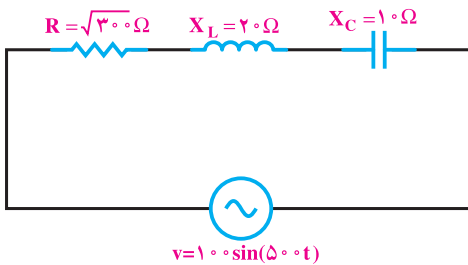
بدین ترتیب، ولتاژ کل مدار محاسبه می‌شود:

$$v = V_m \sin(\omega t + \theta_v)$$

منحنی تغییرات توابع بالا در شکل ۶-۴ مشاهده می‌شود.



شکل ۴-۶- منحنی تغییرات توابع زمانی جریان کل، ولتاژ کل و ولتاژ دو سر مقاومت اهمی، سلفی، خازنی مدار R-L-C سری (دامنه‌ها فرضی و با فرض  $R > X_L > X_C$  رسم شده‌اند)



مثال ۱: در مدار شکل مقابل مطلوب

است:

الف - امپدانس مدار،

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = \sqrt{(\sqrt{300})^2 + (20 - 10)^2} = 20 \Omega$$

ب - جریان منبع ولتاژ و معادله‌ی زمانی آن،

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z} = \frac{\sqrt{300}}{20} = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{R}{Z}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30^\circ \rightarrow \varphi = \theta_v - \theta_i \Rightarrow 30^\circ = 0^\circ - \theta_i \Rightarrow \theta_i = -30^\circ$$

$$I_m = \frac{V_m}{Z} = \frac{100}{20} = 5A, \quad I_e = \frac{I_m}{\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = 2.5\sqrt{2} = 3.53A$$

$i = 5\sin(50^\circ t - 30^\circ)$  می‌باشد؛ بنابراین، جریان پس فاز است.  $X_L > X_C$

پ - ولتاژ دوسر R، L و C و معادلات زمانی آن‌ها.

$$V_{R_m} = RI_m = \sqrt{300} \times 5 = 5\sqrt{300} = 50\sqrt{3}V$$

$$v_R = 50\sqrt{3} \sin(50^\circ t - 30^\circ) \quad \text{هم فاز جریان}$$

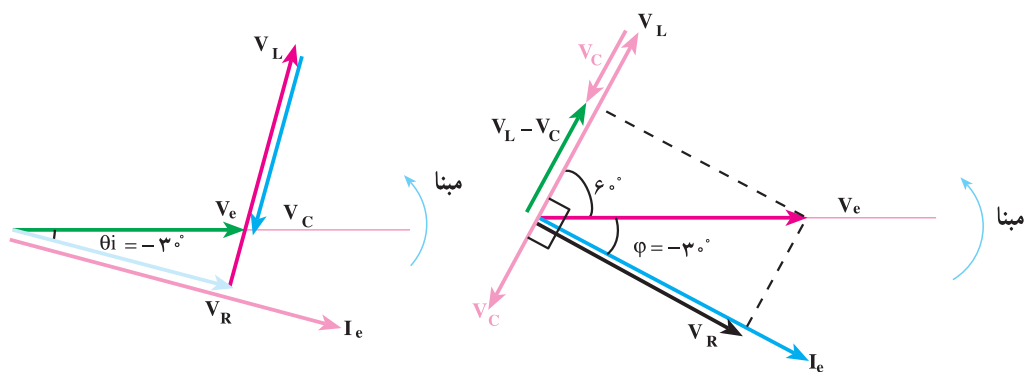
$$V_{L_m} = X_L \cdot I_m = 20 \times 5 = 100V$$

$$v_L = 100 \sin(50^\circ t + 60^\circ) \quad 90^\circ \text{ درجه جلوتر از جریان}$$

$$V_{C_m} = X_C \cdot I_m = 10 \times 5 = 50V$$

$$v_C = 50 \sin(50^\circ t - 120^\circ) \quad 90^\circ \text{ درجه عقب‌تر از جریان}$$

ت - رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان.



شکل ۵-۶- دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار

ث - توان مصرفی و مثلث توان‌ها.

$$P_e = V_e I_e \cdot \cos \varphi = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 125\sqrt{3} \text{ W}$$

چون  $X_L > X_C$  زاویه  $\varphi$  مثبت شده است،  $P_d$  نیز مثبت می شود.

$$P_d = V_e I_e \sin \varphi = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = +125 \text{ V.A.R}$$

$$P_s = V_e I_e \cos \varphi = \frac{100}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}} = 250 \text{ V.A}$$

توان‌ها را به روش زیر نیز می توان محاسبه کرد. بدیهی است در هر دو حالت جواب‌ها یکی است.

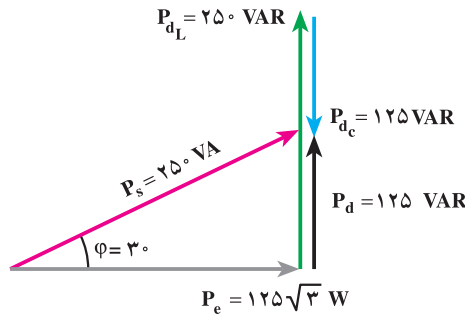
$$P_e = R \cdot I_e^2 = \sqrt{300} \times \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = 10 \cdot \sqrt{3} \times \frac{25}{2} = 125\sqrt{3} \text{ W}$$

$$P_{dL} = X_L \cdot I_e^2 = 2 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = +250 \text{ V.A.R}$$

$$P_{dC} = -X_C \cdot I_e^2 = -1 \cdot \left(\frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 = -125 \text{ V.A.R}$$

$$\vec{P}_d = \vec{P}_{dL} + \vec{P}_{dC} = 250 - 125 = +125 \text{ V.A.R}$$

$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = \sqrt{(125\sqrt{3})^2 + (125)^2} = 250 \text{ V.A}$$



شکل ۶-۶

### ۳-۶ مدارهای R-L-C موازی

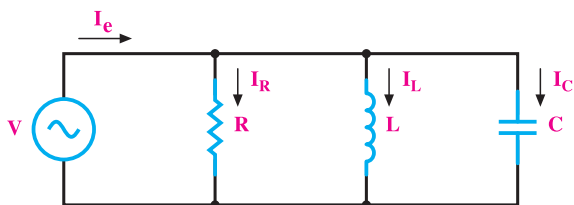
در مدارهای R-L-C موازی، ولتاژ عناصر با هم برابرند. برای جریان در هر عنصر، یک مسیر مستقل وجود دارد. مدار الکتریکی و مسیرهای مستقل جریان R-L-C موازی در شکل ۶-۷ نشان داده شده است. اگر یک ولتاژ سینوسی  $v = V_m \sin \omega t$  مدار R-L-C موازی را تغذیه کند، جریان  $i_C$  با ولتاژ هم فاز، جریان  $i_L$  از ولتاژ  $90^\circ$  جلوتر و جریان  $i_R$  از ولتاژ  $90^\circ$  عقب تر است، به ترتیب



معادله‌ی زمانی  $i_L = \frac{V_m}{X_L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{\varphi})$  و  $i_C = \frac{V_m}{X_C} \sin(\omega t + \frac{\pi}{\varphi})$ ،  $i_R = \frac{V_m}{R} \sin \omega t$  را

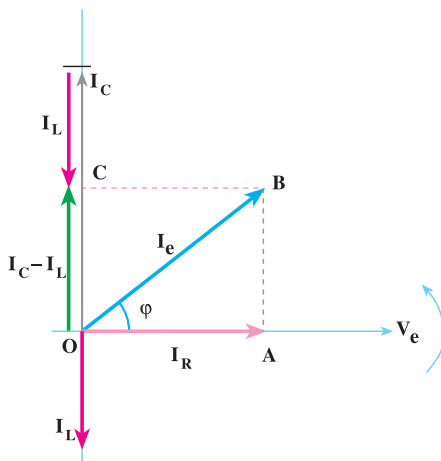
خواهند داشت. جریان کل مدار از جمع برداری جریان‌های  $\vec{I}_R$  و  $\vec{I}_C$  و  $\vec{I}_L$  به دست می‌آید.

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_L + \vec{I}_C \quad (6-9)$$



شکل ۶-۷ مدار R-L-C موازی

با توجه به مقادیر مؤثر جریان‌های مقاومت اهمی، سلف، خازن از طریق رسم دیاگرام برداری مطابق شکل ۶-۸، جریان کل مدار تعیین می‌شود. در رسم دیاگرام  $X_C < X_L$  فرض شده است.



شکل ۶-۸ دیاگرام برداری مدار R-L-C موازی

### ۱-۳-۶- محاسبه‌ی امپدانس مدار R-L-C موازی: از شکل ۶-۸، دیاگرام برداری

مدار R-L-C در مثلث قائم الزاویه‌ی OBA می‌توان نوشت:

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} \quad (6-10)$$

$$\vec{OB} = \vec{I}_e \text{ و } \vec{OA} = \vec{I}_R \text{ و } \vec{AB} = \vec{I}_C - \vec{I}_L \quad (6-11)$$

با جایگزینی روابط ۶-۱۱ در رابطه ی ۶-۱۰ این رابطه به دست می آید :

$$I_e^r = I_R^r + (I_C - I_L)^r \quad (6-12)$$

$$I_e = \frac{V_e}{Z} \quad \text{و} \quad I_R = \frac{V_e}{R} \quad \text{و} \quad I_C = \frac{V_e}{X_C} \quad \text{و} \quad I_L = \frac{V_e}{X_L}$$

با جایگزینی این مقادیر در رابطه ی ۶-۱۲ خواهیم داشت :

$$\frac{V_e^r}{Z^r} = \frac{V_e^r}{R^r} + \left( \frac{V_e}{X_C} - \frac{V_e}{X_L} \right)^r$$

$$\frac{1}{Z^r} = \frac{1}{R^r} + \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)^r \quad (6-13)$$

### ۶-۳-۲- محاسبه ی اختلاف فاز، ضریب توان ها و توان های مدار R-L-C موازی :

از دیاگرام برداری شکل ۶-۸ می توان نوشت :

$$\tan \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OA}} = \frac{|I_C - I_L|}{I_R} \quad (6-14)$$

$$\tan \varphi = \frac{\frac{V_e}{X_C} - \frac{V_e}{X_L}}{\frac{V_e}{R}} = \frac{\frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L}}{\frac{1}{R}} = \tan \varphi = R \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) \quad (6-15)$$

بنابراین، اختلاف فاز برابر است با :

$$\varphi = \tan^{-1} R \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right) \quad (6-16)$$

برای ضریب توان می توان نوشت :

$$\cos \varphi = \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \frac{I_R}{I} = \frac{R}{\frac{V_e}{Z}}$$

$$\cos \varphi = \frac{Z}{R} \quad (6-17)$$

برای تعیین  $\sin \varphi$  می توان نوشت :

$$\sin \varphi = \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} = \frac{I_C - I_L}{I} \quad (6-18)$$

$$\sin \varphi = \frac{\frac{V_e}{X_C} - \frac{V_e}{X_L}}{\frac{V_e}{Z}} = \frac{\cancel{V_e} \left( \frac{1}{X_C} - \frac{1}{X_L} \right)}{\cancel{V_e} \frac{1}{Z}}$$

$$\sin \varphi = Z \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) \quad (6-19)$$

توان مؤثر را می‌توان به وسیله‌ی روابط زیر محاسبه کرد:

$$P_e = I_R^{\checkmark} R = \left( \frac{V_e}{R} \right)^{\checkmark} \times R = \frac{V_e^{\checkmark}}{R} \quad (6-20)$$

اگر از رابطه‌ی ۶-۱۲،  $I_e = \frac{V}{Z}$  را جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$P_e = \frac{V_e^{\checkmark}}{R} = \frac{I_e^{\checkmark} \times Z^{\checkmark}}{R} = \underbrace{I_e^{\checkmark} \times Z}_{V_e} \times I_e \times \frac{Z}{R}$$

بنابراین، توان مؤثر را در شکل عام رابطه‌ی ۶-۲۱ خواهیم داشت:

$$P_e = V_e I_e \cos \varphi \quad (6-21)$$

برای محاسبه‌ی توان راکتیو، ابتدا توان‌های سلف و خازن را حساب می‌کنیم و توان راکتیو را از آن‌ها نتیجه می‌گیریم:

$$P_{dL} = I_L^{\checkmark} X_L = \frac{V_e^{\checkmark}}{X_L} \times X_L = \frac{V_e^{\checkmark}}{X_L}$$

$$P_{dC} = -I_C^{\checkmark} X_C = -\frac{V_e^{\checkmark}}{X_C} \times X_C = -\frac{V_e^{\checkmark}}{X_C}$$

توان راکتیو از جمع جبری توان‌های  $P_{dL}$  و  $P_{dC}$  به دست می‌آید.

$$P_d = P_{dL} + P_{dC}$$

$$P_d = \frac{V_e^{\checkmark}}{X_L} - \frac{V_e^{\checkmark}}{X_C} = V_e^{\checkmark} \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right) = V_e \cdot V_e \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)$$

به جای یکی از  $V_e$  ها مقدار  $V_e Z = I_e$  را منظور می‌کنیم.

$$P_d = I_e Z \times V_e \left( \frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} \right)$$

با توجه به رابطه‌ی ۶-۱۹ می‌توان نوشت:

$$P_d = \pm I_e V_e \sin \varphi \quad (۶-۲۲)$$

توان ظاهری از توان اکتیو و راکتیو به قرار رابطه‌ی ۶-۲۳ محاسبه می‌شود.

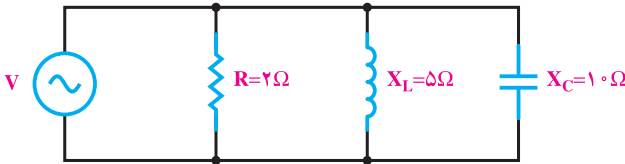
$$P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2} = V_e I_e \quad (۶-۲۳)$$

**مثال ۲:** در شکل ۶-۹ مطلوب است:

الف - جریان هر شاخه.

ب - جریان کل و معادله‌ی زمانی آن.

پ - رسم مثلث توان‌ها.



$$V = 5\sqrt{2} \sin 30^\circ t$$

شکل ۶-۹

راه‌حل:

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 5V \quad \text{الف -}$$

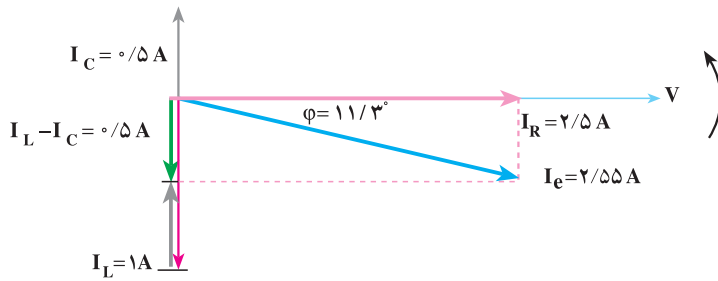
$$I_R = \frac{V_e}{R} = \frac{5}{2} = 2.5A \quad \text{هم‌فاز با ولتاژ } V$$

$$I_C = \frac{V_e}{X_C} = \frac{5}{10} = 0.5A \quad \text{نسبت به ولتاژ } 90^\circ \text{ پیش‌فاز}$$

$$I_L = \frac{V_e}{X_L} = \frac{5}{5} = 1A \quad \text{نسبت به ولتاژ } 90^\circ \text{ پس‌فاز}$$

ب - برای محاسبه‌ی جریان کل و معادله‌ی زمانی آن از دیاگرام برداری جریان‌ها در مبنای

ولتاژ استفاده می‌کنیم. بدین منظور، دیاگرام برداری را مطابق شکل ۶-۱۰ رسم می‌کنیم.



شکل ۱-۶

بر اساس دیاگرام برداری شکل ۱-۶، می‌توان محاسبه‌های زیر را انجام داد:

$$I_e^{\checkmark} = I_R^{\checkmark} + (I_L - I_C)^{\checkmark}$$

$$I_e^{\checkmark} = 2/5^{\checkmark} + (1 - 0.5)^{\checkmark}$$

$$I_e^{\checkmark} = 6/5 \Rightarrow I = 2/5.5 \text{ A}$$

$$\varphi = \tan^{-1} \left( \frac{I_L - I_C}{I_R} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{0.5}{2/5} \right) = 11/3^{\circ}$$

$$I_m = I_e \sqrt{2} = 2/5.5 \times \sqrt{2} = 3/6 \text{ A}$$

$$i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_i$$

$$11/3 = 0 - \theta_i$$

$$\theta_i = -11/3^{\circ}$$

$$i = 3/6 \sin(3^{\circ} \cdot t - 11/3^{\circ})$$

پ- برای رسم مثلث توان‌ها، ابتدا توان تک‌تک عناصر را محاسبه می‌کنیم.

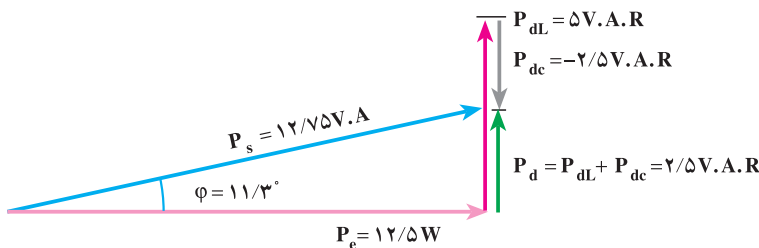
$$P_e = I_R^{\checkmark} \times R = (2/5)^{\checkmark} \times 2 = 12/5 \quad \text{W}$$

$$P_{dL} = I_L^{\checkmark} \times X_L = 1^{\checkmark} \times 5 = 5 \quad \text{V.A.R}$$

$$P_{dC} = -I_C^{\checkmark} \times X_C = -0.5^{\checkmark} \times 10 = -2/5 \quad \text{V.A.R}$$

$$P_d = P_{dL} + P_{dC} = 5 - 2/5 = 2/5 \quad \text{V.A.R}$$

$$P_S = \sqrt{12/5^2 + 2/5^2} = 12/7.5 \quad \text{V.A}$$



شکل ۱۱-۶

### ۶-۴ مدارهای R-L-C مختلط (سری، موازی)

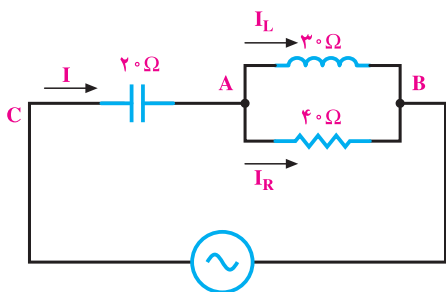
مدارهای R-L-C مختلط از چند مدار ساده R، R-L، R-C یا R-L-C با شاخه‌های موازی یا سری تشکیل می‌شوند. این مدارها پس از ساده کردن شبکه در نهایت به یک مدار R-L یا R-C ساده تبدیل می‌شوند. از آنجا که خواص این مدارها را قبلاً مطالعه کرده‌ایم، مدارهای R-L-C مختلط را با چند مثال دنبال می‌کنیم. در تحلیل مدارهای R-L-C مختلط، برای سهولت تحلیل، ولتاژ شاخه‌ی موازی را به عنوان ولتاژ مرجع (مبنای) در نظر می‌گیرند و سایر کمیت‌های الکتریکی مدار را بر اساس ولتاژ مبنای شاخه‌ی موازی محاسبه می‌کنند.

#### مثال ۳: در مدار الکتریکی شکل ۱۲-۶

$V_{AB} = 120^\circ$  ولت است.

مطلوب است:

الف - جریان هر شاخه و جریان کل.



شکل ۱۲-۶

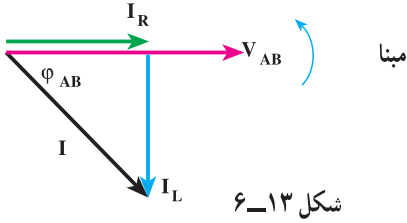
راه‌حل: با فرض اینکه  $V_{AB} = 120^\circ$  متناسب محاسبات را دنبال می‌کنیم.

$$I_R = \frac{V_{AB}}{R} = \frac{120^\circ}{40} = 3 [A]$$

$$I_L = \frac{V_{AB}}{X_L} = \frac{120^\circ}{30} = 4 [A]$$

برای محاسبه‌ی جریان کل، دیاگرام برداری جریان‌ها را در مبنای  $V_{AB}$  رسم می‌کنیم و  $I_R$

هم فاز  $V_{AB}$  می باشد و  $I_L$  به اندازه  $۹^\circ$  درجه از  $V_{AB}$  عقب تر است.  
از شکل ۶-۱۳ می توان نوشت:



این رابطه، همان رابطه  $۳-۲۷$  است.

$$\vec{I} = \vec{I}_R + \vec{I}_L$$

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_L^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5 [A]$$

$$\varphi_{AB} = \tan^{-1}\left(\frac{I_L}{I_R}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = 53^\circ$$

ب- ولتاژ منبع.

$V_{AC}$  ولتاژ دو سر خازن است که محاسبه می شود.

$$V_{AC} = X_C \cdot I = 20 \times 5 = 100 [V]$$

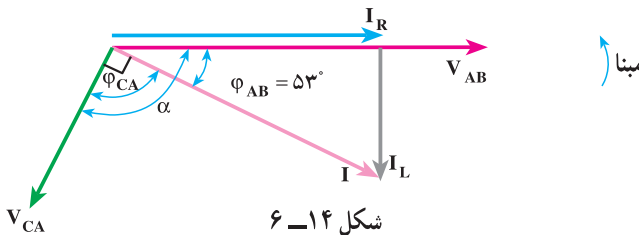
برای محاسبه ولتاژ منبع باید جمع برداری زیر را انجام داد.

$$\vec{V}_{CB} = \vec{V}_{CA} + \vec{V}_{AB}$$

با استفاده از رابطه  $۲-۵$  محاسبه می شود.

$$\vec{V}_e = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{CA} = \sqrt{(V_{AB})^2 + (V_{CA})^2 + 2(V_{AB})(V_{CA})\cos\alpha}$$

که  $\alpha$  زاویه بین  $V_{CA}$  با  $V_{AB}$  است و برای محاسبه آن باید  $V_{CA}$  را در شکل ۶-۱۳ رسم کرد.  
 $V_{CA}$  ولتاژ دو سر خازن خالص می باشد که از جریان  $I$  به اندازه  $۹^\circ$  درجه عقب تر است  
و با رسم آن در شکل ۶-۱۳ و شکل ۶-۱۴ به دست می آید.



$$\alpha = \varphi_{AB} + \varphi_{CA}$$

با توجه به شکل ۶-۱۴ داریم:

$$\alpha = 53^\circ + 9^\circ = 62^\circ$$

با جاگذاری مقادیر در رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$V = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{CA} = \sqrt{V_{AB}^2 + V_{CA}^2 + 2V_{AB} \cdot V_{CA} \cos \alpha}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_{AB} + \vec{V}_{CA} = \sqrt{12^2 + 10^2 + 2(12)(10)(-0.8)} = 72/1 [V]$$

پ- امیدانس کل مدار.

$$Z = \frac{V}{I} = \frac{72/1}{5} = 14/4 \Omega$$

ساده‌ترین راه برای محاسبه‌ی امیدانس کل مدار، رابطه‌ی  $Z = \frac{V}{I} = \frac{72/1}{5} = 14/4 \Omega$  است.

است.

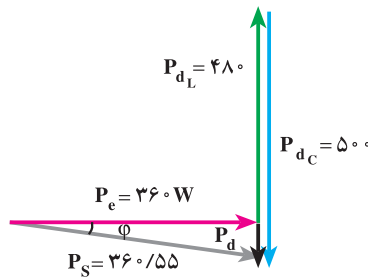
ت- مثلث توان‌ها.

$$P_e = R \cdot I_R^2 = 4 \cdot (3)^2 = 36 [W]$$

$$P_{dL} = X_L \cdot I_L^2 = 3 \cdot (4)^2 = +48 [V.A.R]$$

$$P_{dC} = -X_C \cdot I_C^2 = -2 \cdot (5)^2 = -50 [V.A.R]$$

$$P_d = P_{dL} + P_{dC} = 48 - 50 = -2 \text{ VAR}$$



شکل ۶-۱۵

با توجه به شکل ۶-۱۵ می‌توان نوشت:

$$P_S = \sqrt{P_e^2 + (P_{dL} + P_{dC})^2} = \sqrt{36^2 + (48 - 50)^2} = 36.055 \text{ V.A}$$



مثال ۴: در مدار الکتریکی شکل

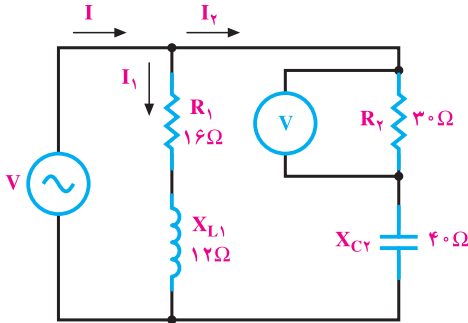
۶-۱۶ اگر مقدار قرائت شده از ولت متر در دو سر مقاومت ۳ اهمی ۶۰ ولت باشد، مطلوب است:

الف - جریان دو شاخه.

$$I_2 = \frac{V_R}{R} = \frac{60}{30} = 2A$$

$$Z_2 = \sqrt{R_2^2 + X_{C2}^2} = \sqrt{30^2 + 40^2} = 50\Omega$$

$$V = Z_2 \cdot I_2 = 50 \times 2 = 100V$$



شکل ۶-۱۶

$$Z_1 = \sqrt{R_1^2 + X_{L1}^2} = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20\Omega$$

$$I_1 = \frac{V}{Z_1} = \frac{100}{20} = 5A$$

ب - رسم دیاگرام برداری  $I_1$  و  $I_2$ .

ابتدا V را به عنوان مبنا اختیار می کنیم و با محاسبه ی اختلاف فاز  $I_1$  و  $I_2$  نسبت به V آن دو

را رسم می کنیم (شکل ۶-۱۷).

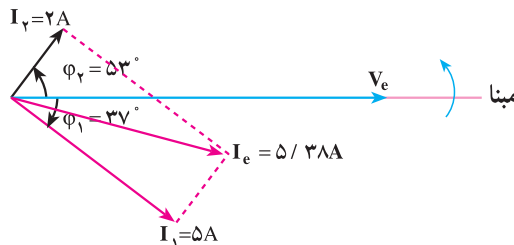
شاخه ی ۱ یک مدار R-L سری است و داریم:  $\cos \phi_1 = \frac{R_1}{Z_1} = \frac{16}{20} = 0.8$

$\phi_1 = \cos^{-1}(0.8) = 37^\circ$  «پس فاز»  $I_1$

شاخه ی ۲ یک مدار R-C سری است و داریم:  $\cos \phi_2 = \frac{R_2}{Z_2} = \frac{30}{50} = 0.6$

$\phi_2 = \cos^{-1}(0.6) = -53^\circ$  «پیش فاز»  $I_2$

$I_1$  به اندازه ی  $\phi_1 = 37^\circ$  از V عقب تر و  $I_2$  به اندازه ی  $\phi_2 = 53^\circ$  از V جلوتر است.



شکل ۶-۱۷