

نقطه‌ی $P(x,y)$ با جهت مثبت محور x ها، زاویه‌ی θ می‌سازد. بنابر تعریف نسبت‌های مثلثاتی داریم:

$$\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{1} = \overline{OL}$$

– محور $yo'y$ را محور سینوس‌ها می‌نامند. با توجه به تعریف دایره‌ی مثلثاتی و تغییرات $\sin \theta$ داریم:

$$-1 \leq \sin \theta \leq 1$$

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\overline{OH}}{1} = \overline{OH}$$

– محور $x'ox$ را محور کسینوس‌ها می‌نامند. با توجه به شعاع دایره‌ی مثلثاتی داریم:

$$-1 \leq \cos \theta \leq 1$$

– تغییرات $\cos \theta$ برابر با:

با توجه به شکل $1-4$ و نسبت تشابه در مثلث‌های OAC

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{AC}}{1} \text{ و } x \neq 0 \Rightarrow$$

و OPH داریم:

$$\tan \theta = \overline{AC}$$

خط مماس بر دایره‌ی مثلثاتی در نقطه‌ی شروع (A) را محور تانژانت‌ها می‌نامند. بنابر نامحدود بودن خط داریم:

$$\tan \theta \in \mathbb{R}$$

– با توجه به تعریف کتانژانت داریم:

$$\cot \theta = \frac{x}{y}, \quad y \neq 0$$

– از طرفی در مثلث قائم‌الزاویه‌ی OBD داریم: (شکل

$1-4$)

$$\cot \theta = \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BD}}{1} = \overline{BD}$$

– چون دو مثلث OPH و OBH به حالت سه زاویه، با

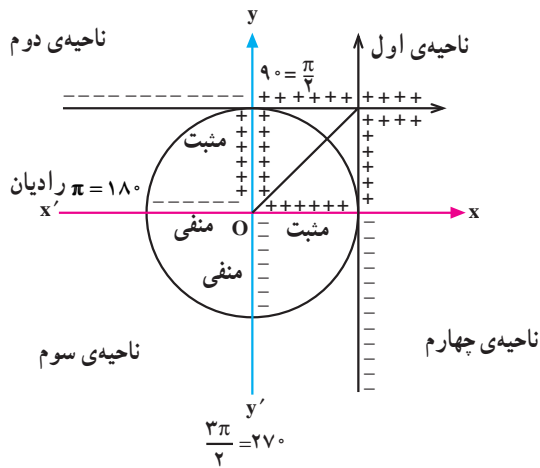
یکدیگر متشابه می‌باشند و داریم:

$$\cot \theta = \frac{x}{y} = \overline{BD} \Rightarrow \cot \theta = \overline{BD}$$

– بنابر نامحدود بودن، محور کتانژانت‌ها داریم:

$$\cot \theta \in \mathbb{R}$$

علامت نسبت‌های مثلثاتی در نواحی چهارگانه دایره مثلثاتی



شکل ۱-۵

فعالیت ۲-۱۶

۱) در شکل ۱-۵ دایره‌ی مثلثاتی به همراه محورهای مثلثاتی رسم شده است. سؤال‌ها و جدول‌های زیر را کامل کنید.

جدول ۲-۲۱

α	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
α	ناحیه اول	ناحیه دوم	ناحیه سوم	ناحیه چهارم
علامت $\sin \alpha$	+	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

تغییرات علامت $\sin \alpha$ در جدول ۲-۲۱

۱- تغییرات علامت $\sin \alpha$ را در جدول ۲-۲۱ کامل کنید.

جدول ۲-۲۲

α	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$
علامت $\cos \alpha$	+	<input type="checkbox"/>	-	<input type="checkbox"/>

۲- تغییرات علامت $\cos \alpha$ را در جدول ۲-۲۲ کامل کنید.

جدول ۲-۲۳

α	ناحیه اول	ناحیه دوم	ناحیه سوم	ناحیه چهارم
علامت $\tan \alpha$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	-

۳- با توجه به تغییرات علامت $\sin \alpha$ و $\cos \alpha$ در نواحی

چهارگانه علامت $\tan \alpha$ را در جدول ۲-۲۳ تکمیل کنید.

جدول ۲-۲۴

α	$0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$	$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$	$0 < \alpha < 2\pi$
علامت $\cot \alpha$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	+	-

۴- با تکمیل جدول ۲-۲۴ علامت $\cot \alpha$ را در نواحی

چهارگانه دایره مثلثاتی مشخص کنید.

– از رابطه‌ی روبه‌رو می‌توان نتیجه‌ی زیر را گرفت :

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

نتیجه: علامت‌های $\tan \alpha$ و $\cot \alpha$ همواره در ناحیه‌ی اول تا چهارم با هم برابر است.

مثال: رابطه‌ی مقابل همواره برقرار است، حدود α را

مشخص کنید.

$$\sin \alpha > 0 \text{ و } \sin \alpha \cdot \cos \alpha < 0$$

حل: چون حاصل ضرب سینوس و کسینوس منفی است

$$\text{و } \sin \alpha > 0 :$$

$$\cos \alpha < 0$$

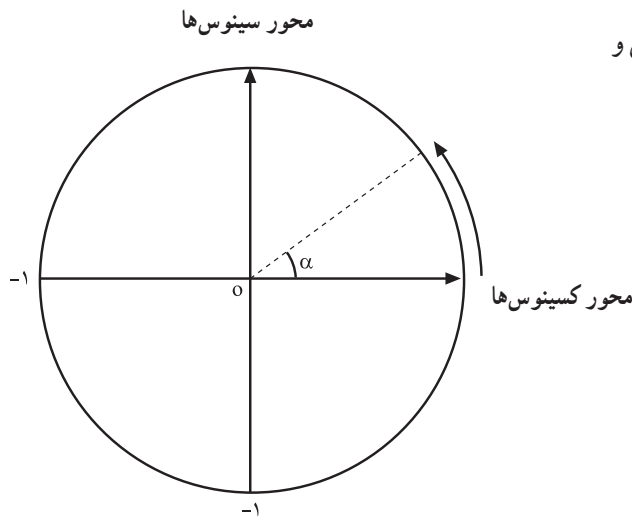
– پس α در ناحیه‌ی دوم قرار دارد، یعنی :

$$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

فعالیت ۱۷-۲

در شکل ۲-۱۰۶ دایره‌ی مثلثاتی با محورهای سینوس و

کسینوس رسم شده است.



شکل ۲-۱۰۶

۱- هرگاه $\alpha = 0$ باشد محور کسینوس‌ها چه عددی را

نشان می‌دهد؟

$$\cos 0^\circ = \square$$

۲- هرگاه α از 0° تا $\frac{\pi}{2}$ و از $\frac{\pi}{2}$ تا π تغییر کند مقدار

جبری کسینوس رفته رفته کم می‌شود در نقطه‌ی $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ،

$\alpha = \pi$ مقدار کسینوس چه اعدادی را نشان می‌دهد؟

$$\cos \frac{\pi}{2} = \square \quad , \quad \cos \pi = \square$$

۳- هرگاه α از π تا $\frac{3\pi}{2}$ و نیز از $\frac{3\pi}{2}$ تا 2π تغییر کند

آیا مقدار کسینوس روبه افزایش است؟

خیر

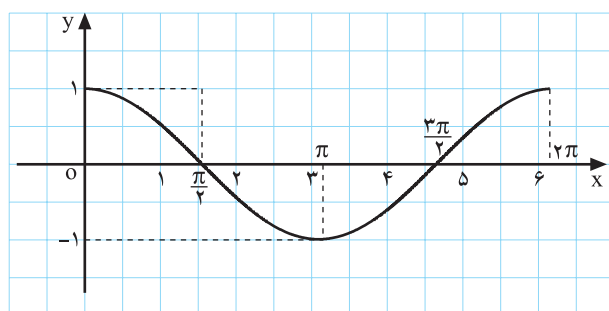
بلی

در نقاط $x = \frac{3\pi}{2}$ و $x = 2\pi$ مقدار کسینوس چیست؟

$$\cos \frac{3\pi}{2} = \square, \quad \cos 2\pi = \square$$

جدول ۲-۲۵

α	0	$\frac{\pi}{2} = 90^\circ$	$\pi = 180^\circ$	$\frac{3\pi}{2} = 270^\circ$	$2\pi = 360^\circ$
$\cos \alpha$ علامت			-۱		



نمودار ۲-۱۰۷

جدول ۲-۲۶

α	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin \alpha$	\square	\square	0	-۱	\square

$$\sin(0) = \square$$

$$\sin \frac{\pi}{2} = \square$$

$$\sin \frac{3\pi}{2} = \square$$

$$\sin 2\pi = 0$$

۴- جدول ۲-۲۵ را کامل کنید.

۵- با استفاده از جدول ۲-۲۵ و فعالیت ۲-۱۳ نمودار

$y = \cos x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم شده است.

۶- هرگاه $\alpha = 0$ باشد امتداد زاویه محور سینوس ها را

در مبدأ مختصات قطع می کند. در این حالت سینوس صفر درجه را به دست آورید (جدول ۲-۲۶ را تکمیل کنید).

۷- وقتی α از 0 تا $\frac{\pi}{2}$ تغییر می کند مقدار $\sin \alpha$ مثبت

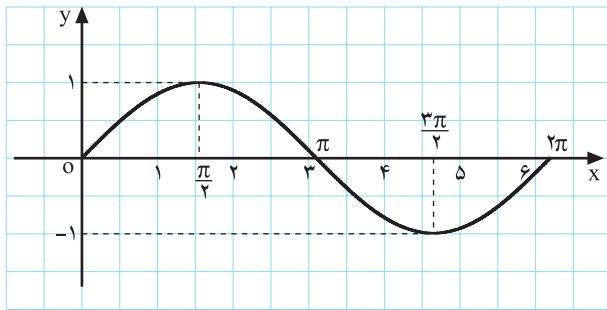
است. در $\alpha = \frac{\pi}{2}$ مقدار سینوس حداکثر است. این مقدار چیست؟

۸- در فواصل $\frac{\pi}{2}$ تا π و π تا $\frac{3\pi}{2}$ مقدار سینوس

کاهش می یابد به طوری که در $\alpha = \frac{3\pi}{2}$ مقدار حداقل سینوس

برابر -۱ می باشد. در ناحیه $(\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi)$ دوباره

مقدار سینوس افزایش می یابد به طوری که در $\alpha = 2\pi$ مقدار آن صفر می شود.



نمودار ۱۰۸-۲

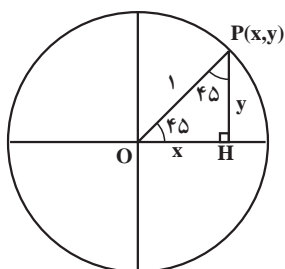
– با توجه به مطالب بالا نمودار تابع $y = \sin x$ در بازه $[0, 2\pi]$ رسم شده است.

– با توجه به روابط روبه‌رو جدول ۲۷-۲ را تکمیل کنید.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

جدول ۲۷-۲

α	0°	90°	180°	270°	360°
$\tan \alpha$	$\frac{0}{1} = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	نامعین	<input type="checkbox"/>
$\cot \alpha$	$\frac{1}{0} = \text{نامعین}$	0	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>



شکل ۱۰۹-۲

مثال: در دایره‌ی مثلثاتی شکل ۱۰۹-۲ مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه مفروض است. نسبت‌های مثلثاتی ۴۵ را به‌دست آورید.

حل: چون مثلث متساوی‌الساقین است. داریم:

$$OH = PH \Rightarrow x = y$$

$$OP^2 = OH^2 + HP^2 \Rightarrow 1 = x^2 + x^2 \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow$$

$$x^2 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ یا } x = +\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

– بنابراین رابطه‌ی فیثاغورث در مثلث قائم‌الزاویه $\triangle OHP$:

– چون x سمت راست مبدأ است پس جواب مثبت فقط

قابل قبول است.

$$\sin(45) = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} \Rightarrow \sin 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ضلع مقابل به زاویه‌ی ۴۵
سینوس زاویه‌ی ۴۵ = $\frac{\text{وتر}}{\text{پس}}$

$$\cos(45) = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} \Rightarrow \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan(45) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \tan 45 = 1$$

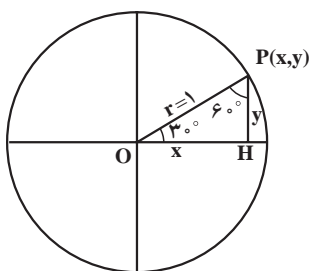
$$\cot(45) = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow \cot 45 = 1$$

کسینوس زاویه ی ۴۵ = $\frac{\text{ضلع مجاور به } 45}{\text{وتر}}$ ، پس :

تائزانت زاویه ی ۴۵ = $\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه ی } 45}{\text{ضلع مجاور به زاویه ی } 45}$ ، پس :

کاتائزانت ۴۵ = $\frac{\text{ضلع مجاور به زاویه ی } 45}{\text{ضلع مقابل به زاویه ی } 45}$ ، پس :

فعالیت ۱۸-۲



شکل ۱۱۰-۲

$$PH = y = \square$$

$$r^2 = OH^2 + PH^2 \Rightarrow 1^2 = x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}}, \quad x = +\sqrt{\frac{3}{4}} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(30) = \cos 60 = \frac{\square}{\bigcirc} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(30) = \frac{x}{r} = \frac{\square}{r} = \bigcirc = \sin 60$$

$$\tan(30) = \frac{\square}{x} = \frac{1}{\square} = \bigcirc = \cot 60$$

$$\cot(30) = \frac{x}{y} = \frac{\bigcirc}{\bigcirc} = \sqrt{3} = \tan \square$$

در شکل ۱۱۰-۲ مثلثی با دو زاویه ی ۳۰ و ۶۰ را مشاهده می‌نماییم، نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه را به‌دست آورید.

- می‌دانیم ضلع مقابل به زاویه ی ۳۰ نصف وتر است،

پس :

- بنابراین رابطه ی فیثاغورث داریم :

- x و y در ناحیه ی اول است، پس فقط مثبت مورد قبول

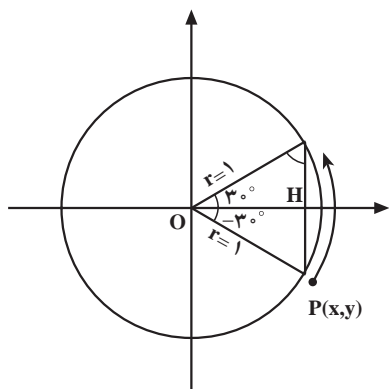
است.

- چون دو زاویه ی ۳۰ و ۶۰ متمم یکدیگرند پس :

- همچنین داریم :

- $\tan 30 = \cot 60$ (زیرا $30 + 60 = 90$) ، پس :

- $\cot 30$ برابر است با :



شکل ۲-۱۱۱

مثال ۱: نسبت مثلثاتی $\alpha = -30^\circ$ را محاسبه کنید.
 حل: در شکل ۲-۱۱۱ زاویه $\alpha = -30^\circ$ را در جهت
 گردش عقربه‌های ساعت را جدا می‌کنیم.

– در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه 30°
 نصف وتر است.

$$\sin(30^\circ) = PH = \frac{1}{2}$$

$$y = -PH = -\frac{1}{2}$$

– با توجه به این که نقطه‌ی P در ناحیه‌ی چهارم واقع
 است. داریم:

$$OP^2 = OH^2 + PH^2 \Rightarrow 1^2 = x^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{4}$$

– بنابر قضیه‌ی فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$x^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad x = +\frac{\sqrt{3}}{2}$$

– چون $\theta = 30^\circ$ در ناحیه‌ی چهارم واقع است فقط مثبت
 قابل قبول است.

$$\sin(-30^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} \Rightarrow \sin(-30^\circ) = \frac{-1}{2} = -\sin 30^\circ$$

– در نتیجه خواهیم داشت:

$$\cos(-30^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} \Rightarrow \cos(-30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 30^\circ$$

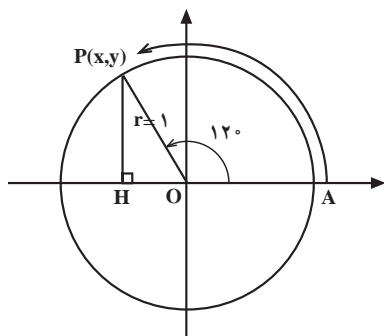
$$\tan(-30^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3} = -\tan 30^\circ$$

$$\cot(-30^\circ) = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} = -\cot 30^\circ$$

نتیجه‌ی کلی: هرگاه دو زاویه مانند α و $-\alpha$ قرینه باشند، کسینوس آن‌ها برابر است ولی سایر نسبت‌های
 مثلثاتی قرینه‌ی یکدیگرند.

مثال ۲: نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی $\alpha = 120^\circ$ را به دست آورید.

حل: در شکل ۲-۱۱۲ زاویه‌ی 120° را روی دایره مثلثاتی جدا می‌کنیم.



شکل ۲-۱۱۲

$$OH = \frac{1}{2} OP = \frac{1}{2} (1) \Rightarrow OH = \frac{1}{2}$$

$$x = -OH = -\frac{1}{2}$$

$$OP^2 = PH^2 + OH^2 \Rightarrow 1 = y^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow y^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ یا } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(120^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin(60^\circ)$$

$$\cos(120^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} = -\cos(60^\circ)$$

$$\tan(120^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} = -\tan(60^\circ)$$

$$\cot(120^\circ) = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\cot(60^\circ)$$

می‌دانیم ضلع مقابل به زاویه‌ی 30° نصف وتر است، پس:

چون نقطه‌ی P در سمت چپ محور xها واقع است داریم:

بنابر قضیه‌ی فیثاغورث داریم:

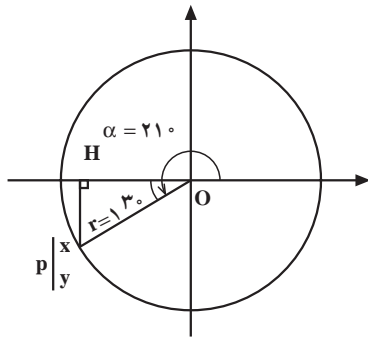
چون نقطه‌ی p در ناحیه‌ی دوم است، پس y آن مثبت است.

$\sin 120^\circ$ برابر با $\sin 60^\circ$ است زیرا:

$\cos 120^\circ$ برابر با $-\cos 60^\circ$ است زیرا:

$\tan 120^\circ$ برابر با $-\tan 60^\circ$ است زیرا:

$\cot 120^\circ$ برابر با $-\cot 60^\circ$ است زیرا:



شکل ۱۱۳-۲

مثال ۳: نسبت مثلثاتی $\alpha = 21^\circ$ را به دست آورید.
 حل: زاویه 21° را در شکل ۱۱۳-۲ روی دایره‌ی
 مثلثاتی جدا می‌کنیم.

– ضلع مقابل به زاویه 30° نصف وتر است، پس:

$$PH = \frac{1}{2}(OP) = \frac{1}{2}$$

– چون نقطه‌ی P زیر محور xها واقع است y منفی است،

$$y = -PH = -\frac{1}{2}$$

لذا داریم:

$$OP^2 = PH^2 + OH^2 \Rightarrow 1 = \frac{1}{4} + x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4}$$

– بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

– چون نقطه‌ی P در ناحیه‌ی سوم واقع است پس x منفی

قابل قبول است، پس:

$$\sin(21^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} = -\sin(30^\circ)$$

– $\sin 21^\circ$ برابر با $-\sin 30^\circ$ ، زیرا:

$$\cos(21^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\cos(30^\circ)$$

– $\cos 21^\circ$ برابر با $-\cos 30^\circ$ ، است زیرا:

$$\tan 21^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan 30^\circ$$

– $\tan 21^\circ$ برابر با $\tan(30^\circ)$ ، زیرا:

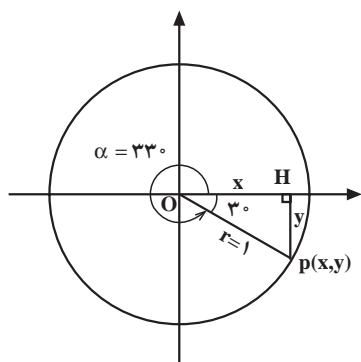
$$\cot 21^\circ = \frac{x}{y} = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3} = \cot 30^\circ$$

– $\cot(21^\circ)$ برابر با $\cot(30^\circ)$ ، زیرا:

مثال ۴: نسبت‌های مثلثاتی $\alpha = 33^\circ$ را بیابید.

حل: روی دایره‌ی شکل ۲-۱۱۴ زاویه‌ی $\alpha = 33^\circ$ را

جدا می‌کنیم.



شکل ۲-۱۱۴

$$PH = \frac{1}{2} OP = \frac{1}{2}$$

$$y = -PH = -\frac{1}{2}$$

$$1 = x^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ و } x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 33^\circ = \frac{y}{r} = \frac{-\frac{1}{2}}{1} = -\frac{1}{2} = -\sin 3^\circ$$

$$\cos 33^\circ = \frac{x}{r} = \frac{+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 3^\circ$$

$$\tan 33^\circ = \frac{y}{x} = \frac{-\frac{1}{2}}{+\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{3} = -\tan 3^\circ$$

$$\cot 33^\circ = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3} = -\cot 3^\circ$$

– ضلع مقابل به زاویه‌ی 3° نصف وتر است، پس:

– چون نقطه‌ی p در ناحیه‌ی چهارم است، پس:

– بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم:

– چون p در ناحیه‌ی چهارم است، منفی مورد قبول نیست،

پس:

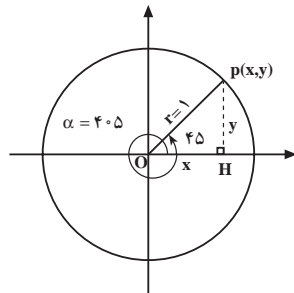
– $\sin 33^\circ$ برابر با $-\sin 3^\circ$ ، زیرا:

– $\cos(33^\circ)$ برابر با $(+\cos 3^\circ)$ ، زیرا:

– $\tan(33^\circ)$ برابر با $(-\tan(3^\circ))$ ، زیرا:

– $\cot(33^\circ)$ برابر با $(-\cot(3^\circ))$ ، زیرا:

$$\begin{aligned}\sin(330^\circ) &= \sin(2 \times 180^\circ - 30^\circ) = -\sin(30^\circ), \\ \cos(330^\circ) &= \cos(2 \times 180^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ \\ \tan 330^\circ &= \tan(2 \times 180^\circ - 30^\circ) = -\tan(30^\circ), \\ \cot(330^\circ) &= (2 \times 180^\circ - 30^\circ) = -\cot 30^\circ\end{aligned}$$



شکل ۱۱۵-۲

$$PH = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ و } OH = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$y = PH = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$OH = HP \Rightarrow x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(45^\circ) = \frac{y}{r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(45^\circ)$$

$$\cos(45^\circ) = \frac{x}{r} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(45^\circ)$$

$$\tan(45^\circ) = \frac{y}{x} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 = \tan(45^\circ)$$

$$\cot(45^\circ) = \frac{x}{y} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 1 = \cot(45^\circ)$$

تمرین

آیا می‌توانیم ادعا کنیم رابطه‌های مقابل درست است؟

خیر

بلی

مثال ۵: نسبت‌های مثلثاتی $\alpha = 45^\circ$ را بیابید.

حل: در شکل ۱۱۵-۲ زاویه‌ی $\alpha = 45^\circ$ را جدا

می‌کنیم.

- ضلع روبه‌رو به زاویه‌ی 45° برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ وتر است، پس:

- نقطه‌ی p در ناحیه‌ی اول قرار دارد پس:

- در مثلث $\triangle OHP$ با توجه به تساوی دو زاویه، داریم:

- $\sin(45^\circ)$ برابر با $\sin(45^\circ)$ ، زیرا:

- $\cos(45^\circ)$ برابر با $\cos(45^\circ)$ ، زیرا:

- $\tan(45^\circ)$ برابر با $\tan(45^\circ)$ ، زیرا:

- $\cot(45^\circ)$ برابر با $\cot(45^\circ)$ ، زیرا:

با توجه به مثال حل شده در این قسمت می‌توانیم نتایج

صفحه‌ی بعد را بیان کنیم:

نتیجه‌ی ۱: نسبت مثلثاتی $(-\alpha)$ بر حسب α : مثال:

$$\sin(-60^\circ) = -\sin(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos(-60^\circ) = \cos(60^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan(-60^\circ) = -\tan(60^\circ) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot(-60^\circ) = -\cot(60^\circ) = -\sqrt{3}$$

$$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$$

نتیجه‌ی ۲: نسبت مثلثاتی $\pi - \alpha$ بر حسب α : مثال:

$$\alpha = \pi - \frac{\pi}{4} \text{ یا } \alpha = \frac{3\pi}{4}$$

$$\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$$

$$\tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\cot \frac{\pi}{4} = -1$$

$$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

نتیجه‌ی ۳: نسبت مثلثاتی $2\pi - \alpha$ بر حسب α : مثال:

$$\alpha = \frac{5\pi}{3} = 2\pi - \frac{\pi}{3} \text{ یا } \alpha = 300^\circ = \frac{5\pi}{3}$$

$$\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin(2\pi - \alpha) = -\sin \alpha$$

$$\cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\cos(2\pi - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\tan \frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$$

$$\tan(2\pi - \alpha) = -\tan \alpha$$

$$\cot\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\cot \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\cot(2\pi - \alpha) = -\cot \alpha$$

نتیجه‌ی ۴: نسبت مثلثاتی $2\pi + \alpha$ بر حسب α : مثال: $\alpha = 39^\circ = 2 \times 18^\circ + 3^\circ = 2\pi + \frac{\pi}{6}$

$$\sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\sin(2\pi + \alpha) = \sin \alpha$$

$$\cos\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

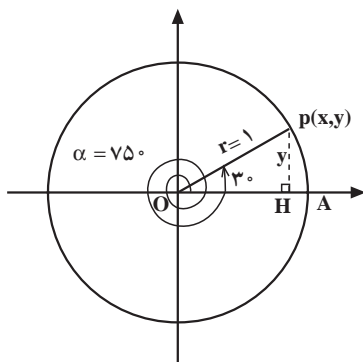
$$\cos(2\pi + \alpha) = \cos \alpha$$

$$\tan\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan(2\pi + \alpha) = \tan \alpha$$

$$\cot\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}$$

$$\cot(2\pi + \alpha) = \cot \alpha$$



شکل ۲-۱۱۶

مثال ۶: زاویه‌ی 75° را روی دایره‌ی مثلثاتی مشخص

کنید و نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌ی 75° را به دست آورید.

حل: زاویه‌ی 75° را روی شکل ۲-۱۱۶ جدا می‌کنیم.

– پس از طی دو دور در خلاف جهت عقربه‌های ساعت،

از نقطه‌ی شروع دایره، زاویه‌ی 3° درجه را طی می‌کنیم؛

به 75° می‌رسیم:

$$75^\circ \div 36^\circ = 2 \text{ دور و } 3^\circ$$

$$75^\circ = 2 \times 36^\circ + 3^\circ$$

$$\sin(75^\circ) = \sin(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \sin(3^\circ) = \frac{1}{2}$$

$$\text{– } \sin(75^\circ) \text{ برابر با } \sin(3^\circ) :$$

$$\cos(75^\circ) = \cos(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \cos(3^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{– } \cos(75^\circ) \text{ برابر با } \cos(3^\circ) :$$

$$\tan(75^\circ) = \tan(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \tan(3^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{– } \tan(75^\circ) \text{ برابر با } \tan(3^\circ) :$$

$$\cot(75^\circ) = \cot(2 \times 36^\circ + 3^\circ) = \cot(3^\circ) = \sqrt{3}$$

$$\text{– } \cot(75^\circ) \text{ برابر با } \cot(3^\circ) :$$

– با توجه به حل مثال می‌توانیم نتیجه‌ی زیر را عنوان

کنیم.

نتیجه: $\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$, $k \in \mathbb{Z}$ مثال: $\sin(93^\circ) = \sin(5 \times 18^\circ + 3^\circ) = \sin 3^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$ $\cos(93^\circ) = \cos(5 \times 18^\circ + 3^\circ) = \cos 3^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

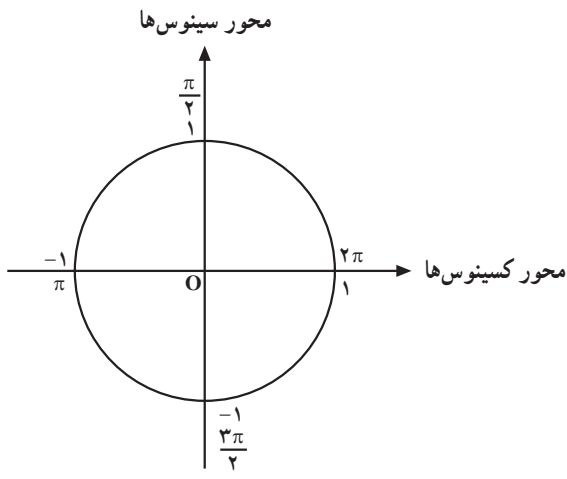
پاسخ:

تمرین: نسبت‌های سینوس و کسینوس ۹۴۵ را بیابید.

حل معادله‌های مثلثاتی

فعالیت ۱۹-۲

– دایره‌ی مثلثاتی در شکل ۲-۱۱۷ رسم شده است



شکل ۲-۱۱۷

۱- مقدار سینوس بین چه اعدادی قرار دارد؟

$-1 \leq \sin x \leq 1$

۲- تابع $\sin x$ به ازای چه زوایایی از x برابر یک می‌شود؟

$x = \square$

۳- تابع $\sin x$ به ازای چه مقدار از x برابر منفی یک می‌شود؟

می‌شود؟

$x = \square$