

بخش دوم

فصل پنجم

چند تابع ویژه

هدف کلی

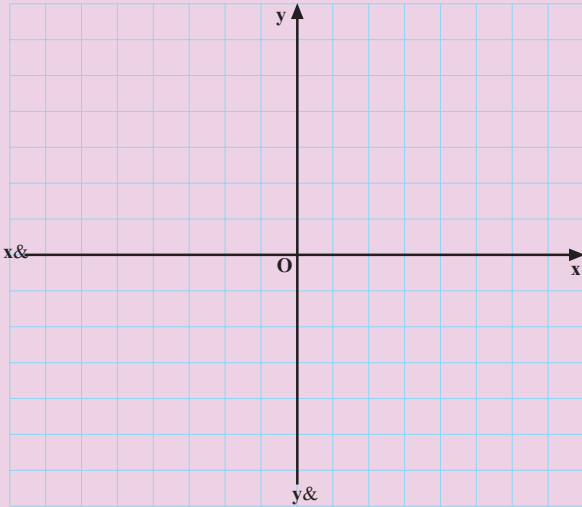
معرفی توابع ثابت، همانی، مثلثاتی و برخی از ویژگی‌های آنها

هدف‌های رفتاری: پس از پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود که بتواند:

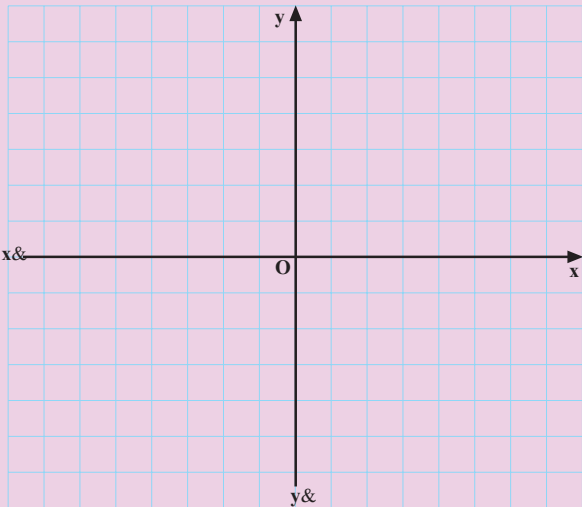
- ۱- نمودار تابع ثابت را رسم کند؛
- ۲- تابع همانی را رسم کند؛
- ۳- دامنه‌ی توابع مثلثاتی را تعیین کند؛
- ۴- تابع‌های مساوی را تعیین کند.

پیش‌آزمون (۵)

محل پاسخ به سوالات پیش‌آزمون (۵)



شکل ۲-۸۷



شکل ۲-۸۸

۱- نمودار تابع $y = 5x$ را رسم کنید (شکل ۲-۸۷).

۲- تابع $I = (-1, -1), (0, 0), (2, 2), (3, 3), (4, 4)$ مفروض است.

- نقاط I را روی شکل ۲-۸۸ مشخص و به هم وصل کنید.

- نتیجه‌ای را که به دست می‌آورید به طور مختصر بنویسید.

۲-۵- چند تابع ویژه

در این قسمت به بررسی چند تابع ویژه مانند تابع ثابت، تابع همانی و توابع مثلثاتی می‌پردازیم.

۲-۵-۱- تابع ثابت

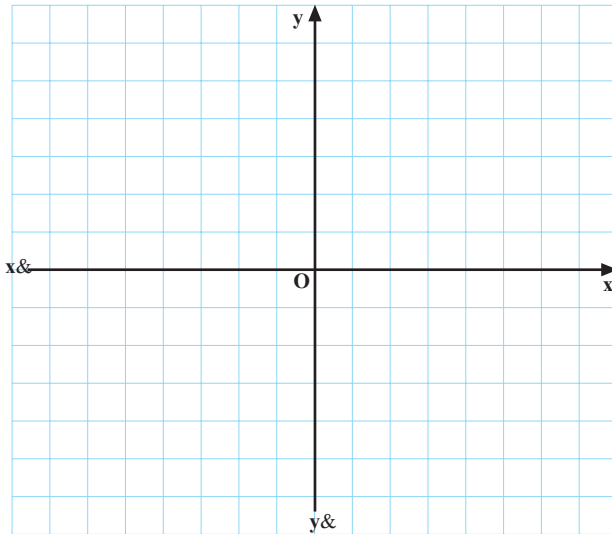
فعالیت ۲-۱۰

هرگاه $f(x) = 7$ باشد:

الف) جدول ۲-۱۹ را کامل کنید.

جدول ۲-۱۹

| | | | | | |
|--------|----|--------------------------|--------------------------|----|--------------------------|
| x | -۸ | -۳ | ۰ | ۳ | ۴ |
| $f(x)$ | -۷ | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | -۷ | <input type="checkbox"/> |



ب) تابع f را در دستگاه محورهای مختصات شکل ۲-۸۹

رسم کنید.

شکل ۲-۸۹

ج) دامنه و برد تابع را به دست آورید.

د) آیا می‌توان گفت f یک تابع ثابت است؟

مثال: نمودار تابع مقابل را رسم کنید.

$f(x) = 4$

$f(x) = 4$

جدول ۲-۲۰

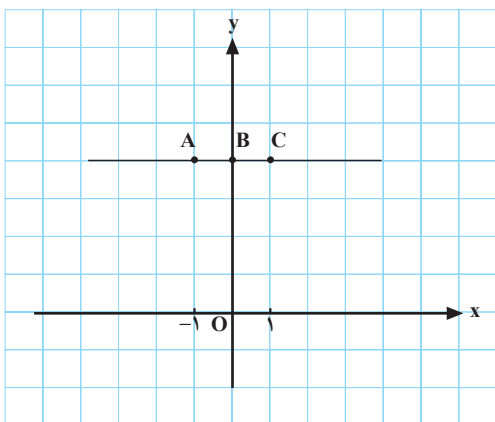
| | | | |
|-----|------------|-----------|-----------|
| x | -۱ | ۰ | ۱ |
| y | ۴ | ۴ | ۴ |
| | $A(-1, 4)$ | $B(0, 4)$ | $C(1, 4)$ |

حل: به ازای هر x داریم:

جدول ۲-۲۰ را تکمیل می‌کنیم.

با توجه به جدول تکمیل شده به ازای هر مقدار از x فقط

یک مقدار برای y به دست می‌آید.



نمودار ۲-۹۰

– در نمودار ۲-۹۰ خط $y = 1$ موازی محور x ها را مشاهده می کنید.

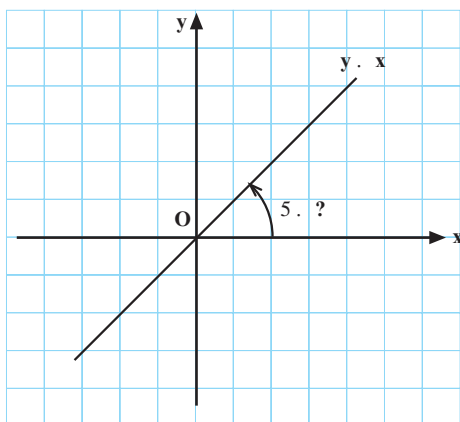
نمودار ۲-۹۱

$f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$. $c \in \mathbb{R}$
 $f(x) = c$

تعریف تابع ثابت: تابعی که در هر نقطه از دامنه اش مساوی مقدار ثابت c باشد تابع ثابت نام دارد.

– شکل ریاضی آن مطابق رابطه ی روبه رو است.

نکته: در تابع حقیقی $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ هرگاه $f(x) = c$ و $c \in \mathbb{R}$ آن گاه دامنه ی آن برابر مجموعه اعداد حقیقی و برد آن برابر c است و خط $y = c$ موازی محور x هاست. به بیان دیگر: $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \{c\}$



شکل ۲-۹۲

۲-۵-۲- تابع همانی

فعالیت ۲-۱۱

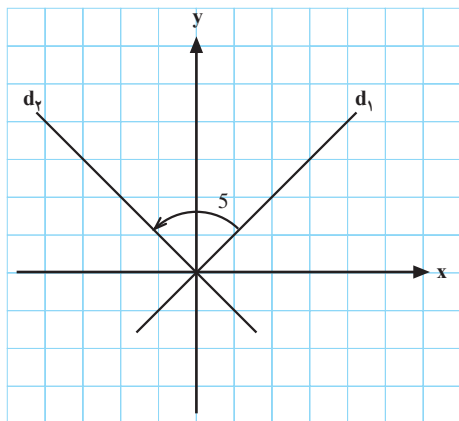
با توجه به تابع با ضابطه ی $f(x) = x$ و نمودار ۲-۹۲ (نیمساز ربع اول و سوم) جاهای خالی را تکمیل کنید.
 الف) تابع f را تابع می نامیم.

ب) شیب تابع همواره برابر یک است. به بیان دیگر

$\tan 5$ و 5 است. و

فعالیت ۲-۱۲

با توجه به شکل ۲-۹۳ هرگاه d_1 نیمساز ربع اول و سوم و d_2 نیمساز ربع دوم و چهارم باشد آن‌گاه زاویه ی 5 برابر است؟ چرا؟



شکل ۲-۹۳

نتیجه: هر تابع که هر عضو دامنه را به خودش متناظر کند یک تابع همانی است. ضابطه‌ی تابع، را با نماد x . $f(x)$ نمایش می‌دهیم (شکل ۲-۹۴).

شکل ۲-۹۴

نکته: دامنه و برد تابع همانی با هم برابر است و نمودار تابع همانی نیمساز ربع اول و سوم است.

مثال: مجموعه ی B، در مقابل، مفروض است.

B. $\{5, -2, 7\}$

تابع همانی از مجموعه ی B را بنویسید.

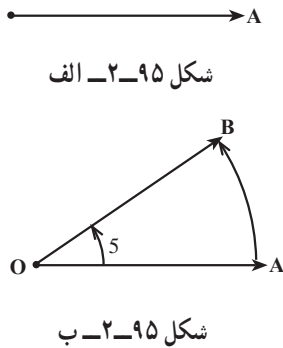
حل: فرض می‌کنیم I تابع همانی از B باشد، بنابراین خواهیم

داشت:

I. $\{(x, y) | x, y \in B, x = y\} = \{(7, 7), (-2, -2), (5, 5)\}$

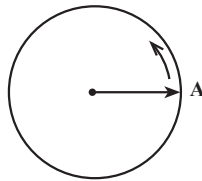
۳-۵-۲- مثلثات

زاویه: نیم خط $\dot{O}A$ شکل (۲-۹۵- الف) را حول نقطه O خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌دهیم تا در وضعیت $\dot{O}B$ قرار گیرد تا شکل ۲-۹۵- ب حاصل شود. زاویه‌ی حاصل (5 یا $\angle AOB$) با سه نوع واحد، یعنی درجه، گراد و رادیان قابل اندازه‌گیری است.



۱- درجه (D): هرگاه نیم خط $\dot{O}A$ یک دوران کامل نماید یک دایره تشکیل می‌شود. اندازه‌ی زاویه مرکزی مقابل به $\frac{1}{360}$ محیط دایره را یک درجه می‌نامند (شکل ۲-۹۶). اجزای درجه، دقیقه و ثانیه است و یک دقیقه برابر 60° ثانیه است. مثال ۱: نمایش مثلثاتی یک زاویه به اندازه‌ی سه درجه و چهار دقیقه و پنج ثانیه به شکل مقابل است.

۳ ۴' ۵''
درجه دقیقه ثانیه



شکل ۲-۹۶

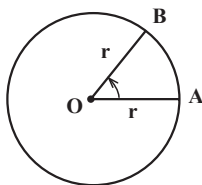
۲. گراد (G): اندازه‌ی زاویه مرکزی مقابل به $\frac{1}{400}$ محیط دایره را یک گراد می‌نامند. اجزای گراد عبارت است از: دسی گراد ($\frac{1}{100}$ گراد)، سانتی گراد ($\frac{1}{10000}$ گراد)، میلی گراد ($\frac{1}{1000000}$ گراد).

۵/۴۳۲

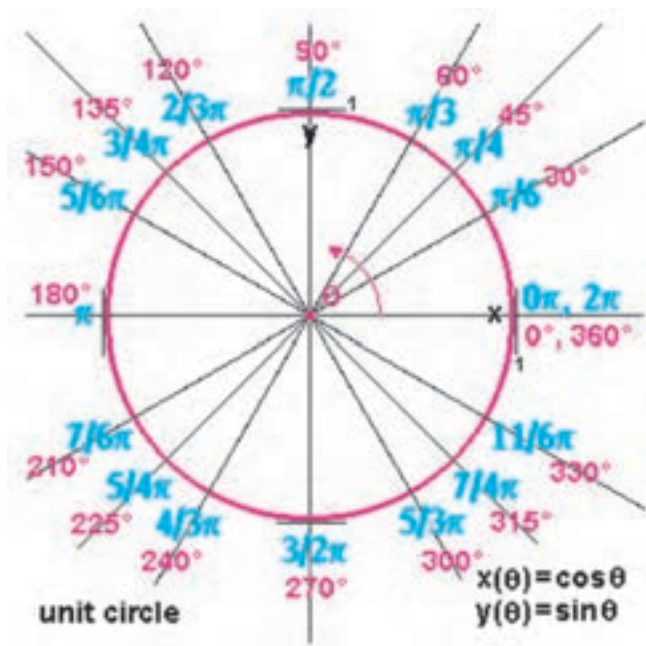
مثال:

پنج گراد و چهار دسی گراد و سه سانتی گراد و دو میلی گراد.

۳. رادیان (R): اندازه‌ی زاویه مرکزی مقابل به کمانی از دایره که طول آن برابر با شعاع دایره باشد یک رادیان نامیده می‌شود (شکل ۲-۹۷).



شکل ۲-۹۷



با توجه به این که محیط دایره $2\pi r$ می باشد، 36° را ۲۶ رادیان است.

شکل ۹۸-۲

$$\frac{D}{360} \cdot \frac{G}{400} \cdot \frac{R}{26}$$

رابطه‌ی بین درجه، گراد و رادیان: با توجه به تعاریف زاویه، گراد و رادیان می توانیم رابطه‌ی مقابل را بنویسیم.

– هرگاه آن را بر عدد ۲ ساده کنیم داریم:

$$\frac{D}{180} \cdot \frac{G}{200} \cdot \frac{R}{6}$$

مثال ۲: ۴۵ درجه چند رادیان است؟

$$\frac{D}{180} \cdot \frac{R}{6}, D = 45$$

حل: رابطه‌ی رادیان و درجه را می نویسیم.

$$\cdot \frac{45}{180} \cdot \frac{R}{6} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{R}{6} \cdot 4R \cdot 6$$

– ۴۵ بر حسب رادیان برابر است با:

$$R \cdot \frac{6}{4}$$

نکته: ۶ رادیان، 180° درجه و 200° گراد می باشد.

مثال ۳: $\frac{6}{5}$ رادیان چند درجه و چند گراد است.

راه حل: برای تبدیل به درجه به جای 6 رادیان، 180°

درجه را قرار می‌دهیم، پس:

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{180^\circ}{5} = 36 \cdot 180^\circ \quad \text{تبدیل به درجه}$$

– برای تبدیل به گراد به جای 6 رادیان، 200° گراد را

قرار می‌دهیم، پس:

$$\frac{6}{5} \cdot \frac{200^\circ}{5} = 40 \cdot 200^\circ \quad \text{تبدیل به گراد}$$

نکته: رادیان $\frac{6}{180^\circ}$ یک درجه و $\frac{180^\circ}{6}$ یک رادیان می‌باشد:

$$D \cdot 1 \cdot \frac{1}{180^\circ} \cdot \frac{R}{6} \cdot 180^\circ R \cdot 6 \quad R \cdot \frac{6}{180^\circ}$$

$$R \cdot 1 \cdot \frac{D}{180^\circ} \cdot \frac{1}{6} \cdot D \cdot 6 \quad 180^\circ \cdot D \cdot \frac{180^\circ}{6}$$

مثال ۴: 3° درجه چند رادیان و $\frac{26}{3}$ رادیان چند درجه

است؟

حل: 3° درجه برابر $\frac{6}{\pi}$ رادیان است، زیرا:

$$3^\circ \cdot \frac{6}{180^\circ} = \frac{6}{60} = \frac{1}{10}$$

– $\frac{26}{3}$ رادیان برابر 12° درجه است، زیرا:

$$\frac{26}{3} \cdot \frac{180^\circ}{6} = \frac{26}{3} \cdot 30^\circ = 260^\circ$$

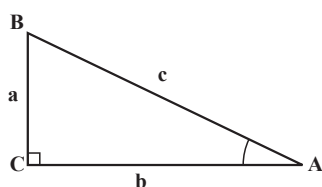
– در روش دوم به جای 6 رادیان، 180° درجه را قرار

می‌دهیم پس $\frac{26}{3}$ برابر با:

$$12^\circ \cdot \frac{2(180^\circ)}{3} = 12^\circ \cdot 120^\circ = 1440^\circ$$

نسبت‌های مثلثاتی

در مثلث قائم‌الزاویه شکل ۲-۹۹ بنابر قرارداد داریم:



شکل ۲-۹۹

$$\sin A = \frac{a}{c} \quad \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{وتر}} \quad \text{سینوس زاویه } A$$

$$\cos A = \frac{b}{c} \quad \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{وتر}} \quad \text{کسینوس زاویه } A$$

$$\tan A = \frac{a}{b} \quad \frac{\text{ضلع مقابل به زاویه } A}{\text{ضلع مجاور به زاویه } A} \quad \text{تانژانت زاویه } A$$

$$\cot A = \frac{b}{a} \quad \frac{\text{ضلع مجاور به زاویه } A}{\text{ضلع مقابل به زاویه } A} \quad \text{کتانژانت زاویه } A$$

تمرین

$$\sin B = \frac{\square}{\square}, \quad \cos B = \frac{\square}{\square}$$

۱. با توجه به مثلث قائم الزاویه ABC در شکل ۹۹-۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویه B را به دست آورید.

$$\tan B = \frac{\square}{\square}, \quad \cot B = \frac{\square}{\square}$$

۲. با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه، ABC در شکل ۹۹-۲ نسبت مثلثاتی برابر را به هم وصل کنید.

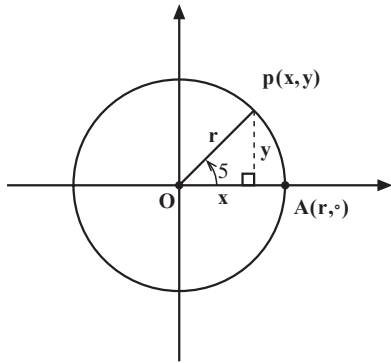
- | | |
|------------------------|------------------------|
| a _۱) sin A | b _۱) sin B |
| a _۲) cos A | b _۲) cos B |
| a _۳) tan A | b _۳) tan B |
| a _۴) cot A | b _۴) cot B |

نتیجه: اگر دو زاویه متمم باشند (A. B. ۹۰) سینوس یکی برابر کسینوس دیگری و تانژانت یکی برابر با کتانژانت دیگری است (و برعکس)

مثلاً:

$$\begin{aligned} & ۳۰ \cdot ۶۰ \cdot ۹۰ \cdot \sin ۳۰ \cdot \cos ۶۰ \\ & \quad \cdot \cos ۳۰ \cdot \sin ۶۰ \\ & \quad \cdot \tan ۳۰ \cdot \cot ۶۰ \\ & \quad \cdot \cot ۳۰ \cdot \tan ۶۰ \end{aligned}$$

$$۴۵ \cdot ۴۵ \cdot ۹۰ \cdot \sin ۴۵ \cdot \cos ۴۵, \tan ۴۵ \cdot \cot ۴۵$$



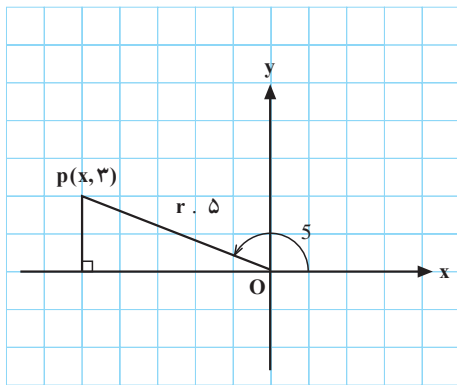
شکل ۱۰۰-۲

از نقطه‌ی A روی دایره‌ی شکل $100-2$ در جهت مثبت (خلاف جهت عقربه‌های ساعت) شروع به حرکت می‌نماییم و به نقطه‌ای مانند $P(x, y)$ می‌رسیم. نسبت مثلثاتی (AOP) را بیابید.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\sin 5 = \frac{\square}{r}, \quad \cos 5 = \frac{\square}{r}$$

$$\tan 5 = \frac{\square}{\square}, \quad \cot 5 = \frac{x}{y}$$



شکل ۱۰۱-۲

مثال ۱: در شکل $101-2$ ، $\sin 5$ ، $\cos 5$ و $\tan 5$ را

بیابید.

حل:

— برای پیدا کردن نسبت‌های مثلثاتی ابتدا باید x_p را بیابیم.

— بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad 5^2 = x^2 + 3^2 \quad x^2 = 16$$

— چون نقطه‌ی p در ناحیه‌ی دوم است، x_p منفی است.

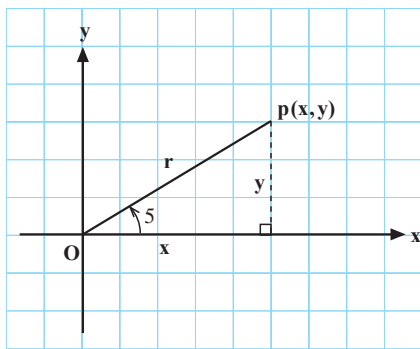
$$x = -4$$

— بنابراین داریم:

$$\sin 5 = \frac{y}{r} = \frac{3}{5}, \quad \cos 5 = \frac{x}{r} = \frac{-4}{5}, \quad \tan 5 = \frac{y}{x} = \frac{3}{-4}$$

فعالیت ۱۴-۲

با توجه به تعاریف نسبت‌های مثلثاتی و شکل ۲-۱۰۲ جاهای خالی را پر کنید.



شکل ۲-۱۰۲

$$r^2 = x^2 + y^2$$

– بنابر رابطه‌ی فیثاغورث داریم :

$$۱) \sin 5 = \frac{\square}{r}$$

سینوس ۵. $\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی 5}}{\text{وتر}}$

$$۲) \cos 5 = \frac{\square}{r}$$

کسینوس ۵. $\frac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی 5}}{\text{وتر}}$

$$۳) \tan 5 = \frac{\square}{\square}$$

تانژانت ۵. $\frac{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی 5}}{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی 5}}$

$$۴) \cot 5 = \frac{\square}{\square}$$

کتانژانت ۵. $\frac{\text{ضلع مجاور به زاویه‌ی 5}}{\text{ضلع مقابل به زاویه‌ی 5}}$

$$۵) \sin^2 5 + \cos^2 5 = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{\square}{\square} \quad \bigcirc$$

– با توجه به شماره‌های ۱ و ۲ و طرفین و وسطین و جایگزینی x و y داریم :

$$۶) \tan 5 = \frac{y}{x} = \frac{r \sin 5}{r \cos 5} = \frac{\sin 5}{\cos 5}$$

– با توجه به ۱ و ۲ و تعریف کتانژانت داریم :

$$۷) \cot 5 = \frac{x}{y} = \frac{\square}{\square} = \frac{\bigcirc}{\bigcirc}$$

نکته: عبارات مقابل به ازای تمامی زوایای θ درست است بنابراین اتحاد مثلثاتی نامیده می شوند.

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}, \quad \cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

$$\sin \theta + \cos \theta = 1$$

تمرین

آیا عبارت روبه‌رو یک اتحاد مثلثاتی است؟ چرا؟

فعالیت ۱۵-۲

الف) با توجه به اتحادهای مثلثاتی جاهای خالی را پر

کنید.

$$۱) \sin^2 \theta = 1 - \square \quad ۲) \cos^2 \theta = 1 - \square$$

ب) با توجه به حاصل ضرب تانژانت در کتانژانت جای

خالی را پر کنید.

$$۳) \tan \theta \times \cot \theta = 1 \quad \begin{array}{l} \nearrow \tan \theta = \frac{1}{\square} \\ \searrow \cot \theta = \frac{1}{\square} \end{array}$$

ج) با فرض $\sin \theta \neq 0$ دو طرف تساوی را بر $\sin^2 \theta$ تقسیم

کنیم: جای خالی را پر کنید.

$$۴) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \Rightarrow$$

$$1 + \square = \frac{1}{\sin^2 \theta}$$

بنابراین:

$$۵) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$\frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{\cos^2 \theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta} \Rightarrow$$

$$1 + \square = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

– هرگاه با فرض $\cos \theta \neq 0$ دو طرف تساوی مقابل را بر

$\cos^2 \theta$ تقسیم کنیم، جای خالی را پر کنید.

نتیجه: بنابر فعالیت (۱۵-۲ الف) داریم:

$$۱) \sin^2 5 \cdot 1 - \cos^2 5, \cos^2 5 \cdot 1 - \sin^2 5$$

بنابر فعالیت (۱۵-۲ ب) داریم:

$$۲) \tan 5 \cdot \cot 5 \cdot ۱ \text{ یا } \tan 5 \cdot \frac{1}{\cot 5} \text{ یا } \cot 5 \cdot \frac{1}{\tan 5}$$

بنابر فعالیت (۱۵-۲ ج) داریم:

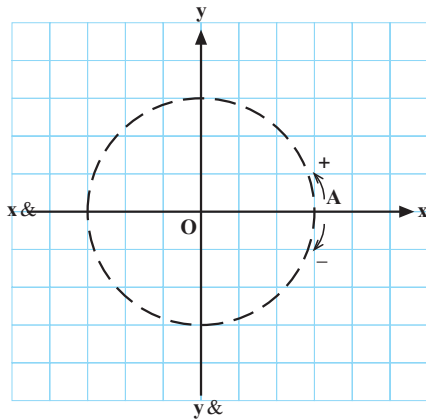
$$۳) ۱ \cdot \tan^2 5 \cdot \frac{1}{\cos^2 5} \text{ یا } \cos^2 5 \cdot \frac{1}{۱ \cdot \tan^2 5}$$

بنابر فعالیت (۱۵-۲ د) داریم:

$$۴) ۱ \cdot \cot^2 5 \cdot \frac{1}{\sin^2 5} \text{ یا } \sin^2 5 \cdot \frac{1}{۱ \cdot \cot^2 5}$$

دایره‌ی مثلثاتی

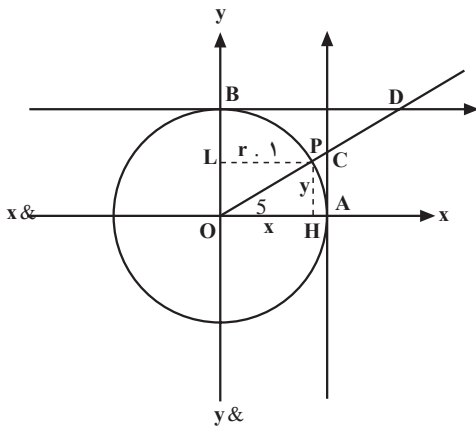
در دستگاه مختصات شکل ۲-۱۰۳ به کمک پرگار دایره‌ای به شعاع واحد (OA) رسم کنید. جهت دایره را خلاف جهت عقربه‌های ساعت در نظر بگیرید. به این دایره، دایره‌ی مثلثاتی می‌گویند.



شکل ۲-۱۰۳

محورهای مثلثاتی

در شکل ۲-۱۰۴ دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع واحد و جهت مخالف عقربه‌های ساعت (دایره‌ی مثلثاتی) را مشاهده می‌کنید.



شکل ۲-۱۰۴