فصل دوم

بردار

هدف‌های رفتاری

در پایان این فصل از هنرجو انتظار می‌رود :

۱ــ بردار را تعریف کند و هم‌سنگ یک بردار را به دست آورد.

۲ــ جمع و تفاضل بردارها را به روش هندسی معین کند.

۳ــ برایند چندین بردار را به روش تحلیلی محاسبه کند.

۴ــ جمع، تفاضل و ضرب داخلی دوبردار را تعریف کرده و اندازه‌ی ضرب داخلی آن‌ها را معین کند.

۵ــ امواج متناوب سینوسی را به‌صورت برداری نمایش دهد.

۶ــ مفهوم توان الکتریکی را شرح دهد.

۷ــ توان ظاهری، حقیقی، غیر مؤثر و ضریب توان را تعریف کند.

۸ــ توان ظاهری، حقیقی، غیر حقیقی و ضریب توان را از معادلات زمانی ولتاژ و جریان به دست آورد.

۹ ــ مثلث توان‌ها را رسم کند و از روی آن ضریب توان کل، توان اکتیو و راکتیو کل شبکه را تعیین کند.

۱ــ۲ــ مقدمه

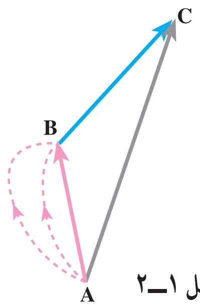
رفتار مقاومت‌های اهمی، سلفی و خازنی خالص را در جریان متناوب در دروس گذشته مطالعه کردیم و آموختیم که جریان و ولتاژ در مقاومت اهمی هم‌فاز هستند. در سلف، خالص جریان از ولتاژ دوسر سلف ۹۰ درجه عقب‌تر و در خازن خالص جریان از ولتاژ دوسر خازن ۹۰ درجه جلوتر است اما سلف و خازن خالص تصوری بیش نیستند و در مدارهای حقیقی نمی‌توان یک سلف یا خازن خالص پیدا

کرد. می‌دانیم یک سیم‌پیچ یا مقاومت سلفی از مقدار معینی هادی الکتریکی تشکیل می‌شود. هر هادی الکتریکی به طول l با توجه به رابطه‌ی $R = \rho \frac{l}{A}$ دارای مقاومت اهمی است. هم‌چنین یک خازن شارژ شده، پس از مدتی تخلیه می‌شود ؛ بنابراین، خازن باید یک مقاومت اهمی داشته باشد تا از طریق آن بارهای الکتریکی تخلیه شوند. این مقاومت را **مقاومت نشتی خازن** می‌گویند. در تحلیل مدارهای الکتریکی برای کسب نتایج مطلوب، سلف و خازن حقیقی را به شکل‌های L ــ R یا C ــ R مدل می‌کنند. این مدل ممکن است به صورت L ــ R یا C ــ R سری یا موازی در نظر گرفته شود. از طرف دیگر، ممکن است مدارهای الکتریکی از ترکیب عناصر سلفی، خازنی و اهمی تشکیل شوند. بنابراین، مطالعه‌ی مدارهای L , C و R در اتصال‌های سری و موازی ضرورت دارد. از آن‌جا که رفتار عناصر L , R و C در جریان متناوب یکسان نیست، در یک مدار شامل L , R و C، برای تعیین ولتاژ قسمتی از مدار یا تعیین جریان آن، نمی‌توان از روش‌های جمع جبری ولتاژها یا جریان‌ها استفاده کرد. بدین جهت، برای تحلیل مدارهای C ــ L ــ R از بردارها و عملیات برداری استفاده می‌شود. از این رو قبل از مطالعه‌ی مدارهای C ــ L ــ R لازم است کمیت‌های برداری و عملیات بر روی آن‌ها را به دقت مطالعه کنیم.

۲ــ۲ــ تعریف بردار و کمیت برداری

مفهوم بعضی از کمیت‌های فیزیکی با بیان مقدار کمیت کاملاً روشن است ؛ مثلاً وقتی می‌گوییم ۲۰ کیلو سیب یا به مدت ۲۰ دقیقه یا ۲۰ متر پارچه، همه مفهوم سخن ما را به‌طور روشن درمی‌یابند. چنین کمیت‌هایی را که با بیان اندازه کاملاً معرفی می‌شوند، **کمیت‌های عددی** یا **اسکالر** می‌گویند.

اگر رهگذری که با محل زندگی شما آشنایی کافی ندارد، از شما نشانه‌ی محلی را سؤال کند، او را چنین راهنمایی می‌کنید : «۲۰۰ متر مستقیم بروید، سپس به سمت چپ بپیچید و ۵۰۰ متر جلو بروید». اگر رهگذر بدون توجه به جهت‌های گفته شده فقط ۷۰۰ متر حرکت کند، آیا به محل مورد نظر خواهد رسید؟ جواب منفی است ؛ زیرا فقط طی اندازه‌ی کمیت برای رسیدن به محل نشانی کافی نیست. باید جهت‌های گفته شده نیز رعایت شود. به چنین کمیت‌هایی که با بیان اندازه‌ی کمیت کامل نیستند و باید جهت آن‌ها مشخص شود، **کمیت برداری** می‌گویند. برای این که با کمیت‌های برداری و مشخصه‌های یک بردار بیش‌تر آشنا شویم، فرض می‌کنیم یک ذره مطابق شکل ۱ــ۲، موضع خود را از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B تغییر دهد. روشن است این جا به جایی، در مسیرهای بی‌شماری امکان‌پذیر است.



شکل ۱ــ۲

از نظر ما جا به جایی مؤثر، طول پاره خط $\overline{AB}$ است. چون نقطه‌ی شروع جا به جایی A و نقطه‌ی انتهایی، B است و حرکت از نقطه‌ی A به سوی نقطه‌ی B صورت گرفته است. جا به‌جایی ذره در مسیر AB دارای ابتدا، انتها و مقدار ($\overline{AB}$) است. جهت جابه‌جایی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B با پیکان نشان داده شده است. ذره‌ی متحرک در ادامه‌ی جابه‌جایی خود، از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C تغییر مکان می‌دهد. روشن است که جابه‌جایی مؤثر طول پاره خط $\overline{BC}$ است. در طول جا به جایی از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B و از نقطه‌ی B به نقطه‌ی C ذره جا به جایی مؤثر $\overline{AC}$ را خواهد داشت؛ بنابراین، می‌توان نوشت:

(جا به جایی مسیر AC) = (جا به جایی مسیر BC) + (جا به جایی مسیر AB)

از طرف دیگر، در مثلث ABC مجموع دو ضلع AB و BC از اندازه‌ی ضلع سوم ــ یعنی AC ــ بزرگ‌تر است.

$$\overline{AB}+\overline{BC}>\overline{AC}$$

مقایسه در جمع جبری و جا به جایی نشان می‌دهد که جمع جا به جایی با جمع جبری تفاوت دارد.

به طور کلی، یک کمیت برداری را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد:

کمیت‌های برداری کمیت‌هایی هستند که رفتار آن‌ها مانند رفتار جا به جایی است؛ دارای بزرگی[1]، جهت، ابتدا، انتها و راستا هستند و با قواعد معینی با هم جمع می‌شوند.

جا به جایی مسیر AB را به صورت $\overrightarrow{AB}$ نشان می‌دهند و آن را بردار AB می‌گویند. در این نمایش، A ابتدای بردار، B انتها و طول پاره‌خط $\overline{AB}$، اندازه‌ی آن و جهت این بردار از نقطه‌ی A به‌نقطه‌ی B است. اگر در شکل ۱ــ۲ جا به جایی در مسیر BC را به صورت $\overrightarrow{BC}$ نشان دهیم، می‌توانیم بنویسیم:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \qquad (۲ـ۱)$$

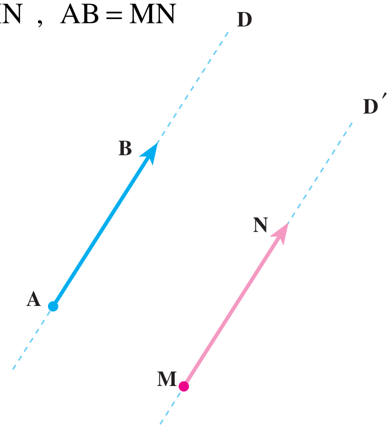
۳ــ۲ــ هم‌سنگ (هم ارز) یک بردار

بردار $\overrightarrow{AB}$ واقع بر راستای D را در نظر می‌گیریم. اگر از نقطه‌ی دلخواه مانند M، بردار $\overrightarrow{MN}$ را چنان رسم کنیم که راستای آن با راستای $\overrightarrow{AB}$ موازی بوده و اندازه‌ی آن برابر اندازه‌ی $\overline{AB}$

۱ــ بزرگی بردار را قدر مطلق، دامنه یا شدت بردار نیز می‌گویند.

و جهت آن با جهت $\vec{AB}$ یکسان باشد، در این حالت بردار $\vec{MN}$ را **هم‌سنگ بردار** $\vec{AB}$ گویند. در شکل ۲ــ۲ دو بردار هم‌سنگ $\vec{AB}$ و $\vec{MN}$ را می‌بینید. به طور خلاصه، برای دو بردار هم‌سنگ $\vec{MN}$ و $\vec{AB}$ می‌توان نوشت:

$$D \parallel D' \;,\; \overline{AB} = \overline{MN} \;,\; \vec{AB} = \vec{MN} \qquad (۲ــ۲)$$

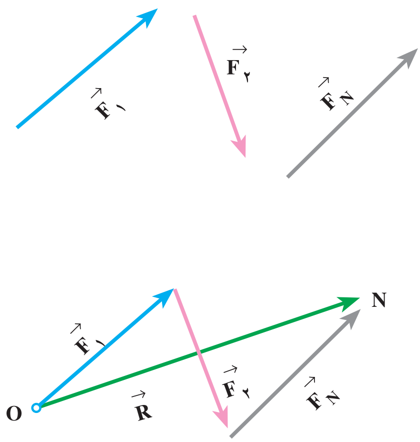


شکل ۲ــ۲ــ دو بردار هم‌سنگ

۴ــ۲ــ برایند دو یا چند بردار (روش ترسیمی)

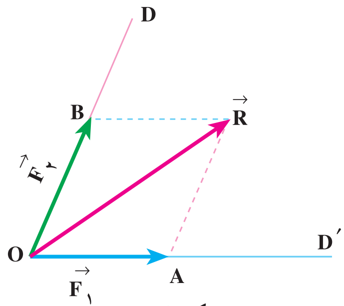
برایند دو یا چند بردار، برداری است که به تنهایی، آثار آن دو یا چند بردار را داشته باشد. برای تعیین برایند چند بردار، از یک نقطه مانند O، هم‌سنگ بردار $\vec{F}_1$ و از انتهای بردارهم‌سنگ $\vec{F}_1$، هم‌سنگ بردار $\vec{F}_2$ را رسم می‌کنیم. این عمل را برای همه‌ی بردارها ادامه می‌دهیم تا جایی که نقطه‌ی N، انتهای هم‌سنگ بردار $\vec{F}_N$ (آخرین بردار موجود) به دست آید. اگر نقطه‌ی O را به نقطه‌ی N وصل کنیم، بردار $\vec{ON}$، برایند بردارهای $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ و... و $\vec{F}_N$ به دست می‌آید. پس می‌توان نوشت:

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + ... + \vec{F}_N \qquad (۲ــ۳)$$



شکل ۳ــ۲

۵ــ۲ــتجزیه‌ی یک بردار به دو راستای معین



شکل ۴ــ۲

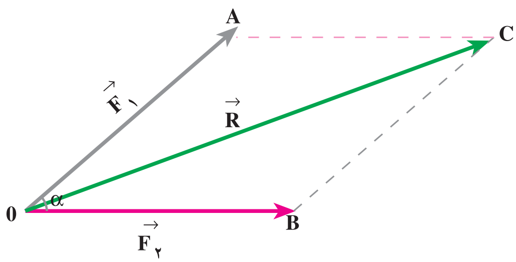
بردار $\vec{R}$ و دو راستای D و D′ را مطابق شکل ۴ــ ۲ در نظر می گیریم. اگر بخواهیم بردار $\vec{R}$ را در راستای D و D′ تجزیه کنیم، کافی است از انتهای آن دو خط به موازات راستاهای D و D′ رسم کنیم. این خطوط راستای D را در نقطه‌ی B و راستای D′ را در نقطه‌ی A قطع می‌کنند. بردار $\vec{F}_۱ = \vec{OA}$ را مؤلّفه‌ی $\vec{R}$ در راستای D′ و بردار $\vec{F}_۲ = \vec{OB}$ را مؤلفه‌ی بردار $\vec{R}$ در راستای D گویند. بدین ترتیب، بردار $\vec{R}$ به دو بردار $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ در راستاهای D′ و D تجزیه می‌شود.

۶ــ۲ــ حاصل جمع بردارها

حاصل جمع بردارها را با روش هندسی (ترسیمی) یا روش تحلیلی (محاسبه‌ای) تعیین می کنند.

۱ــ۶ــ۲ــ روش هندسی: دو بردار $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ را مطابق شکل ۵ــ۲ درنظرمی گیریم. هر دو بردار از نقطه‌ی O شروع می‌شوند و جهت مثبت آن‌ها با هم زاویه‌ی α می‌سازد.

برای تعیین برایند دو بردار $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ در روش هندسی، از انتهای هر یک به موازات دیگری خطی رسم می‌کنیم تا در نقطه‌ی C همدیگر را قطع کنند و یک متوازی‌الاضلاع به‌دست آید. بردار برایند $\vec{R}$، قطر متوازی‌الاضلاعی خواهد بود که بدین ترتیب ساخته می‌شود. ابتدای آن نقطه‌ی O (نقطه‌ی شروع هر دو بردار) و انتهایش نقطه‌ی C است. با توجه به شکل ۵ ــ ۲ می‌توان نوشت :



شکل ۵ــ۲

$$\vec{R} = \vec{F}_۱ + \vec{F}_۲ \qquad (۲ـ۴)$$

اندازه‌ی بردار $|\vec{R}| = \overline{OC}$ است و از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود :

$$|\vec{R}| = \sqrt{F_۱^۲ + F_۲^۲ + ۲F_۱F_۲ \cos\alpha} \qquad (۲ـ۵)$$

۲ــ۶ــ۲ــ روش تحلیلی: برای به دست آوردن حاصل جمع چند بردار به روش تحلیلی درصفحه محورهای مختصات، هم‌سنگ بردارها را مطابق شکل ۶ ــ ۲ رسم می‌کنیم. این بردارها با محور xها زاویه‌هایی می‌سازند. پس از تعیین این زاویه‌ها، هر یک از بردارها را روی محورهای افقی و عمودی تصویر می‌کنیم. سپس، جمع جبری تصاویر بردارها را نیز بر روی محور x به دست می‌آوریم و آن را با ΣF_x نشان می‌دهیم. جمع جبری تصاویر بردارها را نیز بر روی محور y به‌دست می‌آوریم و آن را با ΣF_y نشان می‌دهیم. بردار برایند از جمع دو بردار $\Sigma \vec{F}_x$ و $\Sigma \vec{F}_y$ به دست می‌آید و اندازه و جهت آن براساس روابط زیر تعیین می‌شود:

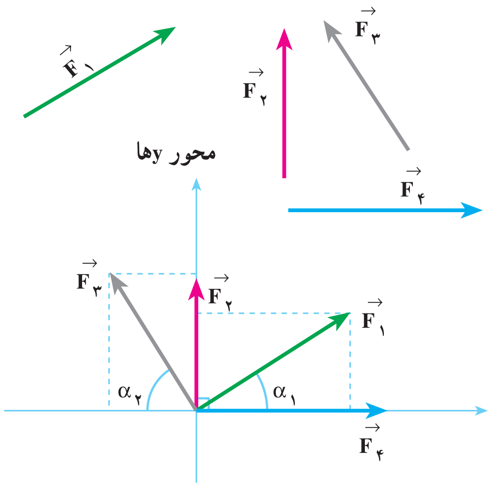
$$|\vec{R}| = \sqrt{(\Sigma F_x)^۲ + (\Sigma F_y)^۲} \qquad (۲\_۶)$$

$$\varphi = \tan^{-۱} \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} \qquad (۲\_۷)$$

φ زاویه‌ای است که بردار برایند با محور x می‌سازد. برای شکل ۶ــ۲ بردار برایند را می‌توان به صورت زیر محاسبه کرد:

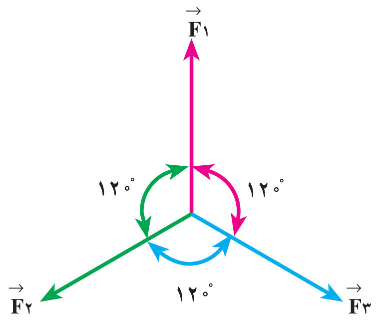
$$\Sigma F_x = +|\vec{F}_۱|\cos\alpha_۱ + |\vec{F}_۲|\cos ۹۰ + |\vec{F}_۴|\cos ۰ - |\vec{F}_۳|\cos\alpha_۲ \qquad (۲\_۸)$$

$$\Sigma F_y = +|\vec{F}_۴|\sin(۰) + |\vec{F}_۱|\sin\alpha_۱ + |\vec{F}_۲|\sin ۹۰ + |\vec{F}_۳|\sin\alpha_۲ \qquad (۲\_۹)$$



شکل ۶ــ۲

مثال ۱: سه بردار با دامنه‌ی یکسان ۲۲۰ ولتی، مطابق شکل ۷ـ۲ با هم زاویه‌ی ۱۲۰° می‌سازند. با روش تحلیلی، برایند این سه بردار را به دست آورید.



شکل ۷ـ۲

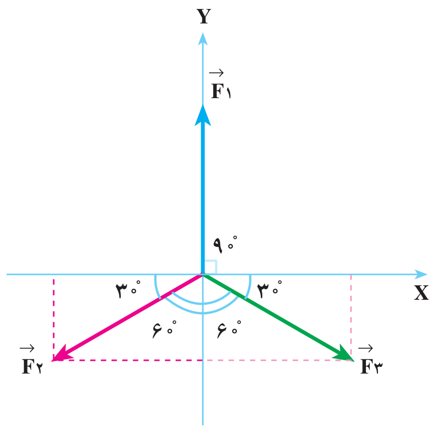
راه حل:

برای سه بردار،محورهای مختصات را چنان عبور می‌دهیم که بردار $\vec{F}_۱$ بر محور yها، مطابق شکل ۸ـ۲ منطبق شود. در این حالت، محور xها با بردار $\vec{F}_۱$ زاویه‌ی ۹۰° و با بردارهای $\vec{F}_۳$ و $\vec{F}_۲$ زاویه‌ی ۳۰ درجه تشکیل خواهد داد.

جمع جبری تصاویر بر روی محور xها برابر است با :

$$\sum F_x = |\vec{F}_۱|\cos ۹۰^\circ + |\vec{F}_۳|\cos ۳۰^\circ - |\vec{F}_۲|\cos ۳۰^\circ$$

$$\sum F_x = ۲۲۰ \times (۰) + ۲۲۰ \times \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) - ۲۲۰ \times \left(\frac{\sqrt{۳}}{۲}\right) = ۰$$



شکل ۸ـ۲

جمع جبری تصاویر بردارها بر روی محور yها برابر است با :

$$\Sigma F_y = |\vec{F}_۱|\sin ۹۰^\circ - |\vec{F}_۲|\sin ۳۰^\circ - |\vec{F}_۳|\sin ۳۰^\circ$$

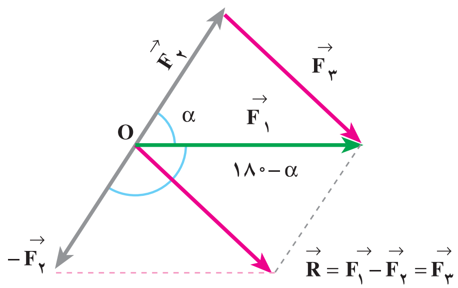
$$\Sigma F_y = ۲۲۰\times(۱) - ۲۲۰\times\left(\frac{۱}{۲}\right) - ۲۲۰\times\left(\frac{۱}{۲}\right) = ۰$$

بردار برایند برابر است با :

$$|\vec{R}| = \sqrt{(\Sigma F_x)^۲ + (\Sigma F_y)^۲} = \sqrt{۰^۲ + ۰^۲} = ۰$$

۷ــ۲ــ تفاضل دو بردار

در شکل ۹ــ۲ بردار $\vec{F}_۱$ ، برایند دو بردار $\vec{F}_۲$ و $\vec{F}_۳$ است.



شکل ۹ــ۲

$$\vec{F}_۲ + \vec{F}_۳ = \vec{F}_۱ \qquad (۲ــ۱۰)$$

اگر در رابطه‌ی ۱۰ــ۲ بردار $\vec{F}_۲$ را به طرف دوم تساوی انتقال دهیم، خواهیم داشت :

$$\vec{F}_۳ = \vec{F}_۱ - \vec{F}_۲ \qquad (۲ــ۱۱)$$

رابطه‌ی۱۱ــ۲ بیان می‌کند که بردار $\vec{F}_۳$ تفاضل دو بردار $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ است. برای تعیین تفاضل دو بردار، از ابتدای بردار $\vec{F}_۱$ ، منفی بردار $\vec{F}_۲$ را رسم می‌کنیم. برایند دو بردار $\vec{F}_۱$ و $-\vec{F}_۲$ ، بردار تفاضل $(\vec{R})$ خواهد بود. این بردار هم‌سنگ بردار $\vec{F}_۳$ تفاضل دو بردار $\vec{F}_۱$ و $\vec{F}_۲$ است. بردار $-\vec{F}_۲$ با $\vec{F}_۱$ زاویه‌ی $۱۸۰-\alpha$ را می‌سازد بر اساس رابطه‌ی ۵ــ۲ می‌توان نوشت :

$$|\vec{R}| = |\vec{F}_۳| = \sqrt{|\vec{F}_۱^۲| + |\vec{F}_۲^۲| + ۲|\vec{F}_۱||\vec{F}_۲|\cos(۱۸۰-\alpha)} \qquad (۲ــ۱۲)$$

اگر در رابطه‌ی ۱۲ــ۲ به جای $\cos(180-\alpha)$ مقدار $-\cos\alpha$ را جایگزین کنیم، دامنه‌ی تفاضل دو بردار به قرار زیر محاسبه می‌شود :

$$|\vec{F}_3| = \sqrt{|\vec{F}_1^2| + |\vec{F}_2^2| - 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\alpha} \qquad (۲ــ۱۳)$$

در رابطه‌ی (۱۳ــ ۲) α زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ است.

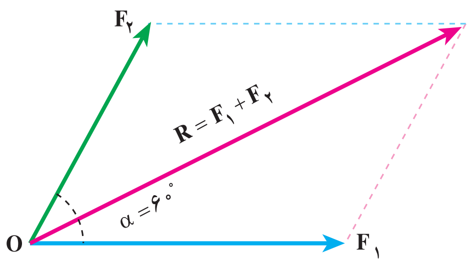
مثال ۲: دو نیروی $\vec{F}_1 = 8N$ و $\vec{F}_2 = 6N$ با هم زاویه‌ی 60° می‌سازند. مجموع و تفاضل این دو بردار را به روش هندسی به دست آورید.

راه حل:

برایند دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ به روش هندسی مطابق شکل ۱۰ــ۲ به دست می‌آید.

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{F}_1^2| + |\vec{F}_2^2| + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\alpha}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{(8^2) + (6)^2 + 2(8)(6)\cos 60} = 12/16 \text{ نیوتن}$$

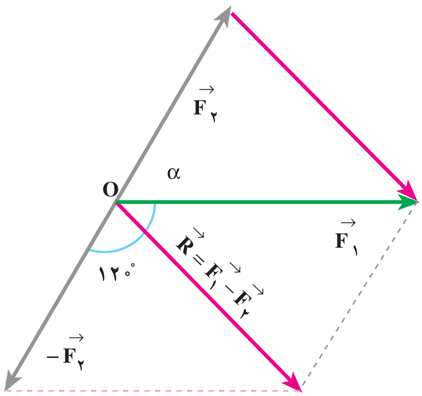


شکل ۱۰ ــ۲ــ برایند مجموع $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$

برای تعیین تفاضل $\vec{F}_1 - \vec{F}_2$ ، مطابق شکل ۱۱ــ۲، ابتدا منفی $\vec{F}_2$ را به دست می‌آوریم. با تعیین برایند $\vec{F}_1$ و $-\vec{F}_2$ ، تفاصل دوبردار $(\vec{F}_1 - \vec{F}_2)$ حاصل می‌شود.

$$|\vec{R}| = \sqrt{|\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}_2|^2 + 2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos 120}$$

$$|\vec{R}| = \sqrt{(8)^2 + (6)^2 + 2(8)(6)(-\frac{1}{2})} = \sqrt{52}$$



شکل ۱۱ــ۲ــتفاضل دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ از روش هندسی

$$|\vec{R}|=|\vec{F}_1-\vec{F}_2|=\text{۷/۲۱ نیوتن}$$

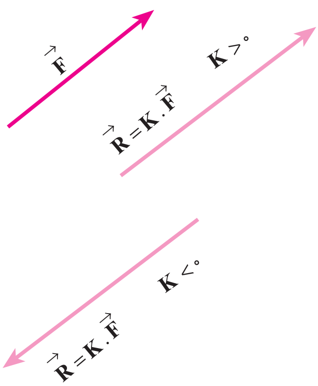
یا

$$|\vec{F}_1-\vec{F}_2|=\sqrt{|\vec{F}_1|^2+|\vec{F}_2|^2-2|\vec{F}_1||\vec{F}_2|\cos\alpha}$$

۸ــ۲ــ ضرب بردارها

در ضرب بردارها، ضرب یک بردار در یک کمیت عددی (اسکالر) و ضرب نقطه‌ای (داخلی) را بررسی می‌کنیم.

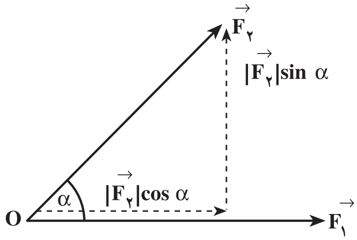
۱ــ۸ــ۲ــ ضرب یک بردار در یک کمیت عددی: ضرب کمیت عددی مانند K در یک بردار مانند $\vec{F}$ مطابق شکل ۱۲ــ۲، برداری را نتیجه می‌دهد که قدر مطلق آن K برابر قدر مطلق $\vec{F}$ است. اگر $K>0$ باشد، بردار حاصل‌ضرب هم جهت با بردار $\vec{F}$ خواهد بود و اگر $K<0$ باشد، جهت بردار حاصل‌ضرب با جهت $\vec{F}$، ۱۸۰ درجه اختلاف خواهد داشت.



شکل ۱۲ــ۲

۲ــ۸ــ۲ــ ضرب داخلی (نقطه‌ای) دو بردار: دو بردار $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ را که با هم زاویه‌ی α می‌سازند، مطابق شکل ۱۳ــ۲ در نظر می‌گیریم، بردار $\vec{F_2}$ را به دو مؤلفه‌ی $\vec{F_2}\cos\alpha$ و $\vec{F_2}\sin\alpha$ که بر یک‌دیگر عمودند، تجزیه می‌کنیم. بنا به تعریف، حاصل‌ضرب داخلی دو بردار $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ که به صورت $A = \vec{F_1}.\vec{F_2}$ نشان داده می‌شود، یک کمیت عددی است. اندازه‌ی این کمیت عددی از رابطه‌ی $A = \vec{F_1}.\vec{F_2} = |\vec{F_1}||\vec{F_2}|\cos\alpha$ محاسبه می‌شود.

$$\vec{F_1}.\vec{F_2} = \vec{F_2}.\vec{F_1} = |\vec{F_1}||\vec{F_2}|\cos\alpha = |\vec{F_2}||\vec{F_1}|\cos\alpha \qquad (۲ــ۱۴)$$



شکل ۱۳ــ۲

کمیّت‌های الکتریکی مانند توان وانرژی،کمیت‌های اسکالر یا عددی هستند. کمیت توان از حاصل‌ضرب عددی بردار ولتاژ $(\vec{V})$ و بردار جریان $(\vec{I})$ به دست می‌آید.

$$P = \vec{V}.\vec{I} = |\vec{V}|\,|\vec{I}|\cos\varphi \qquad (۲ــ۱۵)$$

در رابطه‌ی ۱۵ــ۲، φ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{V}$ و $\vec{I}$ است و آن را **اختلاف فاز ولتاژ و جریان** می‌نامند.

> در این کتاب با توجه به جهت مثلثاتی (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ را همیشه به صورت $\theta_V - \theta_i = \varphi$ (زاویه‌ی ولتاژ منهای زاویه‌ی جریان) منظور خواهیم کرد. اگر φ مثبت باشد، ــ یعنی در جهت مثلثاتی از $\vec{I}$ به $\vec{V}$ برسیم ــ جریان را پس فاز و اگر φ منفی باشد، ــ یعنی در خلاف جهت مثلثاتی از $\vec{I}$ به $\vec{V}$ برسیم ــ جریان را پیش فاز می‌نامند.

از آن‌جا که انرژی (کار) از حاصل‌ضرب توان در زمان به دست‌می‌آید (W=P.t) و چون هر دو

کمیت توان و زمان کمیت اسکالر هستند، حاصل‌ضرب آن‌ها یعنی انرژی نیز کمیت اسکالر است.

مثال ۳: بردارهای $\vec{F_۱}=۱۰$ واحد و $\vec{F_۲}=۶$ واحد با هم زاویه‌ی ۶۰ درجه می‌سازند.

حاصل‌ضرب داخلی $\vec{F_۱}.\vec{F_۲}$ را معین کنید.

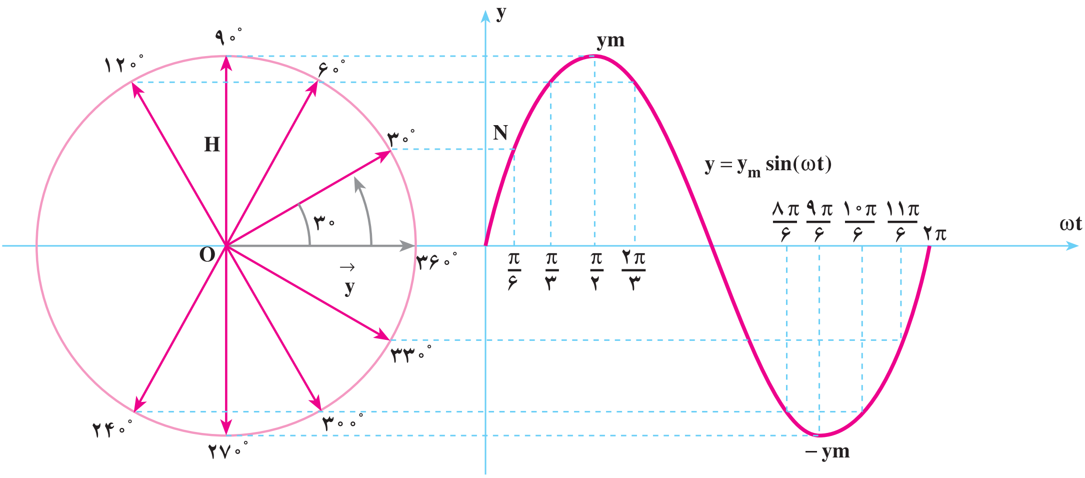
راه حل:

$$A=\vec{F_۱}.\vec{F_۲}=|\vec{F_۱}||\vec{F_۲}|\cos ۶۰$$

$$A=۱۰\times ۶\times\left(\frac{۱}{۲}\right)=۳۰ \quad \text{واحد}$$

۹ــ۲ــ نمایش برداری امواج متناوب سینوسی

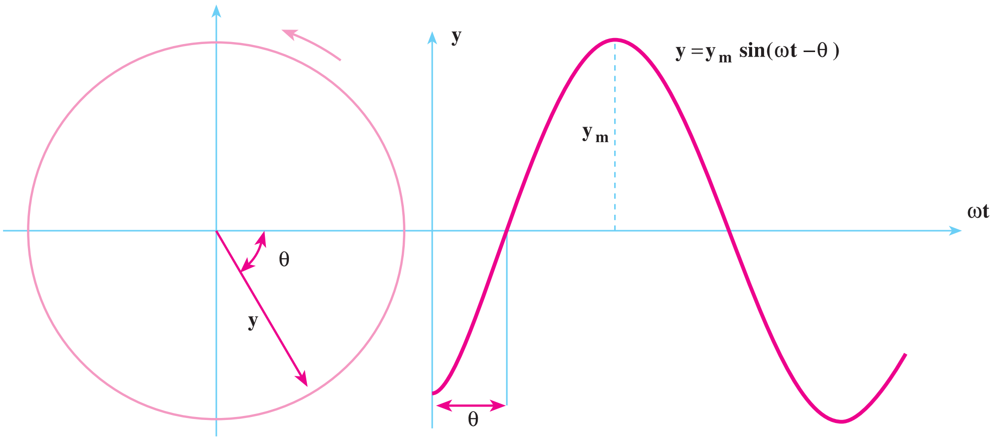
موج سینوسی $y=y_m \sin(\omega t)$ را مطابق شکل ۱۴ــ۲ در نظر می‌گیریم. در هر لحظه می‌توان دامنه‌ی این موج را از تصویر بردار چرخان $\vec{y}$ بر روی محورسینوس‌ها در دایره‌ی مثلثاتی معین کرد. بردار چرخان $\vec{y}$ با سرعت زاویه‌ای ω در جهت مثلثاتی دوران می‌کند.



شکل ۱۴ــ۲

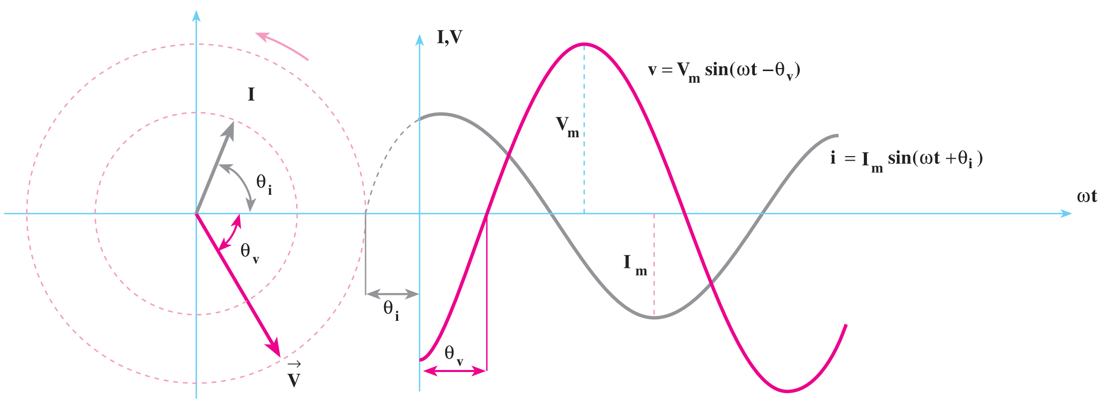
دامنه‌ی موج در $\omega t=\frac{\pi}{۶}$، با نقطه‌ی N در روی منحنی سینوسی نشان داده شده است. این دامنه برابر پاره خط $\overline{OH}$ است. پاره‌خط $\overline{OH}$ تصویر بردار $\vec{y}$ در موقعیت $\vec{ON}$ است که نسبت به موقعیت صفر، °۳۰ در جهت مثلثاتی دوران کرده است.

امـواج سینوسی، ممکـن است از مبدأ مختصات شروع نشوند. مثلاً مـوج شکـل ۱۵ــ۲، θ درجه عقب‌تر از مبدأ مختصات شروع می‌شود و به اصطلاح θ درجه پس فاز است. بردار این موج نسبت به محور xها (ωt) ، θ درجه پس فاز رسم می‌شود.



شکل ۱۵ــ۲

در شکل ۱۶ــ۲ دو موج $v = V_m \sin(\omega t - \theta_V)$ و $i = I_m \sin(\omega t + \theta_i)$ نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌کنید، بردار $\vec{V}$ متناسب با دامنه‌ی V_m به اندازه‌ی $-\theta^\circ{}_V$ عقب‌تر از محور xها(ωt) رسم شده است. بردار $\vec{I}$ متناسب با دامنه I_m، به اندازه‌ی $+\theta^\circ{}_i$ جلوتر رسم می‌شود. روشن است اختلاف فاز دو بردار $\vec{V}$ و $\vec{I}$ ، $\varphi = -\theta_V - \theta_i = -(\theta_V + \theta_i)$ خواهد بود. علامت φ منفی است، زیرا جریان پیش‌فاز است.



شکل ۱۶ــ۲

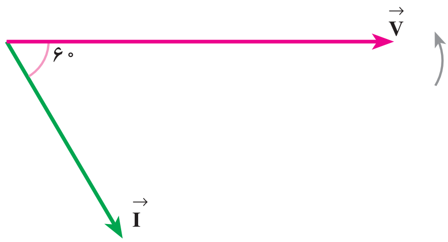
برای نشان دادن جریان و ولتاژ سینوسی به صورت برداری، در شکل‌های ۱۴ـ۲ تا ۱۶ ـ ۲، اندازه‌ی بردارها برابر دامنه‌ی ماکزیمم موج جریان و ولتاژ رسم شده است. از آن‌جا که در محاسبه‌ها معمولاً مقادیر مؤثر ولتاژ و جریان به‌کار می‌رود، می‌توان اندازه‌ی این بردارها را برابر با مقدار دامنه‌ی مؤثر امواج رسم کرد.

مثال ۴: معادله‌ی زمانی دو کمیت جریان و ولتاژ به صورت $i=20\sqrt{2}\sin(500t-60^\circ)$ و $v=200\sqrt{2}\sin(500t)$ است. پس از رسم بردارهای فاز $\vec{I}$ و $\vec{V}$، حاصل‌ضرب عددی $P=\vec{V}.\vec{I}$ را معین کنید.

راه حل: در رسم بردارهای فاز، لازم است دامنه‌ی مؤثر و زاویه‌ی فاز بردارها تعیین گردد و در محورهای مختصات با توجه به پس فاز یا پیش فاز بودن آن‌ها رسم شود. بردار جریان دارای مقدار مؤثر $|\vec{I}|=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ و بردار ولتاژ دارای مقدار مؤثر $|\vec{V}|=\frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ است. زاویه‌ی فاز بردار جریان $\theta_i=-60^\circ$ و زاویه‌ی فاز ولتاژ $\theta_v=0$ است. بنابراین، اختلاف فاز بین بردار جریان و ولتاژ برابر $\varphi=\theta_v-\theta_i$ خواهد بود و مقدار آن $\varphi=0-(-60)=60$ درجه محاسبه می‌شود.

$$P=\vec{V}.\vec{I}=|V||I|\cos\varphi$$

$$P=\frac{200\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\times\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cos 60^\circ=2000W$$



۱۰ـ۲ـ توان الکتریکی

انرژی الکتریکی تولیدی یا مصرفی در یک ثانیه را توان الکتریکی می‌گویند. اگر آهنگ جذب یا تولید انرژی الکتریکی یک دستگاه ثابت باشد، توان دستگاه، مقدار کار انجام یافته در واحد زمان است و از رابطه‌ی $P=\frac{W}{t}$ تعیین می‌شود. واحد کار، ژول و واحد زمان، ثانیه است. یک ژول بر ثانیه را **وات** (واحد توان) می‌گویند. هر هزار وات یک کیلووات (KW) و هر یک میلیون وات یک مگاوات (MW) نامیده می‌شود.

$1KW=1000W$ (یک کیلو وات)

$1MW=10^6W$ (یک مگا وات)

در جریان متناوب (AC) توان الکتریکی در چندین مفهوم بررسی می‌شود. این مفاهیم عبارت‌اند از :

توان ظاهری[1]، توان مؤثر[2]، توان غیر مؤثر[3].

۱ــ۱۰ــ۲ــ توان مؤثر : مقدار P_e را **توان مؤثر** یا توان مفید می‌گویند. در مدارهای الکتریکی این توان، کار مؤثر را انجام می‌دهد. به عبارت دیگر، تبدیل انرژی الکتریکی به انرژی‌های دیگر توسط توان الکتریکی قابل توجیه است. ضمناً در مقاومت‌های اهمی، این توان به صورت انرژی حرارتی ظاهر می‌شود و از رابطه‌ی ۱۶ــ۲ به‌دست می‌آید. در این رابطه $\cos\varphi$ را **ضریب توان** می‌گویند. هر چه ضریب توان به یک نزدیک‌تر شود، اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ (φ) به صفر نزدیک می‌شود و توان مؤثر افزایش می‌یابد. در سیستم SI واحد توان مؤثر «وات» [W] است.

$$\boxed{P_e = V_e I_e \cos\varphi \quad [W]} \qquad (۲ــ۱۶)$$

۲ــ۱۰ــ۲ــ توان غیر مؤثر : در عناصر غیر فعال نظیر مقاومت‌های سلفی و خازنی، توان غیر مؤثری ظاهر می‌شود که نمی‌توان آن را به کار مفید تبدیل کرد. این توان به شکل موج سینوسی بین مصرف‌کننده و شبکه رفت و برگشت می‌کند و کاری انجام نمی‌دهد. در شبکه‌های الکتریکی به‌هنگام بهره‌گیری از خواص سلفی و خازنی در ایجاد میدان‌های مغناطیسی و الکتریکی، توان غیرمؤثر به طور ناخواسته در شبکه ظاهر می‌شود. این امر موجب می شود که مولدها نتوانند در جریان نامی توان مفید کامل به شبکه تحویل دهند. در سیستم SI واحد توان غیر مؤثر «وار» [VAR] است. توان غیر مؤثر با رابطه‌ی ۱۷ــ۲ بیان می‌شود :

$$\boxed{P_d = V_e I_e \sin\varphi \qquad [VAR]} \qquad (۲ــ۱۷)$$

چون در خازن‌ها جریان پیش‌فاز است، $\varphi = \theta_v - \theta_i$ منفی می‌شود و توان P_d را با علامت منفی خواهیم داشت. از آن‌جا که در مقاومت‌های سلفی $\varphi = \theta_v - \theta_i > ۰$ است، توان غیر مؤثر با علامت مثبت خواهد شد.

واحد توان غیر مؤثر در سیستم SI، ولت آمپر راکتیو است و با نماد V.A.R نشان داده می‌شود. هزار ولت آمپر راکتیو را کیلو ولت آمپر راکتیو می‌گویند و با علامت اختصاری KV.A.R

۱ــ توان ظاهری را با علایم اختصاری P_s یا S نشان می‌دهند.

۲ــ توان مؤثر را توان اکتیو، واته و مفید نیز می‌گویند و آن را با علایم اختصاری P_e، P_a، P_w و P نشان می‌دهند.

۳ــ توان غیرمؤثر را توان راکتیو، دواته، غیرمفید نیز می‌گویند و آن را با علایم اختصاری P_d و P_r و Q نشان می‌دهند.

نشان می‌دهند. یک مگا ولت آمپر راکتیو (MV.A.R) برابر یک میلیون ولت آمپر راکتیو است.

۳ــ۱۰ــ۲ــ توان ظاهری: حاصل‌ضرب ولتاژ و جریان مؤثر را **توان ظاهری** می‌گویند و آن را با علامت اختصاری P_s یا S نشان می‌دهند. در سیستم SI، واحد توان ظاهری ولت آمپر (V.A) است. هزار برابر V.A را کیلو ولت آمپر می‌گویند و با علامت اختصاری K.V.A نشان می‌دهند. یک میلیون برابر V.A را مگا ولت آمپر می‌نامند و علامت اختصاری مشخّصه‌ی آن M.V.A است. توان ظاهری از رابطه‌ی ۱۸ــ۲ به دست می‌آید.

$$\boxed{P_s = V_e I_e \quad [V.A]} \qquad (۲\text{ــ}۱۸)$$

۴ــ۱۰ــ۲ــ ارتباط توان مفید و غیر مفید با توان ظاهری: بر اساس روابط ۱۶ــ۲ و ۱۷ــ۲ می‌توان نوشت:

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi \quad [W]$$

اگر روابط ۱۶ــ۲ و ۱۷ــ۲ را مجذور کنیم، خواهیم داشت:

$$P_e^2 = V_e^2 I_e^2 \cos^2\varphi \qquad (۲\text{ــ}۱۹)$$

$$P_d^2 = V_e^2 I_e^2 \sin^2\varphi \qquad (۲\text{ــ}۲۰)$$

توجه داشته باشید اگر مقدار P_d منفی هم باشد، P_d^2 همیشه مثبت است.

دو رابطه‌ی ۱۹ــ۲ و ۲۰ــ۲ را جمع می‌کنیم. با توجه به این که $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ است، خواهیم داشت:

$$P_e^2 + P_d^2 = V_e^2 I_e^2 \cos^2\varphi + V_e^2 I_e^2 \sin^2\varphi$$

$$P_e^2 + P_d^2 = V_e^2 I_e^2 (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)$$

بنابراین:

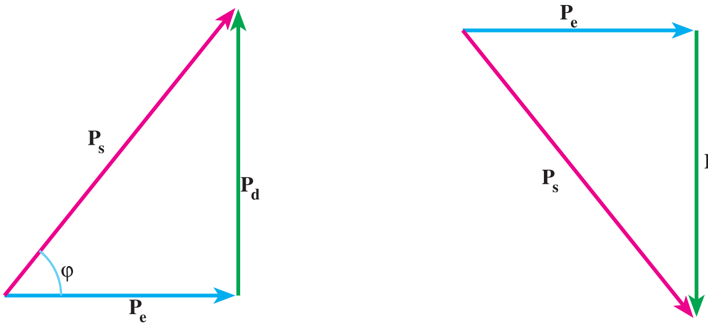
$$P_e^2 + P_d^2 = V_e^2 I_e^2 = (V_e I_e)^2$$

با توجه به رابطه‌ی ۱۸ــ۲، $V_e I_e$ توان ظاهری است؛ بنابراین:

$$P_e^2 + P_d^2 = P_s^2$$

$$\boxed{P_s = \sqrt{P_e^2 + P_d^2}} \qquad (۲\text{ــ}۲۱)$$

۵ــ۱۰ــ۲ــ مثلث توان‌ها: با توجه به رابطه‌ی ۲۱ــ۲، می‌توان گفت P_s توان ظاهری وتر مثلث قائم الزاویه‌ای است که دو ضلع قائم آن توان‌های مؤثر و غیر مؤثر هستند . در رسم مثلث توان‌ها، توان مؤثر P_e را در راستای محور xها رسم می‌کنند. از آن‌جا که در مقاومت خازنی و مقاومت سلفی خالص، جریان‌ها از ولتاژ به ترتیب ۹۰ درجه پیش‌فاز و ۹۰ درجه پس فاز است، اختلاف فاز φ در مقاومت خازنی منفی و مقاومت سلفی مثبت خواهد بود. به همین علت، توان راکتیو مربوط به مقاومت سلفی مثبت و بالای محور yها و توان راکتیو مربوط به خازن منفی پایین محور yها رسم می‌شوند. توان‌های راکتیو در مقاومت سلفی و خازنی به علت آن‌که ۱۸۰ درجه با هم اختلاف فاز دارند، در جهت خلاف یک‌دیگر بر شبکه تأثیر خواهند گذاشت. اگر شبکه از چندین شاخه تشکیل شده باشد، می‌توانیم، توان شاخه‌ها را به دنبال هم رسم کنیم و توان مؤثر و غیر مؤثر کل شبکه را به دست آوریم و آن‌گاه توان ظاهری را معلوم کنیم.



الف: مثلث توان‌ها با توان راکتیو منفی (خازنی)

(پیش فاز $\varphi < ۰$)

ب: مثلث توان‌ها با توان راکتیو مثبت (سلفی)

(پس فاز $\varphi > ۰$)

شکل ۱۷ــ۲ــ مثلث توان‌ها

در مثلث توان‌ها می‌توان نوشت :

$$P_e = P_s \cos\varphi \quad , \quad P_d = P_s \sin\varphi$$

$$\tan\varphi = \frac{P_d}{P_e} \quad \Rightarrow \quad P_d = P_e \tan\varphi$$

مثال ۵: در یک مدار الکتریکی معادله‌ی ولتاژ $v = ۲۰۰\sin(\omega t + ۸۰^\circ)$ و معادله‌ی جریان $i = ۵\sin(\omega t + ۲۰^\circ)$ است. توان‌های حقیقی، غیر مؤثر و ظاهری مدار را به دست آورید و مثلث توان‌ها را رسم کنید.

راه حل:

$$V_m = ۲۰۰V \Rightarrow V_e = \frac{V_m}{\sqrt{۲}} = \frac{۲۰۰}{\sqrt{۲}} = ۱۰۰\sqrt{۲}V$$

$$I_m = ۵A \Rightarrow I_e = \frac{I_m}{\sqrt{۲}} = \frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۲/۵\sqrt{۲}A$$

$$\varphi = \theta_v - \theta_i$$

اختلاف فاز بین جریان و ولتاژ از تفاوت زاویه فازهای بردار ولتاژ و جریان به دست می‌آید.

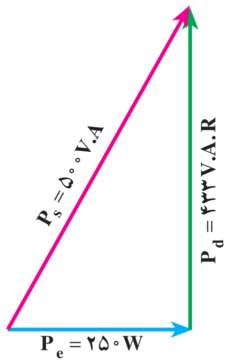
$$\varphi = ۸۰ - ۲۰ = ۶۰^\circ$$

$$P_e = V_e I_e \cos\varphi = ۱۰۰\sqrt{۲} \times ۲/۵\sqrt{۲} \cos ۶۰^\circ = ۲۵۰W$$

$$P_d = V_e I_e \sin\varphi = ۱۰۰\sqrt{۲} \times ۲/۵\sqrt{۲} \sin ۶۰^\circ = ۴۳۳ \quad V.A.R$$

$$P_s = \sqrt{P_e^۲ + P_d^۲}$$

$$P_s = \sqrt{۲۵۰^۲ + ۴۳۳^۲} = ۵۰۰V.A$$



شکل ۱۸ــ۲ــ مثلث توان‌ها

مثال ۶: یک شبکه‌ی الکتریکی دارای مصرف‌کننده‌هایی با مشخصات زیر است :

۱ــ مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی ۱ $\quad P_s = ۳۰۰V.A \quad , \quad \varphi = ۳۰^\circ$

۲ــ مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی ۲ $\quad P_e = ۲۰۰W \quad , \quad \varphi = -۶۰^\circ$

۳ــ مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی ۳ $\quad P_d = ۴۰۰V.A.R \quad , \quad P_s = ۵۰۰V.A$

مثلث توان‌های مصرف‌کننده‌ها را به دنبال هم رسم کنید و توان مؤثر، راکتیو و ظاهری شبکه را به دست آورید.

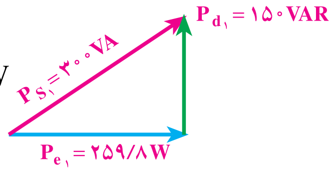
راه حل:

برای مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی ۱ داریم :

$$P_{s_۱} = ۳۰۰ V.A \quad , \quad \varphi_۱ = ۳۰^\circ$$

$$P_{e_۱} = P_{s_۱}\cos\varphi_۱ = ۳۰۰\cos ۳۰ = ۱۵۰\sqrt{۳} = ۲۵۹/۸ \ \ W$$

$$P_{d_۱} = P_{s_۱}\sin\varphi_۱ = ۳۰۰\sin ۳۰^\circ = ۱۵۰ \ \ V.A.R$$

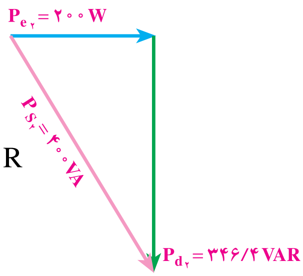


برای مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی ۲ داریم :

$$P_{e_۲} = ۲۰۰ \ \ W \quad , \quad \varphi_۲ = -۶۰^\circ$$

$$P_{s_۲} = \frac{P_{e_۲}}{\cos\varphi_۲} = \frac{۲۰۰}{\cos(-۶۰)} = ۴۰۰ \ \ V.A$$

$$P_{d_۲} = P_e \tan\varphi_۲ = ۲۰۰\tan(-۶۰) = -۲۰۰\sqrt{۳} = -۳۴۶/۴ \ \ V.A.R$$



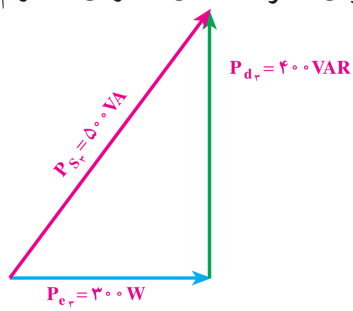
برای مصرف‌کننده‌ی شماره‌ی ۳ داریم :

$$P_{d_۳} = ۴۰۰ \ \ V.A.R \quad , \quad P_{s_۳} = ۵۰۰ \ \ V.A$$

$$P_{s_۳}^۲ = P_{e_۳}^۲ + P_{d_۳}^۲$$

$$۵۰۰^۲ = P_{e_۳}^۲ + ۴۰۰^۲ \quad \Rightarrow P_{e_۳}^۲ = ۹۰۰۰۰$$

$$P_{e_۳} = ۳۰۰ \ \ W$$



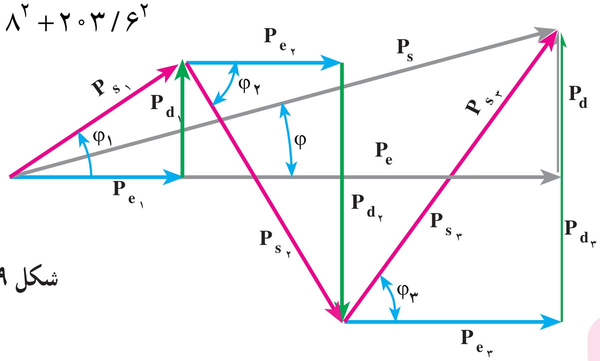
با توجه به شکل ۱۹ــ ۲ می‌توان نوشت :

$$P_e = P_{e_۱} + P_{e_۲} + P_{e_۳} = ۲۵۹/۸ + ۲۰۰ + ۳۰۰ = ۷۵۹/۸ \ \ W$$

$$P_d = P_{d_۱} + P_{d_۲} + P_{d_۳} = ۱۵۰ - ۳۴۶/۴ + ۴۰۰ = ۲۰۳/۶ \ \ V.A$$

$$P_s = \sqrt{P_e^۲ + P_d^۲} = \sqrt{۷۵۹/۸^۲ + ۲۰۳/۶^۲}$$

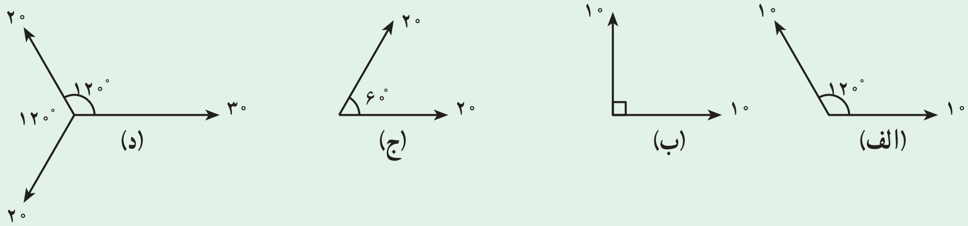
$$P_s = ۷۸۶/۶ \ \ V.A$$



شکل ۱۹ــ۲

تمرین

۱ــ برآیند بردارهای اشکال زیر را به دو روش تحلیلی و هندسی به‌دست آورید.



جواب : الف ــ ۱۰ ب ــ ۱۴/۱ ج ــ ۳۴/۶ د ــ ۱۰

۲ــ دو بردار $\vec{F}_۱ = ۱۰$ و $\vec{F}_۲ = ۲۰$ مفروض است. اگر زاویه‌ی بین دو بردار $\alpha = ۶۰^\circ$ باشد، مطلوب است :

الف ــ $\vec{F}_۱ + \vec{F}_۲$ ب ــ $\vec{F}_۱ - \vec{F}_۲$ پ ــ $\vec{F}_۱ . \vec{F}_۲$ ت ــ $\vec{F}_۱ . ۲\vec{F}_۲$

جواب : الف ــ ۲۶/۴ ب ــ ۱۷/۳ پ ــ ۱۰۰ ت ــ ۲۰۰

۳ــ برآیند دو بردار $\vec{F}_۱ = ۳$ و $\vec{F}_۲ = ۴$ برابر $\vec{R} = ۵$ می‌باشد زاویه‌ی بین این دو بردار چند درجه است؟

جواب : $\alpha = ۹۰^\circ$

۴ــ در یک مدار الکتریکی معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب $V = ۲۰۰ \sin ۱۰۰۰t$ و $i = ۱۰ \sin(۱۰۰۰t - ۵۳^\circ)$ مطلوب‌است الف ــ رسم دیاگرام برداری ب ــ محاسبه‌ی توان‌های حقیقی، غیرحقیقی و ظاهری مدار.

جواب : ۶۰۰W، +۸۰۰VAR، ۱۰۰۰VA

۵ــ در یک مدار الکتریکی، معادله‌ی ولتاژ و جریان به ترتیب $V = ۵۰\sqrt{۲} \sin ۲۵۰۰t$ و $i = ۱۰\sqrt{۲} \sin(۲۵۰۰t + ۳۰)$ است. مطلوب است :

الف ــ رسم دیاگرام‌برداری

ب ــ محاسبه‌ی توان‌های حقیقی، غیرمؤثر و ظاهری مدار.

جواب : ۴۳۳W، −۲۵۰VAR، ۵۰۰VA

۶ــ توان مؤثر و غیر مؤثر یک مصرف‌کننده با توان ظاهری $100VA$ و ضریب توان $0/8$ پس‌فاز را به‌دست آورید.

جواب: $80W$ و $+60VAR$

۷ــ در یک شبکه‌ی الکتریکی دو مصرف‌کننده با مشخصات زیر وجود دارند:

بار شماره‌ی یک: پس فاز $\cos\varphi = 0/8$, $P_{e_1} = 5KW$

بار شماره‌ی دو: پیش‌فاز $P_{e_2} = 2\sqrt{3}KW$, $P_{d_2} = 2K.V.A.R$

مطلوب است:

الف ــ رسم مثلث توان‌ها به دنبال همدیگر

ب ــ محاسبه‌ی ضریب قدرت کل شبکه

جواب: $\cos\varphi = 0/97$

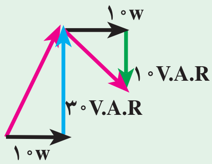
۸ــ یک شبکه‌ی الکتریکی با دو بار به مشخصات زیر مفروض است. ضریب قدرت شبکه با در نظر گرفتن دو بار با هم چه‌قدر است؟

بار شماره‌ی یک: $Ps_1 = 100\sqrt{2}V.A$, $P_{e_1} = 100W$ پس‌فاز.

بار شماره‌ی دو: $Ps_2 = 40\sqrt{2}V.A$, $P_{d_2} = 40V.A.R$ پیش‌فاز.

جواب: $\cos\varphi = 0/91$

۹ــ دیاگرام توان یک مدار الکتریکی جریان متناوب مطابق شکل زیر است. ضریب توان کل شبکه چه‌قدر است؟



جواب: $\cos\varphi = 0/7$