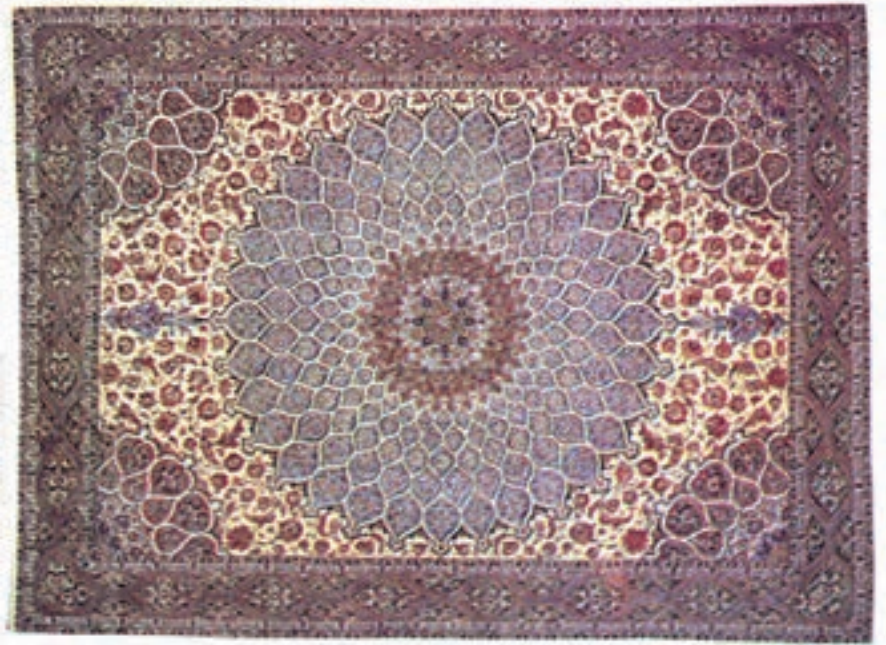


تبدیلها



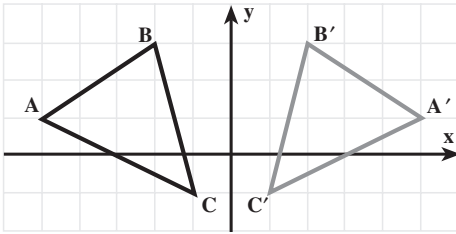
قالی طرح شمسه نمونه زیبایی از تبدیلهای هندسی است.

۱-۳- نگاشت

در مطالعه شکلهای هندسی هم‌نهشت و متشابه دیدیم تناظرهای خاصی بین اجزای آنها برقرار است. حال می‌خواهیم وضعیتهای مختلفی را که یک شکل در اثر حرکت مجموعه نقطه‌هایش در صفحه پیدا خواهد کرد مورد مطالعه قرار دهیم. این حرکتها از نظر ریاضی به عنوان تناظرهایی بین مجموعه نقطه‌های آنها توصیف می‌شوند.

فعالیت ۱-۳

هم‌نهشتی دو مثلث به عنوان تناظر بین مثلثهایی که ضلعهای متناظر و زاویه‌های متناظرشان



شکل ۱

مساوی هستند، مشخص شد. مثلثهای ABC و $A'B'C'$ را که در شکل (۱) آمده‌اند در نظر بگیرید.

۱. زاویه‌های دو مثلث را اندازه گرفته،

اندازه‌های آنها را باهم مقایسه کنید.

۲. با توجه به مختصات نقطه‌ها طول AB ،

AC ، BC ، $A'B'$ ، $A'C'$ و $B'C'$ را به دست آورید. این طولها چه نسبتی با هم دارند؟

۳. آیا مثلثهای ABC و $A'B'C'$ همنهشت هستند؟

۴. نقطه دلخواه (x,y) از مثلث ABC را در نظر بگیرید، نقطه نظیر آن را روی مثلث $A'B'C'$

مشخص کنید.

در ریاضی برای تعریف انواع معینی از نظیرسازی‌های بین مجموعه‌ها، کلمه نگاشت به کار می‌رود.

یک نگاشت از D به R ، یک عمل نظیرسازی است که به هر عضو مجموعه D یک و تنها یک عضو از مجموعه R را نظیر می‌کند.

توجه: طبق این تعریف یک عضو R ممکن است به بیش از یک عضو D نظیر شود.

نگاشت‌ها را معمولاً با حروف بزرگ نشان می‌دهند. نماد $M: D \rightarrow R$ نگاشت M از مجموعه

D به مجموعه R را نمایش می‌دهد. اگر P عضوی از مجموعه D و P' عضو نظیر آن در مجموعه R باشد، می‌نویسیم $M(P) = P'$. P' تصویر P تحت نگاشت M خوانده می‌شود.

مثال ۱: در کدامیک از موردهای صفحه بعد، نظیرسازی M ، نگاشتی از R به D است؟ تصویر

c را تحت نظیرسازی‌هایی که نگاشت هستند پیدا کنید. در هریک از موردهای زیر، e تصویر چه عضوی از D است؟

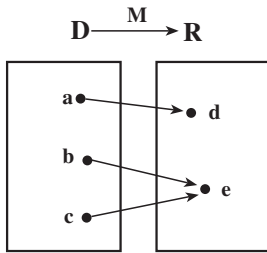
حل: مورد (الف) یک نگاشت است، زیرا هر عضو مجموعه D به یک و تنها یک عضو از

مجموعه R نظیر می‌شود. تصویر c ، f است یعنی $M(c) = f$ و تصویر b است یا $M(b) = e$.

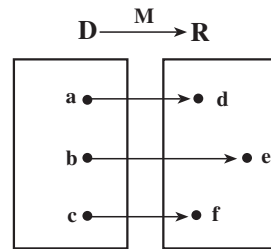
مورد (ب) نیز یک نگاشت است، به دلیل آن که هیچ عضوی در مجموعه D وجود ندارد که به

بیش از یک عضو از مجموعه R نظیر شده باشد. البته نگاشت (الف) با نگاشت (ب) متفاوت است.

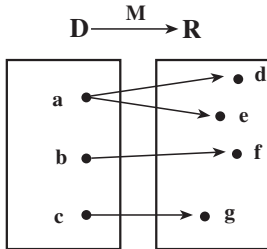
به آن فکر کنید! تصویر c ، e است یعنی $M(c) = e$ و تصویر دو عضو D ، b و c است، یعنی



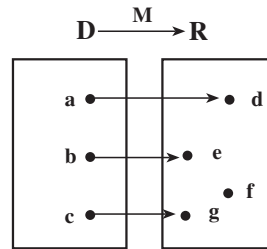
(ب)



(الف)



(ت)



(پ)

$$M(b) = e \text{ و } M(c) = e$$

مورد (پ) یک نگاشت است. یعنی هر عضو D دارای یک و فقط یک تصویر در R است.

تصویر c، g است یا $M(c) = g$ و تصویر b است یا $M(b) = e$.

موردهای (الف)، (ب) و (پ) را با هم مقایسه کرده، تفاوتها و مشابهت‌های آنها را بررسی کنید.

مورد (ت) یک نگاشت نیست، زیرا یکی از عضوهای D یعنی a به دو عضو مختلف R یعنی d

و e نظیر شده است. بنابراین شرط نگاشت بودن را ندارد.

در مثال ۱، قسمت‌های (الف) و (پ) نگاشت‌های یک به یک خوانده می‌شوند. در نگاشت یک

به یک، هر عضو R حداکثر می‌تواند تصویر یک عضو D باشد. به این ترتیب نگاشت بند (ب) یک به

یک نیست. توجه کنید که در بند (پ) اگرچه f تصویر هیچ‌یک از اعضای D تحت نگاشت M نیست،

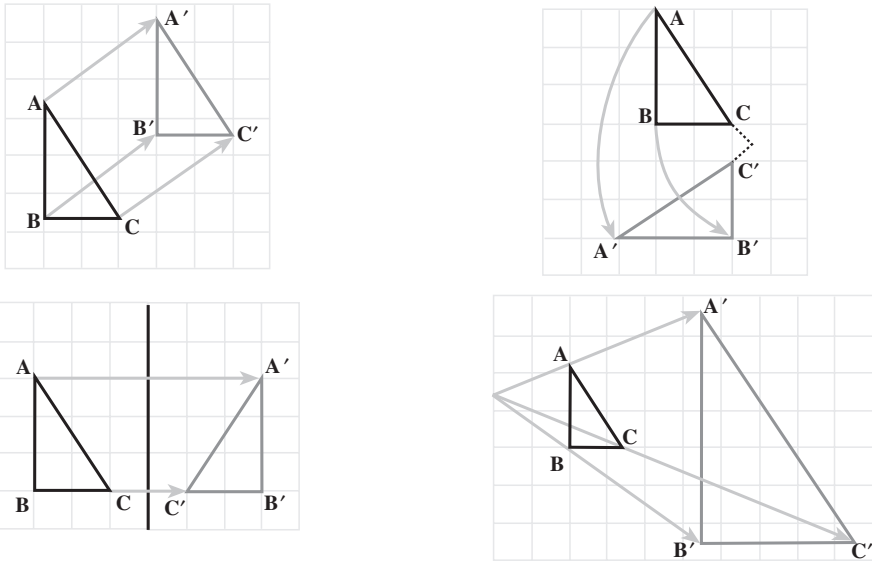
ولی با این وجود شرایط یک به یک بودن نگاشت همچنان برقرار است.

نگاشت‌های خاصی که آنها را تبدیل^۱ می‌خوانیم حرکت‌هایی را در هندسه تشریح می‌کنند.

تبدیل، نگاشتی یک به یک از صفحه به روی خودش است. یعنی در تبدیل، هیچ دو نقطه‌ای دارای یک تصویر نیستند و هر نقطه در صفحه، تصویر یک نقطه از صفحه است.

توجه: اگرچه تبدیله‌ها به عنوان نگاشت‌هایی از کل صفحه به روی خودش تعریف می‌شوند ولی

در این کتاب، فقط اثر این گونه نگاشت‌ها را بر شکل‌های هندسی مانند خط، مثلث یا شکل‌های دیگر مورد بررسی قرار می‌دهیم. در شکل زیر تعدادی از تبدیلهای متداول نشان داده شده است.



شکل ۲

در هریک از نمودارها رابطه‌ای بین نقطه‌های متناظر در دو مثلث وجود دارد.

$A \rightarrow A'$: A نگاشته می‌شود به A'

$B \rightarrow B'$: B نگاشته می‌شود به B'

$C \rightarrow C'$: C نگاشته می‌شود به C'

A' ، B' و C' به ترتیب تبدیل یافته نقطه‌های A، B و C هستند.

هر نقطه صفحه را به صورت زوج مرتب (x, y) نشان می‌دهیم. اگر T یک تبدیل باشد، آنگاه

$T(x, y) = (x', y')$ به این معنا است که نقطه (x', y') تصویر نقطه (x, y) تحت تبدیل T است.

مثال ۲: اگر $T(x, y) = (x + 1, 3y)$ یک تبدیل باشد، آنگاه

الف) تصویر نقطه‌های $(2, 5)$ ، $(0, 3)$ و $(3, -2)$ را تحت این تبدیل به دست آورید.

ب) تحت تبدیل T، تصویر چه نقطه‌ای است؟

حل: الف) چون تبدیل T به طول هر نقطه یعنی x، یک واحد اضافه و عرض هر نقطه یعنی y را

سه برابر می‌کند، پس

$$T(2, 5) = (2 + 1, 3 \times 5) = (3, 15)$$

$$T(0, 3) = (0+1, 3 \times 3) = (1, 9)$$

$$T(3, -2) = (3+1, 3(-2)) = (4, -6)$$

ب) در اینجا، تصویر نقطه را داریم و می‌خواهیم خود نقطه را پیدا کنیم. اگر آن نقطه را با زوج مرتب (x, y) نشان دهیم، با توجه به تبدیل T خواهیم داشت:

$$T(x, y) = (4, 9)$$

یعنی

$$(x+1, 3y) = (4, 9)$$

$$x+1=4, 3y=9$$

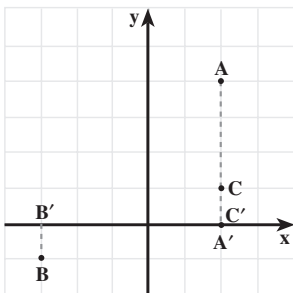
پس باید

در نتیجه

$$x=3, y=3$$

بنابراین $(4, 9)$ تصویر $(3, 3)$ است یا $T(3, 3) = (4, 9)$.

مثال ۳: نقطه‌های $A = (2, 4)$ ، $B = (-3, -1)$ و $C = (2, 1)$ را در صفحه مختصات مشخص کنید و تصویر این نقطه‌ها را تحت نگاشت $M(x, y) = (x, 0)$ به دست آورید. اگر A' ، B' و C' تصویر این نقطه‌ها تحت نگاشت M باشند، آنها را نیز در صفحه مختصات مشخص کنید.



شکل ۳

حل: چون نگاشت M طول هر نقطه را حفظ می‌کند و عرض آن را صفر می‌کند، بنابراین

$$M(A) = M(2, 4) = (2, 0) = A'$$

$$M(B) = M(-3, -1) = (-3, 0) = B'$$

$$M(C) = M(2, 1) = (2, 0) = C'$$

از نظر هندسی نگاشت M هر نقطه را به‌طور عمودی روی محور x ها تصویر می‌کند.

آیا این نگاشت یک تبدیل است؟

مثال ۴: نقطه‌های $A = (1, 4)$ ، $B = (-2, -1)$ و سپس A' و B' که $T(A) = A'$ و $T(B) = B'$ را، با توجه به ضابطه‌های زیر در صفحه مختصات مشخص کنید. پاره‌خطهای AB و

$A'B'$ را رسم کنید. طول AB و $A'B'$ را با استفاده از فرمول فاصله به دست آورید. AB و $A'B'$ چه وضعیتی نسبت به هم دارند؟

$$T(x, y) = (-x, y) \text{ (الف)}$$

$$T(x, y) = (2x, y - 1) \text{ (ب)}$$

حل: (الف)

$$T(A) = T(1, 4) = (-1, 4) = A'$$

$$T(B) = T(-2, -1) = (2, -1) = B'$$

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$AB = \sqrt{(1 + 2)^2 + (4 + 1)^2}$$

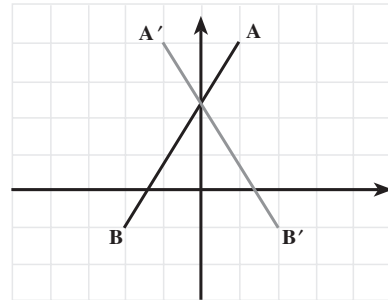
$$= \sqrt{9 + 25}$$

$$= \sqrt{34}$$

$$A'B' = \sqrt{(-1 - 2)^2 + (4 + 1)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 25}$$

$$= \sqrt{34}$$



شکل ۴

در نتیجه $AB = A'B'$ ، یعنی طول دو پاره خط با هم برابر است.

$$T(A) = T(1, 4) = (2 \times 1, 4 - 1) = (2, 3) = A'$$

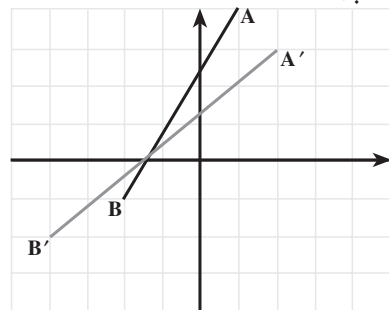
$$T(B) = T(-2, -1) = (2(-2), -1 - 1)$$

$$= (-4, -2) = B'$$

$$A'B' = \sqrt{(2 + 4)^2 + (3 + 2)^2}$$

$$= \sqrt{36 + 25}$$

$$= \sqrt{61}$$



شکل ۵

با توجه به اینکه $AB = \sqrt{34}$ بنابراین $A'B' > AB$ یعنی طول $A'B'$ بیشتر از طول AB

است.

در مثال ۴، قسمت (الف) تحت تبدیل T ، فاصله نقطه‌ها تغییری نکرد یعنی فاصله‌ها حفظ شدند. در صورتیکه تحت تبدیل T قسمت (ب) فاصله نقطه‌ها تغییر کرد. اگر $AB = A'B'$ که در آن $M(A) = A'$ و $M(B) = B'$ آنگاه می‌گوییم نگاشت M فاصله نقطه‌های A و B را حفظ می‌کند.

تبدیلی که فاصله بین نقطه‌ها را حفظ کند، ایزومتري نامیده می‌شود.

نتیجه: اگر شکلی توسط یک ایزومتري نگاشته شود، تصویر شکل با شکل اصلی هم‌نهشت خواهد بود.

مسأله‌ها

۱. تصویر نقطه $(5, 2)$ را تحت هریک از تبدیلهای زیر به دست آورید.

الف) $T(x, y) = (x + 3, y - 2)$

ب) $D(x, y) = (-x, y)$

پ) $D(x, y) = (2x, y)$

ت) $K(x, y) = (3x - 4, 5y + 1)$

۲. الف) مربع YAZD به رأسهای $Y = (-1, 1)$ ، $A = (3, 1)$ ، $Z = (3, 5)$ و $D = (-1, 5)$

رسم کنید.

ب) تصویر مربع YAZD را تحت تبدیل $T(x, y) = (x + 5, y + 2)$ رسم کنید.

پ) این تبدیل را توصیف کنید.

۳. الف) متوازی‌الاضلاع IRAN به رأسهای $I = (-2, 1)$ ، $R = (4, 3)$ ، $A = (5, 6)$ و

$N = (-1, 4)$ را رسم کنید.

ب) تصویر آن را تحت تبدیل $D(x, y) = (x, -y)$ رسم کنید.

پ) تبدیل بالا را توصیف کنید.

۴. الف) تصویر آن را تحت تبدیل $D(x, y) = (-x, -y)$ رسم کنید.

ب) این تبدیل را توصیف کنید.

۵. مختصات نقطه‌ای را به دست آورید که تصویر آن تحت تبدیلهای زیر $(0, 6)$ باشد.

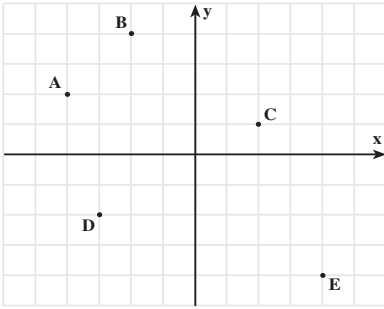
الف) $F(x, y) = (x, -y + 12)$

ب) $H(x, y) = (2x, y - 1)$

پ) $G(x, y) = (y, -x)$

۶. تبدیل $T(x, y) = (x, y - 2)$ را در نظر بگیرید.

الف) تصویر نقطه‌های A, B, C, D و E را تحت تبدیل T به دست آورید.

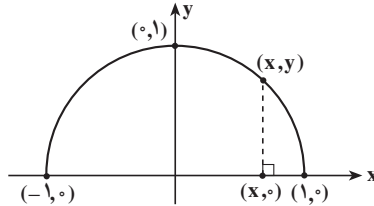


ب) نقطه‌های $(0,0)$ ، $(-2,-6)$ ، $(3,6)$ ، $(4,-1)$ و $(-3,5)$ تصویر چه نقطه‌هایی هستند؟
 پ) آیا T یک ایزومتري است؟ پاسخ خود را با دليل نشان دهيد.
 ت) قسمتهای (الف) تا (پ) را با تبديل $T(x,y) = (2x, 2y)$ حل كنيد.

۷. هر نقطه (x, y) از نیم دایره می تواند به یک

نقطه روی محور x ها بین -1 و 1 نظير شود. برای این منظور کافی است از نقطه (x, y) ، عمودی بر محور x ها رسم کنیم که در این صورت (x, y) نظير $(x, 0)$ خواهد شد. این تبديل تصوير قائم نیم دایره روی محور x ها خوانده می شود.

الف) آیا این تناظر نگاشتی از نیم دایره به محور x ها است؟ توضیح دهید.
 ب) اگر نگاشت است آیا یک به یک است؟ با توجه به شکل توضیح دهید.



پ) تصوير $(0,1)$ و $(-1,0)$ چیست؟ تصوير هر نقطه دلخواه (x,y) روی نیم دایره کدام است؟
 ت) $(\frac{1}{4}, 0)$ و $(-\frac{1}{4}, 0)$ تصوير چه نقطه‌هایی هستند؟ نقطه دلخواه $(x, 0)$ روی محور x ها بین

-1 و 1 تصوير چه نقطه‌ای از نیم دایره است؟

۸. نگاشت M را به صورت زیر در نظر بگیرید :

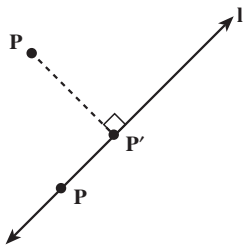
– اگر نقطه P روی خط l باشد آنگاه $M(P) = P$

– اگر نقطه P روی خط l نباشد، آنگاه $M(P) = P'$ ، به طوری

که P' محل تقاطع عمودی است که از نقطه P بر خط l رسم می شود.

الف) آیا M یک به یک است؟ پاسخ خود را توضیح دهید.

ب) آیا M فاصله بین نقطه‌ها را حفظ می کند؟ درستی پاسخ خود را با دليل توضیح دهید.





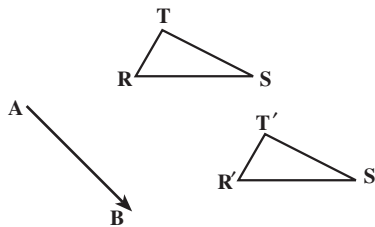
۳-۲- انتقال

در صنعت کشتی‌سازی، پس از ساخت یک کشتی برای به آب انداختن آن معمولاً از یک سطح شیب‌دار استفاده می‌کنند. به این ترتیب که کشتی را روی آن سُر داده و به آب می‌اندازند. این گونه حرکتها که جابجایی در یک امتداد معین را نشان می‌دهند، در زندگی روزمره بسیار به چشم می‌خورند. به عنوان مثال جابجایی آسانسور و حرکت مهره پیاده در شروع بازی شطرنج نمونه‌هایی از این نوع حرکت هستند.

آیا شما نیز می‌توانید چند نمونه از این نوع حرکت نام ببرید؟

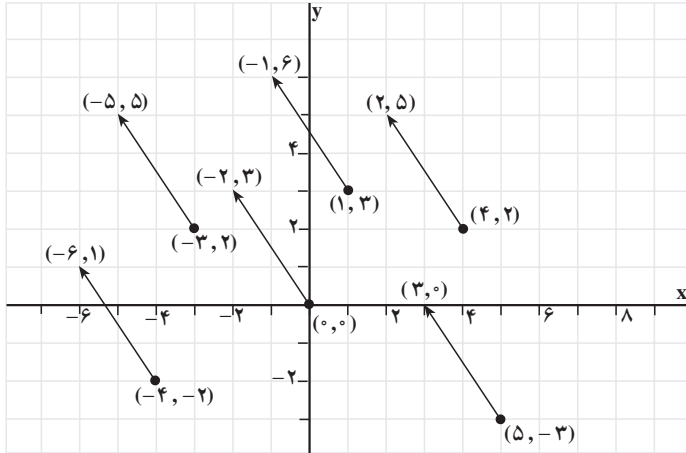
اگر مثلث RST را در امتداد بردار AB روی صفحه سُر بدهیم، بر مثلث $R'S'T'$ منطبق خواهد شد. این گونه حرکتها در صفحه یک انتقال^۱ را نشان می‌دهند. تحت انتقال همه نقطه‌های صفحه به یک فاصله و در یک جهت جابه‌جا می‌شوند.

مثال ۱: الف) نقطه‌های $(۵, -۳)$ ، $(۴, ۲)$ ، $(۱, ۳)$ ، $(۰, ۰)$ ، $(-۲, -۴)$ و $(-۳, ۲)$ و تصویرهای



شکل ۶

آنها را تحت تبدیل $T(x, y) = (x - 2, y + 3)$ در صفحه مشخص نمایید.
 (ب) هریک از نقطه‌ها را به تصویرش وصل کنید. مشاهدات خود را شرح دهید.
 حل: الف)



شکل ۷

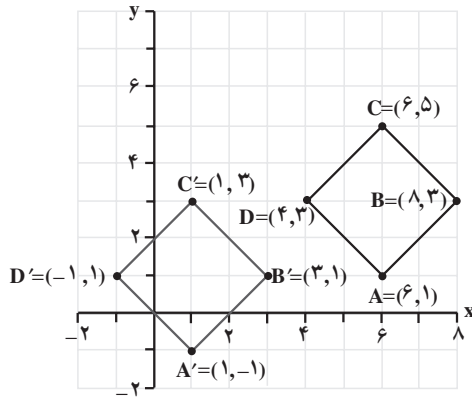
(ب) تبدیل T ، انتقالی است که هر نقطه را ۲ واحد به سمت چپ و ۳ واحد به طرف بالا می‌برد. تمام پاره‌خطهایی که از وصل کردن هریک از نقطه‌ها و تصویرهای نظیرشان به هم ایجاد شده، دارای طولهای برابر بوده و با یکدیگر موازیند.

ضابطهٔ نگاشت انتقال

تبدیل $T(x, y) = (x + h, y + k)$ به ازای هر دو عدد حقیقی ثابت h و k نشان‌دهندهٔ یک انتقال است.

مثال ۲: $A = (6, 1)$ ، $B = (8, 3)$ ، $C = (6, 5)$ و $D = (4, 3)$ رأسهای یک مربع هستند.
 الف) روی یک کاغذ شطرنجی، تصویر مربع را تحت انتقال $T(x, y) = (x - 5, y - 2)$ رسم کنید.

ب) مربع و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها با هم مقایسه کنید.
 حل: الف) تبدیل یافتهٔ مربع $ABCD$ تحت انتقال، چهارضلعی $A'B'C'D'$ است.



شکل ۸

(ب)

$$BC = \sqrt{(6-8)^2 + (5-3)^2} \quad ; \quad B'C' = \sqrt{(1-3)^2 + (3-1)^2}$$

$$= \sqrt{8} \quad \quad \quad = \sqrt{8}$$

$$= 2\sqrt{2} \quad \text{واحد} \quad \quad \quad = 2\sqrt{2} \quad \text{واحد}$$

پس طول پاره خط BC با طول تصویرش یعنی B'C' برابر است. به همین ترتیب می توان نشان داد که طول سایر ضلعها نیز با طول تصویرشان برابر است. پس تحت این انتقال طول ثابت می ماند.

$$\text{شیب BC} = \frac{5-3}{6-8} = -1 \quad ; \quad \text{شیب B'C'} = \frac{3-1}{1-3} = -1$$

چون دو پاره خط دارای شیبهای مساوی هستند پس پاره خط BC با تصویرش B'C' موازی است. به همین ترتیب می توان نشان داد که سایر ضلعها نیز با تصویرشان موازی هستند. پس تحت این انتقال شیب خطها تغییر نمی کند.

فعالیت ۲-۳

نگاشت انتقال $T(x, y) = (x+h, y+k)$ را در نظر بگیرید.

۱. تصویر نقطه های $A = (x_1, y_1)$ و $B = (x_2, y_2)$ را تحت انتقال T به دست آورده آنها را

A' و B' بنامید.

۲. مختصات بردارهایی را که A را به A' و B را به B' وصل می کند به دست آورید.

۳. طول پاره خطهای AB و A'B' را به دست آورده آنها را با هم مقایسه کنید.

۴. شیب پاره خطهای AB و A'B' را به دست آورده آنها را با هم مقایسه کنید.

ویژگیهای انتقال

- بردارهایی که هر نقطه را به نقطهٔ تصویرش تحت یک انتقال نظیر می‌سازند دارای طولهای مساوی و جهت‌های یکسان هستند.
- انتقال شیب خط را حفظ می‌کند.
- انتقال یک ایزومتري است.

مثال ۳: آیا تبدیلهای داده شدهٔ زیر انتقال هستند؟ درستی جواب خود را با ذکر دلیل ثابت کنید.

$$T(x, y) = (x + 1, y - 2) \quad \text{الف)}$$

$$T(x, y) = (2x, y) \quad \text{ب)}$$

$$T(x, y) = (x - 3, y) \quad \text{پ)}$$

حل: مورد الف) یک انتقال است زیرا اگر

$$T(x, y) = (x + 1, y - 2) = (x + h, y + k)$$

آنگاه

$$x + h = x + 1 \quad \text{و} \quad y + k = y - 2$$

در نتیجه

$$h = 1 \quad \text{و} \quad k = -2$$

مورد ب) یک انتقال نیست زیرا نمی‌توان عدد ثابتی مانند h را یافت به طوری که در ضابطهٔ

نگاشت انتقال صدق کند یعنی

$$T(x, y) = (2x, y) \neq (x + h, y + k)$$

مورد پ) یک انتقال است زیرا اگر $h = -3$ و $k = 0$ در نظر بگیریم آنگاه

$$T(x, y) = (x - 3, y) = (x + h, y + k)$$

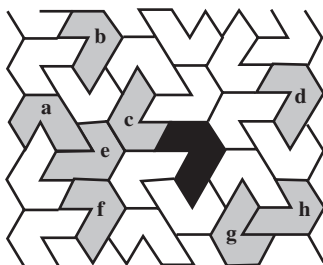
تصویر	نقطه	ضابطهٔ نگاشت انتقال
(۴, -۱)	(۰, ۰)	
	(۴, -۳)	$(x, y) \rightarrow (x + 5, y + 1)$
(۳, -۱)	(-۲, ۱)	
(-۳, ۰)		$(x, y) \rightarrow (x, y - 2)$
(۱, ۱)	(۴, -۲)	

مسأله‌ها

۱. جدول مقابل را کامل کنید.

۲. در نمودار زیر کدامیک از تصویرهای مشخص شده، تصویر انتقال یافته شکل سایه‌دار

است؟

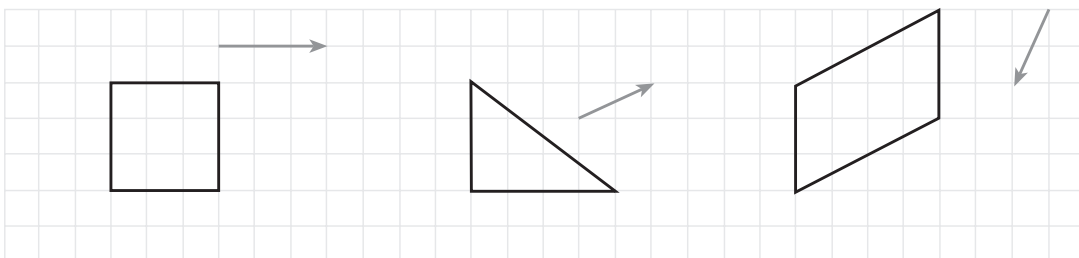


۳. تصویر انتقال یافته هر یک از شکل‌های زیر را در امتداد بردار داده شده رسم کنید.

(الف)

(ب)

(ب)



۴. انتقال $T(x, y) = (x - 2, y + 5)$ را در نظر بگیرید.

(الف) تصویر نقطه‌های $(0, 0)$ ، $(3, 1)$ و $(2, -6)$ را تحت انتقال T تعیین کنید.

(ب) نقطه‌هایی را مشخص کنید که تصویرهایشان $(0, 3)$ ، $(1, 7)$ و $(-3, 1)$ باشند.

(پ) همه نقطه‌ها و تصویرهایشان را که در قسمتهای (الف) و (ب) به دست آورده‌اید در صفحه

مختصات مشخص کنید. سپس نقطه‌های متناظر

را با یک پاره‌خط به هم وصل کنید.

(ت) طول و شیب هر پاره‌خط را تعیین

کنید.

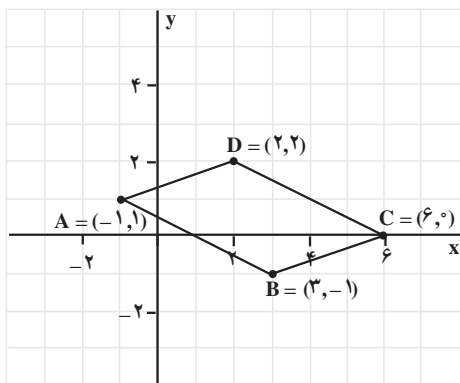
۵. شکل مقابل را به دفتر خود منتقل

کرده، سپس تصویر متوازی‌الاضلاع $ABCD$ را

تحت هر یک از انتقال‌های داده شده رسم کنید.

(الف) $T_1(x, y) = (x + 5, y + 2)$

(ب) $T_2(x, y) = (x - 8, y - 1)$



۶. $A = (-۴, ۲)$ ، $B = (۲, ۲)$ و $C = (-۴, ۵)$ رأسهای یک مثلث هستند، مثلث ABC و تصویرش را تحت هریک از انتقال‌های زیر رسم کنید.

(الف) $T_۱(x, y) = (x + ۶, y - ۳)$ (ب) $T_۲(x, y) = (x - ۳, y + ۱)$

۷. $A = (۱, ۱)$ ، $B = (۴, ۲)$ ، $C = (۳, ۵)$ و $D = (۰, ۴)$ رأسهای یک مربع‌اند. (الف) مربع و تصویرش را تحت انتقالی که رأس A را بر روی رأس B تصویر می‌کند، رسم کنید.

(ب) قاعده نگاشت این انتقال را بنویسید.

۸. تمرین ۷ را برای انتقال‌هایی که رأس A را بر روی

(الف) رأس C (ب) رأس D

تصویر می‌کند، تکرار کنید.

۹. $P = (-۳, ۰)$ ، $Q = (۵, ۴)$ و $R = (۲, -۲)$ رأسهای یک مثلث هستند.

(الف) مثلث و تصویرش را تحت انتقال $T(x, y) = (x + ۸, y + ۱)$ رسم کنید.

(ب) طول ضلعها، شیب ضلعها و مساحت را در مثلث و تصویرش با هم مقایسه کنید.

۱۰. نگاشت انتقال را در تصویر زیر توصیف کنید.





کاخ چهلستون در اصفهان

۳-۳- بازتاب

شما غالباً بازتاب ساختمانها، درختها و ابرها را در آبگیرها، استخرها، دریاچه‌ها و نهرها دیده‌اید. فروشگاهها و خانه‌ها پُر هستند از آینه‌هایی که تصویر اجسام را منعکس می‌سازند. هرگاه در آینه می‌نگرید، بازتاب خود را در آینه می‌بینید. بازتاب شما در آینه به همان فاصله از پشت آینه دیده می‌شود که شما از جلو آن.

فعالیت ۳-۳

شکلی در سمت چپ یک ورق کاغذ بکشید. خطهای رسم شده را با مداد پررنگ کنید. سپس کاغذ را از وسط تا کرده و روی خطهای پررنگ شده که از پشت کاغذ مشخص هستند، شکل را دوباره برگردان کنید. چه می‌بینید؟ فرق بین شکل برگردان شده و شکل اصلی چیست؟ نقطه‌های متناظر شکلها را به هم وصل کنید. خط تایی کاغذ نسبت به آنها چه وضعی دارد؟

به ازای هر خط L در صفحه، بازتاب نسبت به خط L ، تبدیلی است که تحت آن تصویر هر نقطه Q که روی خط L نباشد نقطه‌ای مانند Q' است به طوری که خط L عمودمنصف QQ' شود و تصویر هر نقطه مانند Q که روی خط L باشد خودش شود. خط L محور تقارن بازتاب نامیده می‌شود.



نقطه Q روی خط L نیست.
نقطه Q' بازتاب Q نسبت به خط L است.
خط L عمود منصف QQ' است.

یعنی
نقطه Q روی خط L است.
نقطه Q بازتاب خودش است.

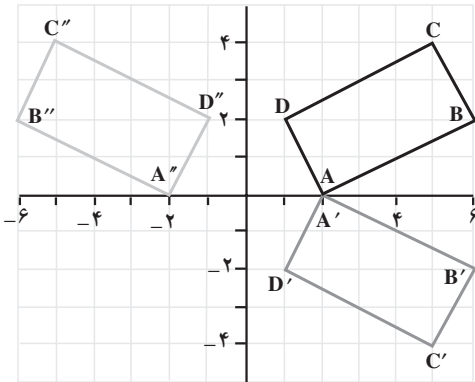
شکل ۹

مثال ۱: $A = (2, 0)$ ، $B = (6, 2)$ ، $C = (5, 4)$ و $D = (1, 2)$ رأسهای یک مستطیل هستند. مستطیل ABCD و تصویرهایش را تحت هریک از تبدیلهای زیر در یک صفحه مختصات رسم کنید، سپس ویژگی هریک از آنها را توضیح دهید.

$$R_1(x, y) = (x, -y) \text{ (الف)}$$

$$R_2(x, y) = (-x, y) \text{ (ب)}$$

حل:



شکل ۱۰

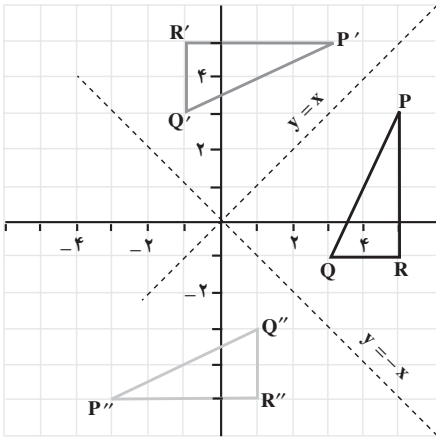
نقطه	تصویرها	
	$(x, -y)$	$(-x, y)$
$A = (2, 0)$	$A' = (2, 0)$	$A'' = (-2, 0)$
$B = (6, 2)$	$B' = (6, -2)$	$B'' = (-6, 2)$
$C = (5, 4)$	$C' = (5, -4)$	$C'' = (-5, 4)$
$D = (1, 2)$	$D' = (1, -2)$	$D'' = (-1, 2)$

تبدیل (الف) بازتاب نسبت به محور x ها و تبدیل (ب) بازتاب نسبت به محور y ها است.
مثال ۲: $P = (5, 3)$ ، $Q = (3, -1)$ و $R = (5, -1)$ رأسهای یک مثلث هستند. مثلث PQR و تصویرهایش را تحت هریک از تبدیلهای زیر در یک صفحه مختصات رسم کرده، سپس ویژگی هر تبدیل را مشخص کنید.

$$R_1(x, y) = (-y, -x) \text{ (ب)}$$

$$R_2(x, y) = (y, x) \text{ (الف)}$$

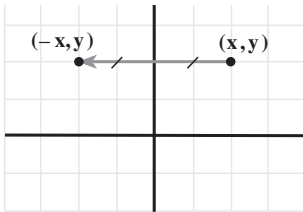
حل:



نقطه	تصویرها	
	(y, x)	$(-y, -x)$
$P = (5, 3)$	$P' = (3, 5)$	$P'' = (-3, -5)$
$Q = (3, -1)$	$Q' = (-1, 3)$	$Q'' = (1, -3)$
$R = (5, -1)$	$R' = (-1, 5)$	$R'' = (1, -5)$

شکل ۱۱

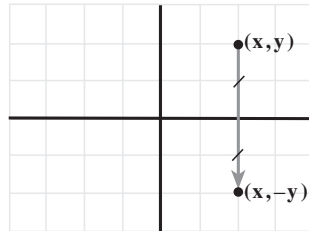
تبدیل (الف) بازتاب نسبت به خط $y = x$ و تبدیل (ب) بازتاب نسبت به خط $y = -x$ است. ضابطه هر نگاشت بازتاب بستگی به خطی دارد که محور تقارن آن است.



(ب)

بازتاب نسبت به محور y ها:

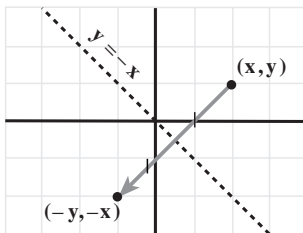
$$R(x, y) = (-x, y)$$



(الف)

بازتاب نسبت به محور x ها:

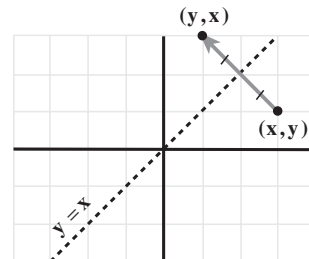
$$R(x, y) = (x, -y)$$



(ت)

بازتاب نسبت به خط $y = -x$:

$$R(x, y) = (-y, -x)$$



(ب)

بازتاب نسبت به خط $y = x$:

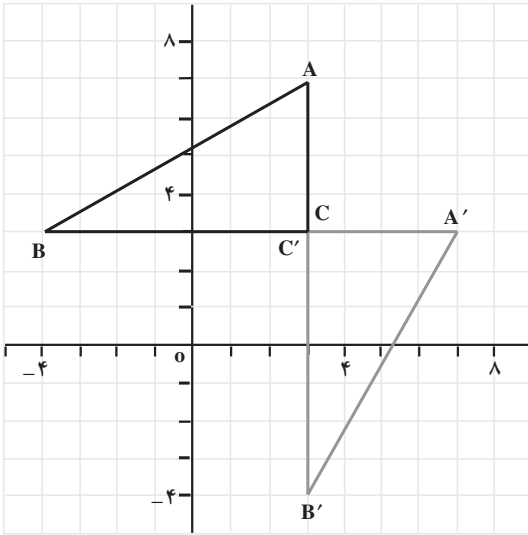
$$R(x, y) = (y, x)$$

شکل ۱۲

مثال ۳: $A = (3, 7)$ ، $B = (-4, 3)$ و $C = (3, 3)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $R(x, y) = (y, x)$ رسم کنید.

ب) مثلث و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها با هم مقایسه کنید.
حل: الف)



نقطه	تصویر
(x, y)	(y, x)
$A = (3, 7)$	$A' = (7, 3)$
$B = (-4, 3)$	$B' = (3, -4)$
$C = (3, 3)$	$C' = (3, 3)$

شکل ۱۳

ب)

$$\text{طول } AB = \sqrt{(-4-3)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{65} \text{ واحد}$$

$$\text{طول } A'B' = \sqrt{(3-7)^2 + (-4-3)^2} = \sqrt{65} \text{ واحد}$$

طول AB ، با طول تصویرش یعنی $A'B'$ برابر است. به همین ترتیب می‌توان نشان داد طول سایر ضلعها نیز با طول تصویرهایشان برابر هستند. تحت این بازتاب، طول ثابت می‌ماند. حال به بررسی شیب ضلعها و شیب تصویرهایشان می‌پردازیم.

$$\text{شیب } AB = \frac{3-7}{-4-3} = \frac{4}{7}$$

$$\text{شیب } A'B' = \frac{-4-3}{3-7} = \frac{7}{4}$$

یعنی ضلع AB موازی تصویرش $A'B'$ نیست. پس شیب خطها تحت بازتاب الزاماً حفظ

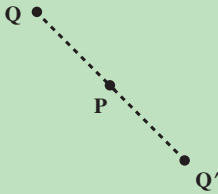
نمی‌شود.

در شکل مثال ۳، برای حرکت از A به B و به C ، جهت حرکت عکس جهت عقربه‌های ساعت است، در صورتی که برای حرکت از A' به B' و به C' جهت حرکت، در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است. پس بازتاب جهت حرکت را عکس می‌کند.

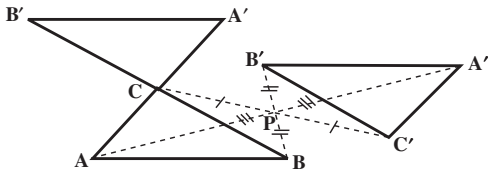
- ویژگیهای بازتاب نسبت به یک خط
- بازتاب شیب خط را الزاماً حفظ نمی‌کند.
- بازتاب جهت شکل را حفظ نمی‌کند.
- بازتاب یک ایزومتری است.

تاکنون بازتاب نسبت به یک خط را مورد بررسی قرار دادیم. نگاهیست بازتاب نسبت به یک نقطه نیز از اهمیت خاصی برخوردار است.

به ازای هر نقطه P در صفحه بازتاب نسبت به نقطه P ، نگاشتی است که تحت آن هر نقطه Q در صفحه روی نقطه‌ای مانند Q' طوری نگاشته می‌شود که P, Q و Q' روی یک خط راست باشند و $PQ = PQ'$. نقطه P مرکز تقارن این بازتاب نامیده می‌شود.



بسیاری از پدیده‌های طبیعی متقارن هستند. برها نمونه‌های زیبایی از این تقارن هستند.

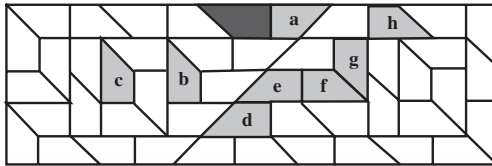
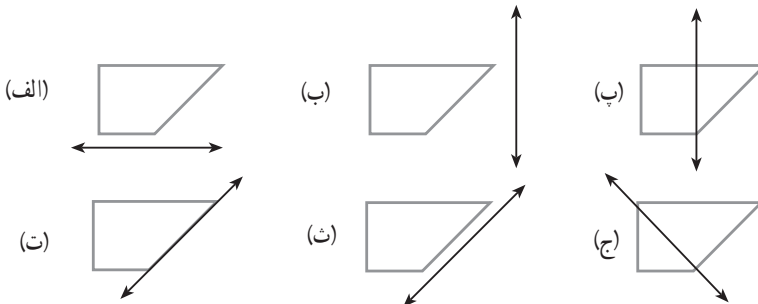


در شکل مقابل مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به نقطه C است و مثلث $A'B'C'$ بازتاب مثلث ABC نسبت به نقطه P است.

شکل ۱۴

مسأله‌ها

۱. نمودارهای زیر را در دفترتان کشیده و بازتاب آنها را تحت خطهای داده شده رسم کنید.



۲. در نمودار مقابل کدامیک از تصاویر مشخص شده، تصویر شکل سایه‌دار تحت بازتاب نسبت به یک خط است؟

۳. $A = (3, 1)$ ، $B = (7, 1)$ و

$C = (7, 3)$ رأسهای یک مثلث اند. مثلث و تصویرش را تحت بازتاب‌های زیر رسم کنید.

الف) $R_1(x, y) = (-x, y)$

ب) $R_2(x, y) = (x, -y)$

پ) $R_3(x, y) = (y, x)$

ت) $R_4(x, y) = (-y, -x)$

۴. $L = (0, 6)$ ، $K = (1, 6)$ ، $J = (2, 2)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت بازتاب $R(x, y) = (x, -y)$ رسم کنید.

ب) مثلث و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها و مساحت با هم مقایسه کنید.

۵. $A = (0, 2)$ ، $B = (-5, 0)$ ، $C = (-3, -5)$ و $D = (2, -3)$ رأسهای یک مربع اند.

الف) مربع و تصویرش را تحت بازتاب $R(x, y) = (-y, -x)$ رسم کنید.

ب) مربع و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها و مساحت با هم مقایسه کنید.

۶. $P = (2, 4)$ ، $Q = (-1, 3)$ و $R = (1, -1)$ رأسهای یک مثلث اند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $F(x, y) = (-x + 6, y)$ رسم کنید.

(ب) تبدیل F را توصیف کنید.

۷. $H = (4, 3)$ و $G = (3, 0)$ ، $F = (-3, -2)$ ، $E = (-2, 1)$ رأسهای یک متوازی الاضلاع

هستند.

(الف) متوازی الاضلاع و تصویرش را تحت تبدیل $T(x, y) = (y + 3, x - 3)$ رسم کنید.

(ب) تبدیل T را توصیف کنید.

۸. $S = (7, 4)$ و $R = (8, 1)$ ، $Q = (4, -1)$ ، $P = (2, 3)$ رأسهای یک چهار ضلعی هستند.

(الف) چهار ضلعی و تصویرش را تحت تبدیل $G(x, y) = (-y - 1, -x - 1)$ رسم کنید.

(ب) تبدیل G را توصیف کنید.

۹. $A = (1, 4)$ ، $B = (3, -2)$ و $C = (5, 1)$ رأسهای یک مثلث هستند.

(الف) تصویر مثلث ABC را تحت بازتاب نسبت به خط

$x + 2 = 0$ رسم کرده آن را $A'B'C'$ بنامید.

$y + 3 = 0$ رسم کرده آن را $A''B''C''$ بنامید.

(ب) تصویر مثلث $A'B'C'$ را تحت بازتاب نسبت به خط $y + 3 = 0$ رسم کنید.

(پ) تصویر مثلث $A''B''C''$ را تحت بازتاب نسبت به خط $x + 2 = 0$ رسم کنید.

۱۰. در نمودار مقابل مثلث $A'B'C'$ ، تصویر بازتاب مثلث ABC است.

(الف) محور تقارن را رسم کنید.

(ب) معادله محور تقارن را بنویسید.

(پ) تصویر $P = (-3, 5)$ را تحت این بازتاب

به دست آورید.

۱۱. تحت یک بازتاب نقطه $(-3, -1)$ روی

نقطه $(3, 5)$ تصویر می شود.

(الف) محور تقارن را رسم کرده، تصویر

نقطه های $(1, 5)$ ، $(2, -1)$ و $(4, -2)$ را تحت

همان بازتاب در صفحه مختصات مشخص کنید.

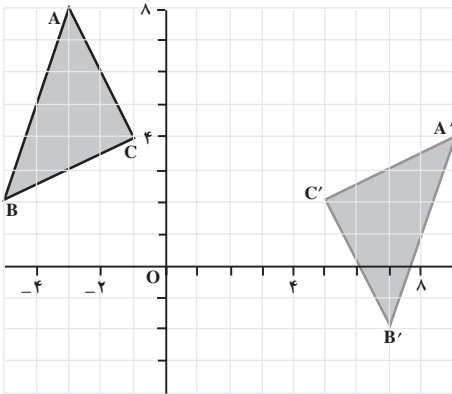
(ب) نقطه هایی که تحت همان بازتاب تصویرشان نقطه های $(3, 2)$ ، $(-4, 6)$ و $(-1, -3)$ باشند،

را مشخص کنید.

(پ) معادله محور تقارن را بنویسید.

۱۲. اگر O مبدأ مختصات باشد، مختصات تبدیل یافته هر نقطه (x, y) تحت بازتاب نسبت به

نقطه O را به دست آورید.





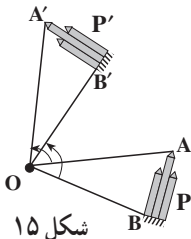
شهر بازی تهران

۳-۴ - دوران

یک نمونه از مراکز تفریحی که در برخی شهرستانها وجود دارد، شهر بازی است. در این گونه مراکز وسایل بازی متعددی وجود دارد که اغلب آنها با ایجاد حرکت‌های مختلف در بازدیدکنندگان شور و هیجان ایجاد می‌کند. از جمله رایجترین وسایل در این مراکز، چرخ و فلک است. حرکت چرخ و فلک به صورت چرخشی است که دوران^۱ نامیده می‌شود.

حرکت‌های دورانی از جمله حرکت‌هایی هستند که در زندگی روزمره بسیار با آنها سروکار داریم. به عنوان مثال، هنگام چرخاندن دستگیره در، پایین آوردن شیشه اتومبیل، بازکردن شیر آب، تراشیدن مداد و گرداندن کلید در قفل تجربه‌ای از حرکت دورانی به دست آورده‌اید. آیا تا به حال به ساختار هندسی این گونه حرکتها نیز فکر کرده‌اید؟

فعالیت ۳-۴



شکل ۱۵

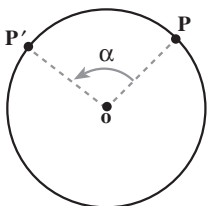
تصویر مقابل مدلی از یک چرخ و فلک است. این تصویر، دو وضعیت مختلف از یک موشک چرخ و فلک در حال حرکت را نشان می‌دهد. وضعیت اول موشک را با P ، وضعیت دوم آن را با P' و محور چرخ و فلک را با O نشان داده‌ایم.

۱. A و B دو نقطه از وضعیت اول، A' و B' دو نقطه متناظر آنها از وضعیت دوم موشک هستند. زاویه‌های $\hat{A}OA'$ و $\hat{B}OB'$ را به وسیله نقله اندازه گرفته با هم مقایسه کنید.
۲. دو نقطه متناظر دیگر روی P و P' به دلخواه در نظر بگیرید و آنها را X و X' نامگذاری کنید. اندازه $\hat{X}OX'$ را تعیین کنید.
۳. تجربه بند ۲ را با انتخاب نقطه‌های متناظر دیگر تکرار کنید.
۴. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA رسم کنید. آیا این دایره از A' می‌گذرد؟
۵. دایره‌هایی به مرکز O و شعاعهای OB و OX رسم کنید. آیا این دایره‌ها نیز از B' و X' می‌گذرند؟
۶. آیا نتیجه بند ۵، برای هر دو نقطه متناظر دیگر نیز برقرار است؟

احتمالاً از انجام فعالیت بالا به این نتیجه رسیده‌اید که نقطه‌های متناظر روی دایره‌ای به مرکز O جایجا می‌شوند، که این نقطه مرکز دوران نامیده می‌شود. همانطور که مشاهده کردید از وصل کردن نقطه‌های متناظر به مرکز دوران، زاویه‌های برابر تشکیل شدند ($\hat{A}OA' = \hat{B}OB' = \hat{X}OX' = \dots$)، که این اندازه مشترک زاویه دوران نامیده می‌شود.

یک دوران به مرکز O و زاویه α ، تبدیلی است که هر نقطه A در صفحه را به نقطه‌ای مانند A' از آن صفحه نظیر می‌کند به طوری که الف) مرکز دوران یعنی نقطه O ثابت است؛
 ب) اگر A نقطه‌ای غیر از O باشد، آنگاه $OA = OA'$ و $\hat{A}OA' = \alpha$ (زاویه دوران).

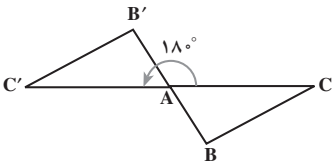
در دایره‌ای به مرکز O نقطه‌ای مانند P را در نظر گرفته و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، روی دایره از P به P' حرکت کنید. به طوری که $\hat{P}OP' = \alpha$. چون $OP = OP'$ ، پس P' تصویر نقطه P تحت دوران به مرکز O و اندازه α است.



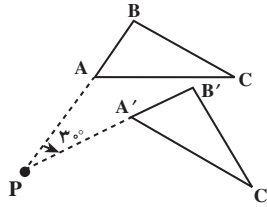
شکل ۱۶

اگر α یعنی اندازه زاویه مثبت باشد، دوران در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است و اگر α منفی باشد دوران در جهت حرکت عقربه‌های ساعت است.

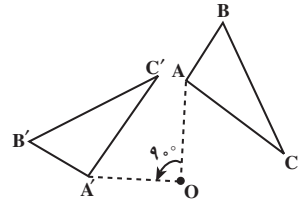
مثال ۱:



(ب) مرکز دوران A
زاویه دوران 180°



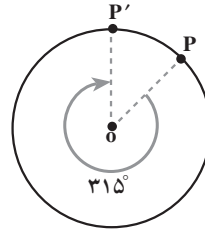
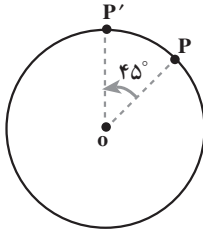
(ب) مرکز دوران P
زاویه دوران -30°



(الف) مرکز دوران O
زاویه دوران 90°

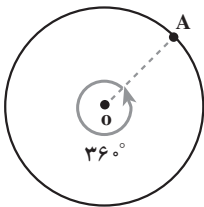
شکل ۱۷

دو دوران شکل زیر را با یکدیگر مقایسه کنید. شکل سمت چپ، P را توسط دورانی به مرکز O و زاویه 45° روی P' تصویر می‌کند و شکل سمت راست P را توسط دورانی به مرکز O و زاویه -315° روی P' تصویر می‌کند. توجه کنید که نتیجه هر دو دوران یکسان است.



شکل ۱۸

دورانی به زاویه 36° ، هر نقطه‌ای مانند A را به محل اولیه‌اش تصویر می‌کند. یک چنین دورانی، یک دوران کامل خوانده می‌شود.



شکل ۱۹

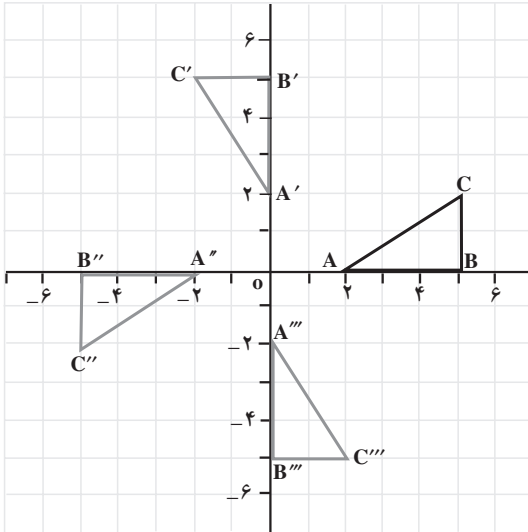
مثال ۲: $A = (2, 0)$ ، $B = (5, 0)$ و $C = (5, 2)$ رأسهای یک مثلث هستند. در یک صفحه، مثلث ABC و تصویرهایش را تحت هر یک از تبدیلهای زیر رسم کرده سپس هر تبدیل را توصیف کنید.

(الف) $R_1(x, y) = (-y, x)$

(ب) $R_2(x, y) = (-x, -y)$

(پ) $R_3(x, y) = (y, -x)$

نقطه	تصویرها		
	$(-y, x)$	$(-x, -y)$	$(y, -x)$
$A = (2, 0)$	$A' = (0, 2)$	$A'' = (-2, 0)$	$A''' = (0, -2)$
$B = (5, 0)$	$B' = (0, 5)$	$B'' = (-5, 0)$	$B''' = (0, -5)$
$C = (5, 2)$	$C' = (-2, 5)$	$C'' = (-5, -2)$	$C''' = (2, -5)$

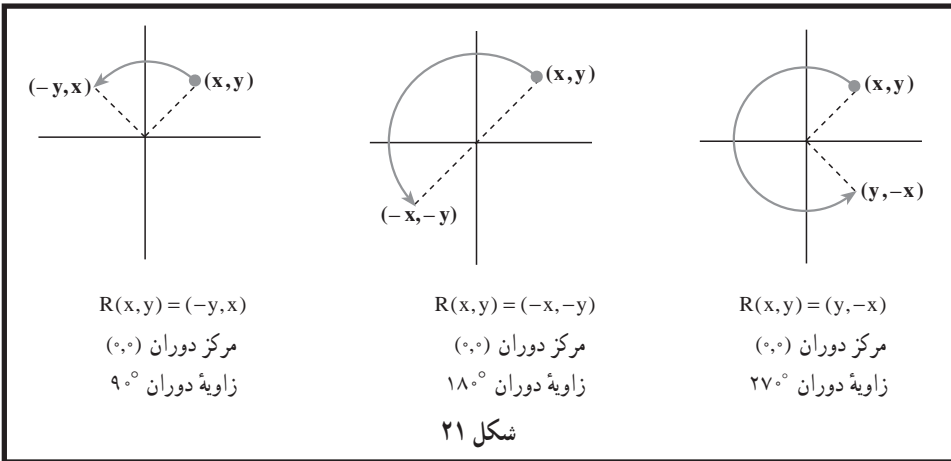


حل:

این تبدیلهایا، دوران‌هایی به مرکز مبدأ مختصات و به ترتیب به زاویه‌های 90° ، 180° و 270° هستند.

ضابطه نگاشت برای دوران‌ها بستگی به مکان مرکز دوران و اندازه زاویه دوران دارد.

شکل ۲۰



$R(x, y) = (-y, x)$
مرکز دوران $(0, 0)$
زاویه دوران 90°

$R(x, y) = (-x, -y)$
مرکز دوران $(0, 0)$
زاویه دوران 180°

$R(x, y) = (y, -x)$
مرکز دوران $(0, 0)$
زاویه دوران 270°

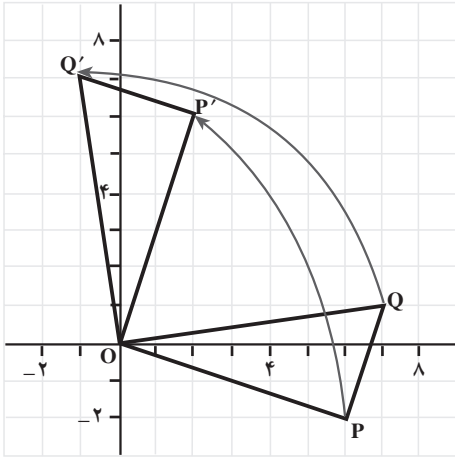
شکل ۲۱

نکته: دوران به مرکز O و زاویه 180° ، بازتاب نسبت به نقطه O نیز هست. در این حالت نقطه O مرکز تقارن است.

مثال ۳: $O = (0, 0)$ ، $P = (6, -2)$ و $Q = (7, 1)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) نمودار مثلث OPQ و تصویرش تحت تبدیل $R(x, y) = (-y, x)$ را رسم کنید.

ب) طول و شیب ضلعهای مثلث و تصویرش را با هم مقایسه کنید.
حل: الف)



نقطه	تصویر
(x, y)	$(-y, x)$
$O = (0, 0)$	$O' = (0, 0)$
$P = (6, -2)$	$P' = (2, 6)$
$Q = (7, 1)$	$Q' = (-1, 7)$

شکل ۲۲

این تبدیل دورانی به مرکز $O = (0, 0)$ و زاویه 90° است.
ب)

$$\text{طول } PQ = \sqrt{(7-6)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{10} \quad \text{واحد}$$

$$\text{طول } P'Q' = \sqrt{(-1-2)^2 + (7-6)^2} = \sqrt{10} \quad \text{واحد}$$

طول PQ و طول تصویر آن یعنی $P'Q'$ با یکدیگر برابرند. به همین ترتیب می توان نشان داد که سایر ضلعها نیز دارای طولی برابر طول تصویرشان هستند. پس تحت این دوران طول پاره خطها ثابت می ماند.

$$\text{شیب } PQ = \frac{1+2}{7-6} = 3 \quad \text{و} \quad \text{شیب } P'Q' = \frac{7-6}{-1-2} = \frac{-1}{3}$$

به طوری که دیده می شود، PQ بر تصویرش $P'Q'$ عمود است. می توان نشان داد که ضلعهای دیگر نیز بر تصویر خود عمود هستند. بنابراین، لزومی ندارد تحت دوران، شیب خطها ثابت بماند. تحت دوران، فاصله بین نقطه ها ثابت می ماند، یعنی دوران یک ایزومتري است. پس تصویر یک شکل تحت دوران، شکلی همنهشت با شکل اولیه خواهد بود.

با توجه به مثال ۳ ویژگیهای دوران را می توان به شکل زیر در نظر گرفت.

ویژگیهای دوران

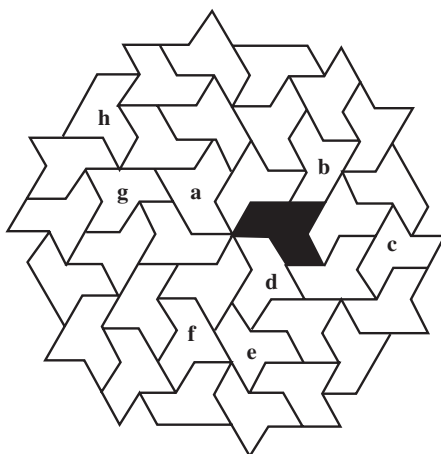
- دوران مرکز دوران را ثابت نگه می دارد؛
- دوران الزاماً شیب خط را حفظ نمی کند؛
- دوران یک ایزومتري است.

مسأله ها

۱. دوران $R(x,y) = (-y,x)$ مفروض است.

الف) تصویر نقطه های $(4,1)$ ، $(0,5)$ و $(-3,2)$ را تحت این دوران تعیین کنید.
 ب) نقطه هایی را بیابید که تحت این دوران، تصویرشان $(2,6)$ ، $(3,0)$ و $(-1,-4)$ باشد.
 پ) همه نقطه ها و تصویرهایی را که در (الف) و (ب) به دست آورده اید در صفحه مختصات مشخص کنید.

۲. در نمودار زیر، با استفاده از استدلال استقرایی، تعیین کنید کدام یک از تصویرهای مشخص شده، تصویر دوران یافته شکل سایه دار نسبت به یک مرکز دوران است؟

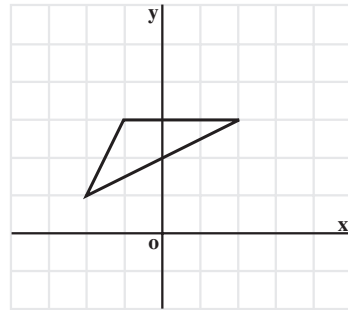
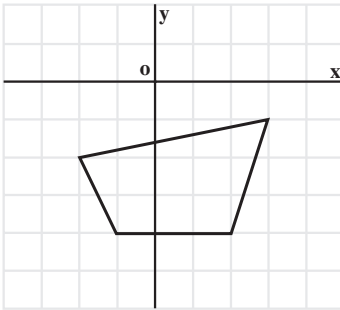
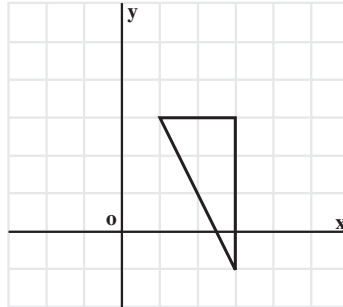


۳. با در نظر گرفتن O به عنوان مرکز دوران، دوران یافته شکلها را در هر یک از حالت های

زیر رسم کنید.

الف) دوران 90°

ب) دوران 180°



۴. $P = (2, 5)$ ، $A = (4, 5)$ و $K = (4, 1)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت دوران $R(x, y) = (-y, x)$ رسم کنید.

ب) طول و شیب ضلعها و مساحت را در مثلث و تصویرش با هم مقایسه کنید.

۵. $A = (-1, -2)$ ، $M = (7, 2)$ ، $I = (5, 6)$ و $N = (-3, 2)$ رأسهای یک مستطیل هستند.

الف) مستطیل و تصویرش را تحت دوران $R(x, y) = (y, -x)$ رسم کنید.

ب) طول و شیب ضلعها و مساحت را در مستطیل و تصویرش با هم مقایسه کنید.

۶. $I = (5, 0)$ ، $L = (7, 0)$ و $A = (5, 3)$ رأسهای یک مثلث هستند.

الف) مثلث و تصویرش را تحت تبدیل $F(x, y) = (-y + 3, x - 3)$ رسم کنید.

ب) تصویر مثلث ALI را ابتدا تحت دوران $R(x, y) = (-y, x)$ پیدا کرده و آن را $A'L'I'$

بنامید. سپس تصویر $A'L'I'$ را تحت انتقال $T(x,y) = (x+3, y-3)$ تعیین کنید. نتیجه به دست آمده را با نتیجه (الف) مقایسه کنید.

۷. رأسهای یک دوزنقه هستند. $A = (3, 3)$ و $M = (1, -1)$ ، $O = (-2, -2)$ ، $H = (-3, 1)$. دوزنقه و تصویرش را تحت هر یک از تبدیلهای زیر رسم کنید.

الف) $F(x,y) = (-y+6, x)$ ب) $G(x,y) = (-x+6, -y+6)$

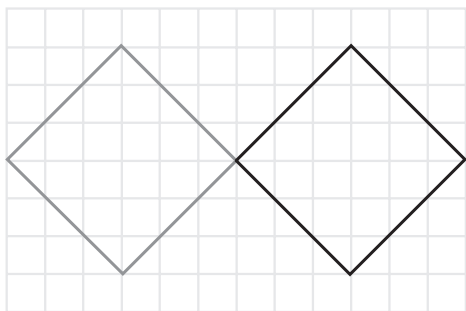
پ) $S(x,y) = (y, -x+6)$

۸. رأسهای یک چهارضلعی هستند. $I = (6, -3)$ و $L = (5, -5)$ ، $O = (2, -5)$ ، $G = (1, -1)$. الف) چهارضلعی و تصویرش را تحت تبدیل $T(x,y) = (x+9, -y)$ رسم کنید.

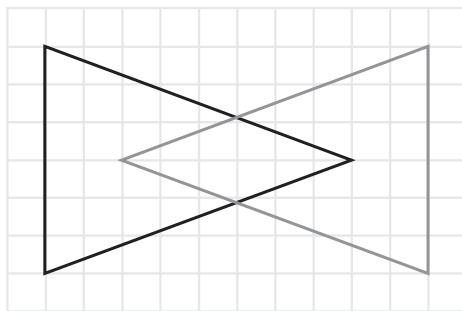
ب) نشان دهید که تبدیل T ، نه انتقال است، نه بازتاب و نه دوران.

پ) این تبدیل جدید چه ویژگیهایی دارد؟

۹. شکلهای خاکستری، دوران یافته شکلهای سیاه تحت یک دوران هستند. در هر یک از موارد زیر، مرکز دوران و زاویه دوران را مشخص کنید.



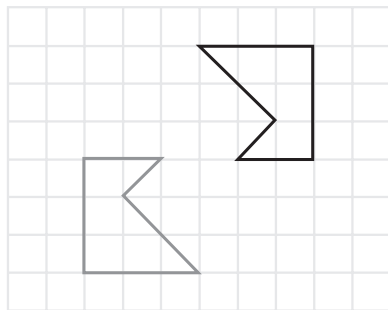
(ب)



(الف)



(ت)



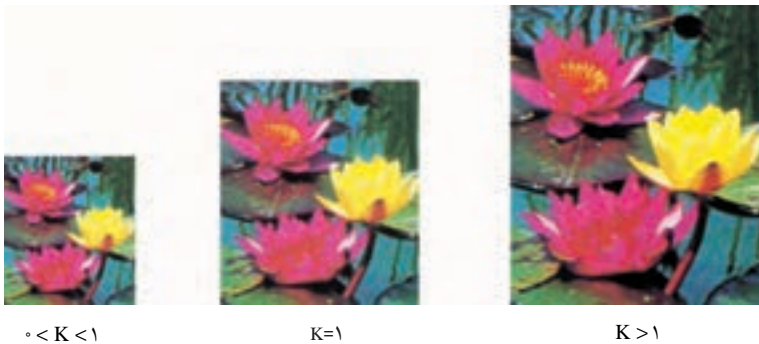
(ب)



سقف مسجد شیخ لطف الله در اصفهان

۳-۵- تجانس

تنها اختلافی که دو شکل متشابه با هم دارند، آن است که الزاماً ابعاد با هم یکسان نیستند. وقتی یک تصویر عکاسی را بزرگ می‌کنید، تنها تغییری که نسبت به تصویر اولیه پیدا می‌کند آن است که با یک مقیاس، تمام ابعاد آن بزرگ می‌شود. به همین ترتیب اگر بخواهند تصویر نقشه بزرگ جغرافیایی ایران را که در کلاس شما آویزان است در کتاب شما بیاورند، باید تمام ابعاد تصویر را با یک مقیاس، کوچک کنند.



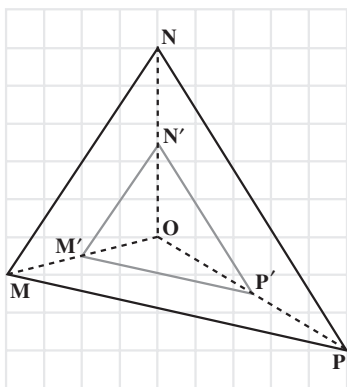
در واقع، تصویر جدید هم جنس اولی اما با یک مقیاس، بزرگتر یا کوچکتر شده است. ساده‌ترین تبدیل از این نوع تجانس^۱ است. تحت تجانس، همه ابعاد یک شکل با یک عامل $k \neq 0$ که نسبت

۱- Dilation

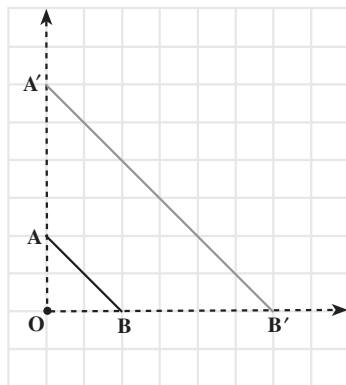
تجانس (مقیاس) نامیده می‌شود، بزرگ یا کوچک می‌شود.

تجانس به مرکز O و نسبت k تبدیلی است که هر نقطه A در صفحه را به نقطه‌ای مانند A' از آن صفحه طوری نظیر کند که
 الف) مرکز تجانس یعنی نقطه O ثابت باشد؛
 ب) A' روی نیم خط OA قرار گیرد و $OA' = k \cdot OA$.

توجه: در این کتاب نسبت تجانس را مثبت در نظر می‌گیریم.
 مثال ۱: شکل زیر نمونه‌هایی از تجانس را نشان می‌دهد.



ب)
 مرکز تجانس O
 مقیاس $\frac{1}{3}$



الف)
 مرکز تجانس O
 مقیاس ۳

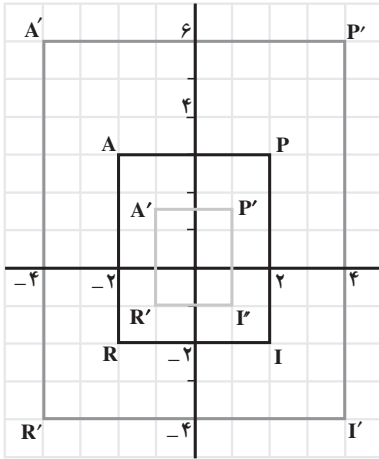
شکل ۲۳

مثال ۲: $I = (2, -2)$ و $R = (-2, -2)$ ، $A = (-2, 3)$ ، $P = (2, 3)$ هستند. این مستطیل و تصویرهایش را تحت هر یک از تبدیلهای زیر در یک دستگاه مختصات رسم کرده، سپس آنها را با مستطیل PARI مقایسه کنید.

الف) $D_1(x, y) = (2x, 2y)$

ب) $D_2(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$

حل:



شکل ۲۴

نقطه	تصویر	
	$(2x, 2y)$	$(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$
$P = (2, 3)$	$P' = (4, 6)$	$P' = (1, 1.5)$
$A = (-2, 3)$	$A' = (-4, 6)$	$A' = (-1, 1.5)$
$R = (-2, -2)$	$R' = (-4, -4)$	$R' = (-1, -1)$
$I = (2, -2)$	$I' = (4, -4)$	$I' = (1, -1)$

هر دو تبدیل بالا تجانس هستند. تبدیل (الف) مستطیل را با مقیاس ۲ بزرگ کرده و تبدیل (ب) آن را با مقیاس $\frac{1}{2}$ کوچک کرده است.

ضابطه نگاشت تجانس: تبدیل $D(x, y) = (kx, ky)$ در صفحه مختصات یک تجانس با نسبت تجانس k و مرکز تجانس $(0, 0)$ را نشان می‌دهد.

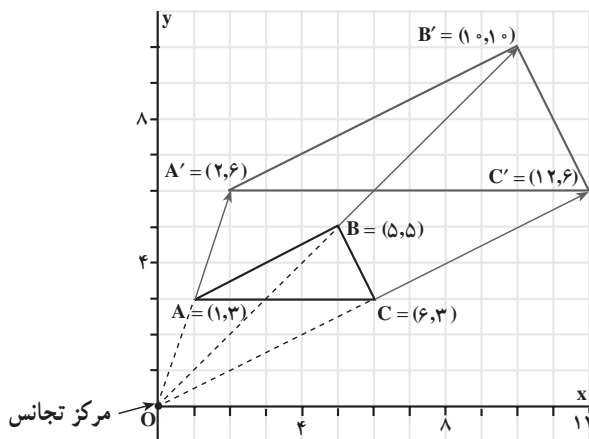
اگر $K > 1$ ، تجانس یک انبساط است.

اگر $0 < K < 1$ ، تجانس یک انقباض است.

مثال ۳: $A = (1, 3)$ ، $B = (5, 5)$ و $C = (6, 3)$ رأسهای یک مثلث اند. (الف) مثلث و تصویرش تحت تبدیل $D(x, y) = (2x, 2y)$ را رسم کنید. (ب) مثلث و تصویرش را از نظر طول و شیب ضلعها و مساحتشان با هم مقایسه کنید.

پ) خطهایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند، نسبت به هم چه وضعی دارند؟

حل: الف)



شکل ۲۵

$$\begin{aligned} \text{طول } AB &= \sqrt{(5-1)^2 + (5-3)^2} \quad \text{و} \quad \text{طول } A'B' = \sqrt{(10-2)^2 + (10-6)^2} \\ &= \sqrt{16+4} & &= \sqrt{64+16} \\ &= \sqrt{20} & &= \sqrt{80} \\ &= 2\sqrt{5} \text{ واحد} & &= 4\sqrt{5} \text{ واحد} \end{aligned}$$

پس $A'B' = 2AB$ ، همچنین $B'C' = 2BC$ و $A'C' = 2AC$ (خودتان محاسبه را انجام دهید). بنابراین،

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = 2$$

$$\text{شیب } AB = \frac{5-3}{5-1} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \text{شیب } A'B' = \frac{10-6}{10-2} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه، $A'B' \parallel AB$ ، حال نشان دهید که $B'C' \parallel BC$ و $A'C' \parallel AC$ ، با توجه به شکل،

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} (5)(2) = 5 \text{ (واحد)}^2$$

$$\text{مساحت مثلث } A'B'C' = \frac{1}{2} b \cdot h = \frac{1}{2} (10)(4) = 20 \text{ (واحد)}^2$$

بنابراین،

$$\text{مساحت مثلث } A'B'C' = 4 (\text{مساحت مثلث } ABC)$$

پ) از به هم وصل کردن نقطه‌های نظیر، خطهای AA' ، BB' و CC' به دست می‌آیند (شکل ۲۵). با توجه به شکل، مشاهده می‌شود خطهایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند از مبدأ مختصات می‌گذرند. این مطلب را با استفاده از شیب خطها ثابت می‌کنیم.

$$\text{شیب } OA = \frac{3-0}{1-0} = 3 \qquad \text{شیب } OA' = \frac{6-3}{2-0} = 3$$

بنابراین، نقطه‌های O ، A و A' روی یک خط راست قرار دارند. در این حالت نقطه‌های O ، A و A' هم خط^۱ نامیده می‌شوند. با همین استدلال نقطه‌های O ، B و B' ، هم چنین نقطه‌های O ، C و C' نیز هم خط هستند. بنابراین، در دو شکل مجانس، خطهایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند، یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌نمایند که آن نقطه، همان مرکز تجانس است.

ویژگیهای تجانس

- تجانس شیب خط را حفظ می‌کند؛
- تحت تجانس، مرکز تجانس ثابت می‌ماند؛
- تجانس طول یا مساحت را حفظ نمی‌کند (مگر در حالتی که $k=1$)؛
- تجانس طول را با ضریب k و مساحت را با ضریب k^2 تغییر می‌دهد؛
- خطهایی که نقطه‌های نظیر را به هم وصل می‌کنند، در مرکز تجانس هم‌رسند.

مسأله‌ها

۱. $J = (-1, 2)$ ، $A = (4, 2)$ ، $M = (3, 5)$ رأسهای یک مثلث‌اند.

الف) مثلث JAM را رسم کنید.

ب) تبدیل یافته مثلث JAM را تحت $D(x, y) = (2x, 2y)$ رسم کنید.

پ) مثلث JAM و تبدیل یافته آن را از نظر طول و شیب ضلعها و مساحت با هم مقایسه کنید.

ت) نسبت تجانس و مرکز تجانس را تعیین کنید.

۲. $M = (2, 2)$ ، $A = (4, 2)$ و $N = (2, -2)$ رأسهای یک مثلث‌اند.

الف) مثلث MAN و تصویرش مثلث $M'A'N'$ را تحت تبدیل $D(x, y) = (3x, 3y)$ رسم کنید.

ب) MM' ، AA' و NN' را رسم کرده، سپس آنها را امتداد دهید تا یکدیگر را در $O = (0, 0)$ قطع کنند.

پ) طول پاره‌خطهای OM ، OM' ، OA ، OA' ، ON ، ON' و نسبت‌های $\frac{OM'}{OM}$ ، $\frac{OA'}{OA}$ را محاسبه نمایید.

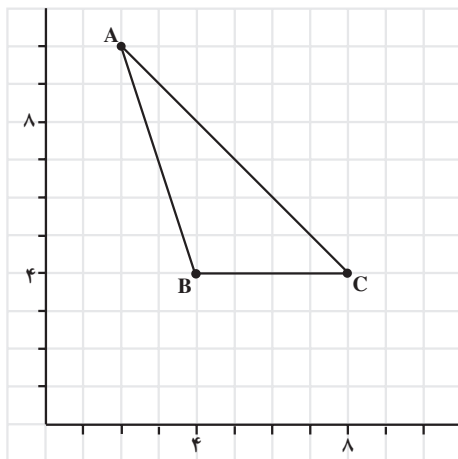
ت) طول پاره‌خطهای $M'A'$ ، MA ، $A'N'$ ، AN ، $M'N'$ ، MN و نسبت‌های $\frac{M'A'}{MA}$ ، $\frac{A'N'}{AN}$ و $\frac{M'N'}{MN}$ را محاسبه نمایید.

ث) عامل مقیاس چقدر است؟

۳. $A = (2, 0)$ ، $B = (2, 3)$ ، $C = (4, 3)$ و $D = (4, 0)$ رأس‌های یک مستطیل هستند. الف) مستطیل و تصویر مجانس آن را با در نظر گرفتن $(0, 0)$ به عنوان مرکز تجانس و $\frac{1}{3}$ به عنوان عامل مقیاس رسم کنید.

ب) این تجانس انبساط است یا انقباض؟ چرا؟

پ) طول پاره‌خطهای OB ، OB' ، OC ، OC' را اندازه بگیرید و نسبت‌های $\frac{OB'}{OB}$ و $\frac{OC'}{OC}$ را محاسبه نمایید.



ت) مستطیل $ABCD$ و تصویرش را از نظر طول ضلع و مساحت با هم مقایسه کنید.

۴. شکل زیر را در دفتر خود برگردان کرده، سپس با در نظر گرفتن $(0, 0)$ به عنوان مرکز تجانس، تصویر مجانس مثلث ABC را با نسبت‌های تجانس زیر رسم کنید.

الف) ۲

ب) $\frac{1}{5}$

پ) $\frac{0}{5}$

۵. با توجه به شکل زیر، نسبت تجانس یعنی k را برای هر یک از تجانس‌های زیر تعیین کنید.

الف) $A \rightarrow B$

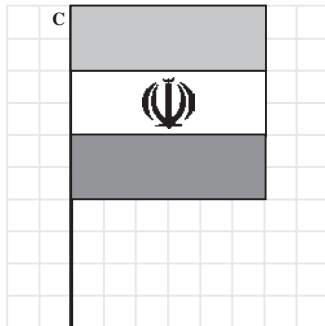
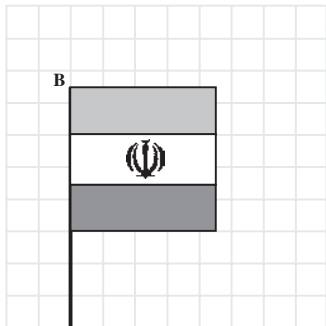
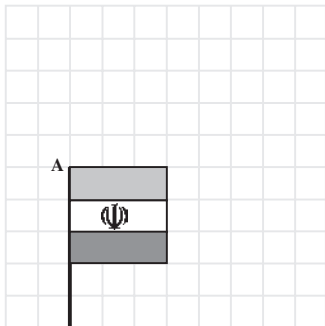
ب) $A \rightarrow C$

پ) $B \rightarrow C$

ت) $C \rightarrow A$

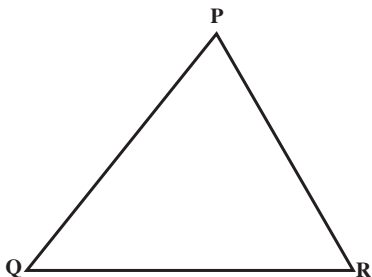
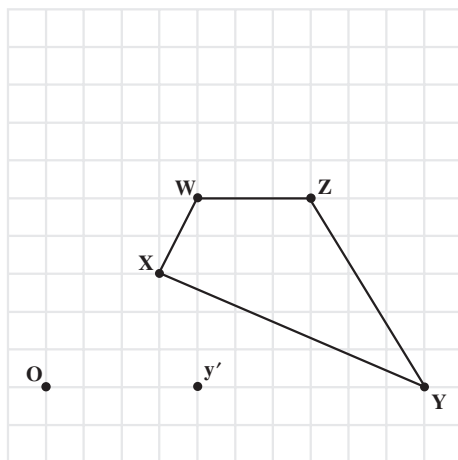
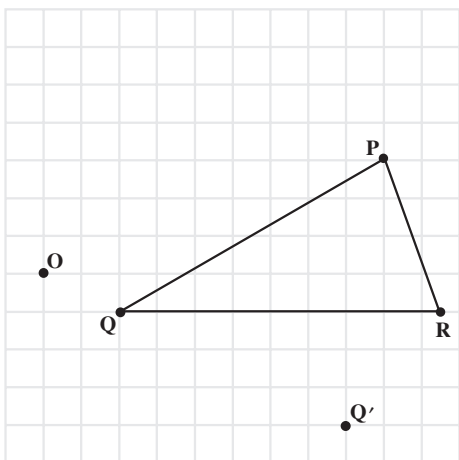
ث) $C \rightarrow B$

ج) $B \rightarrow A$



۶. در شکل‌های زیر، مرکز تجانس (O) و تبدیل یافته‌ی یک نقطه از هر شکل داده شده است.

شکلها را در دفتر خود برگردان کنید و تصویر تبدیل یافته آنها را کامل کنید.



۷. الف) مثلث PQR و تصویرهای مجانس آن را

با نسبت تجانس ۲ و به مرکزهای P، Q و R رسم کنید.

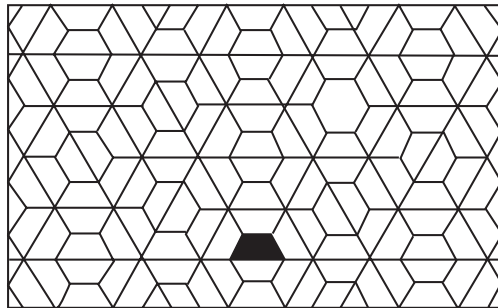
ب) در هر یک از قسمتهای بند الف) نسبت

مساحت مثلث تبدیل یافته به مثلث PQR را به دست آورید.

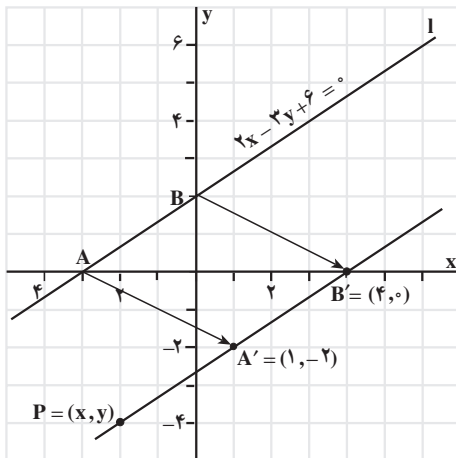
۸. مختصات رأسهای دو چند ضلعی داده شده است. با در نظر گرفتن $(0,0)$ به عنوان مرکز تجانس، هر چند ضلعی را در یک صفحه مجزا رسم کرده، تصویر مجانس آن را به ازای نسبتهای تجانس داده شده تعیین کنید.

الف) $(-4,1), (2,1), (5,2)$	$k = \frac{1}{4}$	$k = 3$
ب) $(0,0), (4,0), (6,6), (0,4)$	$k = \frac{1}{4}$	$k = \frac{3}{4}$

۹. نمودار زیر الگویی را نشان می دهد که با استفاده از یک دوزنقه به دست آمده است. در این الگو مجانس های دوزنقه دیده می شوند.



الف) سه مجانس متوالی دوزنقه سایه دار را پیدا کرده، سپس هر تصویر را با دوزنقه سایه دار از نظر محیط و مساحت با هم مقایسه کنید.
ب) آیا این الگو می تواند ویژگیهای تجانس را نشان دهد؟



شکل ۲۶

۳-۶ - تبدیل یافته خط و معادله آن

در شکل مقابل نمودار خط $2x - 3y + 6 = 0$ با 1 نشان داده شده است. هر یک از نقطه های این خط تحت انتقال $T(x, y) = (x + 4, y - 2)$ تصویر شده، یعنی 4 واحد به سمت راست و 2 واحد به سمت پایین منتقل شده است. تبدیل یافته خط را با مشخص کردن تصویر هر دو نقطه آن مانند $A = (-3, 0)$ و $B = (0, 2)$ می توانیم رسم کنیم. تحت این انتقال، $A = (-3, 0) \rightarrow A' = (1, -2)$ و

$B = (0, 2) \rightarrow B' = (4, 0)$. خط تبدیل یافته از نقطه‌های $A' = (1, -2)$ و $B' = (4, 0)$ می‌گذرد.
 برای تعیین معادله خط تبدیل یافته، باید معادله خطی را که از A' و B' می‌گذرد پیدا کنیم.
 اگر $P = (x, y)$ یک نقطه دلخواه روی خط تصویر باشد، آنگاه

$$\text{شیب } A'B' = \frac{0+2}{4-1} = \frac{2}{3} \quad \text{و} \quad \text{شیب } A'P = \frac{y+2}{x-1}$$

با توجه به هم خط بودن A' ، B' و P ، شیب $A'P$ و $A'B'$ با هم برابر هستند، پس

$$\frac{2}{3} = \frac{y+2}{x-1}$$

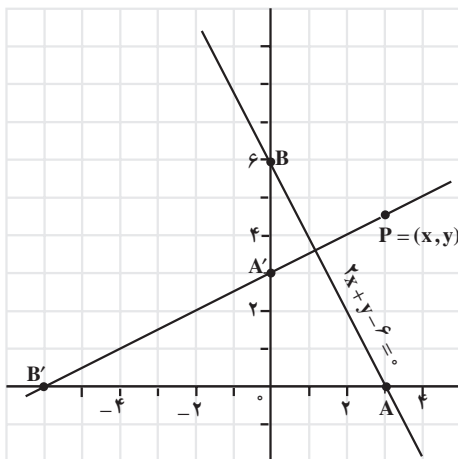
$$2x - 2 = 3y + 6$$

$$2x - 3y - 8 = 0$$

بنابراین، معادله خط تصویر $2x - 3y - 8 = 0$ است.

مثال بالا روش کلی بدست آوردن معادله تصویر یک خط تحت یک تبدیل معین را نشان می‌دهد.

روش کلی به دست آوردن معادله تصویر یک خط تحت یک انتقال، بازتاب، دوران یا تجانس:
 گام اول: مختصات دو نقطه دلخواه روی خط را پیدا کنید.
 گام دوم: مختصات تصویر این دو نقطه را تحت تبدیل داده شده به دست آورید.
 گام سوم: معادله خط گذرنده از دو نقطه تصویر را به دست آورید.



شکل ۲۷

مثال ۱:

الف) خط $2x + y - 6 = 0$ را رسم کنید.
 ب) تصویر خط (الف) را تحت دوران $R(x, y) = (-y, x)$ رسم کنید.
 پ) معادله خط تصویر را به دست آورید.

حل:

الف) $A = (3, 0)$ و $B = (0, 6)$ دو نقطه از خط هستند. با مشخص نمودن این دو نقطه خط AB را رسم می‌کنیم.

(ب) تحت دوران داده شده

$$A = (3, 0) \rightarrow A' = (0, 3)$$

$$B = (0, 6) \rightarrow B' = (-6, 0)$$

خطِ تصویر یعنی $A'B'$ را رسم می‌کنیم.

(پ) فرض کنید $P = (x, y)$ نقطه دلخواهی از خط تصویر باشد.

$$A'P \text{ شیب} = \frac{y-3}{x-0} \quad \text{و} \quad A'B' \text{ شیب} = \frac{0-3}{-6-0} = \frac{1}{2}$$

با توجه به ثابت بودن شیب خط،

$$\frac{y-3}{x} = \frac{1}{2}$$

$$x = 2y - 6$$

$$x - 2y + 6 = 0$$

معادله خط تصویر $x - 2y + 6 = 0$ است.

در مثال (۱)، معادله خط تصویر را می‌توانستیم با استفاده از شیب و عرض از مبدأ به دست

آوریم. این روش در مثال بعد نشان داده شده است.

مثال ۲: معادله تصویر خط $y = \frac{1}{4}x - 4$ تحت تقارن نسبت به محور x ها را به دست آورید.

حل: با در نظر گرفتن شیب خط $\frac{1}{4}$ ، و

عرض از مبدأ آن (-4) ، خط را رسم می‌کنیم.

با توجه به نمودار، $A = (0, -4)$ و $B = (8, 0)$ ،

دو نقطه از خط هستند. تحت تقارن نسبت به

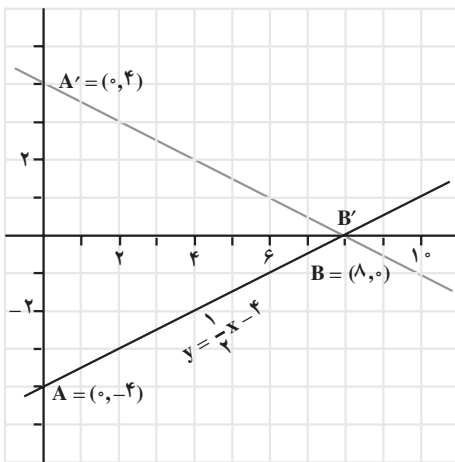
محور x ها، $A = (0, -4) \rightarrow A' = (0, 4)$ و

$B = (8, 0) \rightarrow B' = (8, 0)$ یعنی

خط تصویر یعنی $A'B'$ را رسم می‌کنیم.

با توجه به نمودار، شیب این خط $-\frac{1}{4}$ و

عرض از مبدأ آن 4 است.



شکل ۲۸

بنابراین، معادله خط تصویر $y = -\frac{1}{4}x + 4$ می‌باشد.

مسأله‌ها

۱. الف) خط $2x + y - 4 = 0$ و تصویرش را تحت انتقال $T(x, y) = (x + 4, y - 2)$

رسم کنید.

ب) معادله خط تصویر را به دست آورید.

۲. الف) خط $2x + 6y - 12 = 0$ و بازتاب آن را نسبت به محور x ها و نسبت به محور y ها

رسم کنید.

ب) معادله تصویرهای خط l تحت بازتاب نسبت به محور x ها و محور y ها را به دست آورید.

۳. الف) خط $y = 2x + 3$ و تصویر بازتاب آن را نسبت به خط $y = x$ رسم کنید.

ب) معادله تصویر بازتاب خط داده شده را به دست آورید.

۴. معادله تصویر خط $y = x + 5$ تحت بازتاب نسبت به خط $y = x$ را به دست آورده سپس

آنها را رسم کنید.

۵. معادله تصویر خط $3x - y + 6 = 0$ تحت دوران‌های زیر را به دست آورید:

الف) 90° حول $(0, 0)$

ب) 180° حول $(0, 0)$

پ) 270° حول $(0, 0)$

۶. الف) در یک صفحه مختصات، دو خط L_1 و L_2 را رسم کنید.

$$L_1: 3x - 2y - 6 = 0$$

$$L_2: 3x - 2y - 12 = 0$$

ب) ضابطه سه انتقال متفاوت که تحت آنها L_2 تصویر L_1 باشد را به دست آورید.

۷. تحت یک بازتاب، تصویر خط $x + y - 3 = 0$ ، خط $x + y + 3 = 0$ است، معادله محور

تقارن را پیدا کنید.

۸. تحت یک تبدیل، خط $2x - 5y + 10 = 0$ ، تصویر خط $2x - 5y - 10 = 0$ است. این

تبدیل را به عنوان یک

پ) دوران

ب) بازتاب

الف) انتقال

توصیف کنید.

۳-۷- اثبات با استفاده از ویژگیهای تبدیلهای

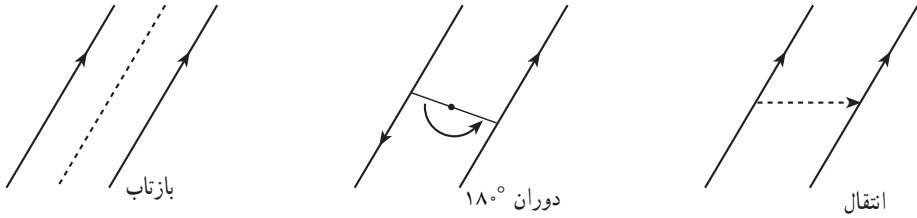
با توجه به بخشهای قبل، برخی از ویژگیهای تبدیلهای را به صورت زیر جمع‌بندی می‌کنیم.

۱. در هر یک از این تبدیلهای، تبدیل یافته خط راست، خط راست است.

۲. طول پاره خط و اندازه زاویه، تحت انتقال، دوران و بازتاب ثابت می ماند.

۳. اگر دو خط موازی باشند، هر یک از آنها می تواند تحت یک انتقال، دوران 180° یا بازتاب

بر روی دیگری نگاشته شود.



شکل ۲۹

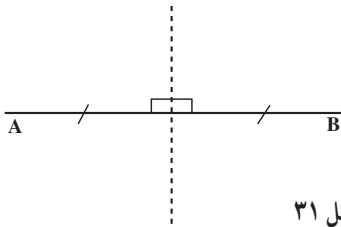
۴. یک خط می تواند تحت یک انتقال، دوران 180° یا بازتاب بر روی خودش نگاشته شود.



شکل ۳۰

۵. عمود منصف هر پاره خط AB، محور تقارن

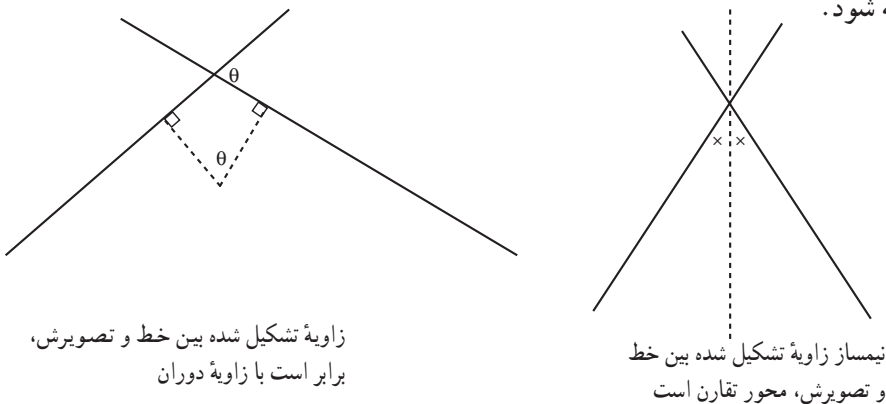
بازتابی است که $A \rightarrow B$ و $B \rightarrow A$.



شکل ۳۱

۶. اگر دو خط متقاطع باشند، هر یک از آنها می تواند تحت یک دوران یا بازتاب بر دیگری

نگاشته شود.

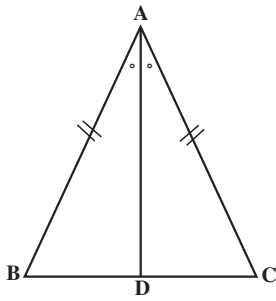


زاویه تشکیل شده بین خط و تصویرش، برابر است با زاویه دوران

نیمساز زاویه تشکیل شده بین خط و تصویرش، محور تقارن است

می‌توانیم از ویژگیهای فوق به‌عنوان حقایق پذیرفته شده، در اثبات قضیه‌ها و حل مسأله‌ها استفاده کنیم.

قضیه: زاویه‌های روبه‌رو به ضلعهای مساوی در مثلث متساوی‌الساقین با یکدیگر برابرند.

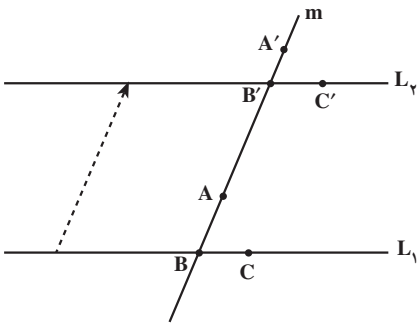


شکل ۳۳

اثبات با استفاده از بازتاب:

در مثلث ABC ، $AB = AC$ و نیمساز زاویه A ، ضلع BC را قطع می‌کند. تحت بازتاب نسبت به خط AD ، خطی که شامل پاره خط AB است، روی خطی که شامل پاره خط AC است تصویر می‌شود. چون $AB = AC$ پس $B \rightarrow C$. بنابراین $\hat{B} = \hat{C}$. یعنی زاویه‌های مقابل به ضلعهای مساوی در مثلث متساوی‌الساقین برابرند.

قضیه: اگر خط موربی دو خط موازی را قطع کند، زاویه‌های نظیر برابر خواهند بود.



شکل ۳۴

اثبات با استفاده از انتقال:

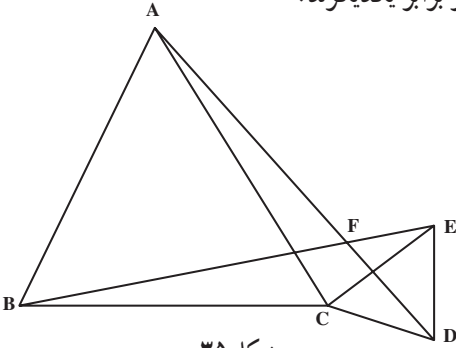
با توجه به نمادگذاری روی شکل، تحت انتقالی به موازات خط مورب m که خط L_1 را بر روی L_2 می‌نگارد، خواهیم داشت
 $A \rightarrow A'$ ، $B \rightarrow B'$ و $C \rightarrow C'$
 بنابراین

$\triangle ABC \rightarrow \triangle A'B'C'$. یعنی زاویه‌های متناظر برابر یکدیگرند.

مثال: مثلث ABC و مثلث ECD متساوی‌الاضلاع هستند، ثابت کنید $AD = BE$ و $\angle AFB = 60^\circ$.

حل با استفاده از دوران:

تحت یک دوران 60° ، حول نقطه C . مثلث ACD ، روی مثلث BCE تصویر می‌شود. بنابراین



شکل ۳۵

AD → BE و AD ضلع BE را با زاویه ۶۰° قطع می کند. چون طول تحت دوران حفظ می شود پس AD = BE و همچنین $\hat{AFB} = 60^\circ$.

توجه: این مسأله با روشهای دیگر نیز اثبات می شود که اغلب طولانی تر و پیچیده تر از این اثبات است به یکی از این راه حلها توجه کنید.

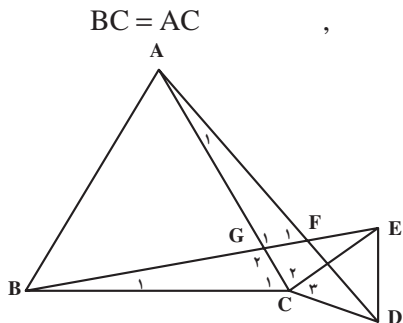
مثلث ABC متساوی الاضلاع است بنابراین

$$\hat{C}_1 = 60^\circ$$

مثلث ECD متساوی الاضلاع است بنابراین

$$EC = CD, \quad \hat{C}_3 = 60^\circ$$

حال در دو مثلث BCE و ACD داریم



شکل ۳۶

$$BC = AC$$

$$\hat{C}_1 + \hat{C}_7 = \hat{C}_3 + \hat{C}_6$$

$$EC = CD$$

بنابراین دو مثلث BCE و ACD در حالت (ضضض) همنهشت هستند. بنابراین اجزای نظیرشان

نیز مساوی هستند یعنی $AD = BE$.

همچنین در دو مثلث AGF و BGC داریم: $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ و $\hat{G}_1 = \hat{G}_1$ (چرا؟). بنابراین $\hat{F}_1 = \hat{C}_1$.

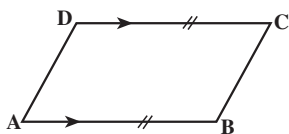
یعنی $\hat{F}_1 = 60^\circ$.

مسأله ها

مسأله های ۱، ۲ و ۳ را با استفاده از انتقال حل کنید.

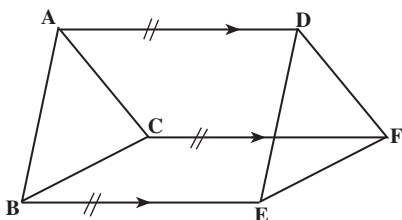
۱. در چهارضلعی ABCD، $AB \parallel DC$ و

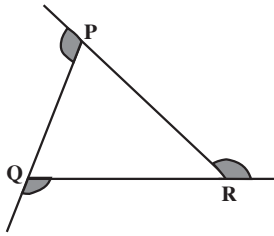
$AD = BC$ و $AD \parallel BC$ ثابت کنید.



۲. پاره خطهای AD و BE، CF و مساوی و

موازیند. ثابت کنید $ABC \cong DEF$.

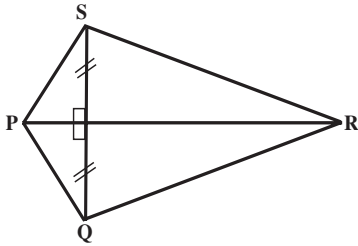




۳. در مثلث دلخواه PQR، ثابت کنید مجموع زاویه‌های خارجی 360° است.

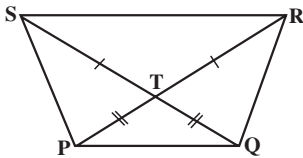
مسئله‌های ۴، ۵، ۶ و ۷ را با استفاده از بازتاب حل کنید.

۴. ثابت کنید فاصله هر نقطه روی عمود منصف یک پاره خط، تا دو سر آن به یک اندازه است.



۵. در شکل روبه‌رو PR عمود منصف QS است.

ثابت کنید $\hat{SPR} = \hat{QPR}$.



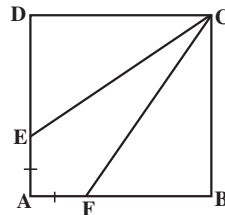
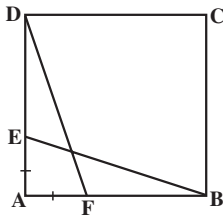
۶. در شکل روبه‌رو PR و QS قطرها، $PT = QT$ و

$RT = ST$. ثابت کنید $PQS \cong QPR$.

۷. چهارضلعی ABCD یک مربع است و $AE = AF$. ثابت کنید.

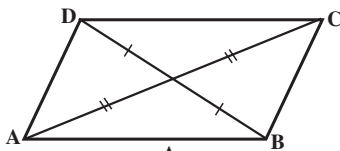
(ب) $BE = DF$

(الف) $CE = CF$



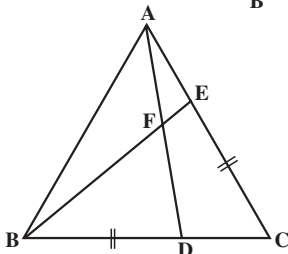
مسئله‌های ۸، ۹ و ۱۰ را با استفاده از دوران حل کنید.

۸. ثابت کنید، هرگاه دو خط یکدیگر را قطع کنند، زاویه‌های مقابل مساوی یکدیگرند.



۹. قطرهای چهارضلعی ABCD یکدیگر را نصف

کرده‌اند. ثابت کنید ABCD یک متوازی‌الاضلاع است.

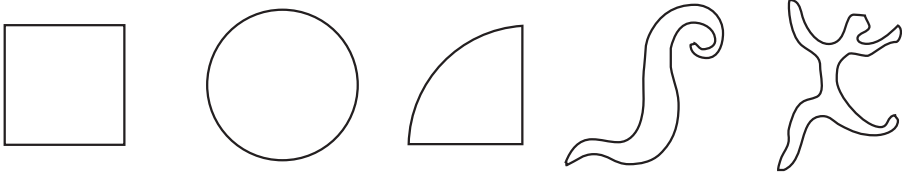


۱۰. مثلث ABC متساوی‌الاضلاع است و

$BD = CE$. ثابت کنید $AD = BE$ و $\hat{BFD} = 60^\circ$.

مجلهٔ ریاضی

در هندسهٔ اقلیدسی، اساس مقایسهٔ جسمها با یکدیگر، اندازه و شکل آنهاست. در توپولوژی، دو جسم هم‌ارز هستند اگر یکی از آنها را بتوان با تغییر دادن دیگری به وسیلهٔ کشیدن، جمع کردن، خم کردن و چرخاندن به دست آورد، این جسمها می‌توانند بدون ایجاد هیچ برشی یا سوراخی در جسم قبلی ایجاد شوند.



بازار مسگرها در کرمان