۳
مباحثی دیگر از ترکیبیات

مقدمه

در قسمت اول با نظریهٔ گراف‌ها که یکی از مباحث ترکیبیات است آشنا شدیم. در این قسمت با مباحثی دیگر از ترکیبیات آشنا می‌شویم. ترکیبیات معمولاً با مجموعه‌های متناهی سروکار دارد و لذا یکی از مباحث ترکیبیات، شمارش است. در اینجا با بعضی از ابزارهای شمارش آشنا می‌شویم. کلاً به مقدمات بسنده می‌کنیم، با این امید که دانش‌آموزان با این آشنایی اولیه انگیزهٔ کافی پیدا کنند که خود در این مباحث به مطالعه بپردازند.

در فصل ۷ نشان می‌دهیم گراف‌ها چگونه می‌توانند به فهم مطالب دیگر ریاضی کمک کنند. گراف‌ها و ماتریس‌های متناظر با آنها با شکل و شمایل شهودی که دارند به تجسم مفاهیم انتزاعی کمک می‌کنند. یکی از دلایلی که همهٔ ما از هندسه خوشمان می‌آید شهودی بودن آن است. گراف نیز همان امتیاز را دارد. به‌علاوه چون در رسم نمودار گراف طول یال‌ها و یا مکان رأس‌ها مطرح نیست درک شهودی ساده‌تر می‌شود. در بخش ۷ـ۱ بعضی از این استفاده‌های شهودی را مطرح می‌کنیم. در مطالعهٔ مجموعه‌ها نیز می‌توان نمودارهایی به آنها نسبت داد. این نمودارها به درک مفاهیم کمک زیادی می‌کنند. با استفاده از این نمودارها حتی می‌توانیم مفاهیمی را که یاد گرفته‌ایم تعمیم دهیم. بخش ۷ـ۳ به این موضوع اختصاص دارد. با تعمیم این مفاهیم یک ابزار شمارشی به نام اصل شمول و عدم شمول را خواهیم دید. در فصل ۸ یکی دیگر از مباحث ریاضی به نام دنباله‌های بازگشتی را به‌عنوان یک ابزار شمارشی به‌کار خواهیم گرفت.

مدل‌های شهودی
و
تجسمی در ترکیبیات

فصل ۷

۷ـ۱ـ رابطه‌ها و گراف‌ها

مفاهیم مربوط به رابطه را که در کتاب جبر و احتمال سال سوم دیده‌ایم یادآوری می‌کنیم.

تعریف : هرگاه A و B دو مجموعه باشند، آن‌گاه یک **رابطه** از A به B عبارت است از زیرمجموعه‌ای از $A \times B$. زیرمجموعه‌های $A \times A$ را **رابطه‌های روی** A می‌گویند.

مثال ۱ : روی مجموعهٔ اعداد صحیح $\mathbb{Z}$ یک رابطهٔ R را می‌توان چنین تعریف کرد :

aRb یا $(a,b) \in R$ هر گاه $a \leq b$.

این رابطه همان رابطهٔ معمولی «کوچک‌تر از یا مساوی با» روی $\mathbb{Z}$ است که روی Q، مجموعهٔ اعداد گویا، و روی $\mathbb{R}$، مجموعهٔ اعداد حقیقی، نیز تعریف می‌شود. ▲

مثال ۲ : برای هر دو عضو $x,y \in \mathbb{Z}$ تعریف می‌کنیم :

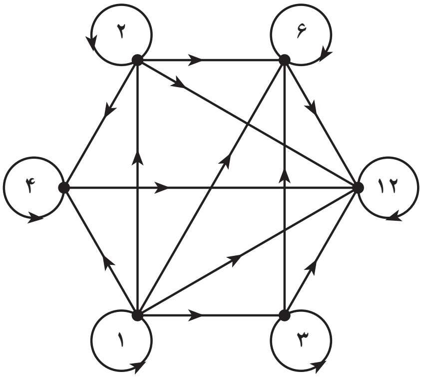
$(x,y) \in R$ یا xRy هرگاه $x - y$ مضربی از ۷ باشد.

پس داریم : $۹R۲$ و $-۳R۱۱$، ولی $۷ \not R ۳$. ▲

مثال ۳ : مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴,۶,۱۲\}$ مفروض است. به‌ازای هر دو عضو $a,b \in A$ تعریف می‌کنیم : aRb هرگاه $a|b$. ▲

حال فرض کنید A یک مجموعهٔ متناهی و R یک رابطه روی A باشد. به R گراف جهت‌دار G را به‌صورت زیر نسبت می‌دهیم. رأس‌های G اعضای A هستند و رأس a به رأس b متصل است هرگاه aRb.

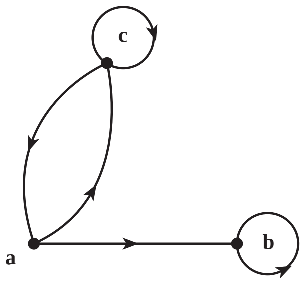
به‌عنوان مثال، شکل ۱، گراف مربوط به رابطه‌ای را که در مثال ۳ داده شده است نشان می‌دهد. مثلاً رأس ۱ به تمام رئوس، حتی به خود ۱، وصل است زیرا عدد ۱ تمام اعداد صحیح را می‌شمارد.



شکل ۱ــ گراف جهت‌دار رابطهٔ عادکردن

متقابلاً هرگراف جهت‌دار نشانگر یک رابطه است. مثلاً از گراف شکل ۲ نتیجه می‌شود که رابطه‌ای مانند R روی مجموعهٔ $A = \{a,b,c\}$ تعریف شده است و داریم :

$aRb\ ,\ aRc\ ,\ bRb\ ,\ cRa\ ,\ cRc$.



شکل ۲ــ گراف جهت‌دار یک رابطه

این تناظر بین گراف‌ها(ی جهت‌دار) و رابطه‌ها به درک بسیاری از ویژگی‌های رابطه‌ها کمک می‌کند. مثلاً می‌توانید بازتابی، متقارن‌بودن یا نبودن رابطه‌ها را فوراً از روی گراف جهت‌دار مربوط تشخیص دهید. این ویژگی‌ها در درس‌های سال‌های قبل تعریف شده‌اند. یکی از ویژگی‌های رابطه‌ها که کاربرد فراوان دارد خاصیت پاد متقارن است. رابطهٔ R را وقتی **پاد متقارن** گوییم که به‌ازای هر زوج مرتب (a,b)، اگر $(a,b) \in R$ و $(b,a) \in R$ آن‌گاه $a = b$. مثلاً رابطهٔ «کوچک‌تر از یا مساوی با» در مثال ۱ و رابطهٔ «عادکردن» در مثال ۳ دو رابطهٔ پاد متقارن‌اند ولی رابطهٔ مثال ۲ پاد متقارن نیست.

حال ارتباط این ویژگی‌ها را با گراف‌های جهت‌دار بیان می‌کنیم.

یک رابطه بازتابی است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار متناظر با آن در هر رأس دارای یک طوقه باشد. طوقه یالی است که یک رأس را به خودش وصل می‌کند.

یک رابطه متقارن است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار متناظر با آن دارای این ویژگی باشد که هرگاه از رأسی مانند a به رأسی مانند b یک یال موجود باشد آن‌گاه از رأس b به رأس a نیز یالی موجود باشد.

یک رابطه پاد متقارن است اگر و تنها اگر گراف جهت‌دار متناظر با آن دارای این ویژگی باشد که هرگاه از رأسی مانند a به رأسی دیگر مانند b یک یال موجود باشد آن‌گاه از رأس b به رأس a یالی موجود نباشد.

یک رابطه ترایایی است اگر و تنها اگر در گراف جهت‌دار متناظر با آن اگر از رأسی مانند a به رأسی دیگر مانند b یک یال موجود باشد و از رأس b به رأسی مانند c یالی موجود باشد آنگاه از رأس a به رأس c نیز یک یال وجود داشته باشد.

مثال ۴ : با توجه به شکل ۲ معلوم می‌شود که رابطهٔ متناظر با این گراف جهت‌دار هیچ‌یک از ویژگی‌های فوق را ندارد (چرا؟). درصورتی که گراف جهت‌دار شکل ۱ متناظر با رابطه‌ای است که دارای ویژگی‌های بازتابی، پادمتقارن‌بودن و ترایایی است. ▲

۷ـ۲ـ رابطه‌ها و ماتریس‌ها

در قسمت گراف‌ها به هر گراف یک ماتریس صفر و یک به‌نام ماتریس مجاورت نسبت داده شد. ماتریس مجاورت گراف‌های جهت‌دار هم به‌طور مشابه تعریف می‌شود. مثلاً ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار شکل ۲ به‌صورت زیر است :

$$\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

پس می‌توان این ماتریس را متناظر با رابطهٔ مربوط به شکل ۲ گرفت. توجه کنید که درایهٔ ij ماتریس متناظر مساوی با ۱ است اگر و تنها اگر iRj.

اکنون می‌توانیم ویژگی‌های مربوط به رابطه‌ها را به زبان ماتریس‌ها بیان کنیم. مثلاً ویژگی بازتابی یعنی اینکه همهٔ درایه‌های قطر اصلی ماتریس ۱ باشند. بقیهٔ ویژگی‌ها را به زبان ماتریس بیان کنید.

در این فصل صرفاً ماتریس‌های صفر و یک را در نظر می‌گیریم. اکنون یک عمل جمع و یک عمل ضرب برای اعضای مجموعهٔ دو عضوی $\{0,1\}$ تعریف می‌کنیم که از روی آن «توان دوم» را برای ماتریس‌ها تعریف خواهیم کرد. این توان دوم با آنچه که در جبر خطی دیده‌ایم فرق دارد.

تعریف : روی مجموعهٔ $\{۰,۱\}$ دو عمل $\dotplus$ و $\odot$ موسوم به **عمل‌های بولی** را به‌ترتیب زیر تعریف می‌کنیم :

$$۱\dotplus۱=۱ \quad , \quad ۰\dotplus۰=۰ \quad , \quad ۱\dotplus۰=۰\dotplus۱=۱$$
$$۰\odot۰=۰\odot۱=۱\odot۰=۰ \quad , \quad ۱\odot۱=۱$$

با توجه به تعریف بالا، توان دوم ماتریس $M=\left[m_{ij}\right]_{n\times n}$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$M^{(۲)}=\left[m_{i۱}\odot m_{۱j}\dotplus m_{i۲}\odot m_{۲j}\dotplus\cdots\dotplus m_{in}\odot m_{nj}\right]_{n\times n}.$$

به عبارت دیگر برای به دست‌آوردن توان دوم یک ماتریس که در اینجا تعریف کردیم مانند توان دوم معمولی در ماتریس‌ها عمل می‌کنیم ولی در نهایت به جای هر درایهٔ غیرصفر که به‌دست آمده باشد عدد ۱ قرار می‌دهیم.

مثال ۵ : اگر $M=\begin{bmatrix}۱&۱&۰\\۰&۱&۰\\۱&۰&۱\end{bmatrix}$ ، آن‌گاه داریم : $M^{(۲)}=\begin{bmatrix}۱&۱&۱\\۰&۱&۰\\۱&۱&۱\end{bmatrix}$

تعریف : هرگاه R رابطه‌ای روی مجموعهٔ A باشد **ترکیب رابطهٔ** RoR، رابطه‌ای روی A است که با قاعدهٔ زیر تعریف می‌شود :

a(RoR)c هرگاه عضوی مانند $b\in A$ وجود داشته باشد که aRb و bRc.

با توجه به تعریف‌های فوق قضیهٔ زیر را می‌توان به سادگی اثبات کرد.

قضیهٔ ۱ : فرض کنید A یک مجموعهٔ n عضوی، $n\in\mathbb{N}$ و R یک رابطه روی A باشد. هرگاه M(R) ماتریس متناظر R باشد داریم :

الف) $M(R)=[O]_{n\times n}$ (یعنی همهٔ درایه‌های M(R) صفرند) اگر و تنها اگر $R=\phi$؛

ب) $M(R)=[۱]_{n\times n}$ (یعنی همهٔ درایه‌های M(R) یک‌اند) اگر و تنها اگر $R=A\times A$؛

پ) $M(RoR)=[M(R)]^{(۲)}$.

اثبات : بند (الف) و (ب) بلافاصله از تعریف نتیجه می‌شوند. برای اثبات بند (پ)، اول فرض کنید i(RoR)j. پس عضوی مانند $k\in A$ وجود دارد به‌طوری که iRk و kRj. پس درایه‌های m_{ik} و m_{kj} در ماتریس M مساوی با ۱ هستند. درنتیجه درایهٔ ijام در ماتریس $M^{(۲)}$ برابر با ۱ است. حال به‌عکس اگر درایهٔ ijام در ماتریس $M^{(۲)}$ برابر با ۱ باشد یعنی

$$m_{i۱}\odot m_{۱j}\dotplus m_{i۲}\odot m_{۲j}\dotplus\cdots\dotplus m_{in}\odot m_{nj}=۱$$

آن‌گاه حداقل یکی از جمعوندها باید مساوی با ۱ باشد. مثلاً $m_{ik} \odot m_{kj}=۱$. از آنجا $m_{ik}=m_{kj}=۱$، که نتیجه می‌شود : kRj و iRk. پس بنا به تعریف خواهیم داشت $i(RoR)j$.

مثال ۶ : مجموعهٔ $A=\{۱,۲,۳,۴\}$ و رابطهٔ R روی A به‌صورت

$$R=\{(۱,۱),(۱,۲),(۲,۳),(۳,۳),(۳,۴)\}$$

مفروض است. مطلوب است محاسبهٔ RoR.

داریم

$$M(R)=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

پس :

$$[M(R)]^{(۲)}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=M(RoR)$$

و از آنجا $RoR=\{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۳),(۲,۴),(۳,۳),(۳,۴)\}$

تعریف : فرض کنید ماتریس‌های صفر و یک $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ از اندازهٔ $m\times n$ باشند. گوییم A **کوچک‌تر از یا مساوی** با B است و می‌نویسیم $A<<B$ هرگاه به‌ازای هر $۱\le i\le m$ و هر $۱\le j\le n$ داشته باشیم $a_{ij}\le b_{ij}$.

روشن است که اگر $M_۱$ و $M_۲$ ماتریس‌های متناظر با رابطه‌های $R_۱$ و $R_۲$ روی یک مجموعهٔ A باشند، آن‌گاه $R_۱\subseteq R_۲$ اگر و تنها اگر $M_۱<<M_۲$.

قضیهٔ ۲ : مجموعهٔ n عضوی A، $n\in\mathbb{N}$، و رابطهٔ R روی آن را در نظر می‌گیریم. فرض کنید M ماتریس متناظر با این رابطه باشد. آن‌گاه

(الف) R بازتابی است اگر و تنها اگر $I_n<<M$. (I_n ماتریس همانی $n\times n$ است).

(ب) Rمتقارن است اگر و تنها اگر $M=M^T$. (ماتریس M^T ترانهادهٔ M است و آن ماتریسی است که از قراردادن سطرهای M به جای ستون‌های M، با حفظ ترتیب، به‌دست می‌آید.)

(پ) R ترایایی است اگر و تنها اگر $M^{(۲)}<<M$.

(ت) R پاد متقارن است اگر و تنها اگر $M\wedge M^T<<I_n$. (ماتریس $M\wedge M^T$ با عمل روی درایه‌های M و M^T نظیر به نظیر با ضرب مؤلفه به مؤلفه تشکیل می‌شود).

اثبات : هرکدام از حکم‌های فوق با توجه به تعریف‌های مربوط به سادگی اثبات می‌شوند. ما دو حکم آخر را ثابت می‌کنیم.

برای اثبات (پ)، فرض کنید $M^{(2)} << M$. باید نشان دهیم R ترایایی است. هر گاه xRy و yRz، آن‌گاه در ماتریس M، درایهٔ سطر xام و ستون yام و همچنین درایهٔ سطر yام و ستون zام برابر ۱ است. درنتیجه درایهٔ واقع در سطر xام و ستون zام در ماتریس $M^{(2)}$ برابر ۱است. چون $M^{(2)} << M$ پس درایهٔ سطر xام و ستون zام ماتریس M نیز باید ۱ باشد یعنی xRz.

به عکس، فرض کنید R ترایایی باشد. باید نشان دهیم که $M^{(2)} << M$. فرض کنید m_{xz}، درایهٔ واقع در سطر xام و ستون zام در ماتریس $M^{(2)}$، مساوی ۱ باشد، آن‌گاه باید $y \in A$ وجود داشته باشد که در ماتریس M : $m_{yz} = 1$ و $m_{xy} = 1$. درنتیجه باید xRy و yRz و چون R ترایایی است xRz. پس $m_{xz} = 1$. یعنی نشان داده‌ایم که $M^{(2)} << M$.

برای اثبات حکم (ت)، فرض کنید R پاد متقارن باشد. اگر به ازای دو عضو متمایز i و j داشته باشیم $(i,j) \notin R$ آن‌گاه درایهٔ ijام در M و درنتیجه در $M \wedge M^T$ برابر با ۰ است. اگر $(i,j) \in R$ آن‌گاه $(j,i) \notin R$. یعنی اگر درایهٔ ijام $(i \neq j)$ در M مساوی با ۱ باشد آن‌گاه درایهٔ jiام در M مساوی با ۰ است. پس در این صورت نیز درایهٔ ijام در $M \wedge M^T$ برابر با ۰ است. یعنی $M \wedge M^T << I_n$.

به عکس از $M \wedge M^T << I_n$ نتیجه می‌شود که همهٔ درایه‌های غیرقطری $M \wedge M^T$ صفرند. یعنی به‌ازای $i \neq j$ داریم $m_{ij} . m_{ji} = 0$. در این صورت فقط سه حالت زیر امکان‌پذیرند : $m_{ij} = m_{ji} = 0$ یا $m_{ij} = 0 \, , m_{ji} = 1$ و یا $m_{ij} = 1, m_{ji} = 0$. که نتیجه می‌شود : اگر iRj و jRi آن‌گاه $i = j$.

اثبات بقیهٔ حکم‌ها را به‌عنوان تمرین به عهده دانش‌آموزان می‌گذاریم. ■

قضیه‌های ۱ و ۲ ارتباط بین رابطه‌ها و ماتریس‌های صفر و یک را نشان می‌دهند. این قضیه‌ها با وجود سادگی اهمیت زیادی دارند. زیرا بهترین راه معرفی یک رابطه به کامپیوتر از طریق ماتریس صفر و یک است. از طریق حکم‌های فوق می‌توان با کامپیوتر ویژگی‌های هر رابطه‌ای را بررسی کرد.

مثال ۷ : با استفاده از قضیهٔ ۲ می‌توان یک الگوریتم نوشت و با برنامهٔ کامپیوتری هم‌ارزی بودن رابطه‌ای را که روی یک مجموعهٔ متناهی A داده شده است امتحان کرد. یعنی رابطهٔ R یک رابطهٔ هم‌ارزی است اگر و تنها اگر M، ماتریس صفر و یک متناظر با آن، دارای شرایط زیر باشد :

(الف) $I_n << M$

(ب) $M = M^T$

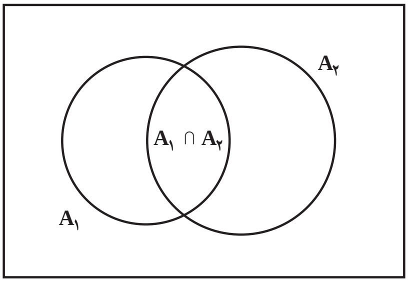
(پ) $M^{(2)} << M$

۳-۷- اصل شمول و عدم شمول

یکی از ابزارهای شمارش به اصل شمول و عدم شمول معروف است. حالت خاص آن را قبلاً در کتاب جبر و احتمال دیده‌اید. اگر A یک مجموعهٔ متناهی باشد تعداد عناصر آن را با $|A|$ نشان می‌دهیم.
فرض کنید $A_۱$ و $A_۲$ دو مجموعهٔ متناهی باشند. داریم:

$$|A_۱ \cup A_۲| = |A_۱| + |A_۲| - |A_۱ \cap A_۲| \qquad (۱)$$

با توجه به شکل ۳ رابطهٔ (۱) درست است، زیرا در مجموع $|A_۱|+|A_۲|$ هر عضوی که فقط به یکی از مجموعه‌های $A_۱$ یا $A_۲$ متعلق باشد یک بار به حساب می‌آید ولی هر عضوی که به هر دو مجموعهٔ $A_۱$ و $A_۲$ تعلق داشته باشد دو بار شمرده می‌شود. پس با کم کردن $|A_۱ \cap A_۲|$ از حاصل جمع $|A_۱|+|A_۲|$ هر عضو از $A_۱ \cup A_۲$ دقیقاً یک بار به‌حساب می‌آید.



شکل ۳ــ نمودار ون برای دو مجموعه

رابطهٔ (۱) وجه تسمیهٔ «شمول و عدم شمول» را نیز توجیه می‌کند. زیرا در شمارش اعضای مجموعهٔ $A_۱ \cup A_۲$، اول همهٔ اعضای $A_۱$ و $A_۲$ را به‌حساب می‌آوریم (شمول) ولی چون در این صورت اعضای $A_۱ \cap A_۲$ دوبار به حساب می‌آیند آنها را از شمارش خود خارج می‌کنیم (عدم شمول).

مثال ۸ : چند عضو از مجموعهٔ $A = \{n \in \mathbb{N} : ۱ \leq n \leq ۶۳۰۰\}$ نه بر ۵ تقسیم‌پذیرند و نه بر ۳؟

فرض کنید $A_۱$ زیرمجموعهٔ A متشکل از مضارب ۳ و $A_۲$ زیرمجموعهٔ A متشکل از مضارب ۵ باشند. می‌خواهیم $|\overline{A_۱ \cup A_۲}|$ را پیدا کنیم ($\overline{B}$ متمم[۱] مجموعهٔ B را نمایش می‌دهد). داریم:

$$|A_۱| = \frac{۶۳۰۰}{۳} = ۲۱۰۰$$

$$|A_۲| = \frac{۶۳۰۰}{۵} = ۱۲۶۰$$

۱ــ متمم مجموعهٔ B را گاهی با B' یا B^c هم نمایش می‌دهند. به‌جای متمم گاهی اصطلاح مکمل را به کار می‌برند.

و چون $A_۲ \cap A_۱$ مجموعهٔ اعدادی هستند که هم بر ۳ و هم بر ۵ تقسیم‌پذیرند پس :

$$|A_۱ \cap A_۲| = \frac{۶۳۰۰}{(۳)(۵)} = ۴۲۰$$

درنتیجه با توجه به رابطهٔ (۱) داریم :

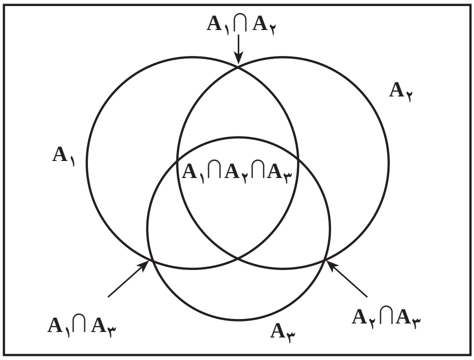
$$|A_۱ \cup A_۲| = ۲۱۰۰ + ۱۲۶۰ - ۴۲۰$$
$$= ۲۹۴۰$$

و از آنجا $|\overline{A_۱ \cup A_۲}| = ۶۳۰۰ - ۲۹۴۰ = ۳۳۶۰$.

حال برای $n = ۳$ اصل شمول و عدم شمول را مطالعه می‌کنیم.

قضیهٔ ۳ : فرض کنید $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ سه زیرمجموعهٔ متناهی از یک مجموعهٔ A باشند. داریم

$$|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = |A_۱| + |A_۲| + |A_۳| - |A_۱ \cap A_۲| - |A_۱ \cap A_۳|$$
$$- |A_۲ \cap A_۳| + |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| \qquad (۲)$$



شکل ۴ــ نمودار ون برای سه مجموعه

اثبات : نشان می‌دهیم که هر عضو x از A به تعداد مساوی در دو طرف رابطهٔ (۲) به‌حساب می‌آید. به شکل ۴ توجه کنید.

دو حالت داریم :

حالت ۱ : اگر x متعلق به هیچ‌کدام از مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ نباشد، آن‌گاه x در دو طرف رابطهٔ (۲)، صفر بار به حساب می‌آید.

حالت ۲ : فرض کنید x به s مجموعه از مجموعه‌های $A_۱$ و $A_۲$ و $A_۳$ تعلق داشته باشد $(۱ \le s \le ۳)$. آن‌گاه x یک بار در طرف چپ به حساب می‌آید، و در طرف راست نیز

اگر $s=۱$، یک بار به حساب می‌آید،

اگر $s=۲$، باز هم $۲-۱=۱$ بار به حساب می‌آید و

اگر $s=۳$، در این صورت هم $۳-۳+۱=۱$ بار به حساب می‌آید.

اثبات بالا را می‌توان به n مجموعه تعمیم داد و قضیه‌ای بیان کرد که به اصل شمول و عدم شمول معروف است. در مثال‌های زیر خواهیم دید که چگونه بعضی از مسائل کلاسیک شمارش را می‌توان با اصل شمول و عدم شمول حل کرد.

مثال ۹ : تعداد توابع پوشا از یک مجموعهٔ ۴عضوی B به یک مجموعهٔ ۳عضوی A را پیدا کنید. باید توجه کرد که منظور از تابع $f: B \longrightarrow A$ تابعی است که روی همهٔ اعضای B تعریف شده است و تابع $f: B \longrightarrow A$ را پوشا می‌نامیم هرگاه $A = R_f =$ بُرد f.

فرض کنید $B = \{b_۱, b_۲, b_۳, b_۴\}$ و $A = \{a_۱, a_۲, a_۳\}$. مجموعهٔ تمام توابع $f: B \to A$ را با S نمایش می‌دهیم و ابتدا $|S|$ را محاسبه می‌کنیم. به ازای هر $b_j \in B$ برای $f(b_j)$ سه امکان وجود دارد، زیرا $f(b_j)$ امکان دارد $a_۱$، $a_۲$ یا $a_۳$ باشد. این امکان‌ها به ازای هر دو عضو متمایز B به هم وابسته نیستند یعنی مثلاً به‌ازای هر انتخاب برای هر سه عضو B، عضو چهارم می‌تواند دارای سه انتخاب باشد. پس تعداد کل این توابع ۸۱=۳.۳.۳.۳ است. حال فرض کنید A_i مجموعهٔ توابعی باشد که هیچ عضوی از B را به a_i نسبت نمی‌دهند.

یعنی :
$$A_i = \{f \in S:\ a_i \notin f(B)\} \qquad i = ۱,۲,۳$$

منظور شمارش تعداد اعضای مجموعهٔ $\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}$ است. از فرمول (۲) در قضیهٔ ۳ استفاده می‌کنیم. مشابه استدلال فوق داریم

$$|A_۱| = |A_۲| = |A_۳| = ۲^۴ = ۱۶$$

و
$$|A_۱ \cap A_۲| = |A_۱ \cap A_۳| = |A_۲ \cap A_۳| = ۱$$

و
$$|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$$

پس :
$$|A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۲^۴ + ۲^۴ + ۲^۴ - (۱+۱+۱) + ۰ = ۴۵$$

و از آنجا
$$|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = ۸۱ - ۴۵ = ۳۶$$

که تعداد توابع پوشای از B به A است. ▲

برای حل معادلات با جواب‌های صحیح و با محدودیت‌های مختلف، می‌توان از اصل شمول و عدم شمول استفاده کرد. برای توضیح این روش، اول به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱۰ : فرض کنید k نوع مختلف گل و به تعداد فراوان از هر نوع موجود است. می‌توان ثابت کرد که تعداد انتخاب n گل از این k نوع گل که در آن تکرار نیز مجاز است برابر است با تعداد

جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + \cdots + x_k = n$ و مساوی است با $\binom{n+k-۱}{n}$.

اگر x_i را تعداد گل‌های انتخاب‌شده از نوع iام بگیریم به‌سادگی دیده می‌شود که یک تناظر یک به یک بین انتخاب‌ها و جواب‌های معادلهٔ فوق موجود است. اثبات برابری تعداد انتخاب‌ها با مقدار داده شده را به عنوان تمرین به عهدهٔ دانش‌آموزان گذاشته‌ایم. باید دقت کرد که در این مثال حالت‌هایی را هم در نظر گرفته‌ایم که یک یا چند نوع گل را اصلاً انتخاب نکرده باشیم. ▲

مثال ۱۱ : تعداد جواب‌های صحیح معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۴$ را به‌طوری که به‌ازای $i = ۱,۲,۳$، $۰ \leq x_i \leq ۲$ باشد پیدا کنید.

مجموعه‌های $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ را به‌ترتیب زیر تعریف می‌کنیم :

$A_i = \{$جواب‌های معادلهٔ فوق به‌شرطی که $x_i > ۲$ باشد$\}$, $i = ۱,۲,۳$

باید تعداد مجموعهٔ $\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}$ را پیدا کنیم. بنابر فرمول (۲) از قضیهٔ ۳ داریم :

$$|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳|$$

$$= |S| - |A_۱| - |A_۲| - |A_۳| + |A_۱ \cap A_۲| + |A_۱ \cap A_۳| +$$

$$|A_۲ \cap A_۳| - |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳|$$

که در آن S مجموعهٔ تمام جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ فوق است. پس بنا به مثال ۱۰ داریم.

$$|S| = \binom{۳+۴-۱}{۴} = ۱۵$$

از طرف دیگر مثلاً تعداد $A_۱$ مساوی است با تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱$. زیرا کافی است که در جواب معادلهٔ اخیر به $x_۱$، عدد ۳ اضافه کنیم تا یک جواب معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۴$ با شرط $x_۱ > ۲$ به‌دست آید و برعکس. اما به‌سادگی دیده می‌شود که تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی معادلهٔ $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱$ مساوی است با ۳. پس $|A_۱| = ۳$ و به همین ترتیب $|A_۲| = |A_۳| = |A_۱| = ۳$.

از طرف دیگر داریم

$$A_۱ \cap A_۲ = A_۱ \cap A_۳ = A_۲ \cap A_۳ = \phi$$

همین‌طور $A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳ = \phi$. پس $|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = ۱۵ - ۳ - ۳ - ۳ = ۶$. در حقیقت ۶ جواب فوق چنین‌اند :

$$(۰,۲,۲),(۱,۱,۲),(۱,۲,۱),(۲,۰,۲),(۲,۱,۱),(۲,۲,۰)$$

▲

در قسمت نظریهٔ اعداد با **تابع حسابی اویلر** ϕ به‌عنوان «مجلهٔ ریاضی» آشنا شده‌ایم. منظور از $\phi(n)$ عبارت است از تعداد اعداد صحیح و مثبت m که کوچک‌تر از n یا مساوی با آن بوده و m و n نسبت به هم اول باشند. قضیهٔ زیر حالت خاصی از قضیه‌ای کلی دربارهٔ این تابع است.

قضیهٔ ۴ : فرض کنید عدد صحیح و مثبت n برابر با حاصل‌ضرب سه عدد اول و متمایز به‌صورت زیر باشند :

$$n = p_۱p_۲p_۳$$

در این صورت

$$\phi(n) = n(۱-\frac{۱}{p_۱})(۱-\frac{۱}{p_۲})(۱-\frac{۱}{p_۳})$$

اثبات : مجموعه‌های A_i را به‌ترتیب زیر تعریف می‌کنیم :

$$A_i = \{m: ۱ \le m \le n, p_i | m\},\ i = ۱,۲,۳$$

حال اصل شمول و عدم شمول را برای مجموعه‌های A_i می‌نویسیم. داریم : $\phi(n) = |\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}|$ و برای $i = ۱,۲,۳$

$$A_i = \left\{p_i, ۲p_i, ۳p_i, \ldots, (\frac{n}{p_i})p_i\right\}$$

پس $|A_i| = \frac{n}{p_i}$. به همین ترتیب به ازای $i \neq j$، $|A_i \cap A_j| = \frac{n}{p_ip_j}$، و $|A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = \frac{n}{p_۱p_۲p_۳}$. اکنون از رابطهٔ (۲) در قضیهٔ ۳ نتیجه می‌گیریم که :

$$n - \phi(n) = |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = \frac{n}{p_۱} + \frac{n}{p_۲} + \frac{n}{p_۳} - \frac{n}{p_۱p_۲} - \frac{n}{p_۱p_۳} - \frac{n}{p_۲p_۳} + \frac{n}{p_۱p_۲p_۳}$$

$$\phi(n) = n - \frac{n}{p_۱} - \frac{n}{p_۲} - \frac{n}{p_۳} + \frac{n}{p_۱p_۲} + \frac{n}{p_۱p_۳} + \frac{n}{p_۲p_۳} - \frac{n}{p_۱p_۲p_۳}$$

$$= n(۱-\frac{۱}{p_۱})(۱-\frac{۱}{p_۲})(۱-\frac{۱}{p_۳})$$

■

مثال ۱۲ : ثابت کنید ۱۲ = $\phi(۴۲)$.

چون ۲.۳.۷ = ۴۲، حکم از قضیهٔ ۴ به‌دست می‌آید :

$$\phi(۴۲)=۴۲(۱-\frac{۱}{۲})(۱-\frac{۱}{۳})(۱-\frac{۱}{۷})=۱۲$$

این نتیجه را می‌توان مستقیماً هم بررسی کرد. زیرا تمام اعداد صحیح و مثبت نابیشتر از ۴۲ که نسبت به آن اول هستند عبارت‌اند از :

۱،۵،۱۱،۱۳،۱۷،۱۹،۲۳،۲۵،۲۹،۳۱،۳۷،۴۱

▲

۷ـ۴ـ تمرین‌ها

۱ــ فرض کنید $A=\{۱,۲,۳,۴\}$. برای هریک از حالت‌های زیرگرافی رسم کنید که رابطهٔ متناظر با آن

الف) بازتابی و متقارن باشد ولی ترایایی نباشد،

ب) بازتابی و ترایایی باشد ولی متقارن نباشد،

پ) متقارن و ترایایی باشد ولی بازتابی نباشد.

جواب‌های خود را با ماتریس‌های متناظر امتحان کنید.

۲ــ فرض کنید $A=\{w,x,y,z\}$. تعداد رابطه‌های روی A با ویژگی‌های داده‌شده در هریک از حالت‌های زیر را بیابید :

الف) بازتابی؛

ب) متقارن؛

پ) بازتابی و متقارن؛

ت) بازتابی و شامل (x,y)؛

ث) پاد متقارن؛

ج) پاد متقارن و شامل (x,y)؛

چ) متقارن و پاد متقارن؛

ح) پاد متقارن، متقارن و بازتابی؛

خ) هم‌ارزی (راهنمایی : تعداد افرازهای مختلف را پیدا کنید).

۳ــ فرض کنید $A = \{۱,۲,۳,۴\}$. دو رابطهٔ R و S روی A به‌صورت زیر داده شده‌اند.

$R = \{(۱,۲),(۱,۳),(۲,۴),(۴,۴)\}$,

$S = \{(۱,۱),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۳),(۲,۴)\}$

رابطه‌های RoR و SoS را پیدا کنید.

۴ــ بندهای (الف) و (ب) از قضیهٔ ۱ را اثبات کنید.

۵ ــ بندهای (الف) و (ب) از قضیهٔ ۲ را اثبات کنید.

۶ ــ فرض کنید R یک رابطهٔ بازتابی روی مجموعهٔ متناهی A باشد. نشان دهید که رابطهٔ RoR نیز بازتابی است.

۷ــ ماتریس صفر و یک $E = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$ را در نظر می‌گیریم. تعداد ماتریس‌های صفر و یک F با شرط $E << F$ را بیابید.

۸ ــ با استفاده از قضیه‌هایی که در این فصل خوانده‌اید نشان دهید که آیا رابطهٔ زیر روی مجموعهٔ $A = \{۱,۲,۳,۴\}$ یک رابطهٔ هم‌ارزی است یا خیر.

$R = \{(۱,۱),(۲,۲),(۳,۳),(۴,۴),(۱,۲),(۱,۳),(۲,۴),(۴,۲),(۲,۱),(۳,۱)\}$

۹ــ یک ماتریس $n \times n$ از اعداد متمایز مثلاً $۱,۲,۳,\ldots,n^۲$ را **یک مربع وفقی** (یا مربع جادویی) می‌نامیم، هرگاه حاصل جمع درایه‌های هر سطر، حاصل جمع درایه‌های هر ستون، حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی و حاصل جمع درایه‌های قطر فرعی با هم مساوی باشند. به‌عنوان مثال یک مربع وفقی ۳×۳ در زیر نشان داده شده است.

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

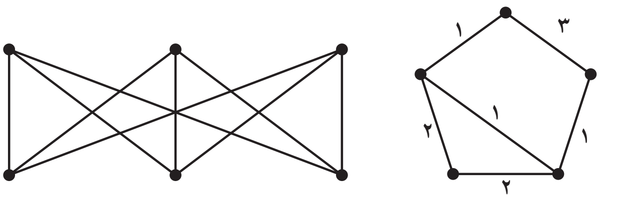
ثابت کنید که در هر مربع وفقی ۳×۳ که از اعضای $۱,۲,۳,\ldots,۹$ تشکیل شده است عضوی که در مرکز مربع قرار می‌گیرد همیشه عدد ۵ است.

۱۰ــ گراف G داده شده است. یک **برچسب‌گذاری جادویی** G عبارت است از متناظرکردن اعدادی، معمولاً صحیح و مثبت، به یال‌های G به‌طوری که حاصل جمع اعداد متناظر با یال‌های مارّ

بر هر رأس عددی ثابت باشد. در گرافی که در شکل ۵ (الف) داده شده است اعدادی که روی یال‌ها نوشته شده‌اند یک برچسب‌گذاری جادویی را نشان می‌دهد، زیرا حاصل جمع اعداد متناظر به یال‌های مارّ بر هر رأس مساوی با ۴ است.

با استفاده از مربع وفقی ۳×۳ یک برچسب‌گذاری جادویی برای گراف شکل ۵ (ب) به‌دست آورید.

۱۱ــ ثابت کنید که تعداد انتخاب n گل از k نوع مختلف گل، که تکرار نیز مجاز باشد مساوی است با $\binom{n+k-۱}{n}$.



(ب) (الف) یک برچسب‌گذاری جادویی

شکل ۵

۱۲ــ تعداد جواب‌های صحیح و مثبت هریک از معادلات زیر را پیدا کنید.

الف) $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۷$

ب) $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۸ \quad , \quad ۲ \le x_۱ \le ۳ \quad , \quad ۴ \le x_۲ \le ۸ \quad , \quad x_۳ \ge ۱$

پ) $x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۱۴ , \quad ۱ \le x_i \le ۷ \quad , \quad i = ۱,۲,۳$

۱۳ــ مطلوب است تعداد شمارهٔ شناسنامه‌های پنج‌رقمی که در آنها هریک از رقم‌های ۱، ۳ و ۷ حداقل یک بار ظاهر می‌شوند.

۱۴ــ در یک نظرخواهی از ۱۰۰ نفر دانش‌آموز نتایج زیر به‌دست آمده است: ۶۰ نفر آنها مجلهٔ A را می‌خوانند، ۵۰ نفر مجلهٔ B، ۵۰ نفر مجلهٔ C، ۳۰ نفر مجله‌های A و B، ۲۰ نفر مجله‌های B و C، ۴۰ نفر مجله‌های A و C و بالاخره ۱۰ نفر هر سه مجلهٔ A و B و C را می‌خوانند. مطلوب است تعداد دانش‌آموزانی که:

الف) هیچ مجله‌ای نمی‌خوانند؛

ب) دقیقاً ۲ مجله می‌خوانند؛

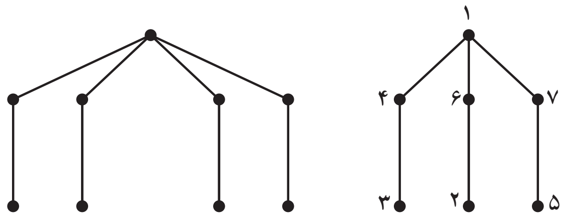
پ) حداقل ۲ مجله می‌خوانند.

۱۵ــ الف) اصل شمول و عدم شمول را در حالت چهار مجموعه بنویسید و آن را اثبات کنید.

ب) در منطقه‌ای چهار روستا وجود دارد. قرار است راه‌هایی دوطرفه بین بعضی از روستاها ساخته شود به‌طوری که نهایتاً هیچ روستایی منفرد (یعنی بدون ارتباط با هیچ روستای دیگر) نماند. این کار به چند طریق امکان دارد؟

۱۶ــ برای درخت‌ها برچسب گذاری‌های مختلف تعریف می‌شود. یک **برچسب‌گذاری دلپذیر** برای یک درخت n رأسی عبارت است ازنسبت‌دادن اعداد n,...,۱,۲,۳ به رئوس آن، به‌طوری که برچسب یال‌ها n−۱ عدد متمایز باشند و برچسب هر یال از قدرمطلق تفاضل برچسب رأس‌های دو انتهای آن به‌دست آید. مثلاً در شکل ۶ (الف) یک برچسب‌گذاری دلپذیر را می‌بینیم.

یک برچسب‌گذاری دلپذیر برای درخت شکل ۶ (ب) پیدا کنید: **حدس** این است که «هر درخت یک برچسب‌گذاری دلپذیر دارد». ولی این حدس هنوز ثابت یا رد نشده است.



(ب) (الف) یک برچسب‌گذاری دلپذیر

شکل ۶

مراجع

۱ــ ایوان نیون، ریاضیات انتخاب یا چگونه بدون شمارش بشماریم. ترجمهٔ علی عمیدی و بتول جذبی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ اول ۱۳۶۸.

2 _ R.P. Grimaldi, Discrete and Combinatorial Mathematics: An Applied Introduction, 2nd. ed., Addison– Wesley 1989.

مجلهٔ ریاضی

مربع وفقی یکی از ساختارهای ترکیبیاتی است که ریاضی‌دانان شرق دربارهٔ آن کارهای بسیاری انجام داده‌اند و روش‌های ساخت این مربع‌ها برای اندازه‌های مختلف منسوب به این دانشمندان است. اصولاً ساختارهای ترکیبیاتی یکی از مهم‌ترین مباحث ترکیبیات است که دارای کاربردهای فراوان نیز هستند. از مهم‌ترین ساختارهای ترکیبیاتی مربع‌های لاتین و طرح‌های بلوکی است. یک مربع لاتین عبارت است از یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های n,...,۱,۲,۳ به‌طوری که در هر سطر و در هر ستون درایه‌های تکراری نباشند.

مربع‌های لاتین با مربع‌های وفقی نیز ارتباط دارند. یکی از کاربردهای مربع‌های لاتین در مبحث رمزنگاری است. به‌ازای هر n داده شده می‌توان یک مربع لاتین از مرتبه n ساخت. از مربع‌هایی که در زیر به‌ازای $n = ۴$ و $n = ۵$ ساخته شده‌اند می‌توان به‌راحتی برای حالت کلی نیز ایده گرفت.

۱	۲	۳	۴	۵
۲	۳	۴	۵	۱
۳	۴	۵	۱	۲
۴	۵	۱	۲	۳
۵	۱	۲	۳	۴

۱	۲	۳	۴
۲	۳	۴	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳

دقت کنید که در هر دو مربع فوق بعضی از درایه‌های واقع در دو گوشهٔ چپ بالا و راست پایین را پررنگ نوشته‌ایم. در مربع اول ۴ تا و در مربع دوم ۶ تا از این درایه‌های پررنگ قرار دارند. جالب این است که اگر در هریک از این دو مربع فقط این درایه‌ها را به ما بدهند می‌توانیم بقیه درایه‌ها را به‌طور یکتا به‌دست آوریم.

تعداد درایه‌های پررنگ داده شده در حالت کلی $\left\lfloor \frac{n^۲}{۴} \right\rfloor$ است. حال فرض کنید درایه‌های یک مربع لاتین اطلاعاتی است که می‌خواهید به یک شخص مورد اعتماد خود بدهید. یک مربع $n \times n$ از $n^۲$ اطلاعات تشکیل می‌شود. الگوی فوق پیشنهاد می‌کند که فقط کافی است که حدود $\frac{۱}{۴}$ از اطلاعات را منتقل کنید. شخص مورد اعتماد می‌تواند بقیه را به‌طور یکتا پیدا کند.