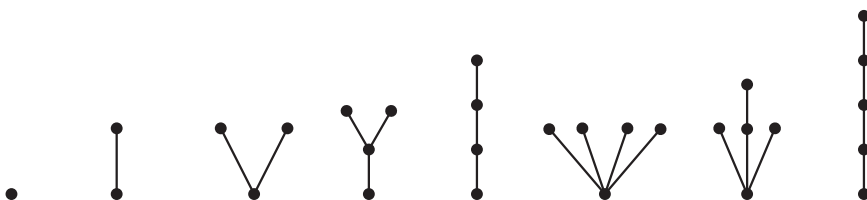


# درخت و ماتریس

در این فصل کوتاه ابتدا ردهٔ خاص دیگری از گراف‌ها موسوم به درخت‌ها را معرفی می‌کنیم و به بررسی ویژگی‌های آنها می‌پردازیم. سرانجام به هر گراف یک ماتریس نسبت می‌دهیم و نشان می‌دهیم که هر گراف را می‌توان با یک ماتریس بسیار خاص نیز نمایش داد.

## ۱-۳- درخت

گراف همبندی را که هیچ دور نداشته باشد درخت می‌نامیم. گراف‌های  $K_1$  و  $K_2$  درخت‌اند و به ترتیب «تنها» درخت‌های با یک و دو رأس هستند. در شکل ۱ تمام درخت‌های از مرتبهٔ  $p$ ،  $1 \leq p \leq 5$ ، را رسم کرده‌ایم.



شکل ۱- درخت‌های از مرتبهٔ ۱ تا ۵

گراف مربوط به هر هیدروکربن  $C_nH_{2n+2}$  نیز یک درخت است. می‌بینیم که در هر یک از این مثال‌ها بین هر دو رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد. این مطلب همواره درست است.

**قضیه ۱:** بین هر دو رأس هر درخت مفروض دقیقاً یک مسیر وجود دارد.

**اثبات:** اثبات در حالتی که دو رأس متمایز نباشند واضح است. فرض کنید  $u$  و  $v$  دو رأس متمایز درختی چون  $G$  باشند. چون  $G$  همبند است بین  $u$  و  $v$  دست کم یک مسیر وجود دارد. اگر در  $G$  دو مسیر مختلف (در واقع دو دنباله مختلف از رأس‌های متمایز  $G$ ) از  $u$  به  $v$  وجود داشته باشند، آن‌گاه این دو مسیر مختلف «ایجاب» می‌کنند که دوری در  $G$  وجود داشته باشد. پس  $G$  درخت نیست و این، یک تناقض است. ■

مطلب دیگری که از درخت‌های شکل ۱ برمی‌آید این است که، به جز  $K_1$ ، هر یک دست کم دو رأس از مرتبه یک دارد. این مطلب نیز همواره درست است.

**قضیه ۲:** هر درختی که بیش از یک رأس داشته باشد دست کم دو رأس از درجه یک دارد.

**اثبات:** از به اصطلاح استقرای تعمیم یافته روی مرتبه درخت  $G$  استفاده می‌کنیم. اگر  $p=2$  آن‌گاه  $G=K_2$  و درستی حکم واضح است. فرض می‌کنیم حکم در مورد هر درخت با  $k \geq 2$  رأس درست است. سپس درختی چون  $G$  از مرتبه  $k+1$  را در نظر می‌گیریم. اگر  $G$  رأسی چون  $v$  از درجه یک داشته باشد آنگاه با حذف رأس  $v$  و تنها یال ماز بر آن گرافی مانند  $G'$  به دست می‌آوریم که درخت است و  $k \geq 2$  رأس دارد. پس بنا به فرض استقراء،  $G'$  و در نتیجه  $G$  دست کم دو رأس از درجه یک دارد.

پس فرض می‌کنیم درجه هیچ رأسی از  $G$  از دو کمتر نباشد. در این صورت رأسی چون  $u$  از  $G$  را در نظر می‌گیریم. با آغاز از  $u$  و انتخاب یالی از  $G$  که از  $u$  می‌گذرد مسیری چون  $P$  را به این ترتیب می‌پیماییم که هر بار پس از رسیدن به رأسی تازه یالی از  $G$  را در پیش می‌گیریم که اولاً از آن رأس بگذرد، ثانیاً قبلاً مورد استفاده قرار نگرفته باشد، و ثالثاً انتهای دیگر آن رأسی تازه‌تر از  $G$  باشد. این کار باید در جایی متوقف شود. چون درجه هر رأس دست کم دو است توقف آن با رسیدن به یکی از رأس‌های قبل میسر است و لذا دوری در  $G$  به وجود می‌آید. این تناقض قضیه را ثابت می‌کند. ■

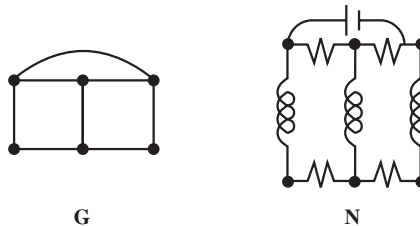
به مثال‌های گوناگون درخت‌ها نظر افکنید، می‌بینید که در مورد تمام آنها قضیه زیر درست است.

**قضیه ۳:** اگر  $G$  درختی با  $p$  رأس و  $q$  یال باشد آن‌گاه

$$p = q + 1$$

**اثبات:** با استقراء بر  $p$  قضیه را ثابت می‌کنیم. اگر  $p=1$  آن‌گاه  $q=0$  و داریم  $p=q+1$ . فرض کنید قضیه در مورد هر درختی با  $k, k \geq 1$ ، رأس درست باشد. حال درختی چون  $G$  را در نظر می‌گیریم که  $k+1$  رأس دارد. باید نشان دهیم تعداد یال‌های آن  $k$  است. بنا به قضیه قبل  $G$  رأسی چون  $v$  دارد که  $\deg v = 1$ . با حذف رأس  $v$  و تنها یال ماز بر آن درختی چون  $G'$  ایجاد می‌شود که مرتبه اش  $k$  است. بنابه فرض استقراء، گراف  $G'$  دارای  $k-1$  یال است. پس درخت  $G$  دقیقاً  $k$  یال دارد. ■

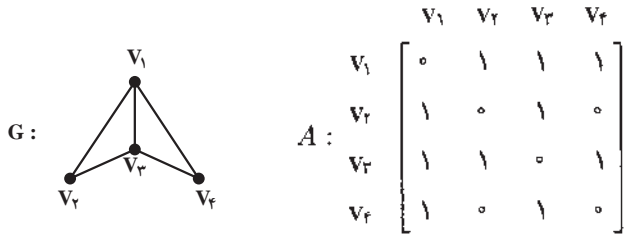
درخت در رشته‌های مختلفی مانند شیمی، مهندسی برق و علم محاسبه کاربرد دارد. کرشف در سال ۱۸۴۷ میلادی هنگام حل دستگاه‌های معادلات خطی مربوط به شبکه‌های الکتریکی درخت‌ها را کشف و نظریه درخت‌ها را بارور کرد. در شکل زیر N یک شبکه الکتریکی و G گراف مربوط به آن است.



کیلی در سال ۱۸۵۷ میلادی درخت‌ها را در ارتباط با شمارش ایزومرهای مختلف هیدروکربن‌ها کشف کرد. وقتی مثلاً می‌گوییم دو ایزومر مختلف  $C_4H_{10}$  وجود دارند منظورمان این است که دو درخت «متفاوت» با ۴ رأس وجود دارند که درجه ۴ رأس از این ۴ رأس چهار و درجه هریک از ۱۰ رأس باقیمانده یک است. اگر هزینه کشیدن مثلاً راه‌آهن بین هر دو شهر از p شهر مفروض مشخص باشد ارزان‌ترین شبکه‌ای که این p شهر را به هم وصل می‌کند با مفهوم یک درخت از مرتبه p ارتباط نزدیک دارد. به جای مسئله مربوط به راه‌آهن می‌توان وضعیت مربوط به شبکه‌های برق‌رسانی، لوله‌کشی نفت، لوله‌کشی گاز و ایجاد کانال‌های آبرسانی را در نظر گرفت. برای تعیین یک شبکه با نازل‌ترین هزینه از قاعده‌ای به نام الگوریتم صرفه‌جویی استفاده می‌شود که کاربردهای فراوان دارد.

### ۲-۳- گراف‌ها و ماتریس‌ها

گراف  $G = (V, E)$  با  $V = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$  و  $E = \{v_1v_2, v_1v_3, v_1v_4, v_2v_3, v_2v_4, v_3v_4\}$  را که در شکل ۲ رسم شده است در نظر بگیرید. به این گراف ماتریسی  $4 \times 4$  چون  $A = (a_{ij})$  به شرح زیر نسبت می‌دهیم. در مقابل چهار سطر و چهار ستون این ماتریس طبق شکل ۲ می‌نویسیم  $v_1, v_2, v_3, v_4$  و  $v_4$ . درایه  $a_{ij}$  از این ماتریس ۱ است هر گاه  $v_i v_j \in E$  و ۰ است هر گاه  $v_i v_j \notin E$ .



شکل ۲- گراف و ماتریس مجاورت آن

توجه کنید که :

(۱) درایه‌های روی قطر اصلی همگی صفرند زیرا گراف‌های (ساده) موضوع بحث ما «طوقه» ندارند، یعنی هیچ رأسی با خودش مجاور نیست.

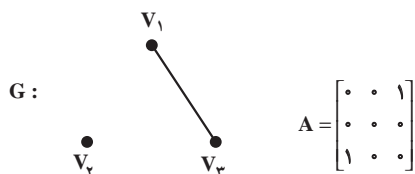
(۲) تعداد سطرهای این ماتریس برابر است با تعداد ستون‌های آن، یعنی ماتریس  $A$  مربعی است.

(۳) هر درایه ماتریس  $A$  یا صفر است یا یک، یعنی همواره  $a_{ij} \in \{0, 1\}$ .

(۴) ماتریس  $A$  متقارن است، یعنی همواره  $a_{ij} = a_{ji}$ ، زیرا اگر  $v_i v_j \in E$  آن گاه  $v_j v_i \in E$ .

واضح است که به هر گراف دلخواه  $G$  همواره می‌توان ماتریسی چون  $A$  با ویژگی‌های چهارگانه بالا نسبت داد. این ماتریس را ماتریس مجاورت گراف  $G$  می‌نامیم و آن را با  $A(G)$  یا به طور ساده با  $A$  نمایش می‌دهیم.

جالب این جاست که به هر ماتریس با ویژگی‌های چهارگانه بالا می‌توان یک گراف نسبت داد. مثلاً اگر ماتریس  $A$  از شکل ۳ را به ما بدهند فوراً می‌توانیم گراف  $G$  از همین شکل را به آن نسبت دهیم. برای این کار به ازای سطر (یا ستون) اول ماتریس نقطه‌ای چون  $v_1$ ، به ازای سطر (یا ستون) دوم ماتریس نقطه‌ای چون  $v_2$  و همین طور به ازای سطر (یا ستون) سوم نقطه دیگر  $v_3$  را در نظر می‌گیریم و نقطه  $v_1$  را به نقطه  $v_j$  با خطی به هم وصل می‌کنیم هرگاه درایه مربوط در ماتریس داده شده یک باشد و در غیر این صورت آن دو را به هم وصل نمی‌کنیم.



شکل ۳- ماتریس با شرایط چهارگانه بالا و گراف آن

پس می بینیم که یک گراف با  $p$  رأس در واقع چیزی جز یک ماتریس مربعی  $p \times p$  با شرایط چهارگانه بالا نیست. و لذا برای مطالعه گراف ها می توان صرفاً ماتریس های مربعی متقارنی را مطالعه کرد که درایه های آنها از مجموعه  $\{0, 1\}$  انتخاب می شوند و درایه های روی قطر اصلی آن ها صفرند. بنابراین نظریه گراف ها را می توان شاخه ای از جبر هم تلقی کرد.

**قضیه ۴ :** فرض کنید  $A$  ماتریس مجاورت گراف  $G$  با  $V(G) = \{v_1, \dots, v_p\}$  باشد. آن گاه درایه واقع در سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $A^2$  برابر است با درجه رأس  $v_i$  در گراف  $G$ .

**اثبات :** درایه واقع در سطر  $i$ ام و ستون  $j$ ام ماتریس  $A^2$  برابر است با مجموع حاصل ضرب های درایه های نظیر به نظیر سطر  $i$ ام  $A$  و ستون  $j$ ام  $A$ . چون  $A$  متقارن است این درایه از حاصل ضرب های درایه های نظیر به نظیر سطر  $i$ ام  $A$  و سطر  $j$ ام  $A$  حاصل می شود. تعداد یک های موجود در سطر  $i$ ام  $A$  برابر است با درجه رأس  $v_i$  و لذا برای محاسبه درایه موردنظر از ماتریس  $A^2$  باید به اندازه  $\deg v_i$  عدد  $1 \times 1 = 1$  را با هم جمع کنیم. ■

### ۳-۳- تمرین ها

- ۱- گراف همبندی معرفی کنید که مجموع مرتبه و اندازه آن ۸ باشد.
- ۲- گراف همبندی معرفی کنید که حاصل ضرب مرتبه و اندازه آن ۲۰ باشد.
- ۳- فرض کنید ماکسیم درجه یک درخت  $T$  برابر با  $k$  باشد. ثابت کنید که  $T$  دست کم  $k$  رأس از درجه یک دارد.
- ۴- گرافی از مرتبه ۶ و اندازه ۶ معرفی کنید که ۲- منتظم باشد.
- ۵- تمام درخت های از مرتبه ۶ را رسم کنید.

۶- دو ماتریس  $M_1$  و  $M_2$  به صورت زیر داده شده‌اند.

$$M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad M_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

آن را که معرف یک گراف است مشخص کنید و نمودار آن را بکشید.

۷- اگر ماتریس مجاورت گراف  $K_p$ ،  $p \in \mathbb{N}$ ، را با  $M$  نمایش دهیم نشان دهید هر درایه واقع بر روی قطراصلی ماتریس  $M^2$  برابر با  $p-1$  است.

۸- الف) قضیه ۱ را با استفاده از استقراء روی مرتبه یک درخت و با به کار بردن قضیه ۲ ثابت کنید.

ب) اثباتی را که در متن برای قضیه ۱ ارائه شده است با اثباتی که طبق بند الف) این تمرین به دست می‌آید مقایسه کنید و با ذکر دلیل به پرسش‌های زیر پاسخ دهید :

- کدام اثبات شهودی‌تر است؟

- کدام اثبات «دقیق‌تر» است؟

- کدام اثبات را بیشتر می‌پسندید؟

۹- الف) در شکل زیر یک گراف ناهمبند  $G$  رسم شده است. رأس‌های  $G$  را با  $v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6$ ، چنان برچسب بزنید که ناهمبند بودن  $G$  از ماتریس مجاورت آن آشکار باشد.



ب) اگر این فکر را در مورد یک گراف ناهمبند و دلخواه  $G$  به کار ببریم ماتریس مجاورتش چه صورتی خواهد داشت؟

۱۰- الف) با توجه به تعریف ماتریس مجاورت گراف (ساده) ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار را تعریف کنید.

ب) ماتریس مجاورت گراف جهت‌دار شکل ۴ از فصل ۱ را بنویسید.

۱۱- گراف همبند  $G$  داده شده است. اگر  $u, v \in V(G)$  فاصله  $u$  از  $v$  در  $G$  که با  $d(u, v)$  نمایش

داده می شود برابر است با طول کوتاه ترین مسیر از  $u$  به  $v$  در  $G$ . نشان دهید :

الف)  $d(u, v) = 0$  اگر و تنها اگر  $u = v$ .

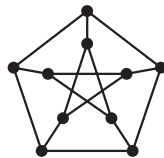
ب) به ازای هر  $u, v \in V(G)$  داریم  $d(u, v) = d(v, u)$ .

پ) به ازای هر  $u, v, w \in V(G)$  داریم  $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ .

۱۲- گراف زیر موسوم به گراف پترسن را در نظر بگیرید.

الف) در این گراف دوری مشخص کنید که طول آن هر یک از اعداد ۵، ۶، ۸ و ۹ باشد.

ب) آیا این گراف همبند است؟ چرا؟



## مراجع

1- M. Behzad, G. Chartrand, and L. Lesniak-Foster, Graphs and Digraphs, Wadsworth International Group, Belmont, Galif. 1979.

2- O. Ore, and R. J. Wilson, Graphs and their Uses, The Mathematical Association of America, 1990.