

چند ویژگی ساده و چند رده خاص گراف‌ها

در این فصل ابتدا چند ویژگی ساده از گراف‌ها را ذکر می‌کنیم و سپس برای آشنایی بیشتر با گراف‌ها به معرفی چند رده خاص از آنها می‌پردازیم و باز هم می‌کوشیم به‌طور شهودی مفاهیم را روشن کنیم.

۲-۱- مرتبه، اندازه و درجه

می‌دانیم که اگر مجموعه‌ای $p \in \mathbb{N}$ ، عضو داشته باشد تعداد زیرمجموعه‌های دو عضوی آن $p(p-1)/2$ است که با $\binom{p}{2}$ نمایش داده می‌شود. بنابراین اگر گرافی p رأس و q یال داشته باشد داریم:

$$0 \leq q \leq \binom{p}{2} = p(p-1)/2$$

تعریف: در هر گراف $G = (V, E)$ تعداد اعضای مجموعه V را مرتبه G و تعداد اعضای مجموعه E را اندازه G می‌نامیم و معمولاً آنها را، به ترتیب، با p و q نمایش می‌دهیم. مرتبه G را با $p(G)$ و اندازه آن را با $q(G)$ هم نمایش می‌دهیم.

مثال ۱: مرتبه گراف شکل ۲ از فصل ۱ پنج و اندازه آن هفت است. مرتبه گراف مربوط به مثلاً بوتان (شکل ۵ از فصل ۱) ۱۴ و اندازه آن ۱۳ است. توجه کنید که در مورد سایر گراف‌های این شکل نیز رابطه $p = q + 1$ برقرار است. ▲

تعریف: درجه رأس v از گراف G برابر با تعداد یال‌هایی از G است که از رأس v می‌گذرند. این عدد را با $\deg_G v$ و گاهی به‌طور ساده با $\deg v$ نمایش می‌دهیم. اگر $\deg v$ یک عدد فرد باشد v را یک رأس فرد و اگر یک عدد زوج باشد v را یک رأس زوج از گراف G می‌نامیم.

مثال ۲: در شکل ۲ از فصل ۱ داریم: $\deg a = 3$ و $\deg b = 2$. این گراف چهار رأس فرد و یک رأس زوج دارد. در شکل ۶ از فصل ۱ داریم: $\deg a_1 = 1$ و $\deg a_4 = 5$. این گراف شش رأس فرد و سه رأس زوج دارد. توجه کنید که در هر دو مثال مجموع درجه‌های تمام رأس‌ها یک عدد زوج است. در قضیه زیر نشان می‌دهیم این مطلب همواره درست است. ▲

قضیه ۱: اگر $V = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ مجموعه رأس‌های گراف G با اندازه q باشد، آن‌گاه $\sum_{i=1}^p \deg v_i = 2q$.

اثبات: هر یال تنها دو سر دارد، یعنی دقیقاً از دو رأس G می‌گذرد و لذا در طرف چپ فرمول بالا هر یال دو بار به حساب می‌آید. ■

توجه کنید درجه هر رأس گرافی که اصلاً یال نداشته باشد صفر است. لذا، در این حالت هر دو طرف برابری مذکور در قضیه ۱ صفر به حساب می‌آیند.

نتیجه: تعداد رأس‌های فرد هر گراف، زوج است.

اثبات: مجموع جمع‌وندهای (یعنی مجموع عامل‌های) زوج عبارت $\sum_{i=1}^p \deg v_i$ را با A و

مجموع جمع‌وندهای فرد آن را با B نمایش می‌دهیم. پس داریم $\sum_{i=1}^p \deg v_i = A + B$. عدد $2q = \sum_{i=1}^p \deg v_i$ عدد

زوج است، زیرا مجموع هر تعداد عدد زوج همواره زوج است. در نتیجه $B = 2q - A$ نیز زوج است. بنابراین تعداد جمع‌وندهای B ، یعنی تعداد رأس‌های فرد گراف، باید زوج باشد. ■

تعریف: بزرگ‌ترین عدد در بین درجه‌های رأس‌های گراف G را **ماکسیمم درجه** G می‌نامیم و آن را با $\Delta(G)$ یا به‌طور ساده با Δ نمایش می‌دهیم. کوچک‌ترین عدد در بین درجه‌های رأس‌های گراف G را **مینیمم درجه** G می‌نامیم و آن را با $\delta(G)$ یا به‌طور ساده با δ نمایش می‌دهیم.

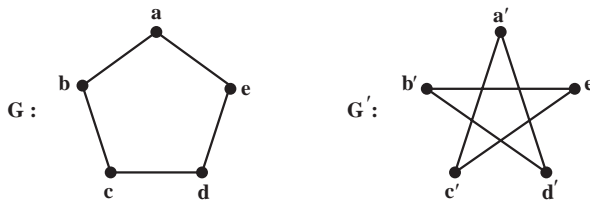
مثال ۳: در شکل ۶ از فصل ۱ داریم: $\Delta = 5$ و $\delta = 1$. در تمام گراف‌های مربوط به هیدروکربن‌ها

▲ $\Delta = 4$ و $\delta = 1$.

۲-۲. گراف‌های منتظم، کامل و تهی

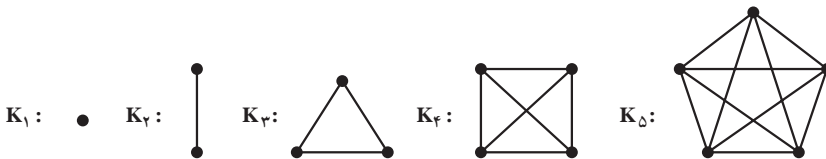
تعریف : عدد صحیح و نامنفی r داده شده است. گراف G از مرتبه p را r - منتظم می‌نامیم هرگاه درجه هر رأس G برابر با r باشد، هر گراف $(p-1)$ - منتظم از مرتبه p را گراف کامل هم می‌نامیم و آن را با K_p نمایش می‌دهیم.

مثال ۴ : هر یک از دو گراف شکل ۱، دو - منتظم است ولی چون در این دو مثال $p=5$ و $2 \neq p-1=4$ این دو گراف کامل نیستند. توجه کنید که در گراف کامل G از مرتبه p درجه هر رأس $p-1$ است و لذا به ازای هر $u, v \in V(G)$ ، $u \neq v$ داریم $uv \in E(G)$.



شکل ۱- گراف‌های ۲- منتظم

مثال ۵ : در شکل زیر پنج گراف کامل K_p ، $1 \leq p \leq 5$ ، رسم شده‌اند. در مورد هر یک از این مثال‌ها دیده می‌شود که تعداد یال‌های K_p برابر با $p(p-1)/2$ است.



شکل ۲- گراف‌های کامل از مرتبه‌های ۱ تا ۵

قضیه ۲ : تعداد یال‌های گراف کامل K_p ، $p \in \mathbb{N}$ برابر با $p(p-1)/2$ است.

اثبات : مجموع درجه‌های رأس‌های گراف K_p برابر با $p(p-1)$ است. پس، بنابر قضیه ۱، نصف

این عدد برابر با $q(K_p)$ است. ■

قرارداد : گراف \circ - منتظم از مرتبه p را با \bar{K}_p نمایش می‌دهیم. چون \bar{K}_p هیچ یال ندارد،

یعنی $E(\bar{K}_p) = \emptyset$ ، این گراف را گراف تهی هم می‌نامیم. گراف‌های تهی با p رأس، $1 \leq p \leq 5$ ، را در شکل ۳ می‌بینید.



شکل ۳- گراف‌های تهی از مرتبه‌های ۱ تا ۵

۳-۲- مسیر گراف و دور گراف

تعریف: اگر u و v دو رأس متفاوت از گراف دلخواه G باشند، یک مسیر از u به v از گراف G دنباله‌ای متشکل از $m \in \mathbb{N}$ ، $m+1$ رأس دو به دو متفاوت G است که از u آغاز و به v ختم می‌شود و هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاورند. عدد m را طول این مسیر از گراف G می‌نامیم. می‌پذیریم که دنباله متشکل از تنها یک رأس v یک مسیر با طول صفر از v به v از گراف G باشد. در واقع یک مسیر از رأس u به رأس v از گراف G را به این ترتیب به دست می‌آوریم که با در نظر گرفتن نموداری از G ابتدا u را یادداشت می‌کنیم؛ از یک یال ماژر u (در صورت وجود) می‌گذریم و الزاماً به رأسی تازه می‌رسیم و آن را به عنوان دومین عضو دنباله یادداشت می‌کنیم. از آن جا یالی تازه از G را برمی‌گزینیم و از آن به رأس سوم می‌رسیم که آن را نیز یادداشت می‌کنیم و این عمل را ادامه می‌دهیم تا در صورت امکان پس از گذشتن از m یال دوبه دو متفاوت، $m \geq 0$ ، به v برسیم. در پایان v را نیز یادداشت می‌کنیم. رأس‌هایی را که یادداشت کرده‌ایم دنباله‌ای است که یک مسیر از u به v از گراف G را به دست می‌دهد.

مثال ۶: در شکل ۲ از فصل ۱ از a به b پنج مسیر وجود دارند. در این گراف مثلاً

$$a, b \quad a, c, d, b \quad a, c, e, d, b$$

سه مسیر متفاوت با طول، به ترتیب از چپ به راست، ۱، ۳ و ۴ از رأس a به رأس b هستند.

(دو مسیر دیگر از a به b را بنویسید و طول آنها را مشخص کنید). ▲

واضح است که اگر در گرافی از u به v مسیری وجود داشته باشد در آن گراف از رأس v به u

هم مسیری وجود دارد. لذا وجود یا عدم وجود مسیر «بین» دو رأس گراف معنی دارد.

تعریف: گراف G را همبند می‌نامیم هرگاه بین هر دو رأس آن مسیری وجود داشته باشد. در

غیر این صورت G را ناهمبند می‌نامیم.

مثال ۷: گراف شکل ۲ از فصل ۱ همبند است. ولی گراف شکل ۳ از فصل ۱ و گراف تهی

\bar{K}_p ، $p \geq 2$ ، همبند نیستند. البته \bar{K}_1 نیز همبند است. به مثال ۷ از فصل ۱ بازگردید. گفتیم که این

گراف از سه «بخش جدا از هم» تشکیل شده است. این گراف ناهمبند است زیرا مثلاً بین دو رأس v_1 و v_4 مسیری وجود ندارد. ▲

تعریف: یک دور از گراف G دنباله‌ای چون $v_1, v_2, \dots, v_m, v_{m+1} = v_1$ با شرط $m \geq 3$ متشکل از $m+1$ رأس G است که در آن‌ها، $1 \leq i \leq m$ ، دوه‌دو متمایزند و هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاورند. عدد m را طول این دور از گراف G می‌نامند.

مثال ۸: هیچ یک از گراف‌های شکل ۵ از فصل ۱ دور ندارد. همچنین گراف تهی \bar{K}_p دور ندارد. ولی به ازای هر $p \geq 3$ گراف کامل K_p دور دارد. در واقع، به ازای هر عدد طبیعی n ، $3 \leq n \leq p$ ، گراف K_p دوری به طول n دارد. گراف شکل ۶ از فصل ۱ دوری ندارد که طولش فرد باشد ولی دوری به طول ۴ (دنباله b_1, a_1, b_2, a_2) و دوری به طول ۶ (دنباله $b_1, a_1, b_2, a_2, b_3, a_3$) دارد. ▲

۴-۴- تمرین‌ها

۱- فرض کنید گراف G ، ۳-منتظم است و داریم $q = 2p - 3$. مرتبه G با p و اندازه آن با q نمایش داده شده است.

(الف) ویژگی‌های گراف G را مشخص کنید.

(ب) گرافی رسم کنید که این ویژگی‌ها را داشته باشد.

(پ) گراف دیگری رسم کنید که واجد این ویژگی‌ها باشد.

۲- (الف) گراف شکل ۶ از فصل ۱ را در نظر بگیرید و پارامترهای p ، q ، Δ و δ را بیابید.

(ب) درجه‌های تمام رأس‌های این گراف را به صورت دنباله‌ای چون d_1, d_2, \dots, d_n بنویسید که به ازای هر $1 \leq i \leq n$ داشته باشیم $d_{i+1} \leq d_i$. (دنباله حاصل را دنباله درجه‌های رأس‌های گراف می‌نامیم.)

(پ) چرا گرافی وجود ندارد که $0, 1, 3, 3, 5$: S دنباله درجه‌های رأس‌های آن باشد؟

۳- (الف) گرافی ارائه کنید که دنباله درجه‌های رأس‌هایش $0, 0, 0, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3$: S باشد. (ب) آیا پاسخ یکتاست؟ چرا؟

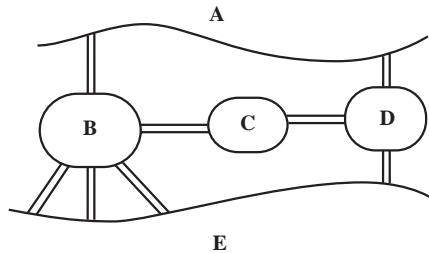
۴- چند گراف ۳-منتظم از مرتبه ۱۵ وجود دارند؟ چرا؟

۵- با استقراء بر q قضیه ۱ را اثبات کنید.

۶- گرافی ناهمبند و ۳-منتظم مثال بزنید که ۸ رأس و ۱۲ یال داشته باشد.

۷- گرافی همبند و ۳-منتظم مثال بزنید که ۸ رأس و ۱۲ یال داشته باشد.

۸- فرض کنید طبق شکل، شهری از یک رودخانه و پنج منطقه A، B، C، D، E تشکیل شده است و این منطقه‌ها با هشت پل به هم راه دارند.



الف) گراف چندگانه مربوط به این شهر را رسم کنید.
 ب) آیا با آغاز از یکی از منطقه‌های پنجگانه و عبور از پل‌ها می‌توان از هر پل دقیقاً یک بار گذشت و به منطقه آغاز بازگشت؟
 پ) آیا با آغاز از یکی از منطقه‌های پنجگانه می‌توان از هر پل دقیقاً یک بار گذشت؟ در این حالت لازم نیست منطقه آغاز گشت با منطقه پایان آن یکی باشد.

۹- در گراف کامل K_p ، $2 \leq p \leq 4$ ، تعداد مسیرهای «متفاوت» از یک رأس u به یک رأس v ، $u \neq v$ ، را بیابید.

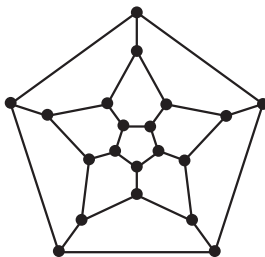
۱۰- الف) گراف شکل ۶ از فصل ۱ «چند» دور دارد؟ (پاسخ ۳ است: دو دور از مرتبه ۴ و یک دور از مرتبه ۶. پاسخ را توجیه کنید).
 ب) هر یک از دورها را به صورت دنباله‌ای از رأس‌ها نمایش دهید که رأس اول و آخر دنباله مثل هم و بقیه همراه با این رأس مشترک دو به دو متفاوت باشند؛ به علاوه، هر دو رأس متوالی این دنباله در G مجاور باشند.

راهنمایی. یکی از دورهای G را می‌توان به یکی از صورت‌های زیر نوشت:

b_1, a_2, b_3, a_3, b_1	b_1, a_3, b_2, a_2, b_1
a_2, b_3, a_3, b_1, a_2	a_2, b_1, a_3, b_2, a_2
b_3, a_3, b_1, a_2, b_3	b_3, a_2, b_1, a_3, b_3
a_3, b_1, a_2, b_3, a_3	a_3, b_2, a_2, b_1, a_3

۱۱- هفده نفر به سفر می‌روند و قبل از سفر قرار می‌گذارند هر کس به پنج نفر دیگر نامه بفرستد. آیا امکان دارد هر کس به آن پنج نفری نامه بفرستد که از آنها نامه دریافت می‌کند؟ چرا؟

- ۱۲- اگر گراف G از مرتبه p ، $p \geq 3$ ، دوری از مرتبه p داشته باشد، آن گاه G را گراف همیلتنی می نامیم. مثلاً هر K_p ، $p \geq 3$ ، گراف همیلتنی است.
- الف) نشان دهید هر گراف همیلتنی همبند است.
- ب) اگر G همیلتنی باشد آن گاه به ازای هر $v \in V(G)$ داریم $\deg_G v \geq 2$.
- پ) آیا گراف زیر گراف همیلتنی است و چرا؟



- ۱۳- الف) گراف G داده شده است. فرض کنید $u, v \in V(G)$ نشان دهید «وجود یک مسیر از u به v » یک رابطه هم ارزی بر مجموعه $V(G)$ است.
- ب) اگر G گراف شکل ۳ از فصل ۱ باشد، افزایش حاصل از رابطه هم ارزی مذکور در بند الف) را بیابید.
- پ) پاسخ بند ب) را با فرض این که G گراف شکل ۶ یا گراف شکل ۱۰ باشد بیابید.