

استدلال ریاضی

۱-۱- درک شهودی^۱

طی قرن‌های متمادی، مردم باور کرده بودند که زمین صاف است و ستاره‌ها به دور آن در گردش هستند. آنها نظریهٔ گرد بودن زمین و چرخش آن به دور خورشید را رد می‌کردند. اگر چه امروزه این نظریه حتی برای خردسالان نیز امری کم و بیش واضح است، لیکن با شهود مردم آن زمان مطابقت نداشت.

شهود می‌تواند یک دانش غریزی یا احساس بدون استدلال باشد. 

وقتی که از شهود خود استفاده می‌کنیم، هیچ‌گاه نمی‌توانیم با اطمینان صد درصد بگوییم که نتیجه‌گیری ما درست است. با این حال در بسیاری مواقع، درک شهودی به ما کمک می‌کند که مطالب ریاضی را بهتر بفهمیم و حدس‌های بهتری برای اثبات قسمت‌های مختلف بزنیم. چنین حدس‌هایی کم و بیش محتمل و به صورت استدلال موقت، رضایتی در ما به وجود می‌آورند که با اشتیاق بیشتری برای دستیابی به یک استدلال حتمی تلاش کنیم. معمولاً استدلال موقت بر مبنای تمثیل و استقرا می‌باشد که در قسمت‌های بعد با محدودیت‌های آنها آشنا می‌شویم.

۱-۲- استدلال تمثیلی یا قیاسی^۲

در اکثر کارهای روزمره - از نتیجه‌گیری‌های سطحی تا موفقیت‌های عمدهٔ علمی و یا کارهای هنری - از تمثیل یا قیاس استفاده می‌کنیم. قیاس که در واقع همان یافتن نوعی مشابهت بین مفاهیم گوناگون می‌باشد، در تمام سطوح مختلف قابل استفاده است. انواع تمثیل با توجه به محدودیت‌هایی که دارند، می‌توانند در ایجاد یک زمینهٔ شهودی برای درک بسیاری از مفاهیم و اثبات‌های ریاضی کمک

۱ - Intuitive

۲ - Analogy

مؤثری باشند و نباید اهمیت آنها را نادیده گرفت. به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱: از تمثیل برای درک بهترین حقیقت که حاصل ضرب عدد منفی در عدد منفی، عددی

مثبت است استفاده می کنیم :

وارد شدن آب به مخزن را عملی مثبت (+) و خروج آب از آن را عملی منفی (-) در نظر می گیریم. در نمایش فیلم نیز، جلو بردن فیلم را عملی مثبت (+) و عقب بردن آن را عملی منفی (-) به حساب می آوریم. حال اگر فیلمی نمایش داده شود که در آن، آب در حال خروج از یک مخزن است (-) و فیلم را به عقب برگردانیم (-)، آب دوباره به مخزن باز می گردد (+)؛ یعنی حاصل دو عمل منفی (خروج آب و عقب بردن فیلم)، عمل مثبت بازگشت آب به مخزن شده است.

همان طور که می دانید، مثال بالا به هیچ عنوان یک اثبات ریاضی نیست، اما تمثیل خوبی است تا ما را برای اثبات دقیق آماده کند.

تمرین ۱- با توجه به داستان زیر، توضیح دهید که طوطی چه تمثیلی به کار برد و علت خنده

مردم چه بود؟

خوش نوایی سبزگویا طوطی
نکته گفتی با همه سوداگران
در نوای طوطیان حاذق بدی
شیشه های روغن گل را بریخت
بر دکان بنشست فارغ خواههوش
بر سرش زد گشت طوطی گل ز ضرب
مرد بقال از ندامت آه کرد
کآفتاب نعمتم شد زیر میغ
چون زدم من بر سر آن خوش زبان
تا بیابد نطق مرغ خویش را
بر دکان بنشسته بُد نومیدوار
تا که باشد کاندر آید او بگفت
باسربی موجو پشت طاس و پشت
بانگ بر درویش زد که هی فلان
تو مگر از شیشه روغن ریختی
کوچو خود پنداشت صاحب دل را
گرچه مانند در نبستن شیر و شیر
کم کسی ز ابدال حق آگاه شد

بود بقالی و وی را طوطی
در دکان بودی نگهبان دکان
در خطاب آدمی ناطق بدی
جست از سوی دکان سویی گریخت
از سوی خانه بیامد خواههوش
دید پر روغن دکان و جامه چرب
روزی چندی سخن کوتاه کرد
ریش برمی کند و می گفت ای دریغ
دست من بشکسته بودی آن زمان
هدیه ها می داد هر درویش را
بعد سه روز و سه شب حیران و زار
می نمود آن مرغ را هرگون شگفت
جولقی سر برهنه می گذشت
طوطی اندر گفت آمد در زمان
از چه ای کل با کلان آمیختی
از قیاسش خنده آمد خلق را
کار پاکان را قیاس از خود مگیر
جمله عالم زین سبب گمراه شد

۱-۳- استدلال استقرایی^۱

اگر وارد قریه‌ای شوید و اولین فردی که به او برخورد می‌کنید دارای چشمانی آبی باشد چه می‌گویید؟ حال اگر به گردش در کوچه پس کوچه‌های قریه بپردازید و متوجه شوید که رنگ چشمان تمام افرادی که با آنها در آن قریه مواجه شده‌اید آبی است، ممکن است نتیجه بگیرید که رنگ چشمان تمامی افراد قریه آبی است.

در سفر به قریه، شواهد متعددی را جمع‌آوری کردیم، متوجه یکسان بودن نتایج شدیم و براساس آنها، نتیجه‌گیری کلی را انجام دادیم. عالمان تجربی نیز با روشی مشابه مشاهدات خود را نظم داده و با توجه به نظم حاکم بر آنها، قوانین عمومی طبیعت را کشف می‌کنند. در علوم تجربی به این نوع استدلال، روش تجربی یا علمی و در ریاضی به آن استدلال استقرایی گفته می‌شود.

 **استدلال استقرایی روش نتیجه‌گیری کلی بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات است.**

مثال ۲: فرض کنید که اعداد متوالی فرد را با هم جمع می‌کنیم. برای این کار از ۱ شروع می‌کنیم:

$$1+3=4$$

$$1+3+5=9$$

$$1+3+5+7=16$$

با توجه به مشاهدات بالا نتیجه می‌گیریم تمام حاصل جمع‌ها مربع کامل هستند. حال با ادامه الگوی بالا، نتیجه به دست آمده را کنترل می‌کنیم. از این یافته‌ها چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟ آیا می‌توان ادعا کرد که همیشه حاصل جمع اعداد فرد متوالی یک مربع کامل است؟

۱-۴- محدودیت استدلال استقرایی

مشاهده ۱- آب آنقدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند.

مشاهده ۲- برف آنقدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند.

مشاهده ۳- یخ آنقدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند.

نتیجه: هر چیزی آنقدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند.



در شکل بالا مرد غارنشین با مشاهده و جمع‌آوری اطلاعات و دیدن الگویی که تکرار می‌شد نتیجه‌گیری کرد که «هر چیزی آنقدر می‌جوشد تا آن که چیزی از آن باقی نماند!»

همان‌طور که می‌بینید، شکل بالا ضعف اساسی چنین استدلالی را به ما نشان می‌دهد زیرا که همیشه این احتمال وجود دارد که شواهد بیشتری کشف بشوند تا نادرستی نتیجه‌گیری کلی، بر مبنای مجموعه محدودی از مشاهدات را نشان دهند.

تمرین ۲- محاسبات تعیین شده را انجام دهید تا اعدادی را که در معادلات زیر صدق می‌کنند

پیدا کنید :

$$۱) ۱ \times ۸ + ۱ = \boxed{}$$

$$۲) ۱۲ \times ۸ + ۲ = \boxed{}$$

$$۳) ۱۲۳ \times ۸ + ۳ = \boxed{}$$

$$۴) ۱۲۳۴ \times ۸ + ۴ = \boxed{}$$

الف) آیا فکر می‌کنید این الگو تا بی‌نهایت ادامه داشته باشد؟

ب) بدون محاسبه و با توجه به الگوی بالا، اعدادی را که در معادلات زیر صدق می‌کنند حدس بزنید :

$$۵) ۱۲۳۴۵ \times ۸ + ۵ = \boxed{}$$

$$۶) ۱۲۳۴۵۶ \times ۸ + ۶ = \boxed{}$$

پ) نتایج قسمت (ب) را محاسبه کنید تا مشخص شود که آیا حدس شما درست بوده است یا خیر؟

سعی کنید آنچه را شهودی به نظر می‌رسد، به طور رسمی و دقیق اثبات کنید و آنچه را که به طور رسمی و دقیق اثبات کرده‌اید به طور شهودی درک کنید. این یک ورزش مغزی جالب است.

جورج پولیا، ۱۹۴۵

۱-۵- استقرای ریاضی^۲

ممکن است به طور تصادفی مشاهده کرده باشید که: $1 + 8 + 27 + 64 = 100$. با تشخیص مربع ها و مکعب های اعداد، شاید بتوانیم به مشاهده خود شکل جالب تری بدسیم:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = 10^2$$

چطور این اتفاق افتاد؟ آیا همیشه مجموع مکعب های متوالی، مربع یک عدد است؟ برای پاسخ به کنجکاوای خود، می توانیم موارد مشخص دیگری را نیز بررسی کنیم و برای تکامل و یگانگی حالت، $n = 1$ یعنی حالتی که فقط یک عدد مکعب شده وجود دارد، را نیز اضافه می کنیم:

مکعب های اعداد متوالی	مجموع مکعب ها	مربع مجموع
1^3	۱	1^2
$1^3 + 2^3$	۹	3^2
$1^3 + 2^3 + 3^3$	۳۶	6^2
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3$	۱۰۰	10^2
$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$	۲۲۵	15^2

با جمع آوری مشاهدات فوق و استفاده از استدلال استقرایی می بینیم که: مجموع مکعب های اعداد متوالی برابر است با مربع مجموع آنها. اما چنین نتیجه گیری ای کامل نیست. به همین دلیل است که در ریاضی استقرا را نه فقط با مشاهدات بلکه به کمک اثبات دقیق نیز محک می زنیم. حال برای اثبات دقیق به طریق زیر عمل می کنیم:

شاید بدانیم که $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ (اثبات کنید!) می خواهیم تحقیق کنیم و ببینیم که اگر مجموع مکعب های n عدد متوالی برابر با مربع مجموع آنها باشد

۱ - George Polya

۲ - برگرفته از کتاب How to solve it? اثر جورج پولیا.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (1)$$

آیا این ادعا برای $n+1$ عدد متوالی نیز درست است؟ یعنی آیا رابطه

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 \quad (2)$$

نیز برقرار است؟

با یک کنترل ساده، رابطه زیر را با کم کردن (1) از (2) به دست می آوریم:

$$(n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 - \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 \quad (3)$$

از جمله مشترک $\left(\frac{n+1}{2} \right)^2$ فاکتور می گیریم:

$$(n+1)^3 = \left(\frac{n+1}{2} \right)^2 [(n+2)^2 - n^2] \quad (4)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4} [n^2 + 4n + 4 - n^2] \quad (5)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4} [4n + 4] \quad (6)$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4} (n+1) \times 4 \quad (7)$$

$$= (n+1)^3 \quad (8)$$

رابطه تجربی ما امتحان حیاتی را گذراند، یعنی درستی تساوی (3) را نتیجه گرفتیم که معادل

تساوی (2) است، یعنی

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right]^2 \quad (9)$$

در بررسی این موضوع، درستی ادعا را در حالت های خاص از $n=1$ تا $n=5$ مشاهده کردیم.

سپس با فرضی که این ادعا برای n امین حالت درست است، نشان دادیم که برای $(n+1)$ امین حالت نیز

چنین ادعایی درست است. حال با اطمینان خاطر می گوئیم:

مجموع مکعب های n عدد متوالی، برابر با مربع مجموع آنهاست. 

مطلب فوق نمونه خوبی برای گذار از استدلال استقرایی (تجربی) به استقرای ریاضی است.

برای بهتر فهمیدن استقرای ریاضی به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۳: برای هر عدد صحیح و مثبت n ثابت کنید که :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n} \quad (1)$$

حل : اگر $n = 1$ ، آنگاه :

$$\frac{1}{2^1} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2^1} \quad (2)$$

می بینیم که در این حالت، تساوی (۱) درست است.

اگر $n = 2$ ، آنگاه

$$\frac{1}{2^1} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{2^2} \quad (3)$$

که مجدداً تساوی (۱) را نشان می دهد. این تساوی را می توانیم با جمع (۲) و $\frac{1}{2}$ به دست آوریم :

$$\left(1 - \frac{1}{2^1}\right) + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{2^2} = 1 - \frac{1}{2^2}$$

ادامه این بررسی برای تمام اعداد عملی نیست، پس چه کار کنیم؟

یک قدم دیگر هم جلو می رویم و با استفاده از نتایج به دست آمده برای دو جمله اول، حالت

$n = 3$ را نیز بررسی می کنیم :

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2^3} = \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{2^3} = \frac{7}{2^3} = 1 - \frac{1}{2^3} \quad (4)$$

در نتیجه درستی رابطه برای حالت $n = 3$ را نیز نتیجه گرفتیم.

حال اگر در حالت کلی، درستی رابطه را برای $n = k$ فرض کنیم، یعنی داشته باشیم

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k} = 1 - \frac{1}{2^k}$$

و بتوانیم از این فرض، درستی رابطه را برای $n = k + 1$ یعنی

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{k+1}} = 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \quad (5)$$

نتیجه بگیریم، آنگاه می‌توانیم ادعا کنیم که تساوی (۱) در هر حالتی درست است.
در طرف اول تساوی (۵) به جای مقدار داخل پرانتز، معادل آن یعنی $\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)$ را از تساوی (۱) جایگزین می‌کنیم

$$\left(1 - \frac{1}{2^k}\right) + \frac{1}{2^{k+1}} \quad (6)$$

$$= 1 - \frac{2}{2^{k+1}} + \frac{1}{2^{k+1}} \quad (7)$$

$$= 1 - \frac{1}{2^{k+1}} \quad (8)$$

از درستی رابطه در حالت $n = k$ ، درستی آن در حالت $n = k + 1$ نیز ثابت شد. این گونه اثبات را، اثبات به وسیله استقرای ریاضی یا اثبات به وسیله اصل استقرا می‌نامیم که از اهمیت ویژه‌ای در ریاضیات برخوردار است. اصل استقرا برای اثبات رابطه‌هایی نظیر رابطه بالا مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اصل استقرا

فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره عدد طبیعی n باشد. اگر $P(1)$ درست باشد و از درستی $P(k)$ درستی $P(k + 1)$ نتیجه شود، در این صورت $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n نیز درست است.

در نتیجه بنابراین اصل استقرا، برای هر عدد طبیعی n ، تساوی (۱) در مثال قبل، درست است.

برای استفاده از اصل استقرا گام‌های زیر را برداشتیم:

گام ۱: درستی حکم را برای $n = 1$ نشان دادیم.

گام ۲: ثابت کردیم که اگر حکم برای $n = k$ درست باشد، آنگاه برای $n = k + 1$ نیز درست است.

مثال ۴: با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید که برای هر عدد طبیعی n ، $4^{2n} - 1$ بر ۵ بخش پذیر

است.

حل: با دانستن این که $P_n = 4^{2n} - 1$ بر ۵ بخش پذیر است، گام اول را برمی‌داریم.

گام ۱ : درستی حکم را برای $n = 1$ نشان می‌دهیم :

$$P_1 = 4^{2(1)} - 1 = 15 = 5 \times 3 \quad (1)$$

که بر ۵ بخش پذیر است پس $P(1)$ درست است.

گام ۲ : می‌خواهیم ثابت کنیم که اگر حکم برای $P(k)$ درست باشد، در نتیجه برای $P(k+1)$ نیز

درست است.

فرض کنیم :

$$P_k = 4^{2k} - 1 = 5r \quad (2)$$

که بر ۵ بخش پذیر است. حال باید بخش پذیر بودن

$$P_{k+1} = 4^{2(k+1)} - 1 \quad (3)$$

بر ۵ را نشان دهیم. برای این کار، طرفین تساوی (۲) را در 4^2 ضرب می‌کنیم یعنی

$$4^2(4^{2k} - 1) = 4^2(5r)$$

از ساده کردن (۳)، تساوی (۴) به دست می‌آید :

$$4^{2k+2} - 4^2 = 4^2(5r) \quad (4)$$

با اضافه کردن ۱۵ به طرفین تساوی خواهیم داشت :

$$4^{2(k+1)} - 1 = 15 + 4^2(5r) \quad (5)$$

$$= 15 + 16(5r) \quad (6)$$

$$= 5(3 + 16r) \quad (7)$$

تساوی (۷) بخش پذیر بودن $P(k+1)$ بر ۵ را نشان می‌دهد. یعنی از $P(k)$ ، درستی $P(k+1)$ را

نتیجه گرفتیم. در این صورت بنابر اصل استقرا، $P(n)$ برای هر عدد صحیح و مثبت n نیز درست است.

در حالت کلی، از گام‌های ۱ و ۲ نتایج زیر را به دست می‌آوریم :

$P(1)$ ، $P(2)$ را نتیجه می‌دهد.

$P(2)$ ، $P(3)$ را نتیجه می‌دهد.

$P(3)$ ، $P(4)$ را نتیجه می‌دهد.

و الی آخر که این توجیه کننده درست بودن حکم $P(n)$ برای هر عدد طبیعی n است.

۱-۶- استقرای تعمیم یافته

در مثال‌هایی که تاکنون دیدیم، استقرای ریاضی را از $n = 1$ شروع کردیم، یعنی درستی حکم

مورد نظر را برای $n = 1$ نشان دادیم. اما گاهی لازم است که اولین مرحله استقرا را از یک عدد طبیعی $n > 1$ آغاز کنیم. به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۵ : ثابت کنید عدد طبیعی مناسبی مانند $m > 1$ وجود دارد به طوری که برای هر عدد

طبیعی $n (n \geq m)$ داریم

$$n! > 3^n \quad (1)$$

حل : ابتدا با اندکی جست و جو، تحقیق می کنیم که n چه اندازه باید بزرگ باشد؟

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
$n!$	۱	۲	۶	۲۴	۱۲۰	۷۲۰	۵۰۴۰	۴۰۳۲۰
3^n	۳	۹	۲۷	۸۱	۲۴۳	۷۲۹	۲۱۸۷	۶۵۶۱

می بینیم که برای n های طبیعی کوچکتر از ۷، اصلاً چنین حکمی درست نیست. اما برای $n = 7$ ، رابطه $n! > 3^n$ درست است و به نظر می رسد که برای n های بزرگتر از ۷ نیز حکم درست باشد. حال فرض

می کنیم برای $k \geq 7$ حکم درست باشد یعنی : $k! > 3^k$. آنگاه درستی حکم زیر را تحقیق می کنیم :

$$(k+1)! > 3^{k+1} \quad (2)$$

برای نشان دادن (۲) طرفین $k! > 3^k$ را در $(k+1)$ ضرب می کنیم :

$$(k+1)k! > (k+1)3^k \quad (3)$$

و چون $k \geq 7$ فرض شده است، پس :

$$(k+1)k! > 7 \times 3^k \quad (4)$$

با این حال می بینیم که طرفین نامساوی (۴) چنین خاصیتی را دارد که :

$$7 \times 3^k > 3 \times 3^k = 3^{k+1} \quad (5)$$

پس :

$$7 \times 3^k > 3^{k+1} \quad (6)$$

در نتیجه طبق (۴) و (۶) :

$$(k+1)k! > 3^{k+1} \quad (7)$$

اما طبق تعریف :

$$(k+1)k! = (k+1)! \quad (8)$$

که معادل آن را در (۷) قرار می دهیم در نتیجه :

$$(k+1)! > 3^{k+1} \quad (9)$$

بدین ترتیب برای $k \geq 7$ ، نشان دادیم که اگر $k! > 3^k$ ، آنگاه $3^{k+1} > (k+1)!$. حال با اطمینان می‌توانیم بگوییم که برای هر $n \geq 7$ داریم $n! > 3^n$.

در این مثال مشاهده شد m مناسب 7 است که به روش جست و جو آن را به دست آوردیم. چنین شیوه استدلالی را روش استقرای تعمیم یافته می‌گویند.

اصل استقرای تعمیم یافته

فرض کنید $P(n)$ حکمی درباره عدد طبیعی n باشد. اگر $P(m)$ برای $m > 1$ درست باشد و از درستی $P(k)$ برای هر عدد طبیعی $k \geq m$ درستی $P(k+1)$ نتیجه شود، آنگاه $P(n)$ برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است. (دقت کنید که در هر مسأله‌ای باید m مناسب را پیدا کرد.)

برای استفاده از اصل استقرای تعمیم یافته، گام‌های زیر را برمی‌داریم:

گام ۱: m مناسب را به دست می‌آوریم،

گام ۲: درستی حکم را برای $n = m$ نشان می‌دهیم،

گام ۳: ثابت می‌کنیم که اگر حکم برای $n = k \geq m$ درست باشد، آنگاه حکم برای $n = k+1$ نیز

درست است.

آنگاه نتیجه می‌شود که حکم برای هر عدد طبیعی $n \geq m$ درست است.

تمرین

۱- برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (\text{الف})$$

$$2 + 6 + 10 + \dots + (4n-2) = 2n^2 \quad (\text{ب})$$

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2 \quad (\text{پ})$$

$$1 + 2 + 3 + \dots + n < \frac{1}{8}(2n+1)^2 \quad (\text{ت})$$

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} \quad (\text{ث})$$

۲- اگر $r \neq 1$ ، برای هر عدد طبیعی n ثابت کنید:

$$1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

۳- در هر یک از بندهای زیر ابتدا عدد طبیعی مناسب m را بیابید و سپس حکم را برای هر

عدد طبیعی n ($n \geq m$) ثابت کنید.

$$2^n > n^2 \quad (\text{الف})$$

$$2^n < n! \quad (\text{ب})$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2^n - 1} < \frac{n}{2} \quad (\text{پ})$$

۴- مجموع جملات زیر را حدس بزنید و ادعای خود را با استقرای ریاضی ثابت کنید:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

۵- با استفاده از اصل استقرا ثابت کنید:

الف) تعداد قطرهای هر n ضلعی محدب برابر است با $\frac{n(n-3)}{2}$.

ب) مجموع زاویه‌های داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با $90^\circ \times (2n - 4)$.

۶- ثابت کنید به ازای هر عدد طبیعی n ، $1 - 8^n$ بر ۷ بخش پذیر است.

۷- اگر $a \geq -1$ و $n \in \mathbb{N}$ ، آنگاه به کمک استقرای ریاضی درستی رابطه زیر را ثابت کنید:

$$(1 + a)^n \geq 1 + na$$

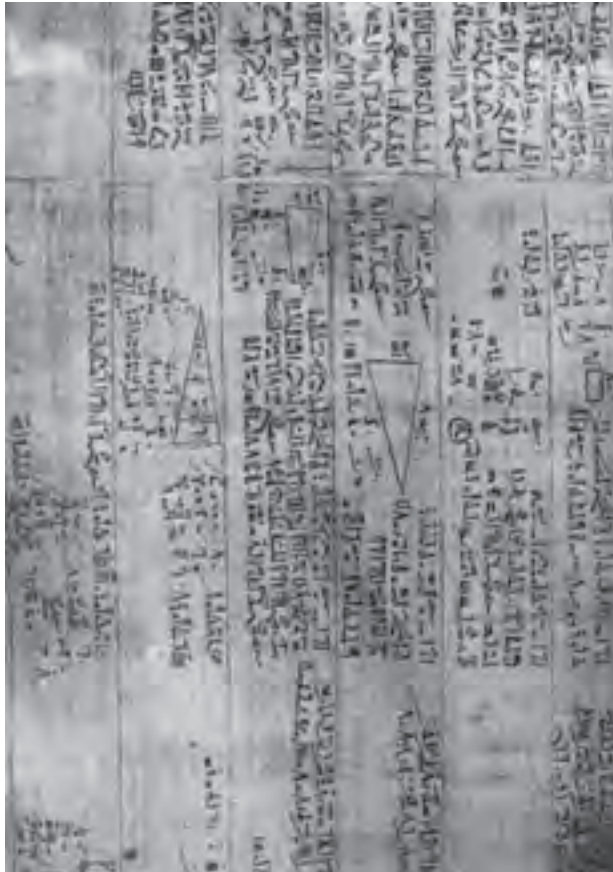
۸- نامساوی مثلث برای هر دو عدد حقیقی a و b به صورت $|a + b| \leq |a| + |b|$ برقرار است.

با استفاده از استقرا ثابت کنید که برای هر n عدد حقیقی x_1, x_2, \dots, x_n داریم:

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

مجله ریاضی

از زمان‌های قدیم، ایده‌های استقرا وجود داشته، از آن استفاده می‌شده است. با این حال، اثبات به کمک استقرا از اوایل قرن شانزدهم میلادی متداول شده است و توسط بعضی از ریاضی‌دانان اروپایی مورد استفاده قرار گرفته است. در قرن هفدهم فرما ریاضی‌دان مشهور، استفاده از استقرا را با تنوع بیشتری مطرح ساخت. ولی اصطلاح «استقرای ریاضی» در اوایل قرن نوزدهم توسط دمرگان، ریاضی‌دان انگلیسی، به کار رفت و روش استقرا در اثبات‌های ریاضی به‌طور مدون مورد استفاده قرار گرفت.



در طول تاریخ، مردم از علامت‌ها و نشانه‌های مختلفی برای نمایش اعداد استفاده کرده‌اند. بعضی از این نشانه‌ها در پاپیروس رابند دیده می‌شوند. ریاضی‌دان‌ها هنوز به مطالعه و یادگیری بیشتر در مورد اعداد مشغول‌اند.

۷-۱- استدلال استنتاجی^۱

در مقدمهٔ پاپیروس رابند که شاید قدیمی‌ترین تاریخ موجود ریاضی باشد

(۱۶۵۰ سال قبل از میلاد) چنین آمده است:

«به جرأت می‌توان گفت که بارزترین مشخصهٔ شعور انسان که نشان‌دهندهٔ درجهٔ تمدن هر ملت است، همان قدرت استدلال کردن است و به‌طور کلی این قدرت به بهترین وجهی می‌تواند در مهارت‌های ریاضی افراد آن ملت به نمایش گذاشته شود.»

^۱ Deductive reasoning

یکی از مسائلی که در تاریخ ریاضی مصر - پاپیروس رابند - موجود است یک سرگرمی به صورت بازی با اعداد است. با توجه به دستورالعمل‌های مسئله، عددی انتخاب می‌شود و سپس چندین کار دیگر روی آن انجام می‌شود. در پایان بدون در نظر گرفتن عدد انتخابی، نتیجه همیشه یکسان است!

مثال ۱: این مثال از نوع سرگرمی با اعداد است. هر مرحله از این بازی در سمت راست و نتایج هر مرحله برای ۴ عدد انتخابی و تصادفی در سمت چپ جدول زیر نشان داده شده است.

۳۵	۱۲	۷	۴	یک عدد انتخاب کنید
۴۰	۱۷	۱۲	۹	به آن ۵ را اضافه کنید
۸۰	۳۴	۲۴	۱۸	نتیجه را دو برابر کنید
۷۶	۳۰	۲۰	۱۴	از آن ۴ را کم کنید
۳۸	۱۵	۱۰	۷	حاصل را بر ۲ تقسیم کنید
۳	۳	۳	۳	عددی را که از ابتدا انتخاب کرده بودید از این نتیجه تقسیم کم کنید

بررسی بالا ما را مطمئن می‌سازد که نتیجه همیشه برابر با ۳ است. اگرچه با استدلال استقرایی می‌توان استدلال کرد که این نتیجه شاید برای همه اعداد درست باشد، اما به هر حال برای اثبات کلی این مطلب، یعنی، تبدیل شاید به باید، به استدلال استنتاجی نیاز مندیم.

مثال ۲: همان مثال قبلی را با اندکی تغییر بررسی می‌کنیم و به جای انتخاب یک یا چند عدد مشخص در موقع شروع از علامت‌گذاری استفاده می‌کنیم. در طول بازی، مربع کوچک معرّف عدد انتخابی اولیه است و برای هر بار افزودن یا کاستن اعداد جدید، از یک دایره کوچک استفاده می‌کنیم.

□	عدد انتخابی
□○○○○○	عدد انتخابی به اضافه ۵
□○○○○○ □○○○○○	دو برابر نتیجه قبل
□○○○ □○○○	کم کردن ۴ واحد
□○○○	نصف نتیجه قبل
○○○	کم کردن عدد اولیه

به این ترتیب ثابت کردیم که نتیجه همیشه ۳ است. حال به وضوح می بینیم که عدد انتخابی اولیه هر چه که باشد، باز هم نتیجه ۳ است!

شاید مربع ها و دایره ها نمادهای جالبی برای استفاده همیشه نباشند. در ریاضیات معمولاً از حروف برای نشان دادن اعداد دلخواه استفاده می کنیم.

مثال ۳: حال مثال قبلی را با نماد جبری، یعنی با استفاده از حرف برای عدد انتخابی اولیه، دوباره بررسی می کنیم :

n	عدد انتخابی
$n + 5$	عدد انتخابی به اضافه ۵
$2n + 10$	دو برابر نتیجه قبل
$2n + 6$	کم کردن ۴ واحد
$n + 3$	نصف نتیجه قبل
۳	کم کردن عدد اولیه

نکته ای که در هر سه مثال به چشم می خورد این است که نتایجی را بر مبنای عباراتی که درستی آنها را قبول کرده ایم به دست آوردیم. یعنی از استدلال استنتاجی استفاده کردیم.

استدلال استنتاجی روش نتیجه گیری با استفاده از حقایق است که درستی آنها را پذیرفته ایم.

مثال های فراوانی از دنیای اطراف ما وجود دارند که نشان دهنده استفاده از استدلال استنتاجی در زندگی روزمره هستند.

مثال ۴: رستورانی برای جلب مشتری و فروش بیشتر، اعلام کرده است که بین ساعت های ۱۲ ظهر تا ۲ بعد از ظهر اگر کسی در آن رستوران غذایی سفارش داد و آماده شدن غذا بیش از ۱۰ دقیقه به طول انجامید، غذا را مجانی به مشتری بدهد. زمانی که خانواده بهارلو به این رستوران رفتند، عبارتهای زیر درست بودند :

الف) ساعت بین ۱۲ ظهر و ۲ بعد از ظهر بود.

ب) آماده شدن غذا بیش از ۱۰ دقیقه به طول انجامید.

خانوادهٔ بهارلو نتیجه گرفتند که غذایشان مجانی خواهد بود که نتیجه گیری درستی بود!
این مثال نیز نمونه‌ای از استدلال استنتاجی است.

مثال ۵: فرض کنید که دو عدد فرد را با هم جمع می‌کنیم. توضیح دهید که چرا مجموع آنها

همیشه زوج است؟

حل: فرض کنید $2m + 1$ و $2n + 1$ نشان‌دهندهٔ دو عدد فرد باشند که m و n اعداد طبیعی هستند. در نتیجه مجموع آنها چنین است:

$$(2m+1) + (2n+1) = 2m + 2n + 2 = 2(m+n+1)$$

به دلیل وجود ضریب ۲ در این مجموع، نتیجه می‌گیریم که مجموع دو عدد فرد همیشه زوج است. ثابت کردیم که مجموع دو عدد فرد همیشه یک عدد زوج است، حتی برای اعدادی که آنها را جمع نکرده‌ایم! این امر نشان‌دهندهٔ قدرت استدلال استنتاجی است.

وقتی از استدلال استنتاجی استفاده می‌کنیم، مطمئن هستیم که نتیجه

همیشه درست است.

هدف از مثال‌های فوق، ایجاد زمینه‌ای مناسب برای آشنایی با مفهوم استدلال استنتاجی بود. بیشتر این مثال‌ها نمونه‌هایی از قضایای کلی هستند.

قضایای کلی احکامی هستند که همیشه برقرار می‌باشند.

اکثر قضیه‌های مهم ریاضی قضایای کلی هستند. به عنوان مثال، اهمیت قضیهٔ فیثاغورث در این نیست که در یک مثلث قائم‌الزاویه صدق می‌کند، بلکه این قضیه برای همهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه صحیح است، و یا اهمیت اتحاد $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ در این است که x هر زاویه‌ای که باشد، این تساوی برقرار است.

۸-۱ - مثال نقض

استدلال استنتاجی به ما اطمینان می‌دهد که نتیجهٔ به‌دست آمده حتماً درست است. این جامعیت، یکی از نشانه‌های اقتدار و زیبایی این نوع استدلال است. گاهی اتفاق می‌افتد که با مثالی، عمومیت نتیجه‌ای که حدس می‌زنیم نقض می‌شود.

مثال ۶: بسیاری از اعداد طبیعی را می‌توان به صورت حاصل جمع اعداد متوالی نوشت.

به نمونه‌های زیر توجه کنید :

$$9 = 2 + 3 + 4$$

$$15 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$22 = 4 + 5 + 6 + 7$$

$$39 = 12 + 13 + 14$$

$$74 = 17 + 18 + 19 + 20$$

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا هر عدد طبیعی را می‌توان به صورت مجموع اعداد متوالی

نوشت؟

حل : برای درست فهمیدن مسأله، باید به دو سؤال اساسی پاسخ گوئیم. اول آن که آیا مثال‌ها برای حل مسأله کافی هستند؟ و دوم این که آیا امکان دارد که تمام اعداد طبیعی را برای بررسی داشتن

چنین کیفیتی کنترل کرد؟

یکی از راه‌های خوب آن است که سعی کنیم یک عدد طبیعی بیابیم که چنین کیفیتی را نداشته

باشد. از هر عددی که بخواهیم شروع می‌کنیم و به جست‌وجو ادامه می‌دهیم.

الف) $12 = 3 + 4 + 5$

ج) $100 = 18 + 19 + 20 + 21 + 22$

ب) $17 = 8 + 9$

چ) $130 = 31 + 32 + 33 + 34$

پ) $26 = 5 + 6 + 7 + 8$

ح) $6 = 1 + 2 + 3$

ت) $30 = 9 + 10 + 11$

خ) $7 = 3 + 4$

ث) $40 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

د) $8 = ?$

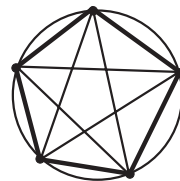
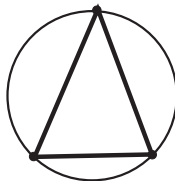
می‌بینیم که عدد ۸ را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد متوالی نوشت. عدد ۸ مثال نقضی

است که نشان می‌دهد هر عدد طبیعی را نمی‌توان به صورت اعداد متوالی نوشت.

مثال ۷: اگر دو نقطهٔ اختیاری بر روی پیرامون دایره را به وسیلهٔ یک پاره‌خط به هم وصل

کنیم، دایره به دو ناحیه تقسیم می‌شود. با اتصال سه نقطهٔ اختیاری بر روی دایره، دایره به ۴ ناحیه تقسیم

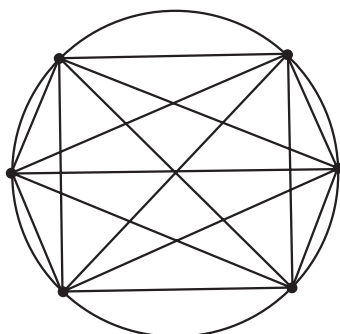
می‌شود. شکل زیر این موضوع را برای ۲، ۳، ۴ و ۵ نقطهٔ اختیاری بر روی دایره نشان می‌دهد :



۵	۴	۳	۲	تعداد نقطه‌ها
۱۶	۸	۴	۲	تعداد ناحیه‌ها

نتیجه احتمالی: اگر تعداد نقاط ۶ باشد، تعداد ناحیه‌ها ۳۲ است.

حل: ۶ نقطه بر روی دایره‌ای اختیار می‌کنیم و آنها را به وسیله پاره خط‌هایی به هم وصل می‌کنیم. با توجه به شکل زیر، می‌بینیم که تعداد ناحیه‌ها به صورت ۲، ۴، ۸، ۱۶، ... افزایش می‌یابد. با استدلال استقرایی، به نظر می‌رسد که پاره خط‌هایی که ۶ نقطه را به هم متصل می‌کنند، دایره را به ۳۲ ناحیه تقسیم می‌کنند. اما با توجه به شکل زیر مشاهده می‌شود که این نتیجه احتمالی نادرست است. با شمردن تعداد ناحیه‌ها، می‌بینیم که تعداد آنها ۳۰ است.



این مثال، معرّف مراحلی است که نشان‌دهنده نادرستی حدس ما است. اگرحتی یک مثال پیدا شود که حدس ما را نادرست کند، گوئیم که با مثال نقض نادرستی حدس ثابت شده است.

به مثالی که نشان دهد نتیجه گیری کلی غلط است، مثال نقض می‌گویند.

مثال ۸: برای هر دو عدد گنگ x و y می‌خواهیم ببینیم آیا $x + y$ نیز گنگ است یا خیر؟

حل: کافی است نشان دهیم که x و y ای پیدا می‌شوند که گنگ باشند اما مجموع آنها، یعنی $x + y$ ، گنگ نباشد. برای این کار اگر دو عدد گنگ $x = 2 + \sqrt{2}$ و $y = 2 - \sqrt{2}$ را انتخاب کنیم، می‌بینیم

$$\begin{aligned} x + y &= (2 + \sqrt{2}) + (2 - \sqrt{2}) \\ &= 2 + 2 = 4 \end{aligned}$$

که یک عدد گویا است. پس این مثال، نتیجه گیری کلی را نقض کرد. یعنی مجموع دو عدد گنگ همیشه یک عدد گنگ نیست.

۹-۱- قضایای شرطی

بیشتر شما با ضرب المثل‌های فارسی که معمولاً هدف‌شان آگاه کردن مردم از پیامدهای کارهای بخصوصی است آشنا هستید. «نابرده رنج گنج میسر نمی‌شود»، «کارها نیکو شود اما به صبر» و «سحرخیز باش تا کامروا باشی» از این نوع ضرب المثل‌ها هستند، یعنی اگر به ترتیب شرط «رنج بردن»، «صبوری» و «سحرخیزی» وجود داشته باشد، آنگاه «رسیدن به گنج»، «نیکویی در کارها» و «کامروایی» میسر می‌شود.

همان‌طور که دقت کرده‌اید، در سرتاسر ریاضی که تا به حال یاد گرفته‌اید، به دفعات با جملات شرطی از قبیل «اگر $x > 5$ آنگاه $x > 10$ » که به ازای تمام مقادیر حقیقی x برقرار هستند روبرو شده‌اید. این نوع جملات را قضایای شرطی می‌نامند.

قسمت شرطی چنین جمله‌هایی (در مثال بالا $x > 5$) را فرض قضیه و نتیجه جمله را (در مثال بالا $x > 10$) حکم قضیه می‌نامند.

مثال ۹: «هر نقطه دلخواه روی عمود منصف یک پاره خط، از دو سر آن پاره خط به یک فاصله است» مثالی از یک قضیه شرطی است که در آن M معرف نقطه دلخواه بر عمود منصف پاره خط AB است و

فرض: نقطه M بر عمود منصف پاره خط AB است.

$$\text{حکم: } MA = MB$$

حال به مثال زیر و ویژگی آن توجه کنید:

مثال ۱۰: اگر نقطه M از دو سر پاره خط AB به یک فاصله باشد یعنی: $MA = MB$ ، آنگاه

M بر عمود منصف پاره خط AB قرار دارد.

دیده می‌شود که جای فرض و حکم در این مثال، با فرض و حکم مثال بالا عوض شده است.

جای فرض و حکم در عکس قضیه شرطی با هم عوض می‌شوند.

نکته: باید توجه داشت که همیشه عکس قضیه، یک قضیه نیست.

مثال ۱۱: اگر $x > 0$ ، آنگاه $x^2 > 0$

این مثال یک قضیه است که در آن:

فرض: $x > 0$

حکم: $x^2 > 0$

حال عکس این قضیه را در نظر بگیرید
 «اگر $x^2 > 0$ ، آنگاه $x > 0$ » که در اینجا

فرض: $x^2 > 0$

حکم: $x > 0$

اما این یک قضیه کلی نیست، زیرا به ازای x های منفی - در حالی که فرض درست است -
 حکم درست نیست. مثلاً $x = -1 < 0$ اما $x^2 = (-1)^2 = 1 > 0$.

۱-۱۰-۱ اثبات بازگشتی

از دانش آموزان کلاسی خواسته شده بود که قضیه زیر را اثبات کنند:
 قضیه: ثابت کنید که به ازای هر دو عدد حقیقی و مثبت x و y ، نابرابری زیر همیشه برقرار است.

$$\frac{1}{4}(x+y) \geq \sqrt{xy} \quad (1)$$

نحوه استدلال یکی از دانش آموزان چنین بود:
 او طرفین (۱) را به توان ۲ رساند:

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \quad (2)$$

سپس $4xy$ را از طرفین (۲) کم کرد و آن را بدین صورت نوشت:

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0 \quad (3)$$

$$(x-y)^2 \geq 0 \quad (4)$$

و نتیجه گرفت که چون همیشه $(x-y)^2$ مثبت یا صفر است، پس (۴) برقرار و حکم ثابت است.

این گونه استدلال ویژه این دانش آموز نیست و در بین سایر دانش آموزان نیز کم و بیش مرسوم است. آنها به جای اثبات حکم، آن حکم را درست فرض کرده و به یک نتیجه بدیهی یا دانسته شده - یعنی از حکم به فرض - می‌رسند. این شیوه، اثبات نیست بلکه ایده خوبی برای اثبات به دانش آموزان می‌دهد و همچنان که در ابتدای این فصل نیز گفته شد، استفاده از چنین روش‌های شهودی برای فهمیدن استدلال واقعی مفید است. با این حال باید دقت داشته باشیم که استدلال شهودی - هرچند طبیعی و مفید - اگرچه می‌تواند ما را به طرف اثبات ریاضی راهبری کند اما یک اثبات ریاضی نیست. حال به بررسی مجدد اثبات فوق می‌پردازیم. می‌بینیم که در واقع این دانش آموز عکس قضیه فوق را ثابت کرده بود، یعنی با فرض درستی

$$\frac{1}{4}(x+y) \geq \sqrt{xy} \quad (1)$$

به درستی (۴)، یعنی $(x - y)^2 \geq 0$ ، رسیده بود. در حالی که فرض قضیه این بود که x و y اعداد حقیقی و مثبت هستند، پس در مورد آنها (۴) برقرار است و هدف، اثبات حکم یعنی اثبات درستی نامساوی (۱) است:

$$\frac{1}{4}(x + y) \geq \sqrt{xy}$$

با این توضیحات، دوباره به اثبات ریاضی این قضیه می‌پردازیم.

اثبات: چون $(x - y)^2$ همیشه بزرگ‌تر و یا مساوی صفر است، نامساوی (۳) یعنی $x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$ از آن نتیجه می‌شود.

با افزودن $4xy$ به طرفین نامساوی (۳)، نامساوی (۲) به دست می‌آید، یعنی:

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy \quad (2)$$

نامساوی (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(x + y)^2 \geq 4xy$$

چون x و y هر دو مثبت هستند، در نتیجه:

$$\sqrt{(x + y)^2} \geq \sqrt{4xy}$$

و یا:

$$(x + y) \geq 2\sqrt{xy}$$

که با تقسیم طرفین بر ۲ داریم:

$$\frac{1}{4}(x + y) \geq \sqrt{xy} \quad \square$$

گاهی برای اثبات بعضی از قضیه‌ها - به خصوص در مورد تساوی‌ها، نامساوی‌ها و تساوی مجموعه‌ها - با استفاده از درستی حکم به یک رابطهٔ بدیهی و یا فرض قضیه می‌رسیم. در چنین حالتی، برای تکمیل اثبات می‌بایستی نشان دهیم که تمام مراحل انجام شده بازگشت‌پذیر هستند و گرنه درستی اثبات تأیید نمی‌شود.

گاهی برای ارزیابی ذکاوت و دقت افراد، اثبات‌هایی ارائه می‌شود که در آنها درستی تساوی‌های غیر ممکن را با ایجاد شبهه در فرد نشان می‌دهند! و سپس از آنها علت را جویا می‌شوند؟! در واقع، در این گونه اثبات‌ها، حکم را فرض در نظر گرفته، روی آن عملیاتی انجام داده و ظاهراً گاهی (اکثر اشتباهات) در اثبات قضیه‌ها و حل مسائل ریاضی حکم را فرض در نظر گرفته، روی آن عملیات انجام

داده، ظاهراً به نتیجه می‌رسیم! به مثال زیر توجه کنید :

مثال ۱۲ : ثابت کنید $۲ = ۶$!

اثبات :

$$۲ = ۶ \quad (۱)$$

با توجه به خاصیت جابه‌جایی تساوی

$$۶ = ۲ \quad (۲)$$

سپس از جمع دو رابطه (۱) و (۲) خواهیم داشت!

$$\underline{\quad\quad\quad} \quad (۳)$$
$$۸ = ۸$$

اما با توجه به مطالبی که یاد گرفتیم، می‌دانیم که تنها در صورتی این اثبات درست است که برگشت‌پذیر باشد، یعنی بتوانیم از (۳) به (۲) و سپس به (۱) برسیم. در حالی که با یک نگاه درمی‌یابیم که چنین امری محال است یعنی از (۳) که $۸ = ۸$ است نمی‌توانیم به تساوی (۲) که $۶ = ۲$ و سپس به تساوی (۱) که $۲ = ۶$ است برسیم. در نتیجه عدم برگشت‌پذیری ادعای فوق نشان می‌دهد که اثبات مذکور نادرست و فقط ایجاد شبهه بوده است! در واقع در اثبات فوق، حکم را فرض در نظر گرفته، روی آن عملیاتی انجام داده و ظاهراً به نتیجه رسیدیم.

تمرین : اثبات مثال ۱۲ را با اثبات دانش‌آموز در بخش ۱-۱۰ مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای

می‌گیرید؟

«همه می‌دانند که اگر کسی جواب معماً را به شما گفته باشد، حل آن

ساده خواهد بود. به سادگی می‌توان گفت که این عمل یک آزمون حافظه است. فقط

در صورتی می‌توانید ادعا کنید یک ریاضی‌دان هستید که معماهایی را که قبلاً هرگز

مطالعه نکرده‌اید حل کنید. این یک آزمون استدلال کردن است.»

سایر^۲

۱ - Puzzle

۲ - W.W. Sawyer: Mathematician's Delight

- ۱- با استفاده از استدلال استنتاجی، نتایج زیر را کامل کنید.
 الف) اگر باران بیارد، زمین مرطوب می‌شود. الان باران می‌بارد.
 نتیجه: زمین است.
- ب) خطوط موازی هیچ‌گاه یکدیگر را قطع نمی‌کنند. خطوط L_1 و L_2 موازی هستند.
 نتیجه: L_1 و L_2
- ۲- آیا نتایج زیر از عبارات داده شده حاصل می‌شوند؟ جواب خود را توضیح دهید.
 الف) تمام دانش‌آموزانی که ریاضی یاد می‌گیرند می‌توانند محاسبه کنند.
 حمید دانش‌آموزی است که ریاضی یاد می‌گیرد.
 نتیجه: حمید می‌تواند محاسبه کند.
- ب) بعضی از دانش‌آموزان با طرز کار کامپیوتر آشنا هستند.
 نرگس دانش‌آموز است.
 نتیجه: نرگس با طرز کار کامپیوتر آشنا است.
- پ) مثلث متساوی‌الساقین دارای حداقل دو ضلع مساوی است.
 مثلث متساوی‌الاضلاع دارای سه ضلع مساوی است.
 نتیجه: هر مثلث متساوی‌الاضلاع، یک مثلث متساوی‌الساقین است.
- ۳- نشان دهید که چرا مجموع دو عدد زوج همیشه زوج است؟
- ۴- علی، احمد، کامران، داوود و ابراهیم عضو تیم بسکتبال مدرسه خود هستند.
 با توجه به شرایط زیر، آنها را برحسب افزایش قد مرتب کنید:
 الف) حداقل دو نفر از آنها از علی کوتاه‌تر می‌باشند،
 ب) داوود از کامران کوتاه‌تر است،
 پ) احمد کوتاه‌ترین پسر نیست،
 ت) داوود از علی بلندتر است.
- ۵- کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک غلط (نادرست) است. در صورت غلط بودن یک مثال نقض پیدا کنید.
 الف) اگر ۱ با هر عدد فردی جمع شود، نتیجه همیشه یک عدد زوج است.

- (ب) توان دوم یک عدد همیشه از آن بزرگ تر است.
 (پ) مجموع دو زاویه حاده کمتر از 180° است.
 (ت) همیشه ارتفاع یک مثلث داخل آن قرار می گیرد.
 (ث) هر مستطیلی یک مربع است.
 (ج) هر مربعی یک مستطیل است.
 ۶- نمونه های زیر را در نظر بگیرید :

$$6 = 1^2 + 1^2 + 2^2$$

$$14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$$

$$24 = 2^2 + 2^2 + 4^2$$

$$59 = 1^2 + 3^2 + 7^2$$

$$61 = 3^2 + 4^2 + 6^2$$

$$89 = 2^2 + 2^2 + 9^2$$

نتیجه احتمالی آن است که : هر عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع سه مربع کامل نوشت. با ارائه یک مثال نقض نشان دهید که نتیجه گیری فوق غلط است.

۷- کدام یک از احکام زیر درست هستند؟

(الف) اگر x گنگ و y گویا باشد، آنگاه $(x+y)$ گویا است.

(ب) اگر x و y هر دو گویا باشند، آنگاه $x+y$ گویا است.

احکام درست را اثبات کنید و برای رد احکام نادرست مثال های نقض بیاورید.

۸- بعضی از احکام زیر قضایای کلی هستند. قضایای کلی را اثبات کرده و برای نادرستی باقی

احکام مثال نقض بیاورید :

(الف) حاصل ضرب هر دو عدد حقیقی کوچک تر یا مساوی نصف مجموع مربع های آنهاست.

(ب) مربع هیچ عدد صحیح صفر نیست.

(پ) هر دو زاویه مساوی، متقابل به رأس هستند.

(ت) اگر $x > 1$ ، آنگاه $x > 2$.

(ث) اگر $x > 2$ ، آنگاه $x > 1$.

(ج) اگر $(x-1)^2 = 0$ ، آنگاه $x = 1$.

(چ) اگر $ab = 0$ ، آنگاه $a = 0$ و $b = 0$.

۱-۱-۱- برهان خلف (اثبات غیرمستقیم)

گاهی اوقات برای اثبات یک قضیه، ابتدا فرض می‌کنیم که حکم قضیه درست نباشد. آنگاه با استفاده از روش استنتاج به یک تناقض می‌رسیم.

مثال ۱: نشان دهید که با فرض صحیح بودن n ، اگر n^2 زوج باشد، n نیز زوج است.

حل: به جای اثبات زوج بودن n ، می‌توانیم نشان دهیم که n نمی‌تواند فرد باشد.

ابتدا فرض می‌کنیم n فرد باشد یعنی $n = 2k + 1$ که در اینجا k یک عدد صحیح است. در نتیجه

داریم:

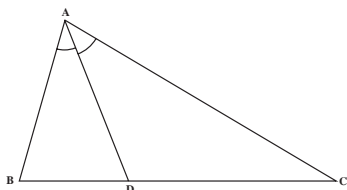
$$n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$$

و این نشان دهنده آن است که n^2 فرد است.

می‌بینیم که این یک تناقض است. زیرا فرض مسئله برای این بود که n^2 زوج باشد. یعنی n^2 نمی‌تواند هم زوج (طبق فرض مسئله) و هم فرد (طبق نتیجه‌ای که به دست آورده‌ایم) باشد، بنابراین به یک تناقض می‌رسیم. تنها توجیه این تناقض آن است که فرض فرد بودن n نادرست است، پس n باید زوج باشد.

مثال ۲: فرض کنید AD نیمساز زاویه A در مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq CD$ ثابت کنید

$AB \neq AC$.



حل: اثبات را از طریق برهان خلف انجام می‌دهیم. فرض کنید نتیجه مطلوب یعنی $AB \neq AC$ درست

نباشد یعنی $AB = AC$. بنابراین مثلث ABC متساوی الساقین است. می‌دانیم در مثلث متساوی الساقین

نیمساز AD میانه نیز هست. بنابراین $BD = DC$ که این با فرض مسئله یعنی $BD \neq CD$ در تضاد است.

بنابراین فرض درست نبودن $AB \neq AC$ رد می‌شود. یعنی $AB \neq AC$.

روش استدلالی مورد استفاده در دو مثال قبل را برهان خلف یا اثبات غیرمستقیم می‌نامند که

در تمام ریاضیات کاربرد دارد.

برهان خلف

برای استفاده از برهان خلف (اثبات غیرمستقیم) گام‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

گام ۱: فرض می‌کنیم نتیجه مطلوب درست نباشد.

گام ۲: نشان می‌دهیم که این فرض نتیجه‌ای به دست می‌دهد که حقایق دانسته شده

را نقض می کند.

گام ۳: حال که به یک تناقض رسیده ایم، معلوم می شود که فرضی که در گام اول کرده بودیم نادرست است. بنابراین نتیجه مطلوب باید درست باشد.

مثال ۳: نشان دهید که $\sqrt{2}$ گنگ است.

اثبات: فرض کنیم نتیجه مطلوب درست نباشد یعنی $\sqrt{2}$ گنگ نبوده، گویا باشد (گام ۱). حال با توجه به تعریف گویا بودن یک عدد، $\sqrt{2}$ را به صورت کسر $\frac{p}{q}$ می نویسیم که در آن p و q اعداد صحیح (متعلق به \mathbb{Z}) و کسر $\frac{p}{q}$ به ساده ترین صورت خود است. یعنی p و q نسبت به هم اول هستند یعنی $(p, q) = 1$ و

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \quad (1)$$

طرفین (۱) را به توان دو می رسانیم:

$$2 = \frac{p^2}{q^2} \quad (2)$$

سپس با ضرب طرفین (۲) در q^2 خواهیم داشت:

$$2q^2 = p^2 \quad (3)$$

از (۳) نتیجه می شود که p^2 عددی زوج است. حال طبق مثال ۱، می دانیم که با فرض صحیح بودن p ، اگر p^2 زوج باشد، p نیز زوج است یعنی:

$$p = 2k \quad (4)$$

در نتیجه:

$$p^2 = 4k^2 \quad (5)$$

در (۵) به جای p^2 ، معادل آن را از (۳) که همان $2q^2$ باشد جایگزین می کنیم:

$$2q^2 = 4k^2 \quad (6)$$

پس از تقسیم طرفین بر ۲ داریم:

$$q^2 = 2k^2 \quad (7)$$

از (۷) نتیجه می گیریم که q^2 زوج بوده، باز طبق مثال ۱، q نیز زوج است و این خلاف فرض است. زیرا در این صورت p و q هر دو مضارب ۲ هستند و نمی توانند نسبت به هم اول باشند (گام ۲). در نتیجه فرض گویا بودن $\sqrt{2}$ نادرست بوده پس $\sqrt{2}$ می بایستی گنگ باشد.

- با استفاده از روش استدلالی برهان خلف، احکام زیر را ثابت کنید :
- ۱- اگر n عددی صحیح و n^2 فرد باشد، نشان دهید n نیز فرد است.
 - ۲- اگر n^2 مضربی از ۳ باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از ۳ است.
 - ۳- اگر n^2 مضربی از 10 باشد، نشان دهید که n نیز مضربی از 10 است.
 - ۴- از یک نقطه خارج یک خط نمی توان بیش از یک خط بر آن عمود کرد.
 - ۵- ثابت کنید $\sqrt{3}$ گنگ است.
 - ۶- اگر سه خط راست d ، d' و d'' دوه‌دو متمایز باشند و $d \parallel d'$ (بخوانید d موازی d') و $d \parallel d''$ ، آنگاه $d' \parallel d''$.
 - ۷- ثابت کنید $(\sqrt{2} - \sqrt{3})$ گنگ است.
 - ۸- ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد، آنگاه $(x + y)$ گنگ است.
 - ۹- به برهان خلف ثابت کنید اگر p عددی اول باشد آنگاه به یکی از دو صورت $p = Sk + 1$ یا $p = Sk + 5$ نوشته می شود.

اگر مطالب یک موضوع درسی یکدیگر را نقض کنند، آن درس گیج کننده می شود. با این حال در استدلال استنتاجی گاهی وقتها اگر سعی کنیم و عامدانه به تناقض برسیم مفید خواهد بود!

هارولد ژاکوبز، ۱۹۷۴

۱-۱۲- اصل لانه کبوتر

بسیاری از بدیهیات دنیای اطراف و زندگی روزمره ما، قانونمندی ریاضی دارند و درعین سادگی و ظرافت، دارای کاربردهای گوناگون و متنوع هستند. به عنوان مثال، واضح است که اگر ۵ کبوتر به طرف ۴ لانه پرواز کنند و بخواهند داخل لانه‌ها بشوند، حداقل یکی از لانه‌ها شامل دو کبوتر خواهد

بود! همچنین اگر ۹ نفر در یک میهمانی حضور داشته باشند، حداقل روز تولد دو و یا چند نفر از آنها در یک روز هفته می‌باشد. مثال‌هایی از این قبیل برای همه ما آشناست. اصل لانه کبوتر توجه‌کننده دو مثال بالا و یکی از همین بدیهیات است که با این حال بعضی از مسایل پیچیده ریاضی را قابل حل می‌کند. این اصل، بخصوص در مواقعی که می‌خواهیم رخداد موقعیت خاصی را بررسی کنیم، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

← اصل لانه کبوتر

اگر m کبوتر، n لانه کبوتر را اشغال کنند و تعداد کبوترها بیش از تعداد لانه کبوترها باشد ($m > n$)، آنگاه طبق اصل لانه کبوتر حداقل یک لانه کبوتر وجود خواهد داشت که دست کم دو کبوتر در آن قرار داشته باشند.


مثال ۱: S : یک زیرمجموعه ۳۷ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر عدد ۳۶ تقسیم کنیم، حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقیمانده یکسانی بر ۳۶ هستند.

حل: می‌دانیم که تقسیم هر عدد طبیعی n بر ۳۶ به صورت $n = 36q + r$ است که q خارج قسمت، باقیمانده و $0 \leq r < 36$ است. بنابراین مجموعه باقیمانده‌ها، یعنی $\{0, 1, 2, \dots, 35\}$ ، دارای ۳۶ عضو است. مشابهت این مثال با لانه کبوتر چنین است که اگر اعضای S (۳۷ عضو) را تعداد کبوترها و تعداد باقیمانده‌ها (۳۶) را لانه کبوترها در نظر بگیریم، آن وقت درمی‌یابیم که حداقل یکی از لانه‌ها پذیرای دو و یا تعداد بیشتری کبوتر می‌باشد! یعنی:

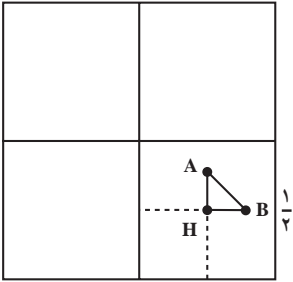
حداقل دو عضو از مجموعه S دارای باقیمانده یکسانی بر ۳۶ خواهند بود.

تمرین: S : یک زیرمجموعه ۷۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر ۲۵ تقسیم کنیم، نشان دهید که دست کم سه عضو S دارای یک باقیمانده‌اند.

مثال ۲: پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۱ مفروض‌اند. ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.

حل: با رسم محورهای تقارنی که موازی اضلاع هستند، سطح مربع را به ۴ مربع مساوی تقسیم می‌کنیم (مطابق شکل). 

۴ مربع کوچک‌تر را ۴ لانه کبوتر و ۵ نقطه مفروض را ۵ کبوتر در نظر می‌گیریم که می‌خواهند به داخل لانه‌ها برگردند در ضمن، نقاط روی مرز را متعلق به هر دو مربع می‌گیریم. بنابراین اصل لانه کبوتر،



حداقل دوتا از نقطه‌ها به یکی از مربع‌های کوچک تعلق دارند – همان طوری که حداقل دو کیبوتر، به لانه مشترک می‌روند – و با استفاده از قضیه فیثاغورس درمی‌یابیم که فاصله آن دو نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. با توجه به شکل، صحت این ادعا را نشان می‌دهیم

محاسبه: با توجه به اینکه طول ضلع مربع بزرگ ۱ است، در نتیجه طول ضلع مربع‌های کوچک $\frac{1}{2}$ و فاصله دو نقطه A و B با استفاده از قضیه فیثاغورس به دست می‌آید:

$$(AB)^2 = (AH)^2 + (BH)^2$$

اما شکل معلوم می‌کند که طول‌های AH و BH از $\frac{1}{4}$ که طول ضلع مربع‌های کوچک است کمتر هستند. در نتیجه:

$$(AB)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$(AB)^2 < \frac{2}{4}$$

$$AB < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

یعنی:

و حکم ثابت است.

تمرین

- ۱- ۱۳ نفر در یک میهمانی حضور دارند. نشان دهید حداقل ۲ نفر از آنها در یک ماه متولد شده‌اند.
- ۲- آمار نشان می‌دهد که تعداد تارهای موی سر افراد بیش از ۳۰۰۰۰۰ نیست. ثابت کنید در شهری که ۳۰۰۰۰۲ نفر جمعیت دارد، حداقل دو نفر از شهروندان تعداد تارهای مویشان با هم مساوی است.
- ۳- مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع ۱ مفروض است. پنج نقطه را در داخل مثلث در نظر می‌گیریم. نشان دهید حداقل دو نقطه وجود دارند که فاصله آنها کمتر از $\frac{1}{4}$ است.
- ۴- نشان دهید هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه $S = \{1, 2, 3, \dots, 9\}$ که دارای ۶ عضو باشد حداقل دو عضو دارد که مجموع آنها برابر ۱۰ است.
- ۵- در یک دبیرستان با ۲۵۵ دانش‌آموز ثابت کنید حداقل ۴ نفر روز، هفته و ماه تولد یکسان دارند.

مجله ریاضی

نظریه مجموعه‌ها از اواخر قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم میلادی مطرح شد و پس از مدتی به عنوان مبانی ریاضیات جایگاه ویژه‌ای پیدا کرد.

ریاضی‌دانان گوناگونی در تحکیم این نظریه فعالیت داشته‌اند ولی ریاضی‌دان آلمانی گ. کانتور در این مورد نقشی اساسی داشت. کانتور در سن پترزبورگ (روسیه) متولد شد، خانواده‌اش در طفولیت وی به آلمان مهاجرت کردند. وی در سال‌های ۱۸۷۲ الی ۱۹۱۳ استاد دانشگاه هالد در آلمان بود و در این دوران آثار عمیق خود را در نظریه مجموعه‌ها تألیف کرد.