فصل چهارم

مدارهای R – C جریان متناوب

هدف‌های رفتاری : در پایان این فصل از هنرجو انتظار می رود :

۱ـ مقادیر مقاومت ظاهری، اختلاف فاز، جریان، ولتاژ، ضرایب توان و ضریب کیفیت مدارهای R–C سری و موازی را با نوشتن فرمول‌های مربوط محاسبه کند.

۲ـ دیاگرام برداری ولتاژها را در مدارهای R–C سری و جریان‌ها را در مدارهای R–C موازی رسم کند.

۳ـ ضریب کیفیت مدارهای R–C سری و موازی را محاسبه کند.

۴ـ تأثیر فرکانس بر مقاومت ظاهری، جریان، اختلاف فاز و ضریب قدرت در مدارهای R–C سری و موازی را شرح دهد.

۵ـ منحنی تغییرات اثر فرکانس بر امپدانس و جریان در مدارهای R–C سری و موازی را از طریق نقطه‌یابی رسم کند.

۶ـ معادلات زمانی ولتاژ و جریان عناصر در مدارهای R–C سری و موازی را به‌دست آورد.

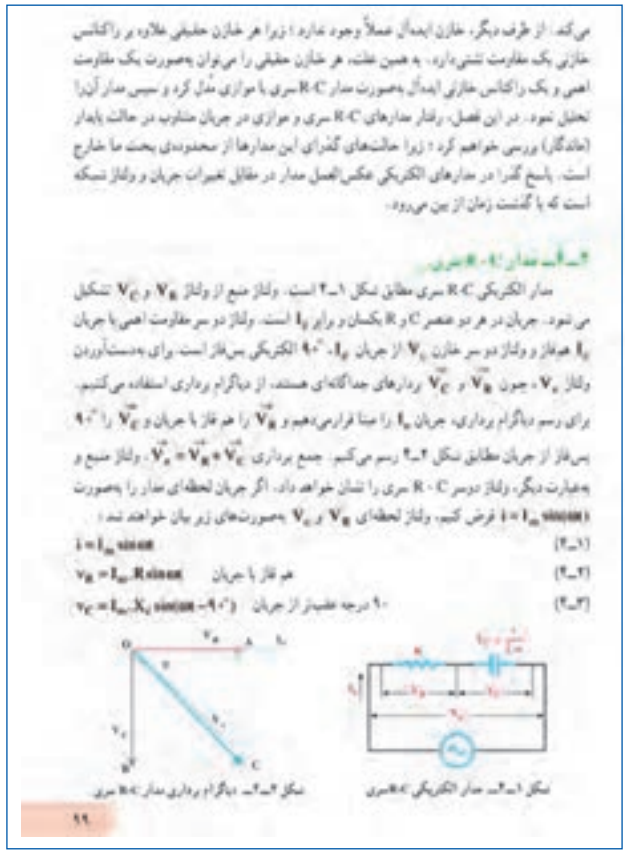
۷ـ مدارهای R–C سری را به موازی و بالعکس تبدیل کند.

۴ـ مدارهای R-C جریان متناوب

یادآوری

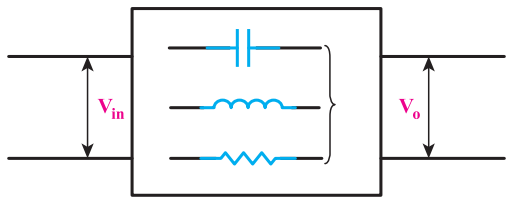
همان‌طور که در فصل قبل نیز گفته شد حتماً جهت ایجاد انگیزه برای هنرجویان کاربردهای مدارات R–C نیز گفته شود و سپس در مورد خازن ایده‌آل و خازن واقعی بحث شود.

خازن‌های واقعی عملاً به دلیل داشتن جریان نشتی با R–C سری یا R–C موازی معادل می گردند.



۱ـ۴ـ فیلترها

یکی از کاربردهای مدارهای RC ،RL، و مدارهای RLC و LC استفاده آنها به عنوان فیلتر است، فیلترها مدارهای الکتریکی یا الکترونیکی هستند که اجازه عبور بخشی از فرکانس‌ها را از یک مدار به مدار دیگر می‌دهند و بخش دیگر را عبور نمی‌دهند و دامنه فرکانس عبوری را محدود می‌کنند. این فیلترها، فیلترهای غیرفعال نامیده می‌شوند(شکل ۱ـ۴)، در مقابل این فیلترها، فیلترهای فعال نیز هستند که توسط مدارهای الکترونیکی تقویت می‌شوند.



شکل ۱ـ۴

یکی از کاربردهای مهم فیلترها حذف نویز و فرکانس‌های مزاحم و حذف هارمونیک‌های مزاحم در شبکه الکتریکی است. به عنوان مثال در کارخانجات صنعتی که دستگاه‌ها و ماشین‌های صنعتی تولید هارمونیک می‌نمایند، با قرار دادن این فیلترها می‌توانیم از برگشت آنها به شبکه برق جلوگیری نماییم. این فرکانس‌های مخرب شکل موج سینوسی شبکه برق را به هم ریخته و باعث اعوجاج در آن می‌شوند.

۱ـ۱ـ۴ـ انواع فیلترها

فیلترها به طور کلی به چهار دسته زیر تقسیم می‌شوند :

الف) فیلتر پایین‌گذر

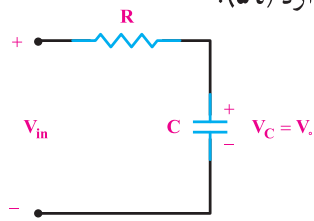
ب) فیلتر بالا گذر

ج) فیلتر میان گذر (فیلتر عبور باند)

د) فیلتر میان‌نگذر (فیلتر حذف باند)

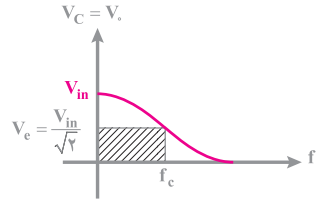
الف) برای آشنایی بیشتر با کاربردهای مدارهای RL و RC به بررسی این فیلتر می‌پردازیم. مثلاً مدار سری RC یا RLدر فیلتر پایین‌گذر به صورت زیر کاربرد دارد، این فیلتر از فرکانسی به پایین را عبور می‌دهد (فرکانس‌های خیلی کم تا فرکانس قطع).

مطابق شکل مدار **۲ـ۴** اگر خروجی مدار ولتاژ خازن یا V_C باشد، خازن برای شارژ نیاز به حداقل زمانی برابر با ۵ ثابت‌زمانی دارد (5τ).



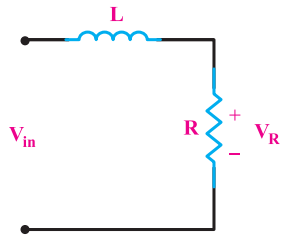
شکل ۲ـ۴

لذا پریود شکل موج ولتاژ ورودی اگر T باشد باید $T \gg 5\tau$ پس در نتیجه فرکانس ولتاژ ورودی (V_{in})، خیلی کم خواهد بود و این به معنی پایین‌گذر بودن این فیلتر است. در نمودار شکل **۳ـ۴** چون بعد از فرکانس f_c مقدار دامنه ولتاژ کاهش می‌یابد و قابل قبول نیست پس f_c فرکانس قطع خواهد بود.



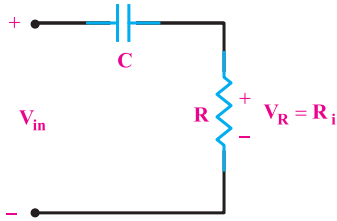
شکل ۳ـ۴

مشابه همین تحلیل در مورد مدار R–L با شکل زیر صادق است (شکل ۴ــ۴).

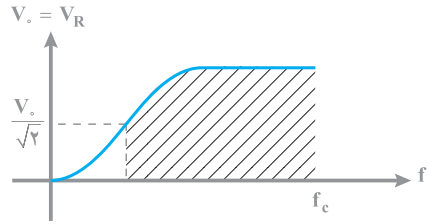


شکل ۴ــ۴

ب) اما چنانچه در مدار RC سری خروجی مدار ولتاژ دو سر مقاومت باشد این فیلتر، فرکانس‌های از حد معینی به بالا را به‌راحتی عبور می‌دهد (فیلتر بالاگذر). در مدار نشان‌داده‌شده شکل ۵ــ۴ هنگامی که خازن شارژ شد جریان ورودی مدار به صفر می‌رسد و در نتیجه $i_R=0$ و به دنبال آن مقدار $V_R=0$، پس مقدار V_R وقتی وجود دارد که فرکانس ورودی بالا باشد (مقدار X_C کم شود) و این به معنی فیلتر بالاگذر خواهد بود. منحنی فرکانسی فیلتر بالاگذر در شکل ۶ــ۴ دیده می‌شود.

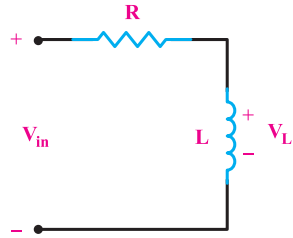


شکل ۵ــ۴



شکل ۶ــ۴

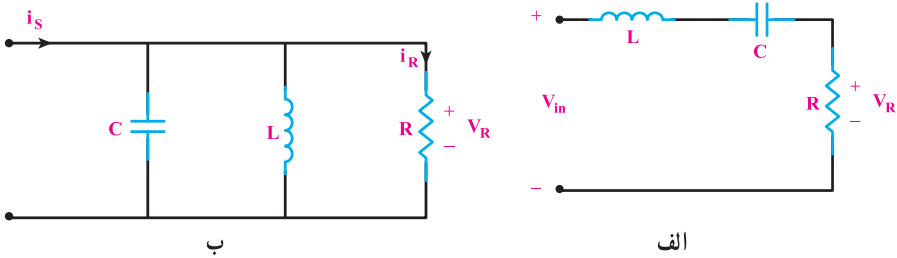
مشابه همین تحلیل در مدار RL نیز صدق می‌کند با این فرض که ولتاژ خروجی از دو سر سلف گرفته شود (شکل ۷ــ۴).



شکل ۷ــ۴

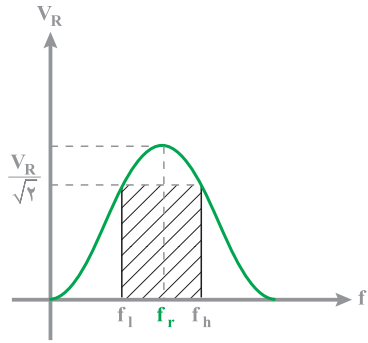
ج) در کتاب مدارهای الکتریکی فقط فیلتر میان‌گذر معرفی شده‌است (مدار RLC). این فیلتر فقط محدوده‌ای از فرکانس‌های بین دو فرکانس را از خود عبور می‌دهد (فرکانس‌های کمتر از فرکانس

حد پایین f_L و فرکانس‌های بیشتر از فرکانس های حد بالا f_H عبور داده نمی‌شوند). در این فیلتر، هنگام تشدید یا رزونانس i_R حداکثر مقدار خود را دارد، خروجی این فیلتر ولتاژ دو سر مقاومت است. کاربرد این فیلتر در ذوب فلزات (کوره‌های القایی فرکانسی) است (شکل ۸ ــ ۴ الف و ب). منحنی فرکانس این فیلتر در شکل ۹ــ۴ دیده می‌شود.



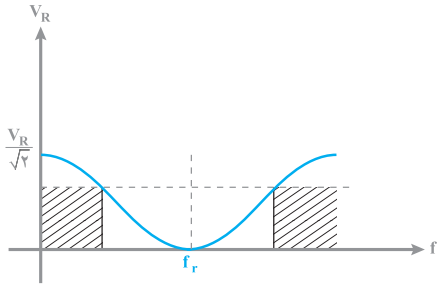
ب الف

شکل ۸ــ۴

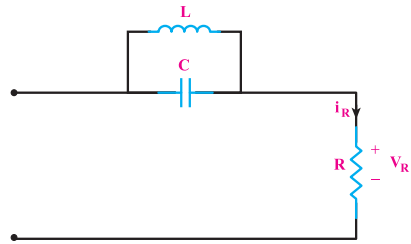


شکل ۹ــ۴

د) آخرین نمونه فیلترها، فیلتر میان‌نگذر (حذف باند) است که منحنی پاسخ فرکانس و نمودار خروجی آن مشابه شکل زیر می‌باشد (شکل ۱۰ــ۴) . این گونه مدارات در بخش مدارهای مختلط کتاب مدارهای الکتریکی دیده می‌شود (شکل ۱۱ــ۴).



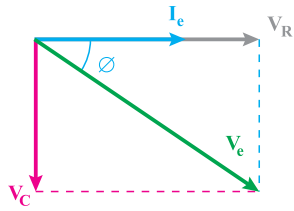
شکل ۱۰ــ۴



شکل ۱۱ــ۴

۲ـ۴ـ مدار R-C سری

در این مدارات نیز ولتاژ خازن و مقاومت به صورت برداری جمع می‌شوند. مبنای تحلیل نیز جریان مدار است که در هر دو عنصر مقاومت و خازن ثابت است. علاوه‌برآن جریان خازن نسبت به ولتاژ دو سر آن حالت پیش‌فاز دارد. چنانکه در دیاگرام برداری دیده می‌شود جریان کل نسبت به ولتاژ کل مدار پیش‌فاز است (شکل ۱۲ــ۴).



شکل ۱۲ــ۴

روابط امپدانس و ضریب توان دقیقاً شبیه R–L سری است با این تفاوت که به‌جای $X_L=L\omega$ از $X_c=\frac{1}{C\omega}$ استفاده می‌شود.

$$\cos\varphi=\frac{V_R}{V_e}=\frac{X_C}{Z} \qquad (۴ـ۱۰)$$

برای توان مؤثر می‌توان نوشت:

$$P_e=RI_e^2 \qquad (۴ـ۱۱)$$

از رابطه‌ی ۹ـ۴ مقاومت R برابر است با:

$$R=Z\cos\varphi$$

از طرف دیگر، امپدانس مدار برابر است با:

$$Z=\frac{V_e}{I_e}$$

با جایگزینی مقادیر در رابطه‌ی ۱۱ـ۴ توان مؤثر به‌صورت رابطه‌ی ۱۲ـ۴ ظاهر می‌شود:

$$P_e=Z\cos\varphi\times I_e^2$$

$$P_e=\frac{V_e}{I_e}\cos\varphi\times I_e^2$$

$$P_e=V_eI_e\cos\varphi \qquad (۴ـ۱۲)$$

برای محاسبه‌ی توان غیرمؤثر می‌توان نوشت:

$$P_q=-I_C^2X_C \qquad (۴ـ۱۳)$$

از رابطه‌ی ۱۰ـ۴ مقادیر Z و X_C را در رابطه‌ی ۱۳ـ۴ جایگزین می‌کنیم.

$$X_C=Z\sin\varphi \quad , \quad Z=\frac{V_e}{I_e} \quad , \quad \sin\varphi=\frac{X_C}{Z}$$

$$P_q=I_e^2.Z\sin\varphi=I_e^2\frac{V_e}{I_e}\sin\varphi$$

بنابراین:

$$P_q=V_eI_e\sin\varphi \qquad (۴ـ۱۴)$$

در مدارهای R - C جریان پیش‌فاز است؛ بنابر قرارداد توان P_q را با علامت منفی خواهیم دانست.

یعنی:

$$P_q=-V_eI_e\sin\varphi$$

از رابطه‌های ۱۲ـ۴ و ۱۴ـ۴ توان ظاهری را به‌قرار زیر می‌توان محاسبه کرد:

$$P_s=\sqrt{P_e^2+P_q^2}=\sqrt{V_e^2I_e^2\cos^2\varphi+V_e^2I_e^2\sin^2\varphi}$$

۲ـ۴ـ الف ـ توان اکتیو و راکتیو در R-C سری

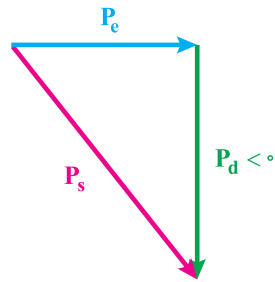
توان اکتیو همیشه مربوط به مقاومت می‌باشد و ضریب توان اکتیو را شامل می‌گردد.

$$P_e=RI_e^{۲}=V_eI_e\cos\varphi$$

ولی توان راکتیو مربوط به عنصر راکتیو یعنی خازن می‌باشد و به دلیل مخالفت سلف و خازن این توان با علامت منفی معرفی می‌گردد.

$$P_d=-V_eI_e\sin\varphi=-X_cI_e^{۲}$$

و مثلث توان آن دارای ضلع عمود در جهت محور y منفی خواهد داشت.



۱ـ۲ـ۴ـ حل تمرین ۱ صفحه ۱۱۳ کتاب درسی (شکل ۱۳ـ۴)

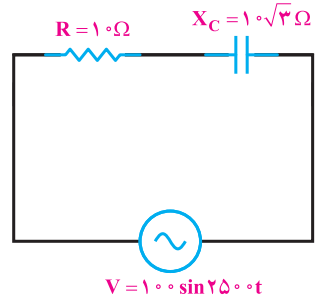
الف)

هدف : محاسبه معادله جریان منبع

باید θ_I و I_m محاسبه شود

گام ۱) محاسبه امپدانس کل مدار

$$Z=\sqrt{R^{۲}+X_C^{۲}}=\sqrt{۱۰^{۲}+(۱۰\sqrt{۳})^{۲}}=۲۰\ \Omega$$



شکل ۱۳ـ۴

گام ۲) محاسبه جریان مؤثر مدار و پس از آن جریان ماکزیمم قابل محاسبه است.

$$V_e = \frac{V_m}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}} = ۷۰/۷\,V \ , \ I_e = \frac{V_e}{Z} = \frac{۷۰/۷}{۲۰} = ۳/۵\,A$$

$$I_m = \sqrt{۲} I_e = ۳/۵\sqrt{۲}\,A = ۵\,A$$

گام ۳) با توجه به مقدار مقاومت خازنی و مقاومت اهمی اختلاف فاز (φ) قابل محاسبه است.

$$\varphi = -\tan^{-۱}\frac{X_c}{R} = -\tan^{-۱}\frac{۱۰\sqrt{۳}}{۱۰} = -۶۰^\circ$$

گام ۴) محاسبه θ_I با توجه به اینکه $\theta_V=۰$ می‌باشد.

$$\varphi=\theta_v-\theta_I \longrightarrow -۶۰^\circ=۰-\theta_I \longrightarrow \theta_I=۶۰^\circ$$

گام ۵) تشکیل معادله جریان منبع

$$i(t)=۵\sin(۲۵۰۰t+۶۰^\circ)$$

ب)

هدف : محاسبه معادله ولتاژ دو سر هر المان

دو مدار سری جریان تمام المان‌ها با هم برابر می‌باشند.

گام ۱) محاسبه ولتاژ دو سر مقاومت اهمی

$$I_{R_m}=I_{e_m}=I_{c_m}$$

$$V_{R_m}=R.I_{R_m}=۱۰\times۳/۵\sqrt{۲} = ۳۵\sqrt{۲}\,V$$

گام ۲) نوشتن معادله ولتاژ دو سر مقاومت اهمی

ولتاژ دو سر مقاومت اهمی با جریان I_e هم‌فاز می‌باشد.

$$V_{R_m}(t)= V_{R_m}\sin(۲۵۰۰t+\theta_I) \longrightarrow V_{R_m}(t)=۵۰\sin(۲۵۰۰t+۶۰^\circ)$$

گام ۳) محاسبه ولتاژ دو سر مقاومت خازنی

$$V_{C_m}=X_C.I_{C_m}=۱۰\sqrt{۳}\times۳/۵\sqrt{۲} = ۳۵\sqrt{۶}\ V$$

گام ۴) نوشتن معادله ولتاژ دو سر مقاومت خازنی

ولتاژ دو سر مقاومت خازنی از جریان I_e ، ۹۰° الکتریکی پس‌فاز است. (چون مدار R–C است جریان پیش‌فاز است).

$$V_{Cm}(t)= V_{Cm}\sin(۲۵۰۰t+\theta_I-۹۰^\circ)=۵۰\sqrt{۳}\ \sin(۲۵۰۰t-۳۰^\circ)\ V$$

پ)

هدف : محاسبه توان‌های مدار مثلث توان

گام ۱) با توجه به مقادیر جریان مؤثر مدار، توان‌های مدار به صورت زیر قابل محاسبه است.

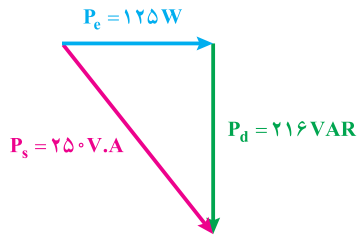
$$\cos\varphi = \frac{۱}{۲}\ ,\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$P_e = V_e.I_e\cos\varphi = I_e^{۲}.R = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}\times\frac{۵}{\sqrt{۲}}\times\frac{۱}{۲} = ۱۲۵\ \text{w}$$

$$P_d = V_e.I_e\sin\varphi = -I_e^{۲}.X_C = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}\times\frac{۵}{\sqrt{۲}}\times(-\frac{\sqrt{۳}}{۲}) = -۲۱۶.۵\ \text{V.A.R}$$

$$P_s = V_e.I_e = \frac{۱۰۰}{\sqrt{۲}}\times\frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۲۵۰\ \text{V.A}$$

گام ۲) مثلث توان به صورت زیر رسم می‌شود. (شکل ۱۴ــ۴)

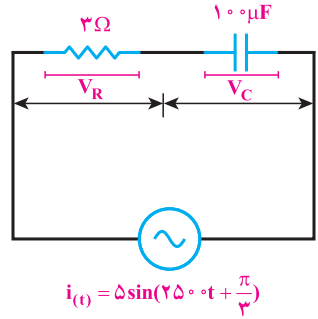


شکل ۱۴ــ۴

۲ـ۲ـ۴ـ حل تمرین شماره ۲ صفحه ۱۱۳ کتاب درسی (شکل ۱۵ـ۴)

الف)

هدف : محاسبه معادله ولتاژ منبع



شکل ۱۵ــ۴

باید θ_I و V_m محاسبه شود.

گام ۱) محاسبه امپدانس کل مدار

$$X_c = \frac{۱}{C\omega} = \frac{۱}{۱۰۰\times۱۰^{-۶}\times۲۵۰۰} = \frac{۱۰۰}{۲۵} = ۴\ \Omega$$

گام ۲) با توجه به امپدانس کل مدار و جریان کل مدار و پس از آن با توجه به θ_I داده شده در معادله جریان کل مدار θ_V را می‌یابیم.

$$z = \sqrt{R^۲ + X_C^۲} = \sqrt{۳^۲ + ۴^۲} = ۵\ \Omega$$

$$I_e = \frac{۵}{\sqrt{۲}}A\ ,\ V_e = Z.I_e = ۵\times\frac{۵}{\sqrt{۲}} = \frac{۲۵}{\sqrt{۲}}V\ ,\ V_m = \frac{۲۵}{\sqrt{۲}}\times\sqrt{۲} = ۲۵V$$

$$\varphi = -\tan^{-۱}\frac{X_C}{R} = -\tan^{-۱}\frac{۴}{۳} = -۵۳^\circ$$

$$\varphi = \theta_V - \theta_I \rightarrow -۵۳^\circ = \theta_V - ۶۰^\circ \rightarrow \theta_V = ۷^\circ$$

گام ۳) تشکیل معادله ولتاژ منبع

$$V(t)=۲۵\sin(۲۵۰۰t+۷^\circ)$$

ب)

هدف : تشکیل معادله ولتاژ دو سر هر المان

جریانی که هریک از المان‌هاعبور می‌کند با جریان کل مدار برابر است (مدار سری)

گام ۱) تعیین جریان‌های ماکزیمم برای هریک از المان‌ها

$$I_e = \frac{۵}{\sqrt{۲}}A$$

$$I_{R_m} = I_{e_m} = I_{c_m} = \frac{۵}{\sqrt{۲}}\times\sqrt{۲} = ۵\ A$$

گام ۲) محاسبهٔ ولتاژ ماکزیمم برای مقاومت اهمی و مقاومت خازنی

$$V_{Rm}=R.I_{Rm}=۳\times۵=۱۵\ V$$

$$V_{Cm}=X_C.I_{Cm}=۴\times۵=۲۰\ V$$

گام ۳) تشکیل معادلات ولتاژ برای مقاومت اهمی و مقاومت خازنی

$$V_{Rm}(t)=V_{Rm}\sin(۲۵۰۰t+\theta_I)=۱۵\sin(۲۵۰۰t+۶۰^\circ)$$

$$V_{Cm}(t)=V_{Cm}\sin(۲۵۰۰t+\theta_I-۹۰^\circ)=۲۰\sin(۲۵۰۰t-۳۰^\circ)$$

پ)

هدف :رسم دیاگرام برداری ولتاژها و جریان مدار

گام ۱) تعیین مقادیر مؤثر برای تمامی ولتاژها و جریان‌ها و محاسبهٔ زاویه بردار جریان‌ها و ولتاژها

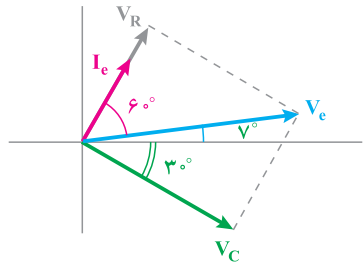
$$V_C = \frac{۲۰}{\sqrt{۲}} = ۱۴/۱۴V \ , \ \theta_{V_C} = ۳۰^\circ$$

$$V_R = \frac{۱۵}{\sqrt{۲}} = ۱۰/۶V \ , \ \theta_{V_R} = ۶۰^\circ$$

$$I_e = \frac{۵}{\sqrt{۲}} = ۳/۵V \ , \ \theta_I = ۶۰^\circ$$

گام ۲) رسم دیاگرام برداری (شکل ۱۶ـ۴)

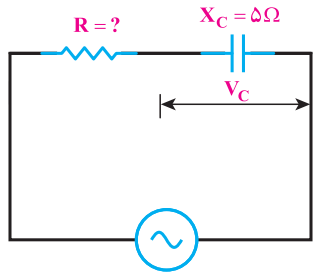
جریان نسبت به ولتاژ پیش‌فاز است. این مقدار اختلاف فاز برابر ۷–۶۰ برابر ۵۳° است.



شکل ۱۶ـ۴

۳ـ۲ـ۴ـ حل تمرین شماره ۴ صفحه ۱۱۳ کتاب درسی (شکل ۱۷ـ۴)

هدف : محاسبه مقاومت مدار سری با توجه به اختلاف فاز موجود معادله ولتاژ دو سر مقاومت خازنی.



شکل ۱۷ـ۴

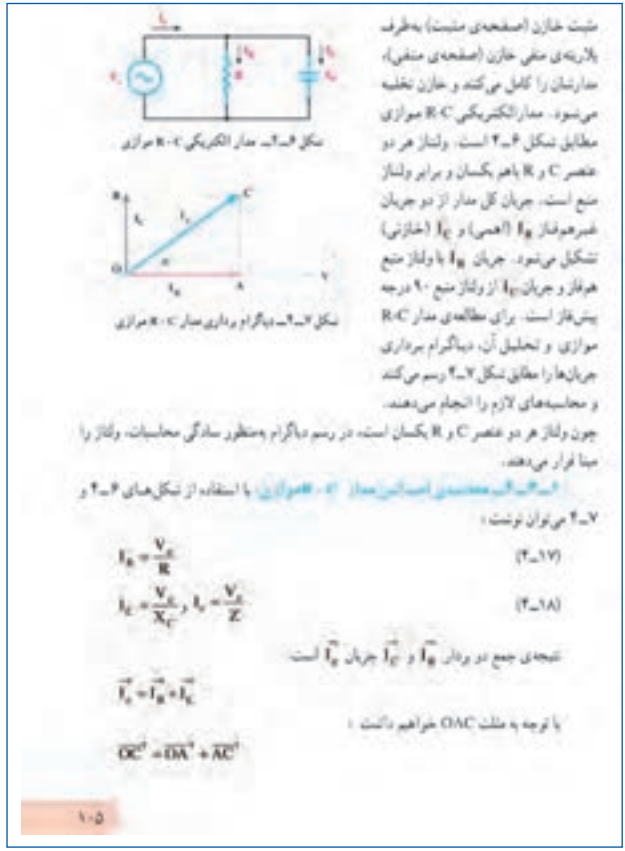
گام ۱) تنها با توجه به اختلاف فاز φ و رابطه آن می‌توان به صورت زیر R را محاسبه کرد.

$$\tan\varphi = \frac{X_C}{R} \rightarrow R = \frac{X_C}{\tan\varphi}$$

$$R = \frac{X_C}{\tan\varphi} = \frac{۵}{\tan ۶۰^\circ} = \frac{۵}{\sqrt{۳}} = ۲/۸۸\,\Omega$$

۳ـ۴ـ مدار R-C موازی

خازن حقیقی عملاً با یک R–C موازی معادل می‌گردد که مقاومت موازی، مقاومت نشتی خازن نامیده می‌شود. جریانی از دو صفحه جوشن و دی‌الکتریک بین آنها عبور می‌کند، این جریان در حالت ایده‌آل صفر در نظر گرفته می‌شود. ولی در خازن واقعی به مرور زمان باعث تخلیه کامل خازن و دشارژ آن می‌گردد.



شکل ۴ـ۶ـ مدار الکتریکی R-C موازی

شکل ۴ـ۷ـ دیاگرام برداری مدار R-C موازی

شدت خازن (صفحه‌ی مثبت) به‌طرف پلاریته‌ی منفی خازن (صفحه‌ی منفی)، مدارشان را کامل می‌کنند و خازن تخلیه می‌شود. مدار الکتریکی R-C موازی مطابق شکل ۴ـ۶ است. ولتاژ هر دو عنصر C و R باهم یکسان و برابر ولتاژ منبع است. جریان کل مدار از دو جریان غیرهم‌فاز I_R (اهمی) و I_C (خازنی) تشکیل می‌شود. جریان I_R با ولتاژ منبع هم‌فاز و جریان I_C از ولتاژ منبع ۹۰ درجه پیش‌فاز است. برای مطالعه‌ی مدار R-C موازی و تحلیل آن، دیاگرام برداری جریان‌ها را مطابق شکل ۴ـ۷ رسم می‌کنند و محاسبه‌های لازم را انجام می‌دهند.

چون ولتاژ هر دو عنصر C و R یکسان است، در رسم دیاگرام به‌منظور سادگی محاسبات، ولتاژ را مبنا قرار می‌دهند.

با استفاده از شکل‌های ۴ـ۶ و ۴ـ۷ می‌توان نوشت:

$$I_R = \frac{V_R}{R} \qquad (۴ـ۱۷)$$

$$I_C = \frac{V_C}{X_C}, \; I_t = \frac{V_t}{Z} \qquad (۴ـ۱۸)$$

نتیجه‌ی جمع دو بردار $\vec{I_R}$ و $\vec{I_C}$ جریان $\vec{I_t}$ است

$$\vec{I_t} = \vec{I_R} + \vec{I_C}$$

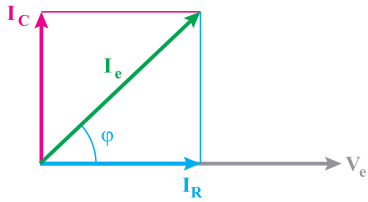
با توجه به مثلث OAC خواهیم داشت:

$$\overline{OC}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AC}^2$$

۱۰۵

یادآوری

در این حالت (حالت R–C موازی) مانند R–L موازی مبنا ولتاژ خازن و مقاومت بوده و جریان‌ها جمع برداری شده، جریان کل مدار I_e حاصل می‌شود (شکل ۱۸ـ۴).



شکل ۱۸ـ۴

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_C$$

در ضمن جریان مقاومت و ولتاژ منبع با همدیگر هم‌فاز هستند.

۳ـ۴ـ الف)

امپدانس مدار (Z) و ضریب توان همانند حالت موازی R–L به‌دست می‌آید. با این تفاوت که به جای $X_L=L\omega$ از $X_c=\frac{1}{C\omega}$ استفاده می‌شود.

۳ـ۴ـ ب)

ضریب کیفیت در حالت R–C موازی :

$$Q = \tan\varphi = \frac{R}{X_C} = \frac{R}{\frac{۱}{C\omega}} = RC\omega$$

ماکزیمم انرژی ذخیره شده در خازن و انرژی مصرفی در مقاومت خواهد بود و ضریب کیفیت برابر است با :

$$Q = \frac{۲\pi(\text{ماکزیمم انرژی ذخیره شده در خازن})}{\text{انرژی مصرفی در یک سیکل}} = RC\omega$$

۳ـ۴ـ ج) توان‌ها

برای محاسبه توان‌ها نیز بهتر است به دلیل برابر بودن ولتاژها از روابط زیر استفاده کنیم :

$$P_e = \frac{V_e^{۲}}{R} \quad (w)$$

$$P_d = -\frac{V_e^{۲}}{X_c} \quad (VAR)$$

$$P_s = \sqrt{P_e^{۲} + P_d^{۲}} = V_e I_e$$

۱ـ۳ـ۴ـ حل تمرین ۱۱ صفحه ۱۱۵ کتاب درسی (شکل ۱۹ـ۴)

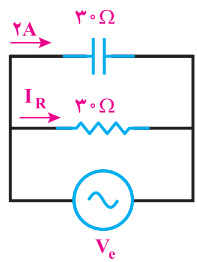
مدار روبرو را در نظر بگیرید (شکل ۱۹ــ۴).

الف)

هدف : اندازه ولتاژ و جریان منبع

گام ۱) با توجه به مقدار جریان X_c می‌توان V_C را بیابیم.

$$V_e = V_R = V_C = I_C \cdot X_C = ۲ \times ۳۰ = ۶۰ \text{ V}$$



شکل ۱۹ــ۴

گام ۲) I_R به صورت زیر قابل محاسبه است.

$$I_R = \frac{V_R}{R} = \frac{۶۰}{۳۰} = ۲\ A$$

گام ۳) جریان منبع برابر جمع برداری جریان I_C و I_R می‌باشد.

$$\vec{I}_e = \vec{I}_R + \vec{I}_C$$

$$I_e = \sqrt{I_R^۲ + I_C^۲} = \sqrt{۲^۲ + ۲^۲} = ۲\sqrt{۲}A$$

ب)

هدف : محاسبه توان‌های مصرفی و رسم مثلث توان

گام ۱) محاسبه امپدانس کل مدار

$$Z = \frac{R.X_C}{\sqrt{R^۲ + X_C^۲}} = \frac{۳۰\times۳۰}{\sqrt{۳۰^۲ + ۳۰^۲}} = \frac{۳۰}{\sqrt{۲}}\Omega$$

گام ۲) تعیین مقادیر $\sin\theta$ و $\cos\theta$

$$\cos\varphi = \frac{Z}{R} = \frac{\frac{۳۰}{\sqrt{۲}}}{۳۰} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad , \sin\varphi = -\frac{Z}{X_C} = -\frac{\frac{۳۰}{\sqrt{۲}}}{۳۰} = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

گام ۳) محاسبه توان‌های مصرفی

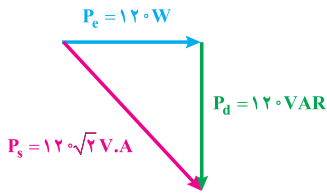
$$P_e = V_e.I_e\cos\varphi = I_e^۲.R = \frac{V_e^۲}{R} = ۶۰\times۲\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۱۲۰\ w$$

$$P_d = V_e.I_e\sin\varphi = -I_e^۲.X_C = -\frac{V_e^{\ ۲}}{X_C} = ۶۰\times۲\sqrt{۲}\times(-\frac{\sqrt{۲}}{۲}) = -۱۲۰\ V.A.R$$

$$P_s = V_e.I_e = \sqrt{P_e^۲ + P_d^۲} = \sqrt{(۱۲۰)^۲ + (-۱۲۰)^۲} = ۱۲۰\sqrt{۲} = ۱۶۹/۷\ V.A$$

گام ۴) رسم مثلث توان

مطابق با (شکل ۲۰ــ۴) خواهد بود.



شکل ۲۰ــ۴

پ)

هدف : رسم دیاگرام برداری $\vec{V}$ و $\vec{I}$

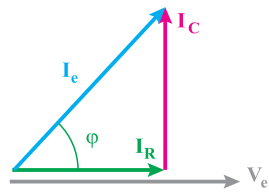
گام ۱) محاسبه θ_I

ولتاژ مبنا می‌باشد، بنابراین $\theta_V = ۰$

$$\varphi = -\tan^{-۱}(\frac{I_c}{I_R}) = -۴۵^\circ \ , \ \varphi = \theta_V - \theta_I \ \rightarrow \ \theta_I = ۴۵^\circ$$

گام ۲) رسم دیاگرام برداری

جریان I_R با ولتاژ منبع هم‌فاز و جریان I_C از ولتاژ منبع ۹۰° پیش‌فاز است (شکل ۲۱ــ۴).



شکل ۲۱ــ۴

۲ـ۳ـ۴ـ حل تمرین شماره ۱۲ صفحه ۱۱۵ کتاب درسی

یک مدار R–C موازی $\begin{cases} V(t)=۲۰۰\sin ۱۰۰۰t \\ I(t)=۱۰\sin(۱۰۰۰t+\frac{\pi}{۴}) \end{cases}$

هدف : طبق معادلات زمانی موجود برای ولتاژ جریان مقادیر R و C را محاسبه کنید.

گام ۱) با توجه به معادلات زمانی جریان، ولتاژ φ و Z را محاسبه می‌کنیم.

همان‌طور که قبلاً اشاره شد با داشتن معادلات زمانی ولتاژ و جریان کل مدار φ و Z قابل محاسبه هستند.

$$\varphi=\theta_V-\theta_I=۰-۴۵^\circ=-۴۵^\circ$$

$$Z=\frac{V_m}{I_m}=\frac{۲۰۰}{۱۰}=۲۰\ \Omega$$

گام ۲) با استفاده از روابط $\sin\varphi$ و $\cos\varphi$ و R و C به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$\begin{cases}\cos\varphi=\frac{Z}{R}\\ \sin\varphi=-\frac{Z}{X_C}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۲۰}{R}\\ -\frac{\sqrt{۲}}{۲}=-\frac{-۲۰}{X_C}\end{cases}\rightarrow\begin{cases}R=\frac{۴۰}{\sqrt{۲}}\ \Omega\\ X_C=\frac{۴۰}{\sqrt{۲}}\ \Omega\end{cases}$$

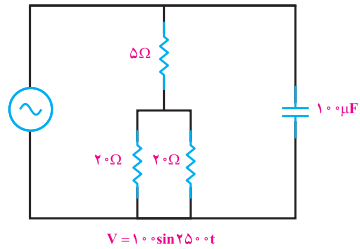
$$X_c=\frac{۱}{C\omega}\rightarrow\frac{۴۰}{\sqrt{۲}}=\frac{۱}{C\times۱۰۰۰}\rightarrow C=\frac{\sqrt{۲}}{۴۰\times۱۰۰۰}=۰/۰۳۵\ \mu F$$

۳ـ۳ـ۴ـ حل تمرین ۱۴ صفحه ۱۱۶ کتاب درسی (شکل ۲۲ـ۴)

الف)

هدف : محاسبه امپدانس کل مدار

گام ۱) ساده‌سازی مدار (تعیین مقاومت معادل شاخهٔ وسط)

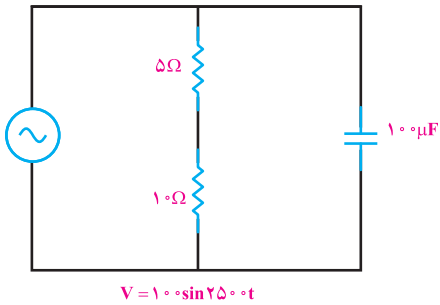


شکل ۲۲ــ۴

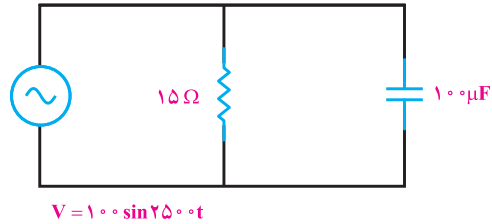
در این مرحله با توجه به شکل‌های ۲۳ــ۴ و ۲۴ــ۴ به صورت‌های نشان داده شده ساده می‌شود.

$$X_c = \frac{۱}{C\omega} = \frac{۱}{۱۰۰\times۱۰^{-۶}\times۵۰۰} = \frac{۱۰۰}{۵} \rightarrow X_c = ۲۰\ \Omega$$

$$(۲۰ \| ۲۰) = ۱۰\Omega$$



شکل ۲۳ــ۴



شکل ۲۴ــ۴

گام ۲) امپدانس کل مدار طبق رابطه زیر قابل محاسبه است.

در این رابطه باید مدار به صورت یک مقاومت و یک خازن و منبع ولتاژ، به صورت موازی قرار گرفته باشند.

$$Z = \frac{R.X_C}{\sqrt{R^۲ + X_C{}^۲}} = \frac{۲۰\times۱۵}{\sqrt{۲۰^۲ + ۱۵^۲}} = ۱۲\ \Omega$$

یادآوری

می‌توانیم مقدار امپدانس Z را از رابطهٔ دیگری نیز به‌دست آوریم که در مدارات R–Lو R–C موازی مناسب است :

$$Z = \frac{V_e}{I_e} = \frac{V_e}{\sqrt{I_R^۲ + I_C^۲}}$$

ب)

برای محاسبهٔ ضریب قدرت کل شبکه از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$\cos\varphi = \frac{Z}{R} = \frac{۱۲}{۱۵} = ۰/۸$$

۴ـ۴ـ تأثیر فرکانس بر مدار R-C سری و موازی

الف) حالت سری

در این اتصال در فرکانس صفر f=۰ یا جریان مستقیم خازن مدار باز بوده در نتیجه $Z = \infty$ و جریان مدار برابر صفر خواهد بود ولی در فرکانس‌های بالا و بی‌نهایت به دلیل اینکه راکتانس خازنی صفر است($X_c = \frac{۱}{C\omega} = \frac{۱}{\infty} = ۰$)و خازن حالت اتصال کوتاه دارد، مقدار امپدانس برابر Z=R خواهد بود و مقدار جریان از رابطه $I = \frac{V_e}{R}$ به‌دست می‌آید.

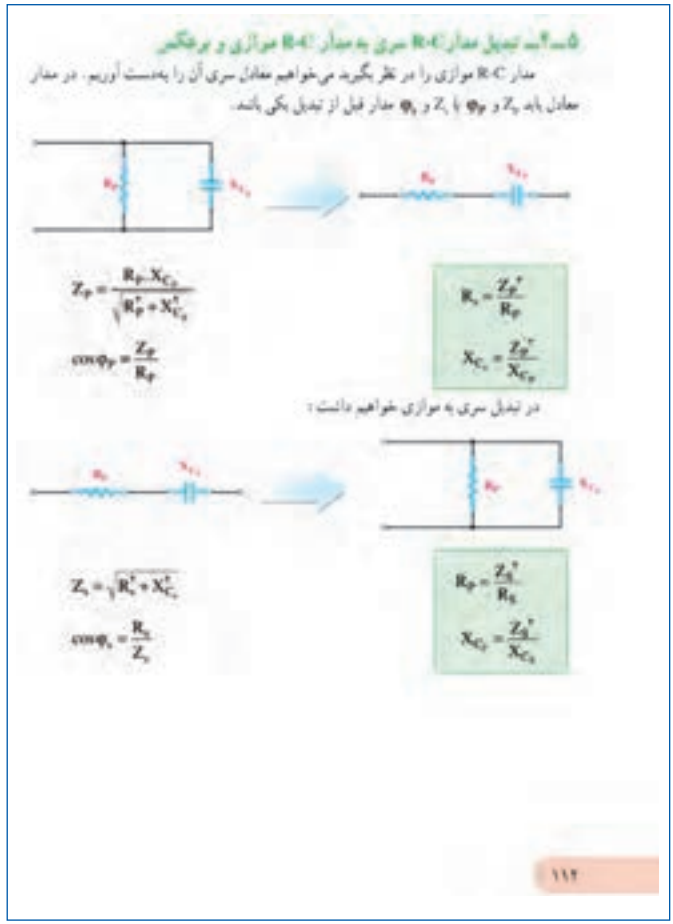
ب) حالت موازی

در این حالت در فرکانس صفر (جریان مستقیم) به‌دلیل مدار باز بودن خازن مقدار امپدانس برابر R بوده و جریان از رابطه $I=\frac{V_e}{R}$ به‌دست می‌آید.

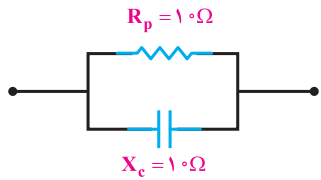
ولی در فرکانس‌های بالاتر و بی‌نهایت مقدار راکتانس X_C برابر صفر و مدار به حالت اتصال کوتاه خواهد رفت بنابراین جریان مدار در فرکانس بی‌نهایت، بی‌نهایت خواهد شد.

۵ـ۴ـ تبدیل مدارات R-C سری به مدار R-C موازی و برعکس

تبدیل این مدارات از حالت سری به موازی با رعایت X_C به‌جای X_L، دقیقاً شبیه تبدیل R–L سری به موازی و برعکس می‌باشد.



۱ـ۵ـ۴ـ حل تمرین شماره ۱۰ صفحه ۱۱۵ کتاب درسی در شکل ۲۵ـ۴



شکل ۲۵ـ۴

هدف :تبدیل مدار R–C موازی به یک مدار R–C سری

گام ۱) محاسبه امپدانس کل مدار و $\sin\theta$ و $\cos\theta$

$$Z_P = \frac{R_P.X_{C_P}}{\sqrt{R^۲ + X_C{}^۲}} = \frac{۱۰\times۱۰}{\sqrt{۱۰^۲ + ۱۰^۲}} = ۵\sqrt{۲}\ \Omega$$

$$\cos\varphi_p = \frac{Z_P}{R_P} = \frac{۵\sqrt{۲}}{۱۰} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \sin\varphi$$

تذکر: از برابر بودن R و X_C می‌توانستیم مقدار زاویه $\varphi=۴۵^\circ$ را پیش‌بینی کنیم.

گام ۲) با در نظر گرفتن روابط مقاومت اهمی سری و مقاومت خازنی سری مدار به‌صورت زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$R_S = Z\cos\varphi = ۵\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۵\,\Omega$$

$$X_{C_S} = Z\sin\varphi = ۵\sqrt{۲}\times\frac{\sqrt{۲}}{۲} = ۵\,\Omega$$

یا از رابطهٔ

$$\begin{cases} R_S = \dfrac{Z_P{}^۲}{R_P} = \dfrac{(۵\sqrt{۲})^۲}{۱۰} = ۵\,\Omega \\ X_{C_S} = \dfrac{Z_P{}^۲}{X_{C_P}} = \dfrac{(۵\sqrt{۲})^۲}{۱۰} = ۵\,\Omega \end{cases}$$