فصل ۷

ترکیبات

شمارش

امروزه به افراد جهت شناسایی آن‌ها شناسه‌های مختلفی نسبت می‌دهند، از جمله شماره‌ی شناسنامه، کد ملی و ... به وسایلی مانند خانه، ماشین و ... نیز جهت تعیین مالکیت آنها شماره و کدهایی نسبت داده می‌شود که گاهی از چند رقم یا حروفی در کنار هم تشکیل شده‌اند.

قبل از این ابداعات بشر، شناسه‌ها و نشانه‌هایی منحصر به فرد در عالم خلقت وجود داشته است. اثر انگشت یکی از این نشانه‌ها است که با دانستن آن می‌توان فرد را شناسایی کرد. مثال دیگر که ضمناً مهم‌ترین شناسه یا کُدی است که در وجود جانداران از جمله انسان قرار دارد DNA است. کشف آن یکی از بزرگترین دستاوردهای علمی بشر در قرن بیستم به شمار می‌رود، حتماً در سال گذشته با برخی خواص این ملکول آشنا شده‌اید.

DNA منبع اطلاعات وراثتی هر شخص از جمله رنگ چشم، پوست، گروه خونی، قد و ... می‌باشد. در اجزای مختلف بدن حتی پوست و مو نیز یافت می شود. هم اکنون در موارد مختلفی از جمله امور جنایی از آن برای شناسایی اشخاص نیز استفاده می‌شود.

همان‌طور که می‌دانید DNA از دو رشته‌ی بسیار طولانی که به موازات هم و مارپیچی هستند تشکیل شده‌است. اجزای اصلی این دو رشته، چهار باز آلی به نام‌های اختصاری C، T، A و G[1] می‌باشند.

همان طور که در شکل دیده می شود روبروی حرف T در رشته‌ی دیگر حرف A و روبروی G حرف C قرار می‌گیرد ،به بیان دیگر T و A مکمل و G و C نیز مکمل یکدیگر می‌باشند. اگر عناصر یک رشته DNA را به طور افقی بنویسیم رشته‌ای بسیار طولانی به شکل زیر به‌دست می‌آید.

..... C C A G T A G C A .....

طول این رشته در بدن انسان بیش از 10^5 حرف می‌باشد! برای شناسایی هر فرد در کشور از کد ملی که ۱۰ رقمی می‌باشد استفاده می‌شود، حال تصوّر کنید

---

۱. سیتوزین، تیمین، آدنین و گوانین

کد بالا با این طول بسیار زیاد قادر است چه اطلاعاتی از بشر را منتقل نماید!

DNA دستورالعمل ساخت پروتئین‌های مختلفی را صادر می‌کند. پروتئین‌ها از اسیدهای آمینه تشکیل شده‌اند. در حدود ۲۰ نوع اسید آمینه وجود دارد. نحوه‌ی قرار گرفتن اسیدهای آمینه‌ی مختلف در پروتئین، نوع آن را تعیین می‌کند. سه حرف متوالی در طول رشته می‌تواند دستور ساخت اسید آمینه‌ی خاصی باشد و به رمز ژنتیک موسوم است. به عنوان مثال رشته‌ی CCGCAG در قطعه‌ای از رشته DNA نشان دهنده‌ی ترکیب دو نوع اسید آمینه‌ی خاص[1] برای ساخت پروتئین خاصی توسط سلول است.

به نظر شما اگر قرار بود DNA برای نامیدن یک اسید آمینه به جای یک رشته‌ی سه حرفی از رشته‌ای دو حرفی استفاده کند آیا می‌توانست ۲۰ نوع اسید آمینه را نام‌گذاری کند؟

با انجام فعالیت زیر به جواب این سؤال دست خواهید یافت.

تعدادی از رشته‌های دو حرفی متشکل از ۴ حرف T ، C ، G و A عبارتند از :

AA, AT, AG, GA, CC و ...

الف) تمام رشته‌های دو حرفی که به وسیله‌ی T ، G ، C و A ساخته می‌شوند را بنویسید.

ب) آیا با دسته‌بندی مناسب یا رسم یک جدول یا نمودار می‌توانید همه‌ی آن‌ها را به شکل منظمی نشان دهید؟

ج) چگونه مطمئن می‌شوید که تمام حالت‌ها را نوشته‌اید؟ تعداد آن‌ها چند تا است؟

د) آیا می‌توانید با دسته‌بندی مناسب تعداد رشته‌های ۳ حرفی که با این ۴ حرف ساخته‌می‌شوند را بیابید؟

توجه کنید در بخش (د) از فعالیت فوق برخلاف (الف) نوشتن همه‌ی حالت‌ها به صورت دستی کار ساده‌ای نیست! بنابراین یافتن یک روش مناسب که تعداد حالت‌ها را بدون کم و زیاد بدهد با ارزش خواهد بود.

جدای از مطلب شگفت انگیز فوق مسائل بسیاری پیرامون ما هستند که در رابطه با حل آن‌ها باید دست به کار شمارش شویم.

---

۱. گلیسین و والین

با مطالعه‌ی این فصل خواهید توانست به سادگی مسائلی از این گونه را حل کنید.

تمرین

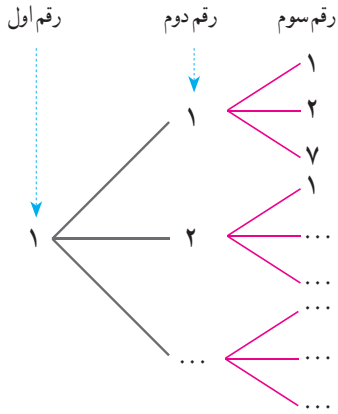
تمام اعداد سه رقمی را در نظر بگیرید که ارقام آن‌ها از مجموعه‌ی {۷ , ۲ , ۱} انتخاب شده است. تعدادی از آن‌ها عبارتند از : ۷۲۱ و ۱۲۷ و ۱۱۱.

الف) چند تا از این اعداد هستند که دو رقم سمت چپ آن‌ها برابر ۱۲ است؟

ب) با تکمیل شکل روبه‌رو تمام اعدادی که با رقم ۱ شروع می‌شوند را بنویسید. تعدادشان چند تا است؟

ج) تمام اعداد سه رقمی که با ۲ شروع می‌شوند چند تا هستند؟ چند تا با ۷ شروع می‌شوند؟

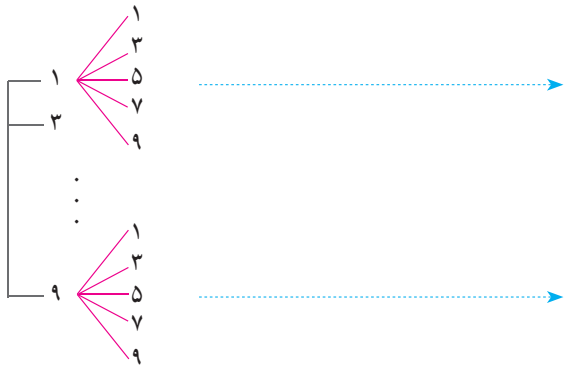
د) تعداد کل اعداد سه رقمی فوق چند تا است؟



مثال

تعداد اعداد دو رقمی با ارقام فرد را بیابید.

ارقام فرد عبارتند از ۹، ۷، ۵، ۳ و ۱. بنابراین با در نظر گرفتن نمودار حالت‌ها داریم :



۱۹ و ۱۷ و ۱۵ و ۱۳ و ۱۱

۳۹ و ۳۷ و ۳۵ و ۳۳ و ۳۱

⋮

۹۹ و ۹۷ و ۹۵ و ۹۳ و ۹۱

بنابراین جواب این مثال برابر است با $۵ \times ۵ = ۲۵$. دو نمودار فوق با توجه به ظاهرشان «نمودار درختی» حالت‌ها نامیده می‌شوند.

مثال

امید برای خرید یک جفت کفش و جوراب ورزشی به یک فروشگاه رفت، در این فروشگاه کفش در دو رنگ سفید و مشکی و جوراب در سه رنگ سفید، آبی و سبز عرضه شده بود. می‌خواهیم بدانیم امید به چند روش مختلف می‌تواند خرید خود را انجام دهد. اگر او کفش سفید را انتخاب کند برای انتخاب جوراب سه گزینه دارد :

۱- کفش سفید،جوراب سفید ۲- کفش سفید،جوراب آبی ۳ – کفش سفید،جوراب سبز

اگر او کفش مشکی را انتخاب کند مجدداً برای انتخاب جوراب سه روش وجود دارد. بنابراین امید $۲ \times ۳ = ۶$ روش مختلف برای خرید کفش و جوراب دارد. اگر جدول زیر را در نظر بگیریم کافی است در هر سطر یک علامت بزنیم.

کفش	سفید		مشکی
جوراب	سفید	آبی	سبز

برای علامت زدن سطر اول دو حالت و برای علامت زدن سطر دوم ۳ حالت وجود دارد، بنابراین به ۶ طریق می‌توان جدول بالا را علامت زد.

تمرین

۱- بین دو شهر X و Y دو جاده و بین دو شهر Y و Z چهار جاده وجود دارد. به چند طریق می‌توان از شهر X (از طریق Y) به شهر Z رفت؟

۲- محسن قصد دارد تعدادی از دوستان خود را در روز عید قربان دعوت کند، او می‌خواهد ناهار را خود آماده کند. برای این کار در نظر دارد یک غذا و یک سالاد درست کند. اگر او طرز تهیه ۴ نوع غذا و سه نوع سالاد را بداند به چند روش می‌تواند ناهار را آماده کند؟ با استفاده از نمودار درختی نیز به سؤال جواب دهید.

۳- سکه‌ای را سه مرتبه پرتاب می‌کنیم، ممکن است در هر مرتبه به رو یا پشت به زمین بیافتد. چند حالت مختلف ممکن است رخ بدهد؟ اگر به رو آمدن را با H و به پشت آمدن را با T نشان دهیم، کلیه حالت‌ها را با استفاده از نمودار درختی نشان دهید.

۴- قرار است یک آزمون ۳ سؤالی برگزار شود، هر سؤال یک تست چهار گزینه‌ای است با گزینه های الف، ب، ج و د. اگر قرار باشد در هر سؤال یک و تنها یک گزینه علامت زده شود به چند طریق مختلف ممکن است پاسخ‌نامه پُر شود؟

۱. الف ب ج د
۲. الف ب ج د
۳. الف ب ج د

اصل ضرب

اگر خوب به مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرین‌های فوق توجه کرده باشید متوجه می‌شوید که وجه اشتراکی بین همه‌ی آن‌ها وجود دارد، در هر کدام از آن‌ها چندین جزء وجود دارد. در مثال مربوط به امید خرید او دو جزء دارد، یکی خرید کفش و دیگری خرید جوراب، در ساختن عدد دو رقمی با ارقام فرد دو جزء داریم، رقم یکان و رقم دهگان. در پرتاب سکه (تمرین ۳) سه جزء داریم، نتیجه‌ی پرتاب در مرتبه‌ی اول، دوم و سوم. جواب‌های به‌دست آمده در تمام حالت‌ها ما را به اصل ساده ولی مهم زیر رهنمون می‌سازند.

اصل ضرب: هرگاه عملی از دو جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق مختلف و به ازای هر کدام از آن‌ها جزء دوم به n طریق مختلف قابل انجام باشد، آنگاه انجام آن عمل $m \times n$ حالت مختلف دارد.

یک تعمیم از اصل ضرب به قرار زیر است :

هرگاه عملی از سه جزء مختلف تشکیل شده باشد و جزء اول به m طریق مختلف، جزء دوم به n طریق مختلف و جزء سوم به p طریق مختلف قابل انجام باشد، آن‌گاه انجام آن عمل به $m \times n \times p$ حالت مختلف امکان پذیر است.

البته با توجه به الگوی فوق می‌توان اصل ضرب را به اعمالی با هر تعداد جزء تعمیم داد.

مثال

۱- چند کلمه‌ی دو حرفی با استفاده از حروف a ، b ، c و d می‌توان ساخت؟

برای این کار کافی است مشخص کنیم حرف اول و دوم چه هستند. اگر شکل زیر را برای دو حرف در نظر بگیریم.

خانه‌ی اول ۴ حالت و خانه‌ی دوم نیز ۴ حالت دارد. بنابراین جواب طبق اصل ضرب برابر $۴ \times ۴ = ۱۶$ است.

۲- چند عدد چهار رقمی با استفاده از ارقام $\{۰,۱,۲,۳,۴,۵\}$ می‌توان ساخت. طوری که بر ۵ بخش پذیر باشد؟

اگر چهار جایگاه به شکل زیر برای ارقام در نظر بگیریم و تعداد حالت‌های ارقام را بالای هر جایگاه بنویسیم داریم :

۵	۶	۶	۲

بنابراین طبق اصل ضرب جواب برابر است با $۵\times۶\times۶\times۲=۳۶۰$. توجه کنید رقم صفر نمی‌تواند در جایگاه سمت چپ باشد، بنابراین این جایگاه ۵ حالت دارد، جایگاه سمت راست هم دو حالت دارد ارقام ۰ یا ۵.

۳- با استفاده از سه رنگ آبی، قرمز و سبز به چند روش می‌توان خانه‌های جدول زیر را رنگ کرد؟

برای رنگ آمیزی هر خانه سه انتخاب داریم. بنابراین طبق اصل ضرب جواب برابر $۳\times۳\times۳\times۳=۸۱$ است.

تمرین

۱- با استفاده از دو رقم ۲ و ۱ چند عدد ۵ رقمی می‌توان ساخت؟

۲- هر زیرمجموعه از $\{۱,۲,\ldots,۶\}$ را می‌توان با یک کد ۶ تایی از ۱ و ۰ نشان داد. ۱، متناظر بودن عضو و ۰ متناظر نبودن است. به عنوان مثال کد ۰۱۰۱۱۰ متناظر مجموعه‌ی $\{۲,۴,۵\}$ است. صفر در جایگاه اول کد یعنی عنصر یک در مجموعه نیست و یک در جایگاه چهارم یعنی ۴ در مجموعه هست و . . . .

الف) کد ۱۱۰۰۱۱متناظر چه زیر مجموعه‌ای است؟کد متناظر زیر مجموعه‌ی تهی چیست؟

ب) تعداد کدهای ۶ تایی از ۱ و ۰ چند است؟ تعداد زیر مجموعه‌های $\{۱,۲,\ldots,۶\}$ چند است؟

ج) در حالت کلی تعداد زیر مجموعه‌های $\{۱,۲,\ldots,n\}$ چند است؟

۳- یک عدد سه رقمی را متقارن می‌نامیم اگر رقم یکان و صدگان آن برابر باشند، مانند ۲۳۲. چند عدد سه رقمی متقارن داریم؟

۴- الف) عبارت $(r+s)(t+u+v)$ پس از محاسبه چند جمله دارد؟

ب) عبارت $(x+y+z)(a+b)(c+d)$ پس از محاسبه چند جمله دارد؟

۵- چند عدد سه رقمی بدون رقم ۸ داریم؟

۶- با استفاده از سه رنگ آبی، قرمز و سبز به چند روش می‌توان خانه‌های شکل زیر را رنگ کرد طوری که خانه‌های مجاور رنگشان متفاوت باشد؟

۷- در سرزمین گچ‌های نقاشی a_1, a_2, a_3 از شهر A، b_1, b_2, b_3 از شهر B و c_1, c_2, c_3, c_4 از شهر C برای گردش فضایی با فضا پیمای آلفا ثبت نام کرده‌اند. می‌دانیم a_1 با b_1، a_2 با b_3 ، a_3 با c_2 و c_1 سازگار نبوده و نمی‌توانند با هم سوار فضاپیما شوند. در ضمن فضاپیما ظرفیت ۳ نفر دارد که قرار است از هر شهر یکی سوار بشود. به چند طریق می‌توان سه نفر را رهسپار کرد؟ (راهنمایی : از نمودار درختی استفاده کنید.)

جایگشت

مثال‌های زیادی وجود دارند که ترتیب انجام اعمال در آن‌ها مورد توجه است. قطعاً برای پوشیدن جوراب و کفش ترتیب انجام این دو عمل روشن است! فعالیت زیر را بخوانید و پاسخ دهید.

فعالیت

احمد، آرش و رضا به عنوان دانش‌آموزان ممتاز استان شناخته شده‌اند. به همین مناسبت در مرکز استان مراسمی جهت تقدیر از آن‌ها ترتیب داده شده است و قرار است یکی یکی جهت دریافت هدایای خود بالای سکو بروند. قطعاً روش‌های مختلفی برای بالا رفتن آن‌ها وجود دارد. مثلاً اول احمد، دوم آرش و سوم رضا یا اول احمد، دوم رضا و سوم آرش و . . . می توان با استفاده از نمودار درختی حالت‌ها را شمرد.

الف) جدول روبرو را کامل کنید.

احمد	رضا – آرش
	آرش – رضا
آرش	. . . – احمد
	احمد – . . .
رضا	. . . – . . .
	. . . – . . .

ب) با استفاده از اصل ضرب چه‌طور می‌توان به این سؤال جواب داد؟

مثال

چهار نفر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف کنار هم بایستند؟

نفر سمت چپ می‌تواند هر یک از ۴ نفر باشد بنابراین ۴ حالت دارد، نفر دوم هر یک از ۳ نفر باقیمانده می‌تواند باشد پس ۳ حالت دارد. برای نفر سوم و چهارم به ترتیب ۲ و ۱ حالت وجود دارد، در نتیجه طبق اصل ضرب جواب برابر $۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$ است. مشابه فعالیت قبل با استفاده از نمودار درختی نیز جواب به‌دست می‌آید ولی روشن است که هر چه اعداد بزرگ‌تر باشند نمایش به وسیله‌ی نمودار درختی دشوارتر است.

در فعالیت و مثال بالا نحوه‌ی قرار گرفتن افراد مطرح شده است که در آن تنها ترتیب قرار گرفتن تعیین کننده است. موارد بسیاری در مسائل روزمره وجود دارد که نحوه‌ی قرار گرفتن اشیایی کنار هم مطرح می‌شود.

اگر تعدادی شیء متمایز داشته باشیم به هر نحوه‌ی قرار گرفتن آن‌ها در کنار هم یک «جایگشت» می‌گوییم.

به عنوان مثال ABC، BAC و BCA سه جایگشت مختلف از سه حرف A و B و C می‌باشند. در دو مثال بالا به ترتیب جایگشت‌های سه‌تایی و چهارتایی مطرح بود.

مثال

با استفاده از ارقام ۱،۲،۳،۷،۹ چند عدد ۵ رقمی با ارقام مختلف می‌توان نوشت؟

روشن است که باید تعداد جایگشت های ارقام ۱،۲،۳،۷،۹ را پیدا کنیم، به عبارت دیگر باید تمام ترتیب‌های مختلف کنار هم از آن‌ها را در جدول زیر بیابیم.

برای جایگاه اول ۵ حالت، جایگاه دوم ۴ حالت، . . . . وجود دارد. (مطابق شکل زیر)

۵	۴	۳	۲	۱

پس جواب طبق اصل ضرب برابر است با $۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$.

معرفی یک نماد : برای سهولت در محاسبات حاصل ضرب اعداد متوالی از ۱ تا n را با نماد $n!$ (بخوانید n فاکتوریل) نشان می‌دهند. همچنین قرارداد می‌کنیم که : $۰!=۱$.

به عبارت دیگر داریم : $n!=۱\times۲\times...\times n$. توجه کنید که : $۱!=۱$

مثال

تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی «کشورمان» برابر است با !۷ .
با توجه به مثال‌های فوق گزاره کلی زیر در مورد تعداد جایگشت‌ها قابل بیان است :

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر با n! است.

تمرین

۱- با توجه به مباحث بالا در مورد واژه‌ی «جایگشت» و دلیل نام‌گذاری آن بحث کنید.
۲- حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید :

الف) $\frac{۱۰!}{۵!}$ ب) $۱!+۲!+۳!+۴!$ ج) $\frac{n!}{(n-۱)!}$

۳- حاصل ضرب $۱۱\times۱۰\times۹\times۸$ را با استفاده از نماد فاکتوریل نمایش دهید.

۴- ۱۰ نامه‌ی مختلف را به چند طریق می‌توان در ۱۰ پاکت مختلف قرار داد؟

سرگرمی

با استفاده از تنها ۳ رقم صفر و چند نماد فاکتوریل و پرانتز و اعمال ریاضی عدد ۶ را بسازید.

مثال

۱۰ نفر دانش‌آموز دبیرستانی در مسابقه‌ی دو ۱۰۰ متر شرکت کرده‌اند، نفرات اول، دوم و سوم مدال طلا، نقره و برنز دریافت خواهند کرد. به چند طریق ممکن است که برندگان طلا، نقره و برنز مشخص شوند؟

برای مشخص شدن مدال طلا ۱۰ امکان وجود دارد، برای مدال نقره ۹ امکان و برای مدال برنز ۸ امکان وجود دارد. بنابراین مطابق اصل ضرب جواب برابر $۸\times۹\times۱۰$ یعنی ۷۲۰ است. که می‌توان آن را به صورت $\frac{۱۰!}{۷!}$ نیز نشان داد.

در این مثال یک جایگشت سه تایی از ۱۰ نفر مورد نظر بود به طوری که ترتیب آن‌ها نیز نفرات اول تا سوم را مشخص می‌کرد. به طور کلی اگر جایگشت های k تایی از n شیء متمایز مد نظر باشد

تعداد آن‌ها برابر است با : $n(n-۱)(n-۲)...(n-(k-۱))$ که برابر است با $\frac{n!}{(n-k)!}$.

تعداد جایگشت‌های k تایی از nشیء متمایز را معمولاً با نماد $P(n,k)$ نشان می‌دهند و داریم:

$$P(n,k)=\frac{n!}{(n-k)!}$$

توجه کنید که: $k \le n$

۱- در مورد معنای $P(n,n)$ بحث کرده و به دو روش نشان دهید $P(n,n)=n!$.

۲- چند رشته‌ی (کلمه‌ی) سه حرفی با حروف متفاوت انگلیسی می‌توان نوشت؟

۳- درون بشقابی یک سیب، یک پرتقال و یک انار گذاشته شده‌است. اگر از بین ۶ نفر ۳ نفر به طرف بشقاب رفته و هر کدام یک میوه بردارند به چند روش ممکن است ۳ میوه توزیع شده باشند؟

۴- نشان دهید تعداد جایگشت‌های ۵ حرفی از حروف کلمه‌ی computer که حرف اول بی‌صدا باشد برابر $۵P(۷,۴)$ است.

به یاد داشته باشید که یکی از مهم‌ترین ویژگی‌ها در مبحث جایگشت، ترتیب قرار گرفتن اشیاء است. به عنوان مثال دو عدد ۱۲۳ و ۳۱۲ با هم یکی نیستند و در اصل دو جایگشت متفاوت از اعضای $\{۱,۲,۳\}$ می‌باشند. همچنین در مثال گذشته اگر برندگان مدال طلا، نقره و برنز مثلاً علی، احمد و حسین باشند فرق می‌کند با وقتی که احمد، حسین و علی باشند. عامل مشترک در ایجاد این تفاوت‌ها ترتیب قرار گرفتن اشیاء است. در بخش بعد با دسته‌ای از مسائل آشنا می‌شویم که ترتیب قرار گرفتن اشیاء مهم نیست.

۱- تمام جایگشت‌های حروف کلمه‌ی water را در نظر بگیرید.

الف) تعداد آن‌ها چند تا است؟

ب) در چند تا دو حرف a و w کنار هم هستند؟

ج) در چند تا دو حرف a و w کنار هم قرار ندارند؟

۲- تعداد جایگشت‌های حروف کلمه‌ی computer که در آن سه حرف m، o و c به صورت com قرار گرفته باشند چند تا است؟

۳- چند تابع یک به یک از مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ..., ۱۰\}$ به مجموعه‌ی $\{۱, ۲, ..., ۱۰\}$ قابل تعریف است؟

۴- چند عدد ۵ رقمی زوج با ارقام متمایز داریم؟

۵- در یک شرکت که ۲۵ عضو دارد قرار است یک رئیس، یک منشی و یک خزانه دار انتخاب شوند. اگر هر عضو فقط در حداکثر یکی از این سمت ها بتواند باشد به چند طریق می‌توان انتخاب آنها را انجام داد؟

۶- به چند طریق می‌توان ۴ کتاب مختلف ریاضی و ۳ کتاب مختلف فیزیک را در یک قفسه کنار هم چید طوری که کتاب های فیزیک همگی کنار هم باشند؟

۷- اگر در یک سالن دو ردیف صندلی و هر ردیف ۱۰ صندلی باشد، مشخص کنید به چند طریق ۶ دانش‌آموز اول دبیرستان، ۳ دانش‌آموز دوم و ۴ دانش‌آموز سوم دبیرستان می‌توانند روی آن‌ها بنشینند طوری که اولی‌ها در ردیف اول و دومی‌ها در ردیف دوم باشند؟

آرش، مهدی و حامد سوار بر اسب هستند و می‌خواهند با هم مسابقه بدهند. به چند طریق ممکن است به خط پایان برسند؟ (امکان هم‌زمان رسیدن را نیز در نظر داشته باشید!)

ترکیب

در اکثر مسائلی که تا به حال حل کرده‌ایم ترتیب قرار گرفتن اشیاء اعم از حروف، ارقام و... مهم بود. در پاره‌ای از مسائل ترتیب اشیاء به هیچ وجه مهم نیست. به عنوان مثال فرض کنید زهرا خواسته باشد ۳ کیلو شیرینی که هر کیلو از آن از یک شیرینی خاص است (سه نوع شیرینی) برای مهمانان از شیرینی‌فروشی محل خریداری کند. زهرا پس از ورود به شیرینی‌فروشی متوجه می‌شود در آن‌جا ۷ نوع شیرینی مختلف برای فروش وجود دارد. بنابراین برای تهیه‌ی سه نوع شیرینی مختلف گزینه‌های مختلفی برای او وجود دارد. قطعاً گزینه‌هایی که زهرا با آن‌ها مواجه است به ترتیب سه نوع شیرینی ربطی ندارد! تنها سه نوع انتخاب شده مهم است، یا اگر قرار باشد از افراد یک کلاس ۳۰ نفره ۳ نفر را برای نمایندگی در شورای دانش‌آموزی انتخاب‌کنیم در انتخاب ما ترتیب آن‌ها اهمیتی ندارد. مسلماً می‌توانید مثال‌های زیادی در زندگی روزمره بزنید که در آن‌ها ترتیب برای ما اهمیتی ندارد. حال به فعالیت صفحه‌ی بعد توجه کنید.

فعالیت

در یک مسابقه شطرنج، ۵ شطرنج باز برتر شرکت کرده‌اند. قرار است هر دو شطرنج باز یک بار با هم مسابقه بدهند.

الف) هر شطرنج باز چند بازی انجام خواهد داد؟

ب) تعداد کل بازی‌ها چند تا است؟

ج) اگر برای شرکت کنندگان شماره‌های ۱ تا ۵ را در نظر بگیریم، تمامی بازی‌ها را مشخص کنید.

د) در کدام قسمت مسئله ترتیب اهمیت ندارد؟

نمونه‌ی دیگر از مواردی که ترتیب در آن‌ها اهمیت ندارد مجموعه‌ها است. همان‌گونه که می‌دانید ترتیب اعضاء برای مشخص کردن یک مجموعه مهم نیست، به عنوان مثال مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳\}$ با مجموعه‌ی $\{۲,۱,۳\}$ یکسان است، به عبارت دیگر $\{۱,۲,۳\}=\{۲,۱,۳\}$.

این در حالی است که دو جایگشت ۱۲۳ و ۲۱۳ متفاوت هستند.

فعالیت

می‌خواهیم تعداد زیرمجموعه‌های ۳ عضوی $\{۱,۲,۳,\ldots,۹\}$ را پیدا کنیم. تعدادی از آن‌ها عبارتند از : $\{۱,۲,۳\},\{۱,۲,۴\},\{۳,۴,۹\},\ldots$

جلوی هر کدام از زیر مجموعه‌های فوق تمام جایگشت‌های اعضاء را می‌نویسیم.

$\{۱,۲,۳\}$: ۱۲۳, ۱۳۲, ۲۱۳, ۲۳۱, ۳۱۲, ۳۲۱

$\{۱,۲,۴\}$: ۱۲۴, ۱۴۲, ۲۱۴, ۲۴۱, ۴۱۲, ۴۲۱

در دو سطر فوق ۶×۲ جایگشت سه تایی نوشته شده است.

الف) جلوی $\{۳,۴,۹\}$ چه جایگشت‌هایی نوشته می‌شوند؟

ب) زیرمجموعه‌ی ۳ عضوی دیگری در نظر گرفته و مشابه عمل بالا را برای آن انجام دهید.

ج) آیا ممکن است برای دو زیر مجموعه ۳ عضوی مختلف دو جایگشت یکسان به‌دست آمده باشد؟

د) اگر تعداد کل زیر مجموعه‌های ۳ عضوی را که فعلاً برای ما مجهول است با a نشان دهیم، تعداد کل جایگشت‌های ۳تایی متناظر با آن‌ها که قسمتی از آن در ابتدای فعالیت و بند (الف) و (ب) به‌دست آمده برحسب a چه مقداری است؟

هـ) با توجه به این که تعداد جایگشت‌های ۳ تایی از اعضای $\{۱,۲,\ldots,۹\}$ برابر $P(۹,۳)$ است و همچنین با استفاده از (د) a را بیابید.

مثال

تعداد زیر مجموعه‌های ۴ عضوی $\{۱,۲,...,۱۰\}$ را بیابید.

تعداد جایگشت‌های ۴ تایی از اعضای $\{۱,۲,...,۱۰\}$ برابر است با $\frac{۱۰!}{۶!}$. از طرفی اگر ترتیب قرار گرفتن اعضاء برای ما مهم نباشد خیلی از جایگشت‌ها نشانگر مجموعه‌های یکسانی هستند. به عنوان مثال هر دو جایگشت ۱۲۳۴ و ۴۲۱۳ نشانگر مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴\}$ هستند. بنابراین کل جایگشت‌های ۴تایی به دسته‌های ۲۴تایی تقسیم می‌شوند که هر دسته به مجموعه‌ی ۴ عضوی یکسانی اشاره دارند. زیرا تعداد جایگشت‌های ۴ عضو ثابت !۴ است. در نتیجه تعداد کل زیرمجموعه‌های چهارتایی برابر $\frac{۱۰!}{۶!}\times\frac{۱}{۲۴}$ است که عبارت است از $\frac{۱۰!}{۶!۴!}$.

زیرمجموعه‌ها یا انتخاب‌های ۴تایی از اعضای $\{۱,۲,...,۱۰\}$ ترکیب‌های ۴ تایی از اعضای $\{۱,۲,...,۱۰\}$ نیز نامیده می‌شوند.

به طور کلی ترکیب‌های k تایی از n شیء متمایز به انتخاب های k تایی از آن n شیء اطلاق می‌شود که در آن‌ها ترتیب فاقد اهمیت است.

با توجه به مثال و فعالیت بالا می‌توان فرمول زیر را ارائه نمود.

تعداد ترکیب‌های kتایی از n شیء متمایز برابر $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ است. در ضمن این تعداد را با نماد $C(n,k)$ یا $\binom{n}{k}$ نیز نشان می دهند. بنابراین:

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

($\binom{n}{k}$ را بخوانید «انتخاب k از n»)

با توجه به موارد بالا شرط $k\le n$ در فرمول $\binom{n}{k}$ الزامی است.

۱- با مراجعه به متن درس بگویید تعداد گزینه‌های خرید سه نوع شیرینی برای زهرا چند تا است؟

۲- در مثال قبل با توجه به فرمول $\binom{n}{k}$ مشخص کنید n و k چه اعدادی هستند؟

۳- تساوی‌های زیر را ثابت کنید :

الف) $\binom{n}{۲} = \frac{n(n-۱)}{۲}$

ب) $\binom{n}{k} = \binom{n-۱}{k} + \binom{n-۱}{k-۱}$

۴- دو دلیل ذکر کنید که $\binom{n}{۰} = ۱$.

۵- ۱۰ چراغ در یک ردیف قرار دارند. به چند طریق می‌توان ۳ تا از آن‌ها را روشن کرد؟ به چند طریق می‌توان ۷ تا از آن‌ها را روشن کرد؟ دو پاسخ را با هم مقایسه کنید.

۶- تعداد زیر مجموعه‌های چهار عضوی مجموعه‌ی $A = \{۱, ۲, ..., ۷\}$ را بیابید. به چند طریق می‌توان ۳ عضو از مجموعه‌ی A حذف کرد؟ دو جواب را مقایسه کنید. چه توضیحی دارید؟

۷- با توجه به دو تمرین قبل یک تساوی برای $\binom{n}{k}$ بیان کنید.

مثال

۱- از میان ۶ دانش‌آموز اول و ۸ دانش‌آموز دوم به چند طریق می‌توان کمیته‌ای ۵ نفره تشکیل داد به طوری که ۳ دانش‌آموز اول و ۲ دانش‌آموز دوم باشند؟ برای انتخاب ۳ دانش‌آموز اول $\binom{۶}{۳}$ راه وجود دارد و برای انتخاب ۲ دانش‌آموز دوم $\binom{۸}{۲}$ روش داریم. بنابراین طبق اصل ضرب جواب مسئله برابر $\binom{۸}{۲} \times \binom{۶}{۳}$ است.

۲- در یک آپارتمان که ۱۰ خانوار زندگی می‌کنند قرار است یک شورای ۴ نفره متشکل از اعضای آن تشکیل شود. از هر خانواده تنها زن یا شوهر می‌تواند عضو آن شورا بشود. به چند طریق ممکن است شورای ۴ نفره تشکیل شود؟

در ابتدا تعیین می‌کنیم که چهار خانواری که قرار است یک نفر از آن‌ها عضو شود کدامند، برای

این کار $\binom{۱۰}{۴}$ حالت وجود دارد. پس از انتخاب چهار خانوار از هر کدام به دو حالت یک نفر می‌تواند انتخاب شود. بنابراین جواب مسئله برابر $۲^۴ \times \binom{۱۰}{۴}$ است.

تمرین

۱- نشان دهید : $\binom{n}{۰}+\binom{n}{۱}+\ldots+\binom{n}{n}=۲^n$

۲- از میان ۷ کشتی گیر و ۵ وزنه بردار به چند روش می‌توان ۳ نفر انتخاب کرد که حداقل یک نفر کشی‌گیر باشد؟

۳- در یک مسابقه ورزشی، ورزشکارانی از ایران، روسیه، فرانسه، ترکیه و سوریه شرکت کرده‌اند. قرار است برای ارتباط بهتر ورزشکاران با هم تعدادی فرهنگ لغت به منظور آشنایی هر ورزشکار با سایر زبان‌ها تهیه شود. چند نوع فرهنگ لغت لازم است؟

۴- تعداد زیرمجموعه‌های زوج عضوی $\{۱,۲,\ldots,۱۰\}$ را بیابید. (مجموعه تهی با صفر عضو، زوج عضوی است.)

۵- هفت نقطه روی محیط یک دایره قرار دارند. چند مثلث مختلف می‌توان کشید که رئوس آن از بین هفت نقطه انتخاب شده باشد؟

۶- از هر یک از شهرهای بیرجند، بوشهر، سنندج، زاهدان و یزد ۲۰ دانش‌آموز به اردوگاه دانش‌آموزی میرزا کوچک خان دعوت شده‌اند، به چند طریق می‌توان سه دانش‌آموز که دو به دو غیر هم‌شهری هستند انتخاب کرد؟

منابع

۱- بیرونی نامه، ابوالقاسم قربانی، سلسله انتشارات انجمن آثار ملی.

۲- تحلیل‌های ریاضی و کاربرد آن در اقتصاد و بازرگانی، جین.ا.وبر، ترجمه حسین‌علی پورکاظمی، انتشارات دانشگاه شهید بهشتی.

۳- حساب دیفرانسیل و انتگرال برای رشته‌های بازرگانی، زیست‌شناسی و علوم‌اجتماعی، د.ج. کرودیس و س.م.شلی، ترجمه ابوالقاسم لاله، مرکز نشر دانشگاهی.

۴- ریاضیات ۲ چاپ ۱۳۸۷، دکتر اسماعیل بابلیان، میرزا جلیلی، رضا شهریاری اردبیلی و دکتر علیرضا مدقالچی.

۵- ریاضیات پیش‌دانشگاهی جلد اول، لوییس لیتهلد، ترجمه محمد رجبی طرخورانی و عمید رسولیان، انتشارات دانشگاه هرمزگان.

۶- ریاضیات پیش‌دانشگاهی، اس. تی. هو، ترجمه محمد جلوداری ممقانی و لیدا فرخو، انتشارات دانشگاه پیام نور.

۷- زیست‌شناسی، جف جونز و ماری جونز، ترجمه محمد کرام‌الدینی، انتشارات مدرسه.

۸- سلول‌های بنیادی، جلد اول، سلول‌های بنیادی جنینی، دکتر حسین بهاروند، انتشارات خانه زیست‌شناسی.

۹- مقدمه بر اقتصاد ریاضی، حسین ذوالنور، انتشارات جهاد دانشگاهی دانشگاه شیراز.

۱۰- A. Xavier Cantert Algebra and Trigonometry.

۱۱- Algebra and Trigonometry, Beecher J.A.Penna J.A. Bittinger M.L (3ed, Addison Wesley, 2007)

۱۲- Alvin K.Bettinger Algebra and trigonometry International Text book.

۱۳- Andreuis Barnes Encyclopedia of Trigonometry, Global Media (2007).

۱۴- California Algebra 1: Concepts, Skills and Problem Solving, Glencoe/ McGraw Hill (2008).

۱۵- California Algebra 2: Concept, Skills, and Problem Solving, Glencoe/ McGraw Hill, U.S.A.

۱۶- D.Anneross Master Math, Trigonometry C.P 2002.

۱۷- David Raymond curtiss and Elton James Moulton Essential of Trigonometry with application D.C Health and company Birkbauser(2004).

۱۸- Discrete Mathematics and Applications, Kenneth H.Rosen, McGrow Hill Publication, 1998.

۱۹- Exploring Mathematics Scott Foresman 2000.

۲۰- G.Bancroft, M.Fledcher, Maths in Action, ARRL (1998).

۲۱- Mathematics for teachers, J.L.Martin, McMillan.

۲۲- Mathematics for students, J.L.Martin, McMillan.

۲۳- Mathematical Ideas, Charles D.Miller, Seventh Edition, Harper Collins Publisher.

۲۴- Principles & Standards for school Mathematics N.C.T.M.

۲۵- Real Life Mathematics, Everyday use of Mathematics Concepts, Evan M.Glazer, John W.McConnell Greenwood Press.

۲۶- Sharon L.senx and others, Functions, statistics and trigonometry, Second Edition, SFARR (1998).

۲۷- T. Andreesca 103 Trigonometry Problem.

۲۸- Trigonometry, Charles. Mckcague, Mar D. Turnes.

۲۹- WWW.TIMSS/RELEASED ITEMS/MATHEMATICS/08
(TIMSS 2003 سؤالات قابل انتشار).

معلّمان محترم، صاحب‌نظران، دانش‌آموزان عزیز و اولیای آنان می‌توانند نظر اصلاحی خود را دربارهٔ مطالب این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۵۵/۳۶۳ - گروه درسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email) talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر تألیف کتاب‌های درسی ابتدایی و متوسطه نظری