

ماتریس

فصل 4



میوه فروشی وزن (برحسب کیلوگرم) میوه‌هایی را که در روزهای مختلف هفته جهت فروش عرضه کرده، به صورت زیر دسته‌بندی کرده است.

	پرتقال	سیب
شنبه	۴۸۰	۲۴۰
دوشنبه	۳۲۰	۱۸۰
چهارشنبه	۵۶۰	۳۰۰
جمعه	۲۰۰	۱۷۰

	پرتقال	سیب
یک‌شنبه	۲۲۵	۸۰
سه‌شنبه	۲۵۰	۱۱۰
پنجشنبه	۲۲۵	۱۰۵

اطلاعات فوق را می‌توان به صورت آرایشی از اعداد نشان داد.

$$\begin{bmatrix} 480 & 240 \\ 320 & 180 \\ 560 & 300 \\ 200 & 170 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 225 & 80 \\ 250 & 110 \\ 225 & 105 \end{bmatrix}$$

آرایش فوق از اعداد را یک ماتریس و هریک از اعداد را درایه‌ی ماتریس می‌نامند.

معمولاً ماتریس را با حروف بزرگ **A**، **B**، **C** و ... نشان می‌دهند.

سطر اول	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 11 & -1 & 6 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$
سطر دوم	
سطر سوم	
	ستون سوم ستون دوم ستون اول

ماتریس مقابل ماتریسی با سه سطر و سه ستون است.

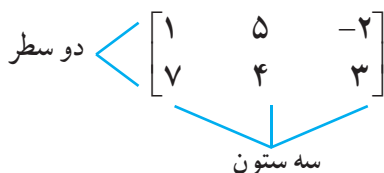
درایه‌ی ۴ در سطر سوم و ستون دوم واقع است.

یک ماتریس با m سطر و n ستون یک ماتریس از مرتبه $m \times n$ (بخوانید ماتریس m سطر در n ستون و یا به طور خلاصه ماتریس m در n) است. ماتریس مثال قبل یک ماتریس از مرتبه 3×3 (سه در سه) است.

در صورتی که تعداد سطرها و ستون‌های یک ماتریس برابر باشند، یعنی $m = n$ باشد، ماتریس را مربعی می‌نامند.



مثالی از یک ماتریس با مرتبه 2×3 به صورت زیر است که در آن عدد ۷ درایه‌ای است که در سطر دوم و ستون اول واقع شده است.



جای هریک از درایه‌های ماتریس بالا را مشخص کنید.



در جدول‌های زیر موجودی حساب جاری پس‌انداز حسن و احمد در بانک ملی و بانک کشاورزی داده شده است.

موجودی حسن

	جاری	پس‌انداز
ملی	۷۰۰۰۰	۸۰۰۰۰
کشاورزی	۱۰۰۰۰۰	۹۰۰۰۰

موجودی احمد

	جاری	پس‌انداز
ملی	۶۰۰۰۰	۵۰۰۰۰
کشاورزی	۴۰۰۰۰	۹۰۰۰۰

موجودی حسن و احمد را در ماتریس‌هایی به صورت زیر می‌توان نشان داد :

$$\begin{bmatrix} 70000 & 80000 \\ 100000 & 90000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 60000 & 50000 \\ 40000 & 90000 \end{bmatrix}$$

ماتریسی که فقط یک سطر دارد را ماتریس سطری و ماتریسی که فقط یک ستون دارد را ماتریس ستونی می‌نامیم.



یک ماتریس سطری و $\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ یک ماتریس ستونی است.



در هر یک از ماتریس‌های داده شده، سطرها در ستون‌ها را مانند نمونه‌ی زیر مشخص کنید و مرتبه‌ی ماتریس را بنویسید.

$$A_{2 \times 3} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \text{ستون اول} & \text{ستون دوم} & \text{ستون سوم} \\ \text{سطر اول} & & \\ \text{سطر دوم} & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 5 & 7 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -5 & -3 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -1 & 0 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad V = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad Z = [-1 \quad 1]$$

در هر یک از ماتریس‌های فوق درایه‌ی واقع در سطر اول و ستون اول را مشخص کنید.

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ درایه‌ی a_{11} درایه‌ای است که در سطر اول و ستون اول جای

دارد و a_{21} درایه‌ای است که سطر دوم و ستون اول را مشخص می‌کند.



در ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ هر یک از درایه‌ها را مشخص کنید.

$$a_{11} = 2 \quad a_{12} = 7 \quad a_{21} = 5 \quad a_{22} = 1$$

در ماتریس $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$ هر یک از درایه‌های $a_{۳۱}$, $a_{۳۲}$, $a_{۲۱}$, $a_{۱۲}$, $a_{۱۱}$ را مشخص کنید.

تساوی دو ماتریس

دو ماتریس مساوی‌اند اگر هم‌مرتبه باشند و علاوه بر آن درایه‌های دو ماتریس نظیر به نظیر با هم برابر باشند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -4 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -4 & 9 & 2 \\ 1 & 7 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 8 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

۱- مانند مثال‌های بالا شما هم سه مثال از تساوی و عدم تساوی دو ماتریس بنویسید.

۲- x و y را طوری بیابید که دو ماتریس زیر برابر باشند.

$$\begin{bmatrix} x+5 \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x-1 \\ 2+y \end{bmatrix}$$

۳- مقادیر x و y و z را در عبارات زیر به دست آورید.

$$\begin{bmatrix} 2x+7 & y-2 \\ 0 & 4z+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[2 \quad x-1 \quad y+4 \quad 5] = [2 \quad 3 \quad 4 \quad 5]$$

جمع دو ماتریس

به مثال میوه فروش باز می‌گردیم. مصرف میوه برحسب کیلوگرم در دو هفته‌ی متوالی و در روزهای شنبه و سه‌شنبه خانواده‌ای به صورت جدول‌های زیر است.

	پرتقال	سیب
شنبه	۸	۵
سه‌شنبه	۷	۴

هفته‌ی اول

	پرتقال	سیب
شنبه	۵	۴
سه‌شنبه	۳	۶

هفته‌ی دوم

که می‌توان آن‌ها را به شکل ماتریس نوشت.

$$\text{مصرف هفته‌ی اول } A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{مصرف هفته‌ی دوم } B_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

میزان مصرف میوه‌ی این خانواده در دو هفته مجموعاً عبارت خواهد بود از جمع دو ماتریس A و B:

$$A + B = \begin{array}{c} \text{شنبه} \\ \text{سه‌شنبه} \end{array} \begin{array}{cc} \text{پرتقال} & \text{سیب} \\ \begin{bmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{cc} \text{پرتقال} & \text{سیب} \\ \begin{bmatrix} 8+5 & 5+4 \\ 7+3 & 4+6 \end{bmatrix} \end{array}$$

دو ماتریس که دارای تعداد سطرهای برابر و تعداد ستون‌های برابر باشند را می‌توان با هم جمع کرد. به این صورت که درایه‌های نظیر به نظیر دو ماتریس با هم جمع می‌شوند.

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 11 & 6 \\ 0 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -7 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

به هر ماتریس مانند $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ که درایه‌های آن همگی صفر هستند، ماتریس صفر می‌گوییم و آن را با نماد $O_{m \times n}$ نشان می‌دهیم.

$$\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 1 & 9 \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 5 \\ -1 & -9 \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ماتریس $O_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ که ماتریسی با سه سطر و دو ستون است را نیز ماتریس صفر می‌نامند.

مانند جمع دو ماتریس، تفاضل دو ماتریس در صورتی که ماتریس‌ها هم مرتبه باشند، امکان‌پذیر است.

$$\begin{bmatrix} 2 & 11 & 6 \\ 4 & 3 & -1 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-1 & 11-2 & 6-0 \\ 4-2 & 3-3 & -1+1 \\ 5-3 & 9-1 & 7-6 \end{bmatrix}$$

ضرب عدد در ماتریس

حاصل ضرب عدد حقیقی k در ماتریس با مرتبه $m \times n$ ، ماتریسی با مرتبه $m \times n$ است که هریک از درایه‌های آن برابر حاصل ضرب عدد k در درایه نظیر در ماتریس اولیه است.

مثال

ماتریس $A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix}$ و $k = 2$ را در نظر بگیرید. ماتریس kA عبارت است از:

$$k \times A_{2 \times 3} = 2 \times \begin{bmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 5 & 2 \times 0 & 2 \times 2 \\ 2 \times 1 & 2 \times 4 & 2 \times (-7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 4 \\ 2 & 8 & -14 \end{bmatrix}$$

مثال

ماتریس $A_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 9 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماتریس $5A$ و $-3A$ را مشخص کنید.

قرینه‌ی ماتریس

قرینه‌ی ماتریس $A_{m \times n}$ ، ماتریس $(-1)A_{m \times n}$ است که مجموع آن‌ها ماتریس صفر $O_{m \times n}$ خواهد بود.

مثال

اگر $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix}$ باشد، قرینه‌ی ماتریس A عبارت است از:

$$(-1)A_{2 \times 2} = (-1) \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \times 5 & -1 \times 6 \\ -1 \times 2 & -1 \times 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -6 \\ -2 & -9 \end{bmatrix}$$

۱- در مثال فوق مجموع ماتریس A و ماتریس قرینه‌اش را به دست آورید.

۲- قرینه‌ی هریک از ماتریس‌های زیر را به دست آورید و سپس مجموع هر ماتریس با قرینه‌اش را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad D = [4 \ 2 \ 8] \quad H = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

۳- معادله‌های ماتریسی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} + A = \begin{bmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{bmatrix} \quad B + \begin{bmatrix} 2 & -1 & 9 \\ 7 & \circ & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{bmatrix}$$

الف) مرتبه‌ی ماتریس‌های B و A را مشخص کنید.

ب) درایه‌های ماتریس‌های B و A را معلوم کنید.

۱- ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ \circ & 1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

الف) حاصل عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$A+B, B+C, C+A$$

ب) عبارات زیر را محاسبه کنید.

$$2A, 3C, 2A+B, B-C$$

ج) آیا رابطه‌ی $A+B=B+A$ برقرار است؟

آیا رابطه‌ی $(A+B)+C=A+(B+C)$ برقرار است؟

آیا این رابطه‌ها برای هر سه ماتریس $A_{m \times n}$, $B_{m \times n}$, $C_{m \times n}$ برقرار است؟ مثال بزنید.

۲- قرینه‌ی ماتریس‌های داده شده را به دست آورید.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

۳- اگر $P = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}$ و $Q = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ -6 & 4 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس R را طوری بیابید که

$$P+Q+R = 0$$

۴- در رابطه‌ی زیر x و y را بیابید.

$$\begin{bmatrix} 2x - 3y \\ x + 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریس‌ها

	پرتقال	سیب
شنبه	۱	۲
سه‌شنبه	۲	۳

شخصی میوه‌ی موردنیاز خانواده‌اش را در روزهای شنبه و سه‌شنبه مطابق جدول مقابل تهیه کرده است.

اطلاعات جدول را به صورت ماتریس زیر نشان می‌دهیم.

$$\begin{matrix} & \text{پرتقال} & \text{سیب} \\ \text{شنبه} & \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \\ \text{سه‌شنبه} & \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

اگر قیمت پرتقال هر کیلو ۱۵۰۰ تومان و سیب هر کیلو ۱۰۰۰ تومان باشد در صورتی که بخواهیم قیمت کل میوه‌ای که شخص در روز شنبه پرداخته است را محاسبه کنیم می‌توانیم ماتریس سطری $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ را در ماتریس ستونی $\begin{bmatrix} 1500 \\ 1000 \end{bmatrix}$ که بردار قیمت هر کیلو میوه است ضرب کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1500 \\ 1000 \end{bmatrix} = (1 \times 1500) + (2 \times 1000) = 3500$$

و قیمت کل میوه برای روز سه‌شنبه به صورت زیر خواهد شد.

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1500 \\ 1000 \end{bmatrix} = (2 \times 1500) + (3 \times 1000) = 6000$$

اطلاعات فوق را می‌توان به صورت حاصل ضرب دو ماتریس زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1500 \\ 1000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3500 \\ 6000 \end{bmatrix}$$

اکنون اگر قیمت میوه‌ها در دو میوه‌فروشی متفاوت و به صورت زیر باشد:

	میوه فروشی اول	میوه فروشی دوم
قیمت هر کیلو پرتقال	۱۵۰۰	۱۰۰۰
قیمت هر کیلو سیب	۱۰۰۰	۹۰۰

برای به‌دست آوردن هزینه‌ی کل میوه در روزهای شنبه و سه‌شنبه و در صورت خرید از هر یک از دو میوه‌فروشی، لازم است دو ماتریس را در هم ضرب کنیم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1500 & 1000 \\ 1000 & 900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \times 1500 + 2 \times 1000 & 1 \times 1000 + 2 \times 900 \\ 2 \times 1500 + 3 \times 1000 & 2 \times 1000 + 3 \times 900 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3500 & 2800 \\ 6000 & 4700 \end{bmatrix}$$

برای آشنایی بیشتر با ضرب ماتریس‌ها به مثال‌های بعد توجه کنید.



ماتریس $A_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}$ و ماتریس $B_{2 \times 1} = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. حاصل ضرب آن‌ها

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 7 + 5 \times 3 \\ 1 \times 7 + 9 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 34 \end{bmatrix}$$

به صورت زیر است :

توجه کنید که تعداد درایه‌های سطر اول ماتریس A با تعداد درایه‌های ستون اول ماتریس B برابر است. همین‌طور در سطر دوم ماتریس A و ستون اول ماتریس B تعداد درایه‌ها برابرند.

اکنون ماتریس $C_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$ و ماتریس A در مثال قبل را در نظر بگیرید. حاصل ضرب

$A_{2 \times 2} \times C_{2 \times 2}$ به صورت زیر خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 7 + 5 \times 5 & 2 \times 2 + 5 \times 3 \\ 1 \times 7 + 9 \times 5 & 1 \times 2 + 9 \times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 39 & 19 \\ 52 & 29 \end{bmatrix}$$



دو ماتریس $D = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

- ۱- مرتبه‌ی ماتریس‌های فوق را بنویسید.
- ۲- حاصل ضرب دو ماتریس را به دست آورید.

$$A_{2 \times 2} \times D_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 9 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \end{bmatrix} =$$

۳- آیا حاصل ضرب $D_{2 \times 3} \times A_{2 \times 2}$ انجام پذیر است؟ چرا؟

حاصل ضرب دو ماتریس در صورتی امکان پذیر است که تعداد ستون‌های اولی با تعداد سطرهای دومی برابر باشند.

۱- اگر $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ باشد،

$A \times B$ ، $C \times B$ را محاسبه کنید.

۲- اگر $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، $A \times B$ ، $B \times A$ را محاسبه کنید.

نشان دهید: $A \times B \neq B \times A$

ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. حاصل ضرب

$A \times B$ ، $B \times A$ را به دست آورید.

ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ را ماتریس واحد یا یکه می‌نامیم و آن را با $I_{2 \times 2}$ نشان می‌دهیم.

حاصل ضرب ماتریس $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$ را در $I_{2 \times 2}$ بیابید. آیا $CI = IC$ است؟

برای دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه‌ی A و B در صورتی که $AB = I$ باشد، ماتریس B را ماتریس وارون ماتریس A می‌نامیم و آن را با نماد A^{-1} نشان می‌دهیم.

در فعالیت بالا ماتریس B ماتریس وارون ماتریس A است. $B = A^{-1}$

$A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

ماتریس‌های A و B و C را در نظر بگیرید.

$C = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

کدام یک از ماتریس‌ها، وارون ماتریس A است؟

حل دستگاه دو معادله دو مجهول با استفاده از ماتریس

همان طور که می‌دانید دستگاه زیر مثالی از یک دستگاه دو معادله دو مجهولی است.

$$\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -x + y = 4 \end{cases}$$

می‌توان دستگاه فوق را با استفاده از تساوی ماتریس‌ها به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} 2x - y \\ -x + y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

با توجه به ضرب ماتریس‌ها، ماتریس سمت چپ را می‌توان به صورت ضرب دو ماتریس نوشت:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

اگر در رابطه‌ی فوق $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$ ، $X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ، $C = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$ باشد، می‌توان رابطه‌ی

$$AX=C$$
 ماتریسی رو برو را نوشت:

با راه‌حل معادله‌ی $3x = 7$ آشنا هستید. یک بار دیگر آن را مرور می‌کنیم.

$$3x = 7$$

$$\left(\text{عدد } \frac{1}{3} \text{ وارون عدد } 3 \text{ است.} \right) \quad \frac{1}{3} \times 3x = \frac{1}{3} \times 7$$

$$\left(\text{عدد } 1 \text{ عضو بی‌اثر عمل ضرب اعداد است.} \right) \quad 1x = \frac{7}{3}$$

$$x = \frac{7}{3}$$

اکنون به نظر شما برای حل معادله‌ی ماتریس $AX=C$ به چه چیزی احتیاج داریم؟



ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و ماتریس $B = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید.

حاصل ضرب دو ماتریس را به دست آورید. چه نتیجه‌ای از این حاصل ضرب می‌گیرید؟

ماتریس B وارون ماتریس A می‌باشد و مقدار $ad - bc$ را دترمینان ماتریس A می‌نامیم.



وارون ماتریس $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ را به دست آورید.

اگر A^{-1} را وارون ماتریس A بنامیم داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{3+2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$



۱- به نظر شما شرط وارون پذیری ماتریس 2×2 مانند A چیست؟

۲- دستگاه $\begin{cases} 2x - y = 6 \\ -x + y = 4 \end{cases}$ را حل کنید.



۱- دترمینان هر یک از ماتریس‌های زیر را محاسبه کنید.

$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ و $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

۲- وارون هر یک از ماتریس‌های زیر را پیدا کنید.

$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

۳- کدام یک از عبارات‌های زیر برقرار نیست؟

الف) $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$ (فرض کنیم A و B و AB وارون پذیر باشند)

ب) $(A+B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$ (فرض کنیم A و B و $A+B$ وارون پذیر باشند)

۴- مثالی از یک ماتریس 2×2 بزنید که وارون آن با خودش برابر باشد.

۵- اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ در این صورت $(A^{-1})^{-1}$ را پیدا کنید.

۶- مقدار a را به گونه‌ای پیدا کنید که ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & a+1 \\ a-2 & 4 \end{bmatrix}$ وارون پذیر نباشد.

۷- در هر یک از دستگاه‌های دو معادله دو مجهولی زیر، ماتریس ضرایب را نوشته و با استفاده از ماتریس معکوس ضرایب جواب دستگاه را به دست آورید.

$$\text{الف) } \begin{cases} 3x - y = 4 \\ x + 2y = 3 \end{cases} \quad \text{ب) } \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 6x + 4y = 1 \end{cases} \quad \text{ج) } \begin{cases} -x + y = 7 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases}$$

۸- رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} x+y \\ x-y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix}$ مفروض است:

ماتریس سمت چپ را به صورت حاصل ضرب ۲ ماتریس بنویسید و مقادیر x و y را به دست آورید.

۹- معادلات زیر را با توجه به محاسبات در ماتریس‌های مربعی مرتبه‌ی 2×2 حل کنید.

$$\text{الف) } X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{ب) } \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} + 2X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$