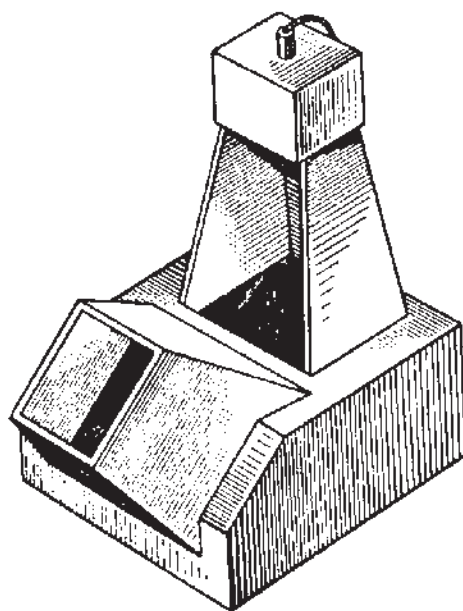


فصل چهارم



آرامگاه حکیم عمر خیام، نیشابور



هر جسم از اجتماع چند صفحه با شرایط مختلف به وجود می آید.

صفحه

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود:

- ۱- صفحه و چگونگی نمایش آن، در هندسه ترسیمی را بیان کند.
- ۲- وضعیت صفحات مختلف را نسبت به صفحات تصویر تعیین نماید.

۴-۱- صفحه و چگونگی نمایش آن در هندسه ترسیمی

تعریف - صفحه، سطحی است تخت، نامحدود که فضا را به دو ناحیه تقسیم می‌کند.

سطح می‌تواند به صورت تخت یا منحنی باشد. معمولاً منظور از اصطلاح صفحه، یک سطح تخت می‌باشد.

نمایش صفحه به روش‌های مختلفی ممکن است، که برخی از آنها عبارتند از:

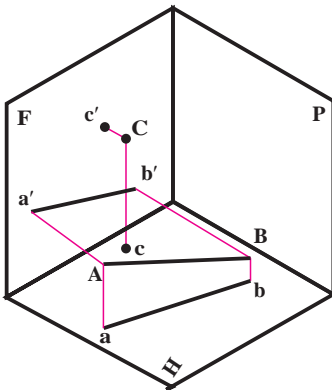
۴-۱-۱- سه نقطه غیر واقع بر یک راستا: (شکل‌های ۴-۱ و ۴-۲).

۴-۱-۲- خط و یک نقطه: (شکل‌های ۴-۳ و ۴-۴).

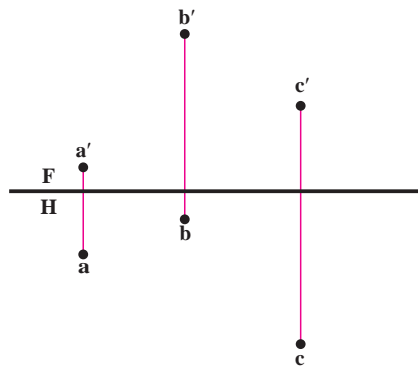
۴-۱-۳- دو خط متوازی: (شکل‌های ۴-۵ و ۴-۶).

۴-۱-۴- دو خط متقاطع: (شکل‌های ۴-۷ و ۴-۸).

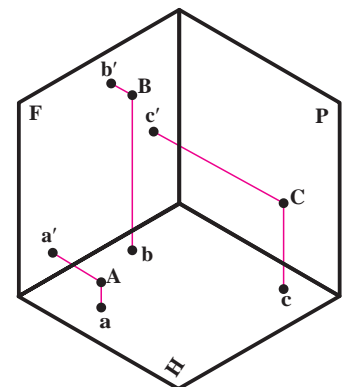
که در هندسه ترسیمی نیز همچنان به همان شکل‌ها نشان داده می‌شوند ولی متداول‌ترین صورت معرفی صفحه، نمایش با محدوده‌ای از آن مانند مثلث، مستطیل، ... خواهد بود.



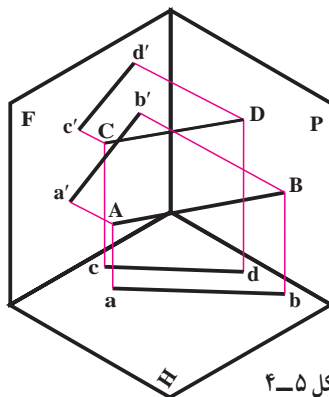
شکل ۴-۳



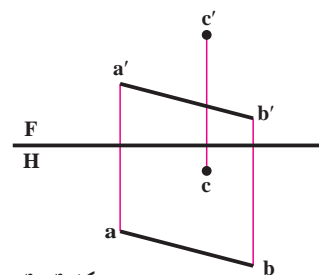
شکل ۴-۲



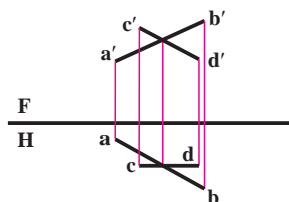
شکل ۴-۱



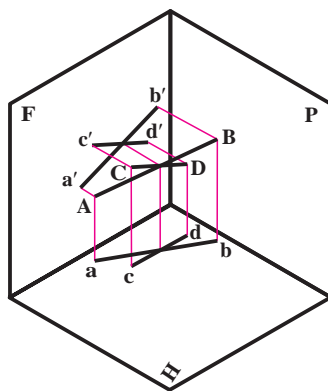
شکل ۴-۵



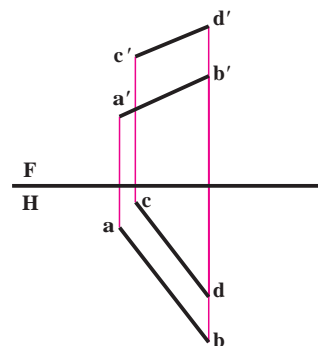
شکل ۴-۴



شکل ۸-۴



شکل ۷-۴



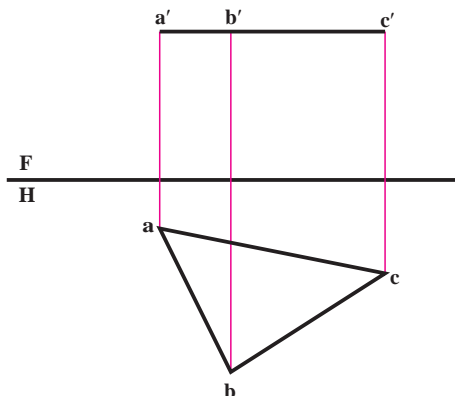
شکل ۶-۴

۴-۲- بررسی وضع صفحه نسبت به صفحات تصویر

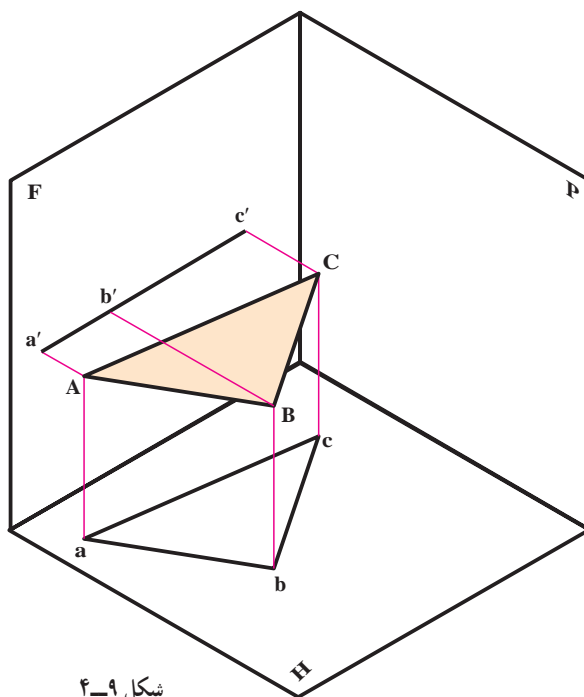
در اینجا صفحه را با یک مثلث نمایش می‌دهیم. این صفحه می‌تواند وضعیت‌های گوناگون نسبت به F و H داشته باشد. می‌خواهیم این حالات را بررسی کنیم. در اینجا هم می‌توان صفحات را به سه گروه خاص، نیمه خاص و غیر خاص تقسیم کرد. ویژگی مهم صفحات گروه اول یعنی افقی، جبهی و نیمرخ موازی بودن آنها با یکی از صفحات تصویر است. ویژگی مهم صفحات گروه دوم یعنی قائم و منتصب و مواجه، عمود بودنشان بر یکی از صفحات تصویر است. سرانجام صفحه غیر خاص هیچ یک از این ویژگی‌ها را ندارد.

۴-۲-۱- صفحه افقی: این صفحه به موازات صفحه افقی تصویر است (شکل ۴-۹).

همان‌گونه که مشاهده می‌شود، ارتفاع همه نقاط صفحه برابر است. بنابراین تصویر روبه روی صفحه ABC به صورت خطی موازی خط زمین در می‌آید ($a'b'c'$) و چون صفحه ABC با H موازی است، تصویر افقی یعنی abc از نظر شکل و اندازه دقیقاً با صفحه فضایی ABC برابر است. صفحه افقی در نقشه به شکل ۴-۱۰ نشان داده می‌شود.

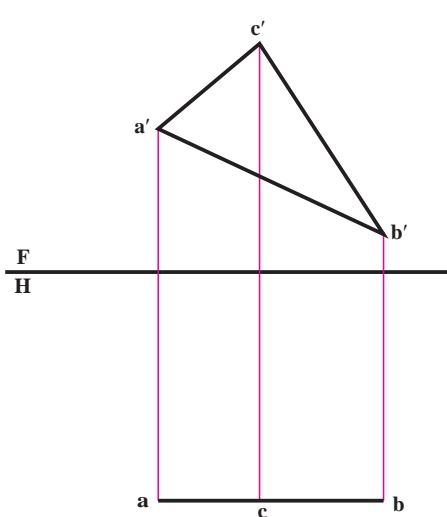


شکل ۱۰-۴

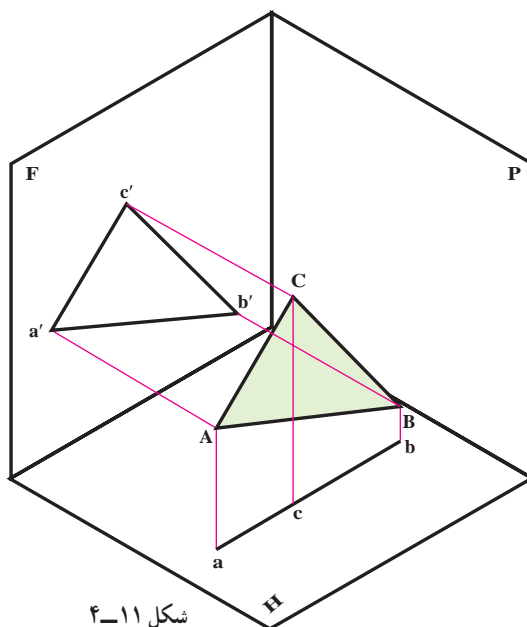


شکل ۹-۴

۲-۲-۴- صفحه جبهی: این صفحه به موازات F است (شکل ۴-۱۱). همان گونه که دیده می شود، بعد همه نقاط صفحه برابر است. بنابراین تصویر افقی صفحه ABC به صورت خطی موازی خط زمین در می آید (\overline{abc}) و چون صفحه ABC با F موازی است، تصویر روبه رو یعنی $a'b'c'$ از نظر شکل و اندازه دقیقاً با صفحه فضایی ABC برابر است. صفحه جبهی در نقشه به شکل ۴-۱۲ نشان داده می شود.



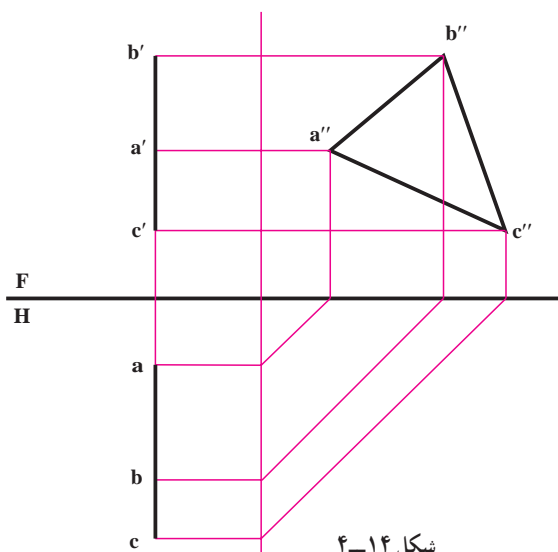
شکل ۴-۱۲



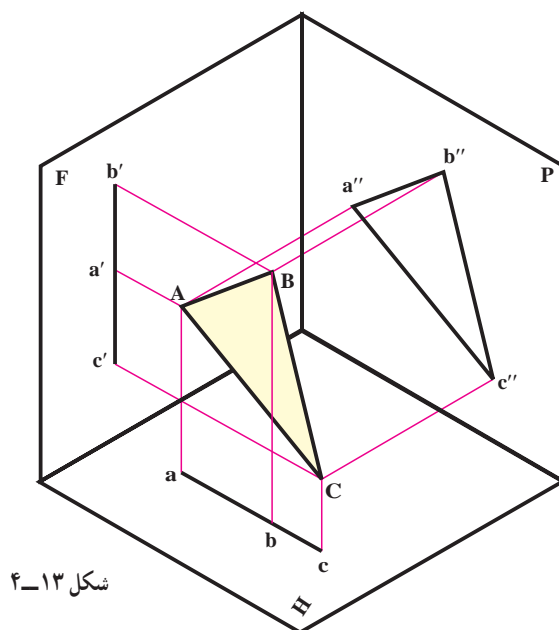
شکل ۴-۱۱

پیش از آنکه از صفحات دیگر نام برده شود، یادآوری می شود که دو صفحه افقی و روبه رو برای ویژگی هایی که دارند، از صفحات بسیار مهم هستند، که در حل مسائل گوناگون، کاربرد فراوان دارند.

۳-۲-۴- صفحه نیمرخ: صفحه ای است عمود بر خط زمین یا موازی با P (شکل ۴-۱۳). به عبارت دیگر بر دو صفحه تصویر روبه رو و افقی عمود می باشد. همان طوری که در شکل دیده می شود، تصویر روبه رو و افقی، هر دو خطی است، در راستای یک خط رابط و عمود بر خط زمین. نقشه این صفحه به شکل ۴-۱۴ در می آید. نمای نیمرخ و یا تصویر جانبی به شکل و اندازه حقیقی می باشد.



شکل ۴-۱۴

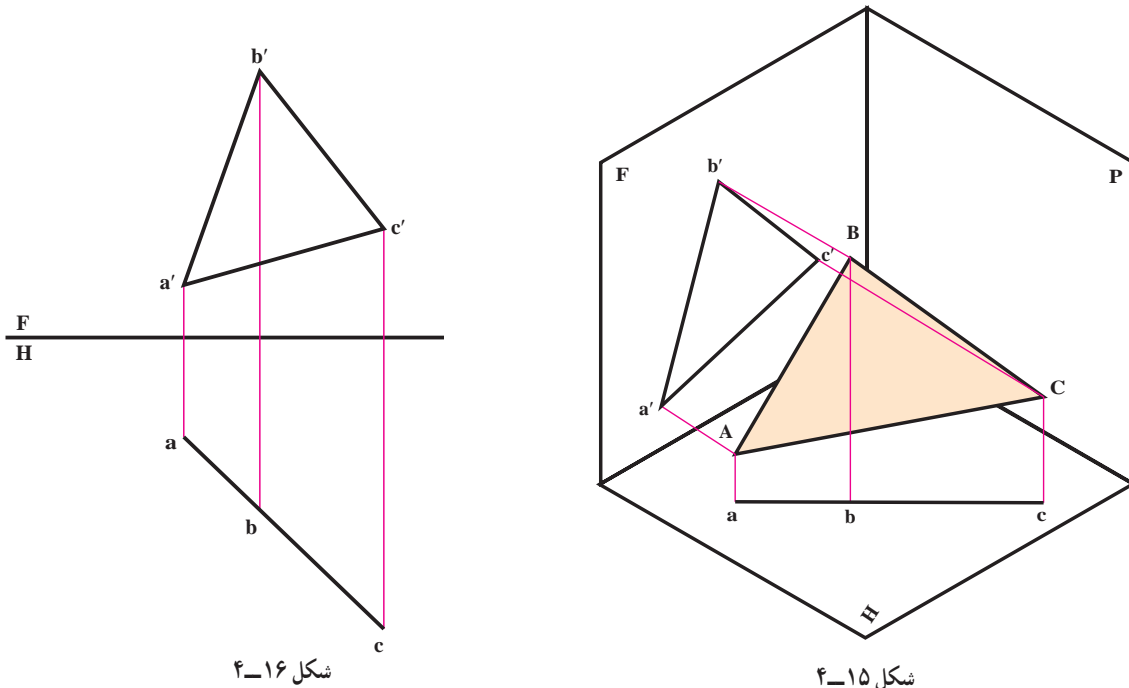


شکل ۴-۱۳

۴-۳- گروه دوم صفحه‌های نیمه‌خاص هستند با ویژگی عمود بودنشان بر یکی از صفحات تصویر.

۴-۳-۱- صفحه قائم: صفحه‌ای است عمود بر H (شکل ۴-۱۵)، بنابراین تصویر افقی آن یک خط خواهد شد و زاویه‌ای که تصویر افقی

با خط زمین می‌سازد، همان زاویه‌ای خواهد بود که صفحه فضایی با صفحه روبه‌روی تصویر دارد و در نقشه به شکل ۴-۱۶ در خواهد آمد.



شکل ۴-۱۶

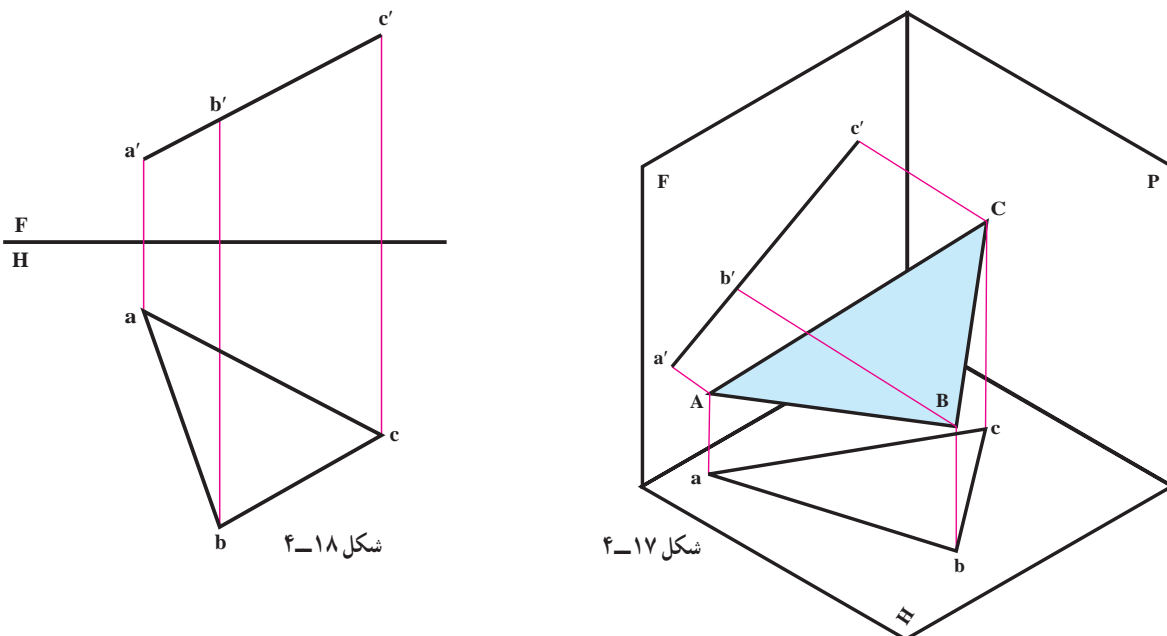
همان‌طور که دیده می‌شود، تصویر روبه‌رو شکلی است کوچکتر از اندازه حقیقی. ارزش صفحه قائم، خط شدن آن در تصویر

افقی است.

۴-۳-۲- صفحه منتصب: صفحه‌ای است، عمود بر F ، (شکل ۴-۱۷). بنابراین تصویر روبه‌روی آن یک خط است و

زاویه‌ای که این تصویر با خط زمین می‌سازد، زاویه‌ای خواهد بود، که صفحه فضایی با H دارد، و در نقشه به شکل ۴-۱۸ در خواهد آمد.

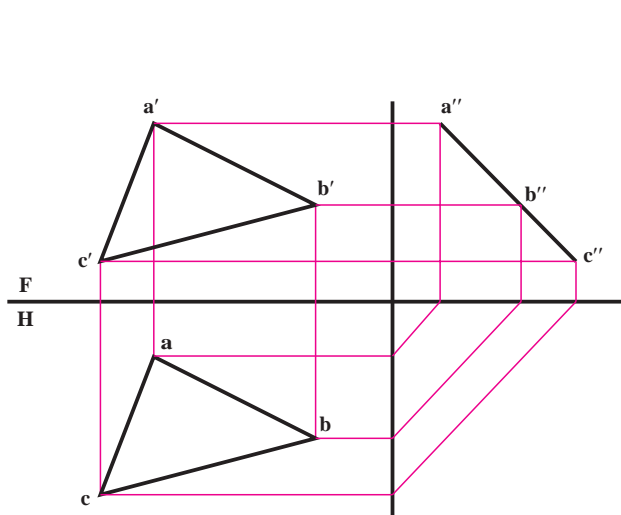
تصویر افقی، شکلی است کوچکتر از اندازه حقیقی. خاصیت صفحه منتصب، خط شدن آن در تصویر روبه‌رو است.



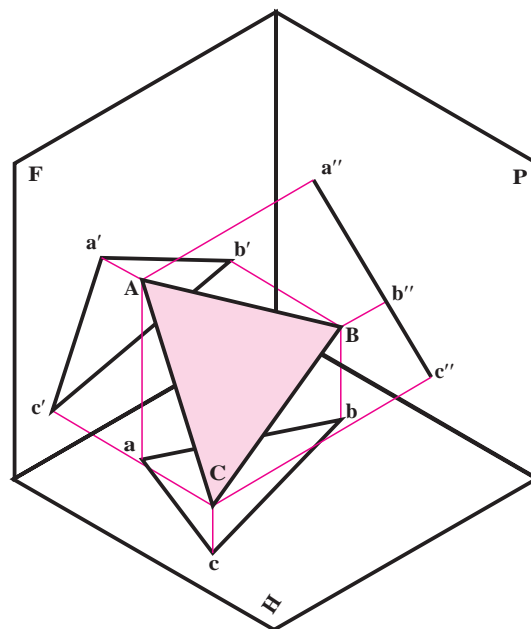
شکل ۴-۱۸

شکل ۴-۱۷

۳-۳-۴- صفحه مواجه : صفحه ای است عمود بر صفحه نیمرخ و یا موازی با خط زمین (شکل ۴-۱۹). پس نمای نیمرخ آن یک خط است و تصاویر افقی و روبه روی آن کوچکتر از اندازه حقیقی. پس نقشه آن به شکل ۴-۲۰ خواهد بود.

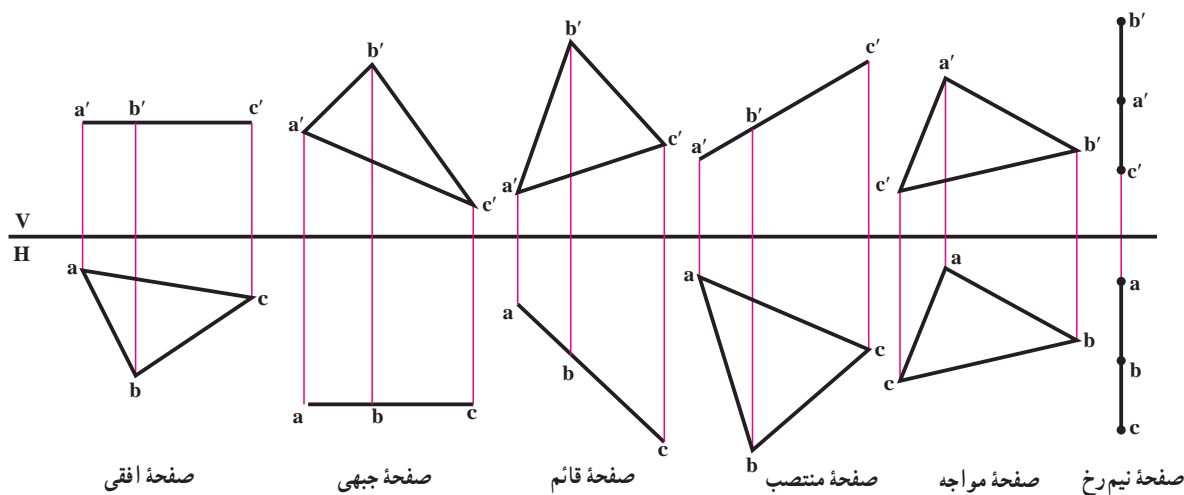


شکل ۴-۲۰



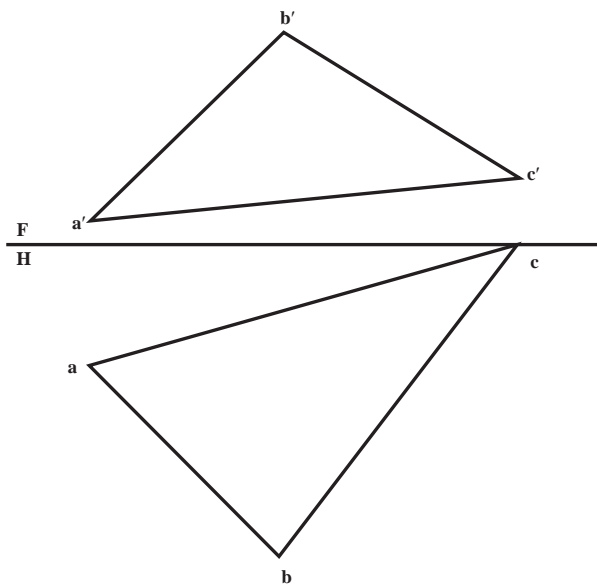
شکل ۴-۱۹

به شکل ۴-۲۱ نگاه کنید. هر شش صفحه یاد شده را برای سنجیدن می بینید. گروه اول عبارتند از افقی و جبهی و نیمرخ که صفحات خاص هستند با ویژگی موازی بودن با H یا F یا P. گروه دوم عبارتند از منتصب، قائم و مواجه، با ویژگی عمود بودن بر F یا H یا P. دقت کنید که صفحات افقی و جبهی هر کدام در یک تصویر اندازه حقیقی دارند. پس مهم ترین صفحات خواهند بود.



شکل ۴-۲۱

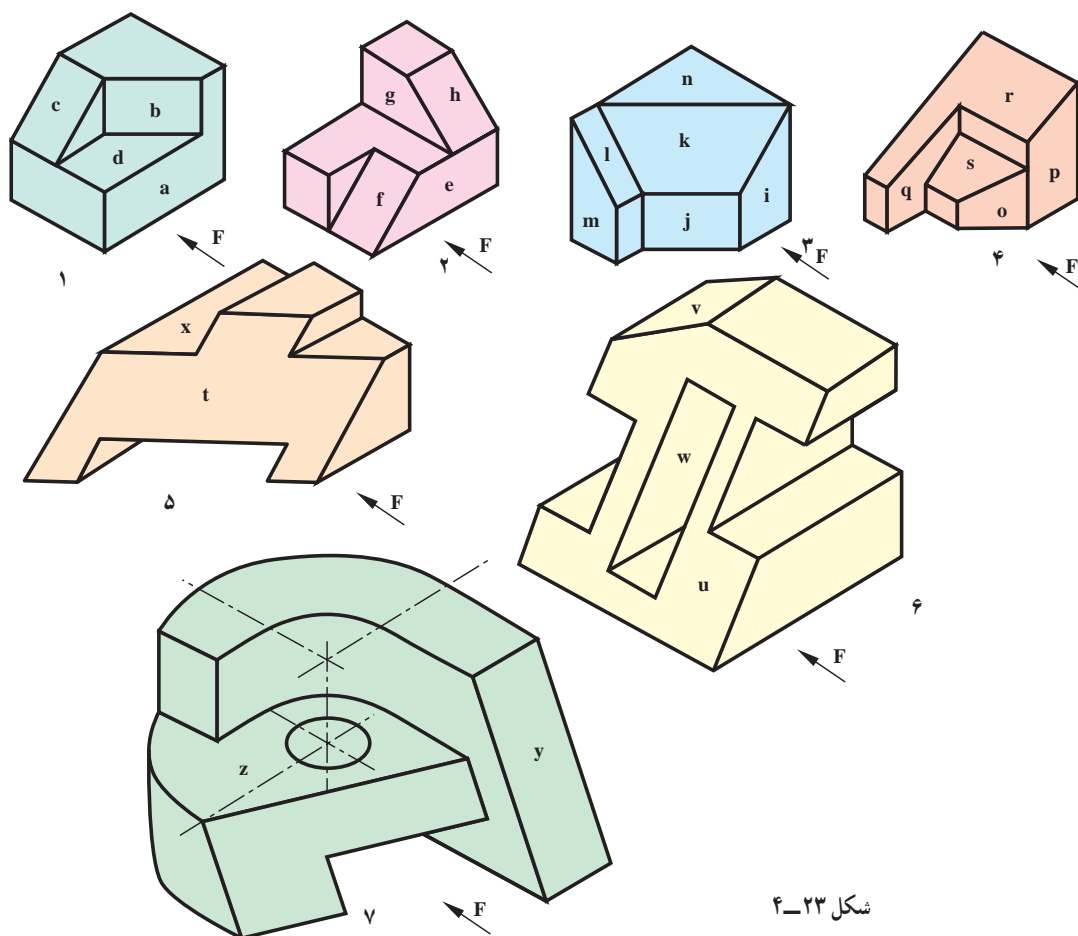
دو صفحه قائم و منتصب، در یک تصویر به صورت خط درمی آیند. این دو صفحه بعد از صفحه های افقی و جبهی، صفحات مهمی هستند. زیرا فقط با یک تغییر به اندازه حقیقی تصویر خواهند شد (که بعداً بررسی می شود).
 صفحه مواجه تنها خاصیتی که دارد، تبدیل شدنش به خط در تصویر نیمرخ است.
 صفحه نیمرخ نیز در تصویر جانبی، اندازه واقعی خواهد داشت.
۴-۲-۴ صفحه غیر خاص: این صفحه ویژگی معینی ندارد یعنی نه با صفحات تصویر موازی و نه بر آنها عمود است. پس در هیچ یک از تصاویر اندازه حقیقی نخواهد داشت و به صورت یک خط نیز دیده نخواهد شد (شکل ۴-۲۲).



شکل ۴-۲۲

- ۱- مطلوب است، نمایش یک صفحه افقی، با دو خط متقاطع AB و CD، که فاصله نقطه برخورد از صفحه افقی تصویر برابر 20° میلی متر باشد. (سایر مشخصات دلخواه)
 - ۲- مطلوب است، نمایش یک صفحه جبهی، با دو خط متقاطع AB و CD، که فاصله نقطه تقاطع از F برابر 15° میلی متر باشد. (سایر مشخصات دلخواه)
 - ۳- مطلوب است، نمایش صفحه افقی دلخواهی، با دو خط موازی AB و CD.
 - ۴- مطلوب است، نمایش صفحه جبهی دلخواهی، با دو خط موازی AB و CD.
 - ۵- مطلوب است، نمایش یک صفحه قائم، با دو خط متقاطع که زاویه اش با صفحه روبه روی تصویر برابر 45° باشد.
 - ۶- مطلوب است، نمایش صفحه منتصب دلخواهی، با دو خط متقاطع، که زاویه اش با صفحه افقی تصویر برابر 30° باشد.
 - ۷- مطلوب است، نمایش صفحه مواجی، با دو خط متقاطع AB و CD که زاویه اش با صفحه افقی تصویر برابر 30° باشد.
 - ۸- مطلوب است، نمایش صفحه مواجی، با دو خط موازی AB و CD که زاویه اش با صفحه روبه روی تصویر برابر 45° باشد.
 - ۹- مطلوب است، نمایش صفحه نیمرخ، با دو خط متقاطع AB و CD.
 - ۱۰- صفحه ای را نمایش دهید که از نقطه M گذشته و شامل خط افقی AB باشد.
 - ۱۱- از نقطه N صفحه ای رسم کنید که شامل خط غیر خاص AB باشد.
 - ۱۲- تعیین کنید در هر یک از ۷ صفحه معرفی شده، چه نوع خطوطی موجود است؟ راهنمایی: می توان برای این کار یک جدول تنظیم کرد.
 - ۱۳- مطلوب است، نمایش یک صفحه جبهی، با سه نقطه A و B و C به گونه ای که داشته باشیم $A(30^\circ, 35)$ ، ارتفاع B برابر 10° با فاصله 40° از A و C با فاصله 32° از A و با ارتفاع 17° B سمت راست و C سمت چپ A، اندازه حقیقی این سطح چند میلی متر مربع است؟
 - ۱۴- یک صفحه افقی به شکل مثلث متساوی الاضلاع ABC را نمایش دهید به شرطی که داشته باشیم $A(20^\circ, 15)$ و $\overline{AB} = 28$ اگر:
- الف - دیگر شرایط دلخواه باشد.
 - ب - زاویه AB با F، 60° درجه باشد. (بحث در تعداد جواب ها)
- ۱۵- مطلوب است، نمایش یک صفحه جبهی به شکل دایره به قطر 40° میلی متر، در صورتی که فاصله مرکز آن از F برابر 10° میلی متر باشد. (سایر شرایط دلخواه، مسئله چند جواب دارد؟)
 - ۱۶- مطلوب است، نمایش صفحه قائمی به شکل مربع به ضلع 30° میلی متر، با زاویه نسبت به F، در صورتی که فاصله محل برخورد دو قطر مربع از صفحه های روبه رو و افقی تصویر به ترتیب برابر 20° میلی متر و 50° میلی متر باشد. یک ضلع مربع هم افقی است.

۱۷- نوع صفحات را در شکل ۲۳-۴ مشخص نمایید. (دید از جلو در همه اجسام مشابه است)



شکل ۲۳-۴

۱۸- قطعه ای طراحی کنید (به صورت ایزومتریک) که شامل هفت گونه صفحه یاد شده باشد، سپس هر صفحه را مطابق رنگ های داده شده در متن رنگ کنید. (صفحه دلخواه به رنگ مشکی!)

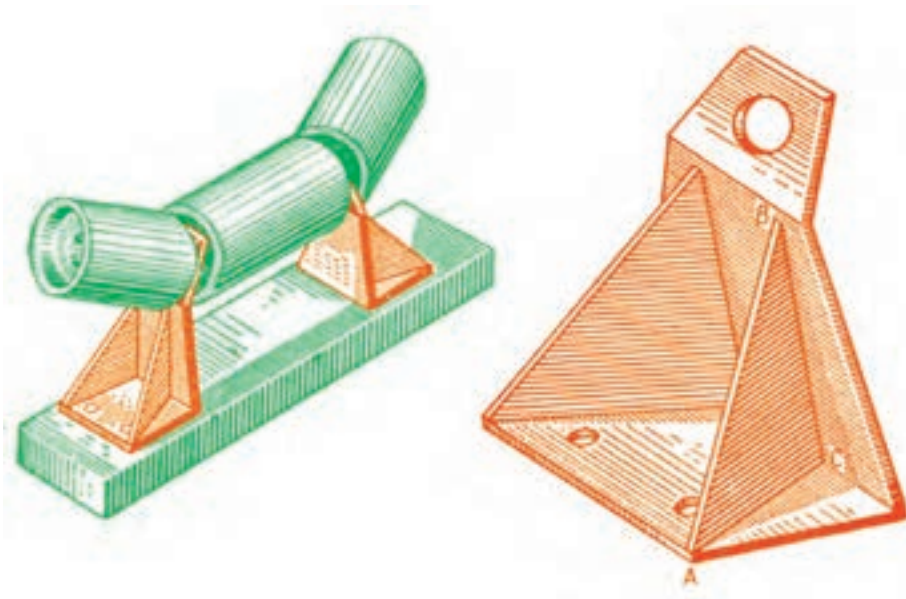
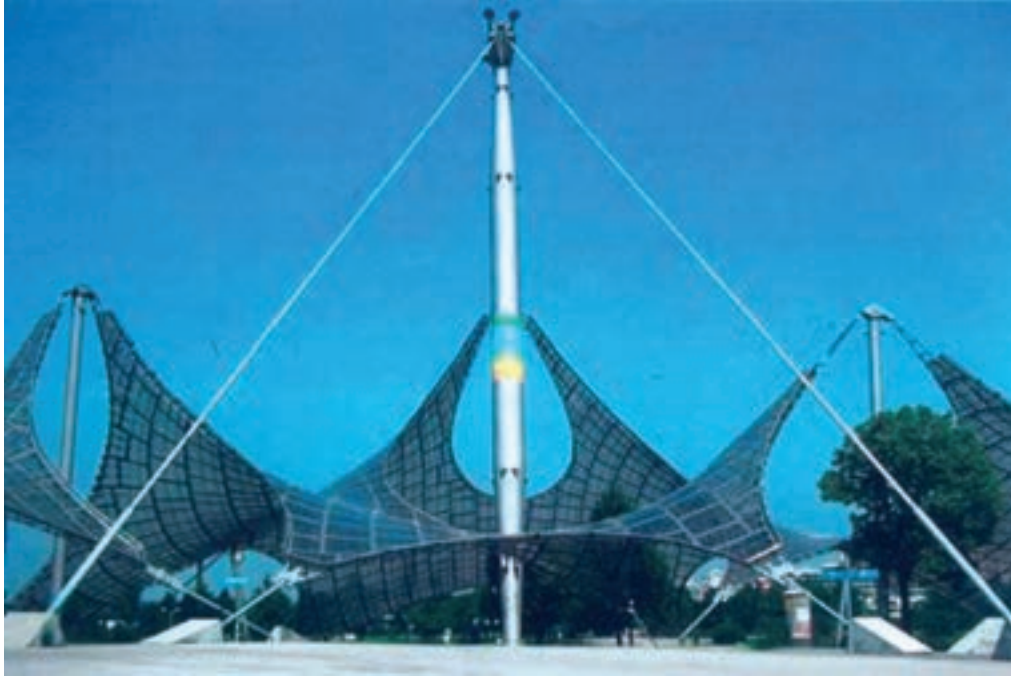
برای مطالعه

۱- از صفحه ای به شکل متوازی الاضلاع سه گوشه $A(0, 15, 60)$, $B(20, 55, 20)$ و $C(100, 45, 0)$ را داریم. صفحه را کامل کنید.

۲- بررسی کنید که آیا چهار نقطه $A(10, 30, 40)$, $B(50, 50, 50)$, $C(100, 44, 5)$ و $D(80, 0, 40)$ در یک صفحه هستند یا نه.

۳- سه خط افقی دلخواه در صفحه ABC در نظر بگیرید. آیا می توانید با توجه به آنها به یک نتیجه مهم برسید؟
داریم: $A(60, 20, 30)$, $B(0, 48, 40)$ و $C(40, 40, 10)$

۴- ادامه صفحه داده شده در مسئله بالا (ABC) را در نظر می گیریم، آیا می توان خط برخورد آن با H را مشخص کرد؟



نقشه‌ای ارزشمند است که اندازه حقیقی خط و صفحه را معرفی کند.

تغییر صفحه

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود:

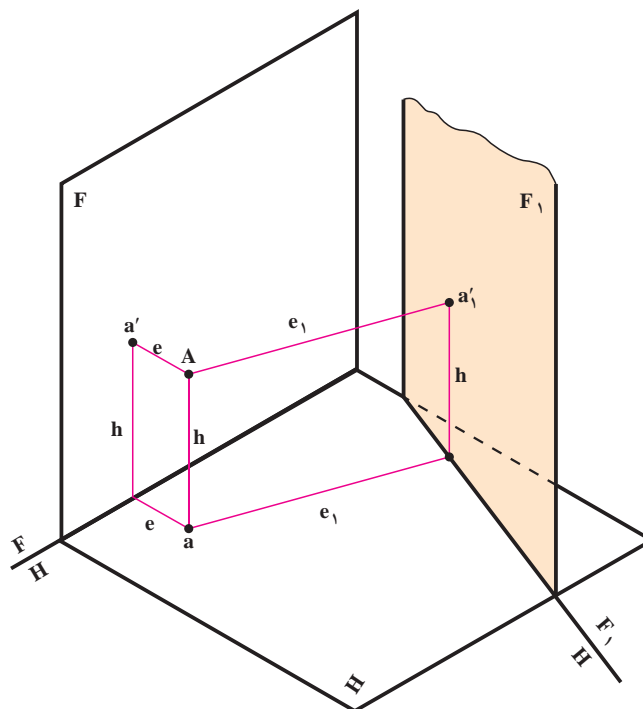
- ۱- چگونگی استفاده از تغییر صفحه برای تعیین اندازه حقیقی را بیان کند.
- ۲- اندازه حقیقی صفحه را به دست آورد.

۱-۵- اندازه حقیقی صفحه

گفته شد که صفحاتی مثل منتصب یا قائم در نماهای خود به اندازه حقیقی دیده نمی‌شوند. اما با توجه به اینکه برای ساختن قطعات نیاز به اندازه‌های حقیقی داریم باید بتوانیم اندازه حقیقی آنها را معین کنیم. صفحات F و H معمولی این کار را انجام نمی‌دهند. برای نمونه در صفحه منتصب، تصویر افقی اندازه حقیقی ندارد، چرا؟

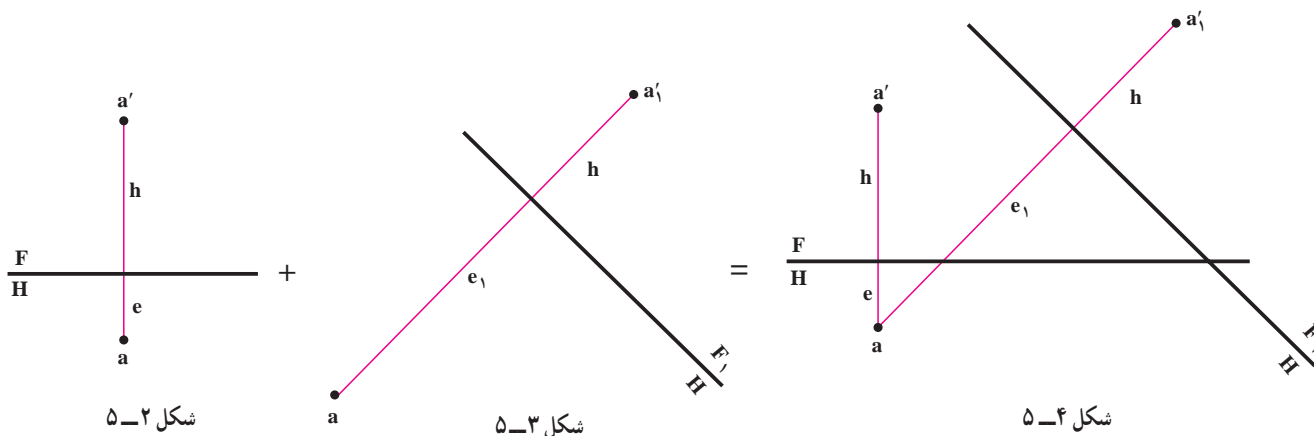
تعریف: تغییر صفحه عبارت است از تغییر دادن یکی از صفحات تصویر یا هر دوی آنها. این یک روش کار برای حل برخی مسایل در هندسه ترسیمی است که ما کاربرد آن را در تعیین اندازه حقیقی صفحات قائم، منتصب و مواجه بررسی می‌کنیم.

با توجه به شکل ۱-۵ صفحات تصویر H و F و نقطه A را با ارتفاع h و بعد e در نظر می‌گیریم. اکنون اگر با ثابت بودن H ، به جای F از صفحه دیگری مثل F_1 استفاده کنیم، فرجه جدید V_1H را خواهیم داشت. (فراموش نشود که همیشه صفحات تصویر بر هم عمودند!)

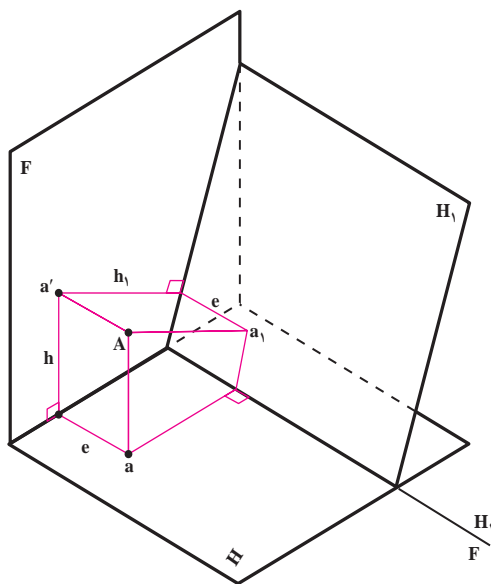


شکل ۱-۵

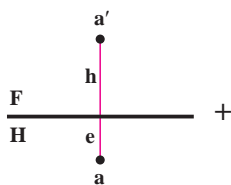
تصاویر A را در این فرجه تعیین می‌کنیم. می‌بینیم که ارتفاع نقطه همان ارتفاع پیشین است. تنها بعد نقطه به جای e تبدیل به e_1 می‌شود. در نتیجه اگر V برداشته شود، نمای روبه‌رو از بین می‌رود. ولی مقدار ارتفاع ثابت باقی می‌ماند. و از طرفی تصویر افقی نیز همچنان در اختیار است. پس کافی است، از تصویر افقی خط رابطی رسم کنیم و مقدار ارتفاع را که تغییری نکرده است در راستای خط رابط نسبت به خط زمین جدید جدا کنیم. بدین طریق به نمای روبه‌روی جدید خواهیم رسید. حال نقشه نقطه را یک بار در صفحات تصویر H و F، و بار دیگر در صفحات تصویر F_1 و H بررسی می‌کنیم (شکل‌های ۲-۵ تا ۴-۵). توجه کنید که محل رسم F_1H دلخواه است.



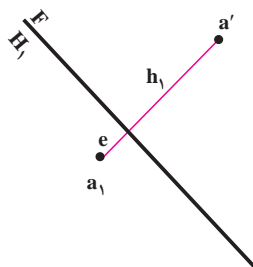
و چنانچه صفحه افقی تصویر تغییر داده شود (شکل ۵-۵)، به دنبال آن ارتفاع نقطه تغییر می‌کند. چون صفحه افقی تصویر تغییر کرده است. ولی تصویر روبه‌روی نقطه، و بعد آن، تغییر نمی‌کند. با داشتن همین دو جزء می‌توان تصویر افقی جدید را مشخص کرد. کافی است، از تصویر روبه‌رو خط رابطی رسم شود و اندازه e نقطه روی خط رابط جدا شود. (شکل‌های ۶-۵ الی ۸-۵).



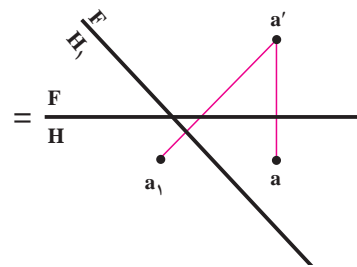
شکل ۵-۵



شکل ۸-۵



شکل ۷-۵

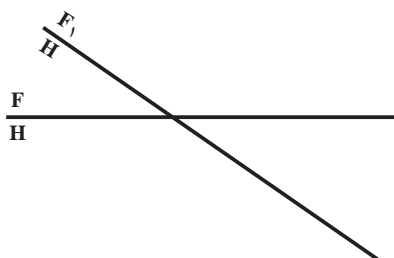


شکل ۶-۵

از آنچه گفته شد، چنین نتیجه گیری می کنیم، که هر صفحه تصویر با دو جزء از چهار جزء (بعد، تصویر روبه رو، ارتفاع، تصویر افقی) ارتباط دارد، که با تغییر هر کدام از صفحات تصویر، دو جزء مرتبط نیز از بین می روند. اما هنوز دو جزء دیگر باقی است که، به کمک همین دو جزء آنچه را که حذف شده است، می توان به دست آورد. خلاصه آنچه گفته شد در جدول ۱-۵ دیده می شود.

جدول ۱-۵

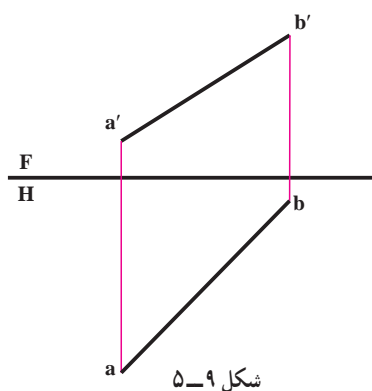
متغیر	ثابت	
تصویر روبه رو و e ها	تصویر افقی و h ها	$F \xrightarrow{\text{به}} F_1$
تصویر افقی و h ها	تصویر روبه رو و e ها	$H \xrightarrow{\text{به}} H_1$



می دانیم که خط زمین $\frac{F}{H}$ به معنای دو صفحه تصویر روبه رو و افقی است. اینک اگر برای حل مسئله مجبور به تغییر صفحه روبه رو شویم، خط زمین قبلی همچنان باقی می ماند. خط زمین جدید یعنی $\frac{F_1}{H}$ در موقعیت تازه نسبت به خط زمین قدیم رسم می شود. و این تغییر موقعیت را هنگام حل مسئله باید به درستی تشخیص داد و رسم کرد. (محل F_1H دلخواه است.)

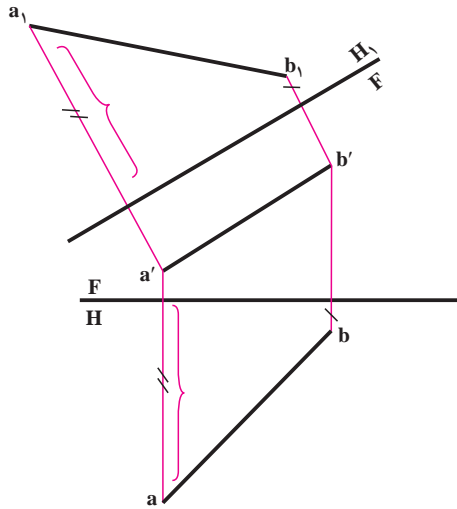
۲-۵- تعیین اندازه حقیقی خط دلخواه

اندازه حقیقی خط دلخواه را می توان با یک تغییر صفحه به دست آورد. می خواهیم اندازه حقیقی خط غیر خاص AB را که در شکل ۹-۵ نمایش داده شده است، به کمک تغییر صفحه پیدا کنیم.

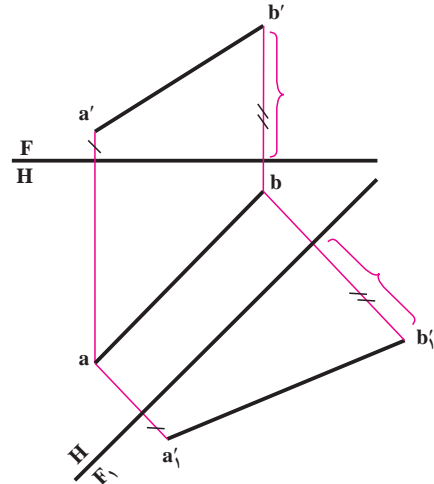


شکل ۹-۵

حل : به شکل ۵-۱۰ توجه کنید. در اینجا F_1H موازی با ab رسم شده است (تغییر صفحه روبرو)، پس خط ما به یک خط جبهی تبدیل شده و اندازه حقیقی آن $a_1'b_1'$ خواهد بود. در شکل ۵-۱۱ خط زمین FH_1 موازی با $a'b'$ رسم شده است که تغییر صفحه افقی و اندازه حقیقی خط، a_1b_1 است. در پایان افزوده می شود که ممکن است به دلایلی بخواهیم یک خط جبهی را به قائم و یا یک خط افقی را به یک منتصب تبدیل کنیم. در این صورت به ترتیب تغییر صفحه افقی و یا عمودی لازم خواهد بود.



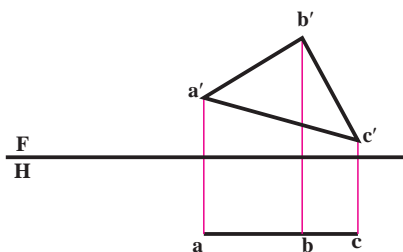
شکل ۵-۱۱



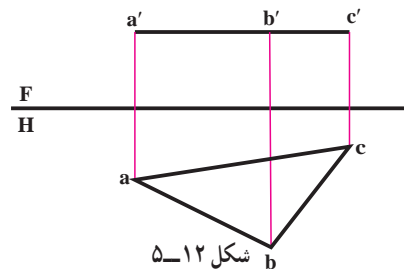
شکل ۵-۱۰

۵-۳- تعیین اندازه حقیقی صفحه

با توجه به نماهای صفحه ها، تنها دو صفحه افقی، در نمای از بالا (شکل ۵-۱۲) و جبهی، در نمای از جلو (شکل ۵-۱۳) دارای اندازه حقیقی می باشند.
برای صفحات قائم و منتصب با یک تغییر صفحه می توان به اندازه حقیقی رسید.



شکل ۵-۱۳

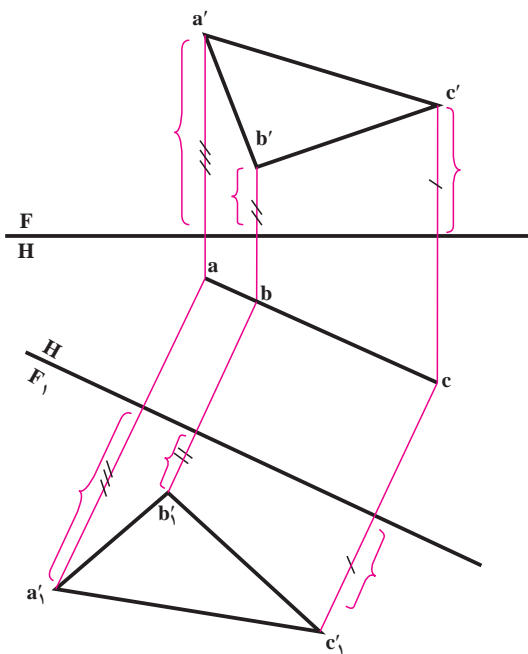


شکل ۵-۱۲

۵-۳-۱- تعیین اندازه حقیقی صفحه قائم - برای

صفحه قائم که تصویر افقی آن خط می باشد، کافی است، با یک تغییر صفحه F_1 (که خط زمین جدید به موازات تصویر افقی رسم می شود)، به اندازه حقیقی صفحه دست یافت (شکل ۵-۱۴).

یادداشت : می بینید که صفحه قائم موجود با یک تغییر صفحه روبه‌رو، به یک صفحه جبهی، تبدیل شد.

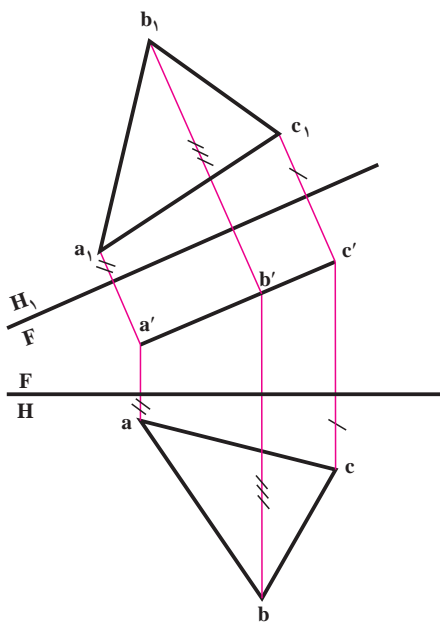


شکل ۵-۱۴

۵-۳-۲- تعیین اندازه حقیقی صفحه منتصب :

در اینجا که تصویر روبه‌روی صفحه خط می باشد، با یک تغییر صفحه افقی H_1 که خط زمین جدید به موازات تصویر روبه‌روی صفحه منتصب رسم می شود، می توان به اندازه حقیقی صفحه رسید (مطابق شکل ۵-۱۵).

یادداشت : می بینید که صفحه منتصب با یک تغییر صفحه افقی به صفحه ای افقی تبدیل شد.



شکل ۵-۱۵

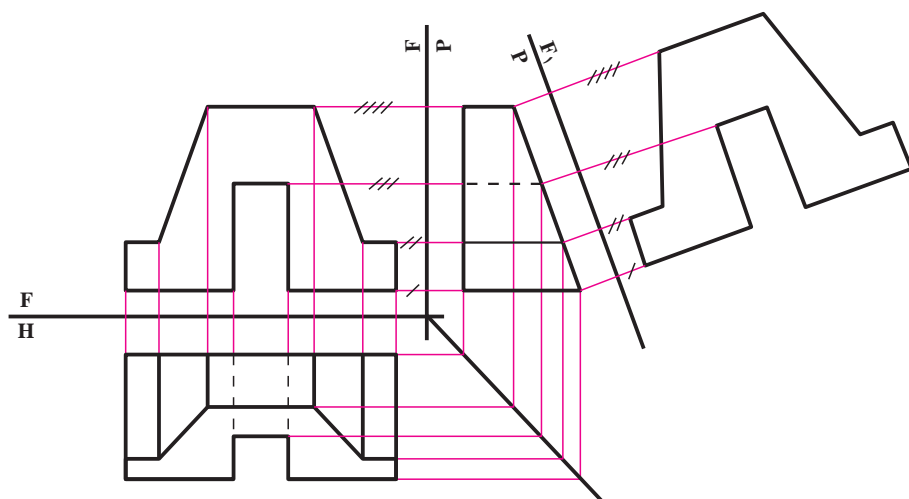
۵-۲-۳- تعیین اندازه حقیقی صفحه نیمرخ : در اینجا کافی است نمای جانبی را به دست آوریم.

۵-۲-۴- تعیین اندازه حقیقی صفحه مواجه : پس از پیدا کردن، نمای سوم که یک خط شیب دار است، می توان با تغییر

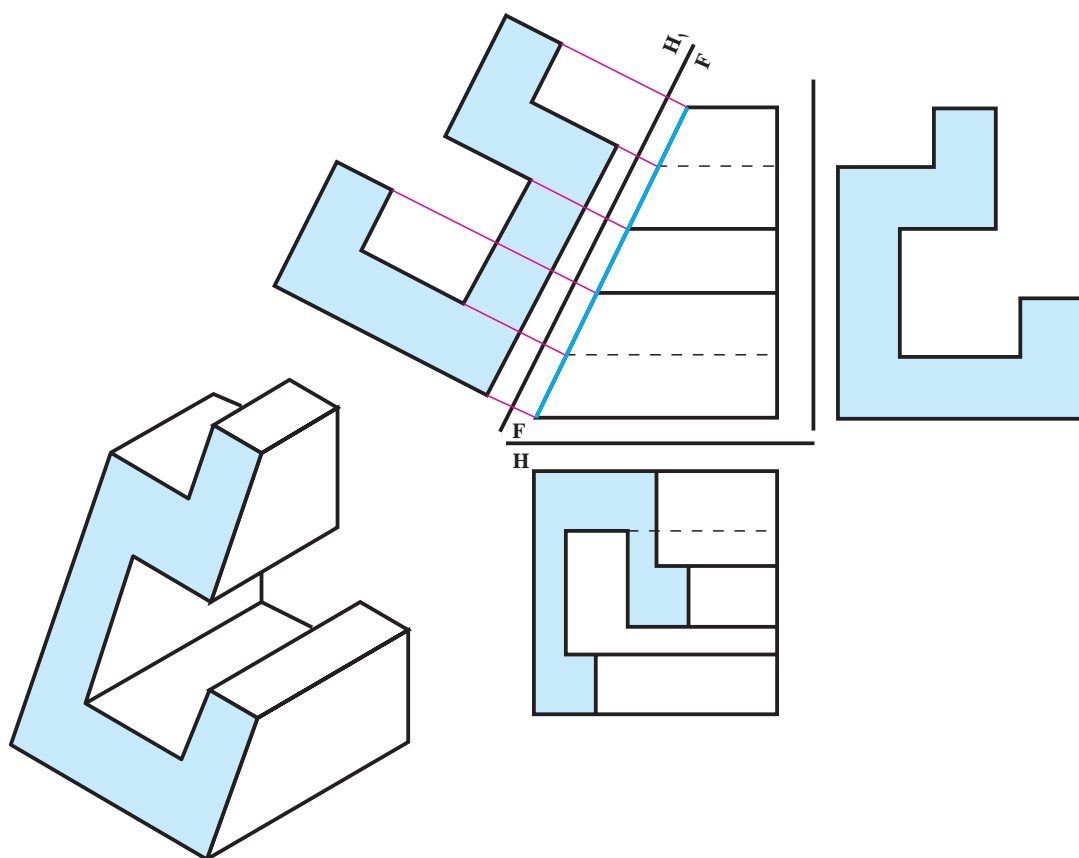
صفحه روبه‌رو که خط زمین به موازات نمای جانبی کشیده می شود، به اندازه حقیقی صفحه رسید (شکل ۵-۱۶).

توجه شود که از طول های ثابت استفاده کرده ایم!

شکل ۵-۱۷ پیدا کردن، اندازه مقطع جسمی را که با صفحه ای منتصب بریده شده است، نشان می دهد.



شکل ۵-۱۶



شکل ۵-۱۷

- ۱- در تغییر صفحه افقی، آنچه که بدون تغییر باقی می ماند، عبارتست از.....
- ۲- در تغییر صفحه روبه رو، آنچه که بدون تغییر باقی می ماند، عبارتست از.....
- ۳- آیا می توان برای رسم نمای نیمرخ با در دست داشتن دو نمای دیگر از تغییر صفحه استفاده کرد؟ در صورتی که پاسخ آری است، زاویه میان دو خط زمین چه قدر است؟
- ۴- برای تبدیل خط غیر خاص به خط قائم، ابتدا به کمک تغییر صفحه..... خط را به خط و سپس با تغییر صفحه..... به نتیجه خواهیم رسید.
- ۵- برای تبدیل خط غیر خاص به خط منتصب، ابتدا به کمک تغییر صفحه..... خط را به خط..... و بار دیگر با تغییر صفحه..... به نتیجه خواهیم رسید.

$$۶- \text{خط } A \begin{matrix} ۵۰ \\ ۱۰ \\ ۲۵ \end{matrix} \text{ و } B \begin{matrix} ۰ \\ ۳۵ \\ ۲۵ \end{matrix} \text{ را به یک خط منتصب تبدیل کنید.}$$

$$۷- \text{خط } A \begin{matrix} ۶۰ \\ ۳۰ \\ ۵ \end{matrix} \text{ و } B \begin{matrix} ۰ \\ ۳۰ \\ ۴۰ \end{matrix} \text{ را به یک خط قائم تبدیل کنید.}$$

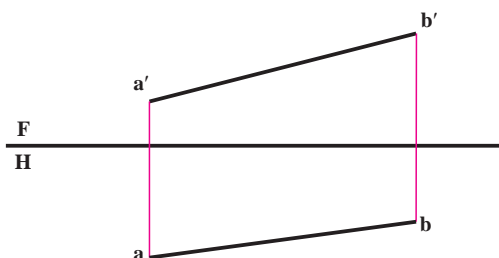
$$۸- \text{خط } AB \text{ با مختصات } A \begin{matrix} ۲۵ \\ ۱۰ \\ ۳۰ \end{matrix} \text{ و } B \begin{matrix} ۰ \\ ۲۵ \\ ۵ \end{matrix} \text{ مفروض است. پس از رسم نماها و مشخص کردن نوع خط، یک}$$

بار آن را تبدیل به خط جبهی، و بار دیگر آن را تبدیل به خط افقی نمایید.

۹- در تبدیل خط غیر خاص به خط نیمرخ، چند تغییر صفحه مورد نیاز است؟ و مسئله دارای چند پاسخ است؟

۱۰- نماهای خط غیر خاص AB در شکل ۱۸-۵ داده شده

است. ابتدا نقشه را با مقیاس ۱:۲ رسم کنید. سپس نقطه M را روی آن تعیین کنید به گونه ای که بعد و ارتفاعش مساوی باشد. آنگاه اندازه حقیقی MB را مشخص کنید (به روش تغییر صفحه)



شکل ۱۸-۵

۱۱- پس از رسم و تعیین نوع صفحه، مساحت آن را به دست آورید: (آیا می توانید قبل از ترسیم، نوع صفحه را مشخص کنید؟)

الف -	$C(۶۰, ۲۰, ۴۰)$	$B(۳۰, ۲۰, ۰)$	$A(۰, ۲۰, ۶۰)$
ب -	$C(۶۰, ۵, ۲۵)$	$B(۳۵, ۴۰, ۲۵)$	$A(۰, ۰, ۲۵)$

پ- $A(0^\circ, 10^\circ, 20^\circ)$	$B(40^\circ, 25^\circ, 50^\circ)$	$C(80^\circ, 40^\circ, 10^\circ)$
ت- $A(100^\circ, 10^\circ, 0^\circ)$	$B(50^\circ, 60^\circ, 50^\circ)$	$C(0^\circ, 30^\circ, 20^\circ)$
ث- $A(100^\circ, 10^\circ, 50^\circ)$	$B(50^\circ, 50^\circ, 30^\circ)$	$C(0^\circ, 0^\circ, 10^\circ)$
ج- $A(50^\circ, 10^\circ, 30^\circ)$	$B(50^\circ, 70^\circ, 60^\circ)$	$C(50^\circ, 50^\circ, 0^\circ)$

۱۲- یک صفحه به شکل متوازی الاضلاع ABCD را با سه گوشه معلوم A و B و C رسم کنید. اگر AC یکی از قطرها باشد، نخست مختصات مرکز و سپس مساحت آن را تعیین کنید.

$$A(100^\circ, 30^\circ, 10^\circ) \quad B(70^\circ, 80^\circ, 60^\circ) \quad C(0^\circ, 90^\circ, 70^\circ)$$

۱۳- پاره خط AB یک ضلع مستطیل ABCD واقع در یک صفحه قائم است. اگر عرض مستطیل 50° باشد، دو نمای آن را رسم کنید.

$$A(70^\circ, 10^\circ, 10^\circ) \quad B(0^\circ, 30^\circ, 50^\circ)$$

برای مطالعه

۱- نخست صفحه ABC را نمایش دهید.

سپس بگویید این چه نوع صفحه‌ای است؟

$$A(0^\circ, 3^\circ, 38^\circ) \quad B(30^\circ, 60^\circ, 0^\circ) \quad C(66^\circ, 0^\circ, 20^\circ)$$

آن گاه مساحت آن را تعیین کنید.

راهنمایی: می‌توانید اول اندازه حقیقی هر یک از اضلاع را به دست آورید، سپس یک مثلث را با داشتن سه ضلع آن رسم کنید و آن گاه با رسم یک ارتفاع، مساحت را تعیین کنید.

۲- پس از ترسیم شکل ۱۸-۵ به مقیاس ۱:۲ نقطه M را روی AB به گونه‌ای تعیین کنید که بعد آن دو برابر ارتفاعش باشد.

۳- جمله را کامل کنید:

برای تبدیل خط غیر خاص، به خط مواجه تغییر صفحه مورد نیاز است.

تبدیل خط غیر خاص به خط با تغییر صفحه سپس تغییر صفحه و یا ابتدا تبدیل خط

غیر خاص، به خط با تغییر صفحه و سپس تغییر صفحه



اسکله شهیدرجایی — بندرعباس

تصاویر عمودی دو خط متوازی، همواره متوازی‌اند.

وضعیت دو خط نسبت به هم

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود:

- ۱- حالات نقطه و خط را نسبت به هم بررسی کند.
- ۲- اوضاع دو خط را نسبت به هم بررسی کند.

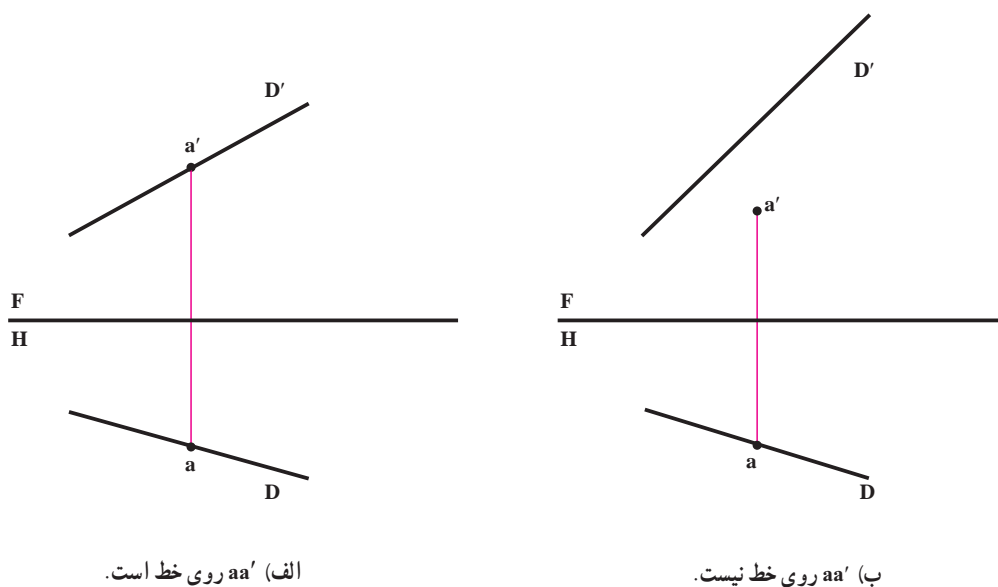
۱-۶- تعریف

بررسی اوضاع دو خط نسبت به هم، در نظر گرفتن وضعیت‌های گوناگونی است که ممکن است دو خط نسبت به هم داشته باشند.

اما قبل از ورود به این بحث بهتر است چگونگی نقطه و خط را بررسی کنیم.

۲-۶- اوضاع نقطه و خط

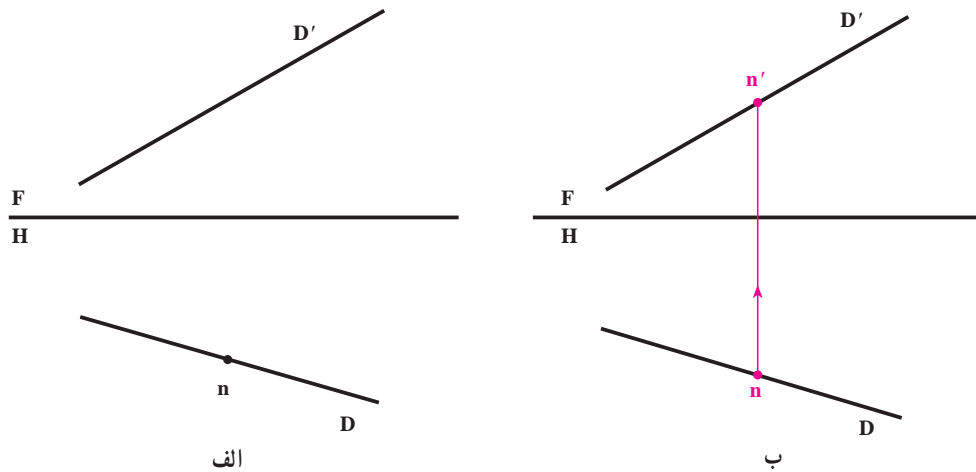
A و یک خط مانند D را در نظر می‌گیریم. نقطه A ممکن است روی خط یا خارج از خط باشد.
- برای آنکه نقطه روی خط باشد، کافی است نماهای نقطه روی تصاویر خط باشد (شکل ۱-۶).



شکل ۱-۶

در صورتی که یکی از تصاویر نقطه «و یا هر دو تصویر» بر خط قرار نداشته باشد، نقطه هیچ‌گونه اشتراکی با خط ندارد.
نمونه: n یکی از تصاویر nn' بر روی تصویر افقی یک خط قرار دارد، تصویر دیگر نقطه را معلوم کنید، به شرط اینکه نقطه واقع بر خط باشد.

حل : کافی است از n رابط کنیم تا نقطه n' روی تصویر روبه روی خط معین شود (شکل ۶-۲).



شکل ۶-۲

۶-۳- وضعیت دو خط نسبت به هم (در فضا)

دو خط نسبت به هم تنها سه حالت دارند :

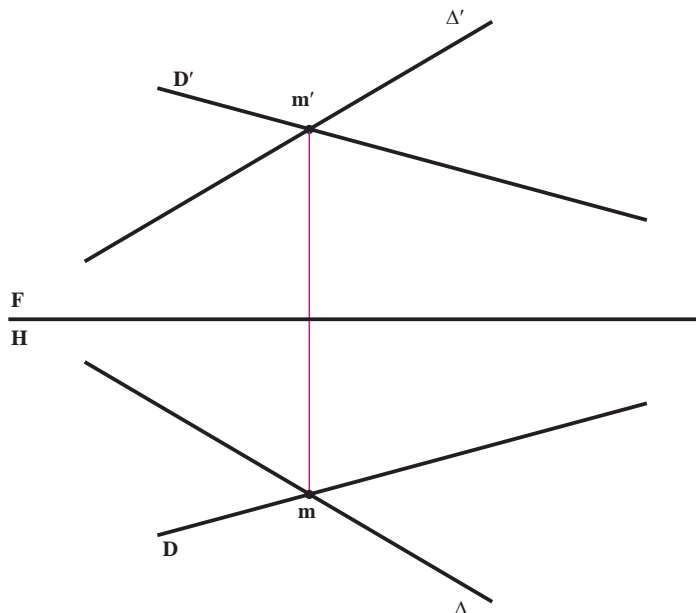
۱- متقاطع، یعنی یکدیگر را قطع می کنند.

۲- متوازی، یعنی نقطه اشتراکی با هم ندارند، اما هر دو روی یک صفحه تخت قرار دارند.

۳- متنافر، یعنی نه متوازی و نه متقاطع، پس بر آنها یک صفحه تخت نمی گذرد.

۱-۶-۳- تقاطع دو خط - در شکل ۶-۳، دو خط D و Δ متقاطعند و شرط لازم و کافی برای متقاطع بودن آنها قرار

داشتن نقاط تقاطع ظاهری در هر تصویر بر روی یک رابط است :

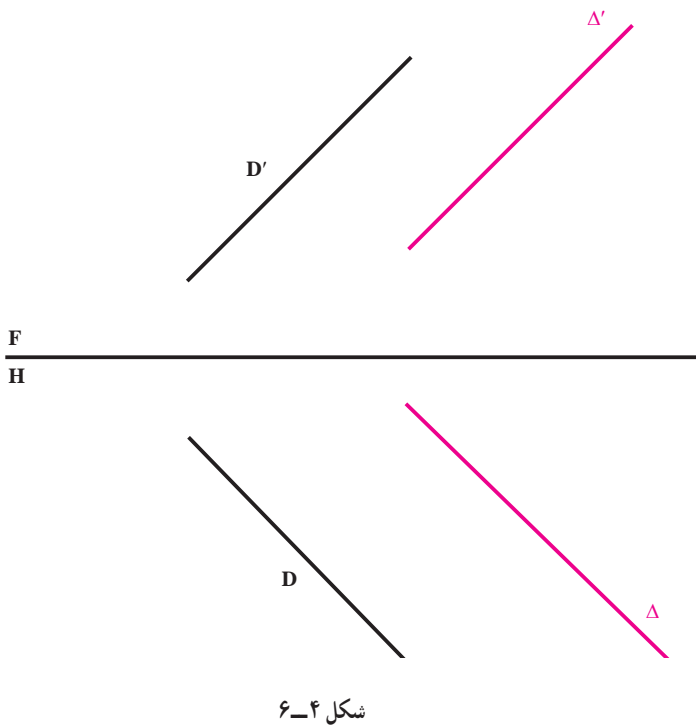


شکل ۶-۳

۲-۳-۶- توازی دو خط - در شکل

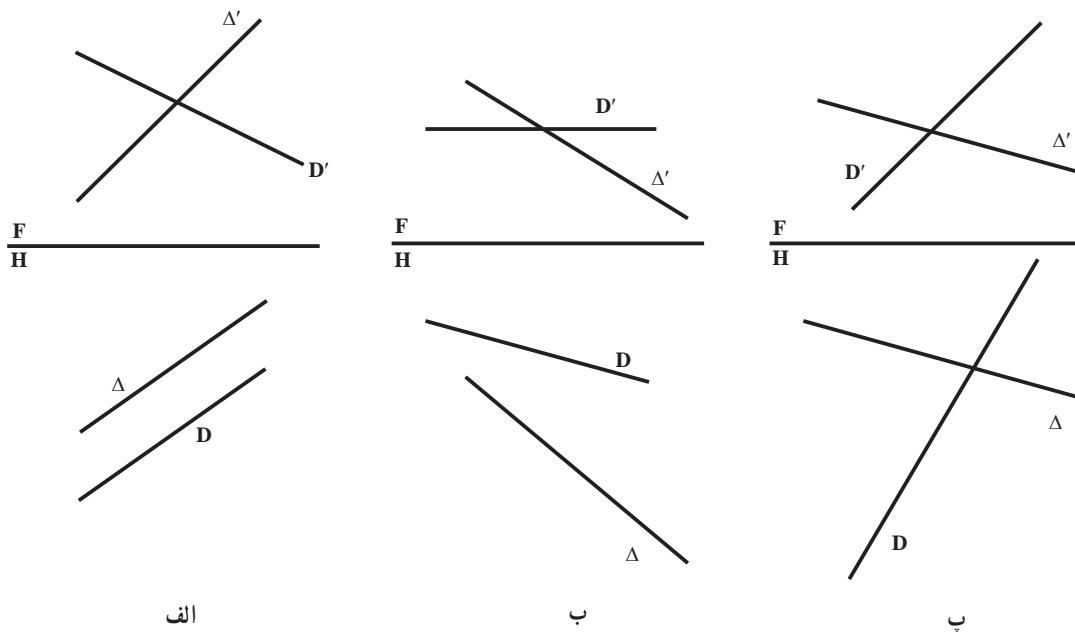
۶-۴، دو خط متوازیند. در این مورد قضیه مهم زیر وجود دارد:

قضیه: تصاویر دو خط متوازی، در هر شرایطی، متوازی هستند؛ بنابراین، تصویر افقی دو خط با هم و تصویر روبه‌روی آنها نیز با هم موازی خواهد بود (شکل ۶-۴).



حال، بگویید تصویر نیم‌رخ آنها چگونه است؟

۳-۳-۶- دو خط متنافر - شکل ۵-۶ نمونه‌هایی از دو خط متنافر را که نه موازی هستند و نه متقاطع نشان می‌دهد.

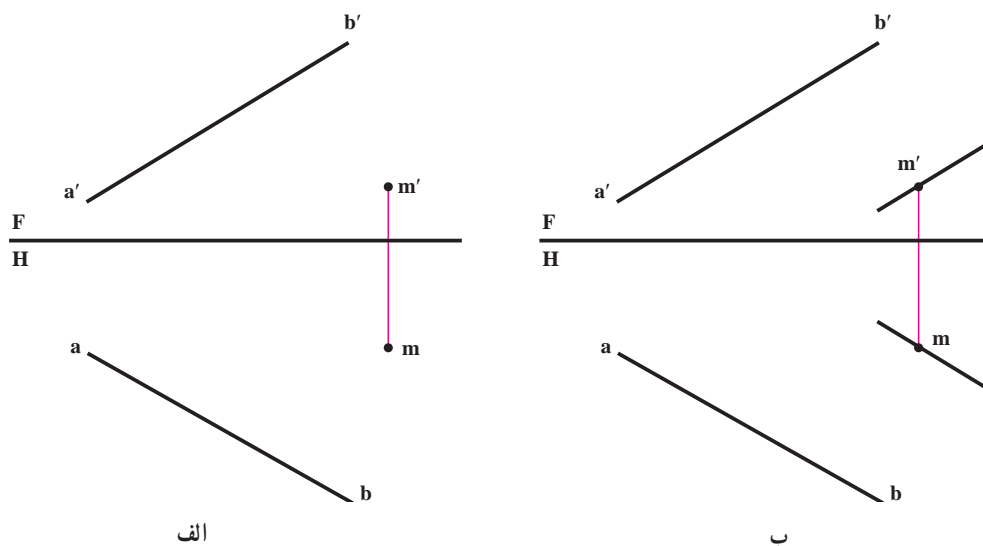


۱- عکس قضیه هم درست خواهد بود. اگر تصاویر روبه‌رو و افقی دو خط با هم موازی باشند، آن دو خط در فضا متوازیند.

نمونه ۱: خط AB و نقطه M در دست است، از M خطی موازی با AB رسم کنید.

حل: خطی که موازی با AB رسم می شود باید دو شرط داشته باشد:

از M بگذرد و با AB موازی باشد. پس از m در تصویر افقی، موازی با ab و از m' در تصویر روبه‌رو موازی با $a'b'$ رسم می کنیم (شکل ۶-۶). بدیهی است این مسئله تنها یک جواب دارد:



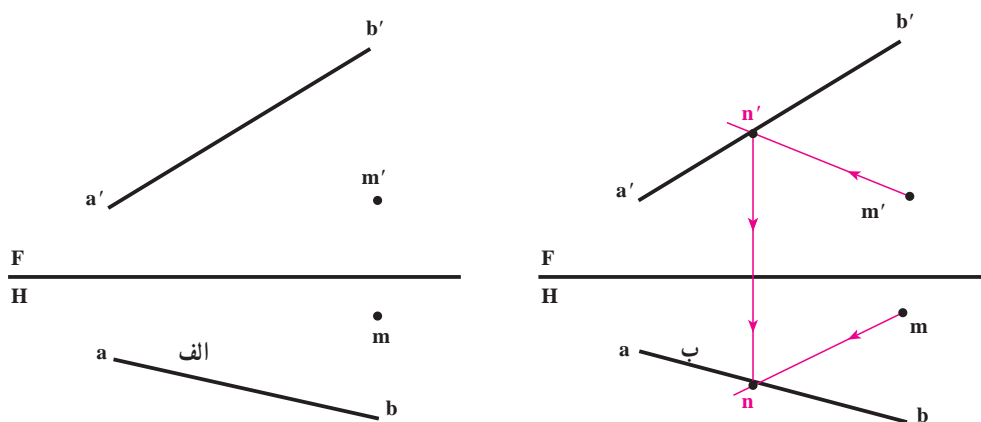
شکل ۶-۶

نمونه ۲: از M خطی رسم کنید که با خط AB برخورد کند.

حل: طبق شکل ۶-۷، در تصویر روبه‌رو خطی رسم می کنیم که از m' بگذرد و با $a'b'$ متقاطع باشد، نقطه تقاطع را n' می نامیم.

– از n' رابط می کنیم تا n روی ab به دست آید.

– از m به n وصل می کنیم. خط $m'n'mn$ پاسخ است.



شکل ۶-۷

یادداشت ۱- می‌توانیم حل مسئله را با برگزیدن یک نقطه از ab آغاز کنیم.

یادداشت ۲- چون n' انتخابی است و می‌توان جای آن را در روی $a'b'$ عوض کرد، مسئله بی‌شمار جواب خواهد داشت.

نمونه ۳: از نقطه mm' خطی موازی با نیمرخ $aba'b'$ رسم کنید.

حل: با آن‌که می‌دانیم که خطی موازی با یک خط نیمرخ، خود خطی نیمرخ است، رسم خطوطی موازی با ab و $a'b'$ برای رسیدن

به جواب کافی نیست، زیرا برای نمایش یک خط نیمرخ، نام‌گذاری دو نقطه آن لازم است؛ پس، حل مسئله به این قرار است:

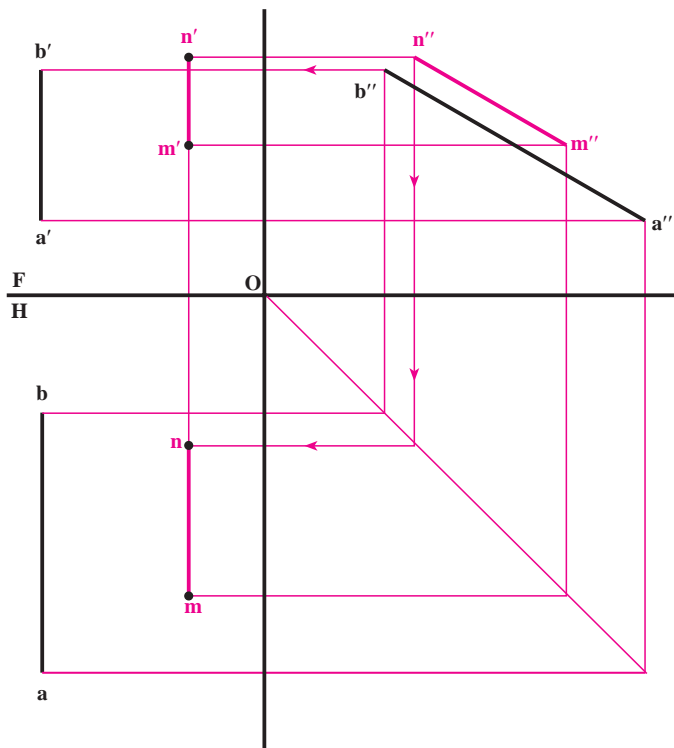
- با توجه به دو تصویر روبه‌رو و افقی، تصویر جانبی خط را رسم می‌کنیم (شکل ۸-۶).

- نمای نیمرخ نقطه mm' یعنی m'' را معین می‌کنیم.

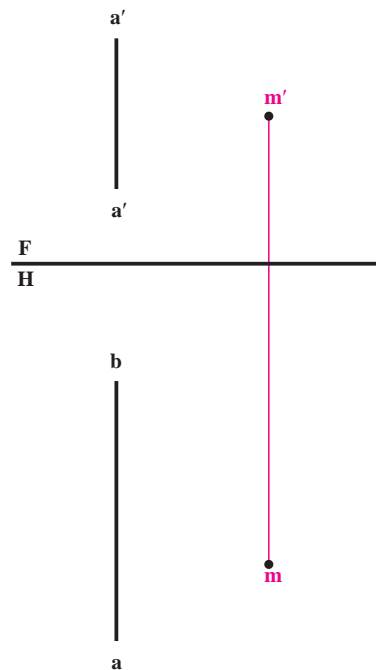
- در نمای جانبی خطی از m'' موازی با $a''b''$ رسم می‌کنیم.

- یک نقطه از این خط را n'' می‌نامیم و آن را در نماهای افقی و روبه‌رو به‌دست می‌آوریم.

- $mm'n'n'$ جواب مسئله است:



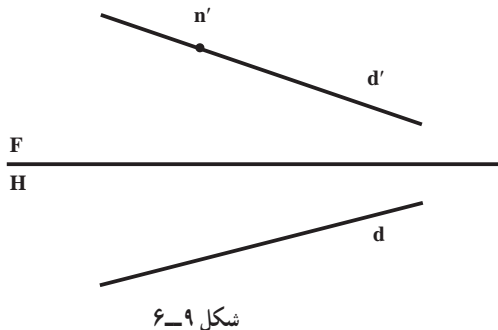
ب



الف

شکل ۸-۶

- ۱- هدف از بررسی اوضاع دو خط نسبت به هم چیست؟
- ۲- یک نقطه نسبت به یک خط چند حالت دارد؟
- ۳- برای آنکه نقطه‌ای واقع بر یک خط باشد، شرط لازم چیست؟
- ۴- در شکل ۹-۶، n' ، از dd' معلوم است، n را معین کنید.
 («روی همین شکل»)



شکل ۹-۶

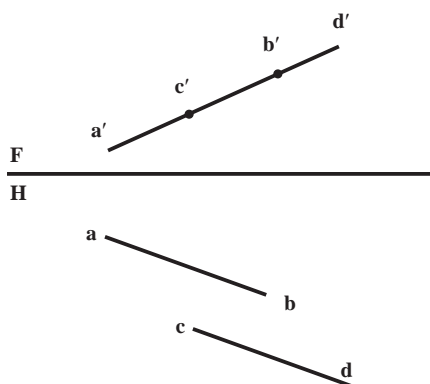
- ۵- نقطه mm' از یک خط افقی معلوم است. این خط را به گونه‌ای رسم کنید که زاویه‌اش با F ، 45° درجه باشد. مسئله چند جواب دارد؟
- ۶- نقطه nn' از یک خط نیمرخ در دست است. نیمرخ را به گونه‌ای رسم کنید که زاویه‌اش با صفحه افقی تصویر 3° درجه باشد. چند پاسخ داریم؟

- ۷- خط AB با مختصات $A \begin{vmatrix} 0 \\ 3^\circ \\ 1^\circ \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 25 \\ 15 \\ 45 \end{vmatrix}$ را ترسیم و نقطه M از آن را به گونه‌ای معین کنید که فاصله‌اش

از F ، $2^\circ mm$ باشد. ارتفاع این نقطه چه قدر است؟

- ۸- دو خط چه اوضاعی نسبت به هم می‌توانند داشته باشند؟
- ۹- قضیه مربوط به دو خط موازی چیست؟

- ۱۰- چگونگی دو خط AB و CD را در شکل ۱۰-۶ توضیح دهید. « ab و cd موازی هستند».



شکل ۱۰-۶

- ۱۱- خط غیر خاص AB و نقطه N را در نظر بگیرید. اکنون از نقطه nn' ، یک بار یک خط افقی و بار دیگر یک خط جبهی متقاطع با AB رسم کنید.

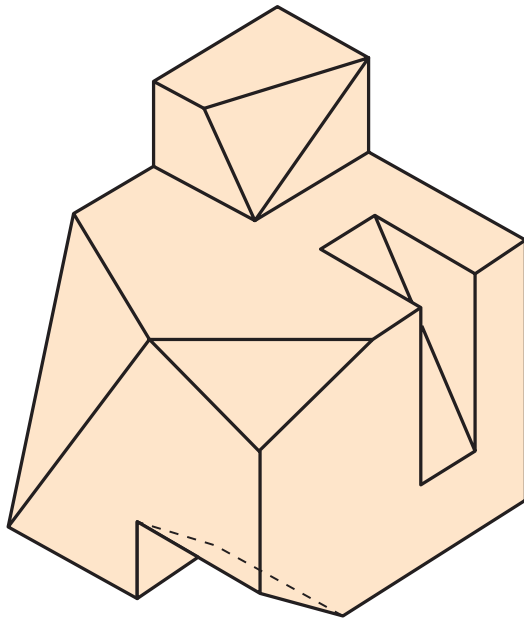
- ۱۲- نخست سه نقطه $A \begin{vmatrix} 16 \\ 1^\circ \\ 2^\circ \end{vmatrix}$ و $B \begin{vmatrix} 0 \\ -1^\circ \\ -1^\circ \end{vmatrix}$ و $C \begin{vmatrix} 5^\circ \\ 3^\circ \\ 3^\circ \end{vmatrix}$ را نمایش دهید. سپس، دو خط رسم کنید که از A و C بگذرند و در B به هم برسند.

۱۳- دو خط غیرخاص AB و CD و نقطه M را خارج از آنها در نظر بگیرید. آیا می‌توانید صفحه‌ای از M بگذرانید که هم با AB و هم با CD موازی باشد؟

راهنمایی: برای آنکه خطی با صفحه‌ای موازی باشد کافی است با یک خط از آن صفحه موازی باشد.

۱۴- در شکل ۶-۱۱ جسمی را می‌بینید. خطوط

متوازی، متقاطع و متناظر را در این جسم مشخص کنید «با نام‌گذاری همه نقاط». می‌توانید برای مرتب بودن کار، یک جدول درست کنید.



شکل ۶-۱۱

۱۵- بر خط AB با مشخصات $A(65^\circ, 30^\circ, 15)$ و $B(0^\circ, 10^\circ, 50)$ ، نقطه N را به گونه‌ای تعیین کنید که ارتفاع آن دو برابر بعدش باشد.

۱۶- یک خط قائم و یک خط منتصب و یک غیرخاص در نظر بگیرید. خطی رسم کنید که با قائم و منتصب برخورد کند و با غیرخاص موازی باشد.

۱۷- خطی رسم کنید که دو خط قائم و دو خط منتصب معین را قطع کند.

برای مطالعه

۱- خطی رسم کنید که یک قائم، یک منتصب، یک مواجه و خط زمین را قطع کند.

۲- از نقطه N خطی افقی رسم کنید که یک خط نیمرخ معلوم را قطع کند.

۳- از $M(40^\circ, 32^\circ, 10)$ خطی رسم کنید که خط AB با مشخصات $A(0^\circ, 5^\circ, 20)$ و $B(60^\circ, 30^\circ, 50)$ را در نقطه N به ارتفاع ۳۵ قطع کند. اندازه حقیقی MN چیست؟

۴- از $M(60^\circ, 60^\circ, 60)$ خطی رسم کنید که خط AB با مشخصات $A(0^\circ, 10^\circ, 20)$ و $B(80^\circ, 40^\circ, 10)$ را در N با بعد و ارتفاع مساوی قطع کند، نخست طول حقیقی MN چیست؟ دوم، آیا مسئله جواب دیگری هم دارد؟

۵- ابتدا از نقطه $M(30^\circ, 19^\circ)$ خطی افقی رسم کنید که با F زاویه 30° درجه بسازد، سپس خطی در M بر آن عمود کنید که زاویه اش با H، 45° درجه باشد.

فصل هفتم



برخورد خط و صفحه را می توان به روش های خط کمکی، صفحه کمکی و تغییر صفحه تعیین کرد.

وضعیت خط و صفحه نسبت به هم

هدف‌های رفتاری: در پایان این فصل از فراگیر انتظار می‌رود:

- ۱- وضعیت نقطه را نسبت به صفحه بیان کند.
- ۲- حالت مختلف خط و صفحه را با روش خط کمکی بررسی کند.

۷-۱- نقطه و صفحه

پیش از بررسی وضعیت‌های گوناگونی که خط نسبت به صفحه می‌تواند داشته باشد، لازم است وضع نقطه را نسبت به صفحه بررسی کنیم.

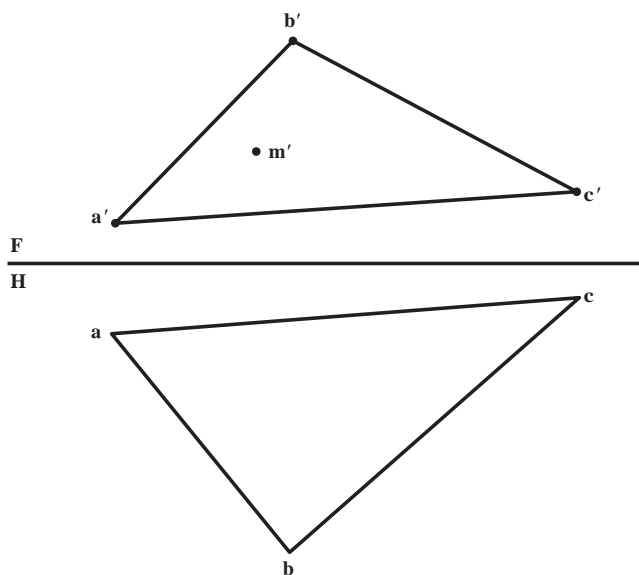
نقطه نسبت به صفحه می‌تواند تنها دو حالت داشته باشد:

الف - نقطه روی صفحه است؛

ب - نقطه خارج از صفحه است.

در دو مسئله حل شده این موضوع را بررسی می‌کنیم:

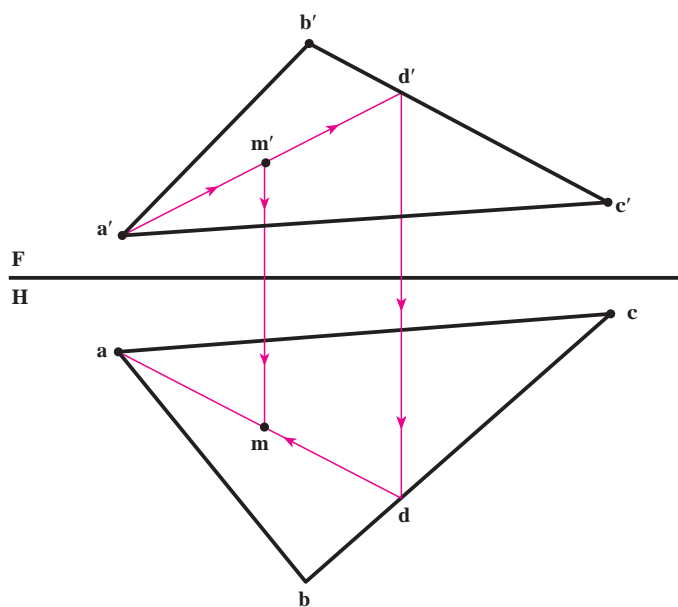
تمرین اول: صفحه‌ای با یک مثلث ABC نمایش و تصویر روبه‌روی نقطه‌ای از آن به نام m' داده شده است. تصویر افقی نقطه را معین کنید (شکل ۷-۱).



شکل ۷-۱

برای حل مسئله می‌توان از یک خط کمکی استفاده کرد. به این صورت که:

- ابتدا تصویر روبه‌روی خطی از صفحه را به گونه‌ای در نظر می‌گیریم که شامل m' باشد؛
- این خط را از نقطه معلومی از صفحه مانند a' می‌گذرانیم؛
- خط در نقطه d' ، ضلع $b'c'$ را قطع می‌کند؛

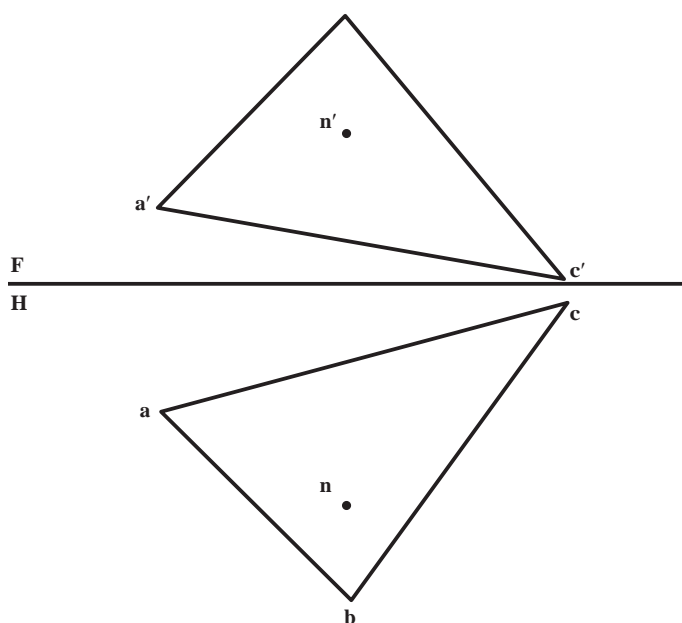


شکل ۷-۲

تصویر افقی نقطه D ، یعنی d را روی bc به کمک خط رابط به دست می آوریم؛

در نتیجه ad ، تصویر افقی خط کمکی انتخابی، معین می شود.

با ترسیم رابط، m ، یعنی تصویر افقی نقطه به دست می آید (شکل ۷-۲).



شکل ۷-۳

تمرین دوم : در اینجا باز هم صفحه ای را به کمک یک مثلث معرفی کرده ایم. نقطه ای مانند nn' هم مفروض است. می خواهیم تحقیق کنیم که آیا نقطه nn' در صفحه واقع هست یا خیر (شکل ۷-۳).

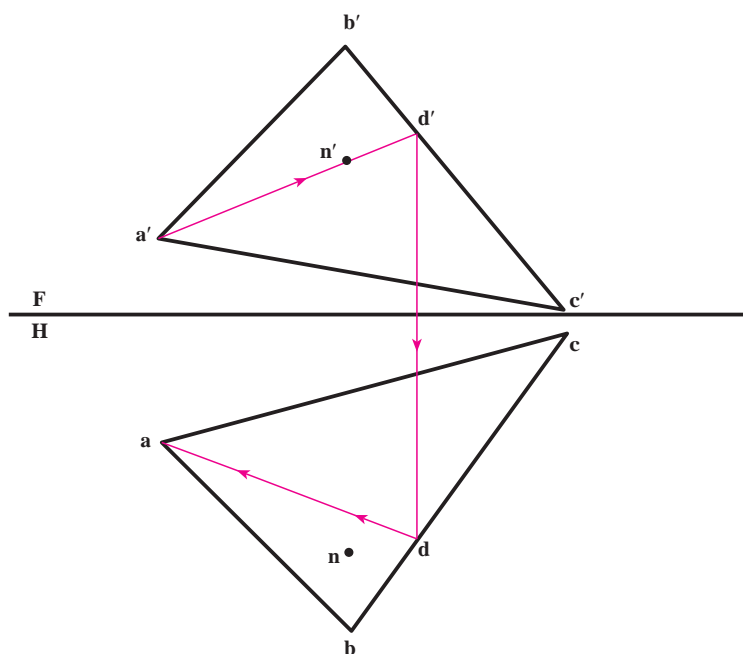
حل : مطابق مسئله پیش و در تصویر روبه رو، خطی را از صفحه در نظر می گیریم که به ظاهر از n' می گذرد.

– تصویر افقی خط، یعنی ad را به دست می آوریم.

در این صورت، دو حالت پیش می آید :

– اگر n روی ad بود، nn' در صفحه واقع است.

– اگر n روی ad نبود، nn' نقطه‌ای خارج از صفحه است که در تمرین چنین است (شکل ۷-۴).



شکل ۷-۴

در اینجا اضافه می‌شود که می‌توان خط AD یعنی خط کمکی را افقی، جبهی و یا هر خط دیگری از صفحه هم در نظر گرفت. همچنین می‌توان حل مسئله را از تصویر افقی شروع کرد.

۷-۲ خط و صفحه

خط و صفحه نسبت به هم می‌توانند سه حالت داشته باشند :

۱- خط روی صفحه است.

۲- خط با صفحه متقاطع است.

۳- خط با صفحه موازی است.

برای آنکه خطی واقع در صفحه‌ای باشد، شرط لازم و کافی آن است که دو نقطه‌اش در صفحه قرار داشته باشد.

۷-۲-۱ روش خط کمکی : برای تحقیق وضع خط نسبت به صفحه؛ روش‌های مختلفی وجود دارد که یکی از آنها روش

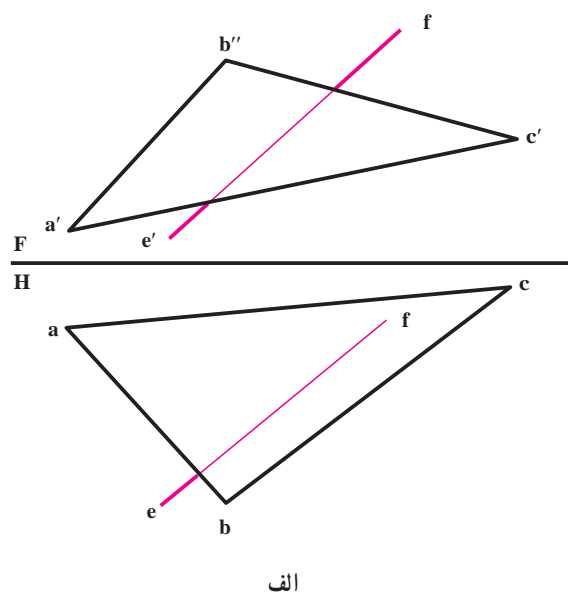
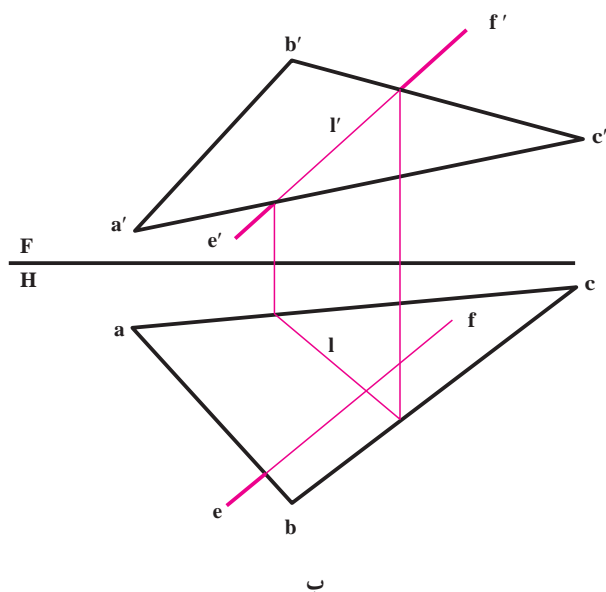
« خط کمکی » است.

تمرین اول : وضع خط $e'f'$ را نسبت به صفحه ABC معین کنید (شکل ۷-۵ الف).

حل :

– خطی از صفحه ABC موجود است که تصویر روبرویش روی $f'e'$ واقع است. با نام‌گذاری این خط به نام Π' تصویر افقی

آن را به دست می‌آوریم (شکل ۷-۵ ب).



شکل ۵-۷

– تصویر افقی l خواهد بود.

در این شرایط سه حالت ممکن است :

۱- l واقع بر ef است. در این صورت EF خطی واقع بر صفحه ABC می باشد.

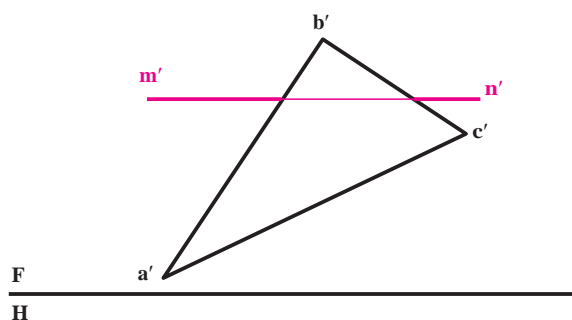
۲- l با ef متقاطع است. در این صورت EF صفحه ABC را قطع می کند «نقطه تقاطع l با ef در حقیقت نقطه برخورد EF و صفحه است».

۳- l با ef موازی است، در این صورت EF با صفحه ABC موازی است. در شرایط این مسئله، پاره خط EF با صفحه برخورد دارد، «زیرا l با ef متقاطع شد».

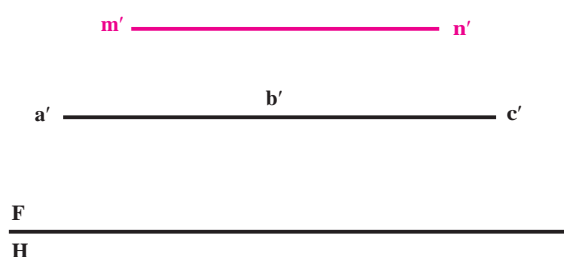
اکنون اگر نقطه برخورد را m بنامیم، با رابط، m' را هم معین می کنیم. همچنین حل مسئله را می توان از تصویر افقی هم شروع کرد.

یادداشت : ممکن است خط با صفحه موازی نباشد، در آن هم واقع نباشد ولی در محدوده موجود تقاطعی هم نداشته باشد، در این صورت خط، ادامه l را در خارج از محدوده abc قطع خواهد کرد که تعیین آن لزومی ندارد.

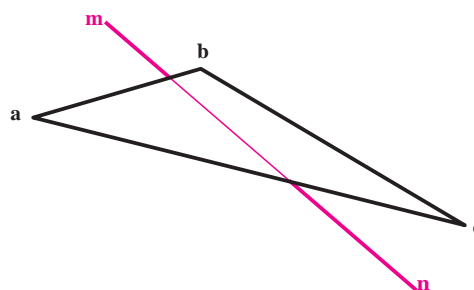
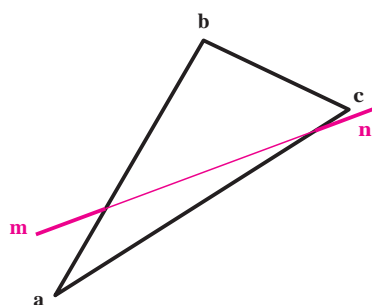
- ۱- نقطه نسبت به صفحه چه حالت‌هایی دارد؟ با رسم شکل دستی توضیح دهید.
- ۲- چگونگی نقطه $M(60^\circ, 40^\circ, 30^\circ)$ را نسبت به صفحه ABC با شرایط $A(0^\circ, 0^\circ, 20^\circ)$ ، $B(60^\circ, 80^\circ, 60^\circ)$ و $C(120^\circ, 20^\circ, 0^\circ)$ بررسی کنید.
- ۳- خط نسبت به صفحه چند حالت دارد؟ در صورت محدود بودن صفحه، آیا حالت چهارمی هم هست؟
- ۴- ابتدا صفحه MNK را رسم کنید با شرایط $M(0^\circ, 20^\circ, 40^\circ)$ ، $K(60^\circ, 0^\circ, 0^\circ)$ و $N(120^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$ ، آنگاه وضعیت خط AB با شرایط $B(20^\circ, 20^\circ, 36^\circ)$ و $A(80^\circ, 26^\circ, 20^\circ)$ را نسبت به آن تحقیق کنید.
- ۵- روش خط کمکی برای تعیین نقطه برخورد خط و صفحه را بیان کنید.
- ۶- در نمونه‌های داده شده وضع خط MN و صفحه ABC را نسبت به هم بررسی نمایید و در صورت تقاطع بودن، نقطه تقاطع را معین کنید. «همچنین نوع خط و صفحه را در شکل‌های ۶-۷ تا ۷-۹ بگویید.»

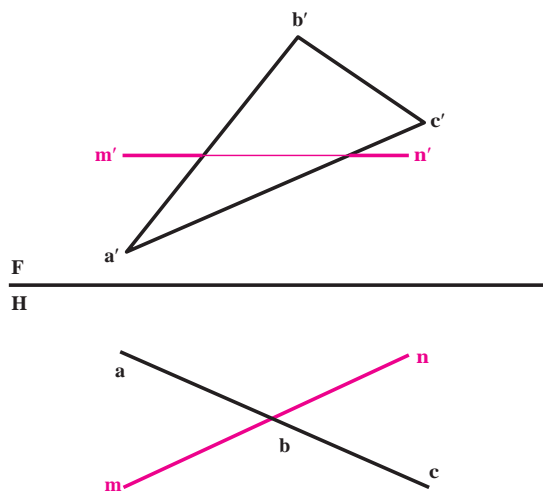


شکل ۷-۷

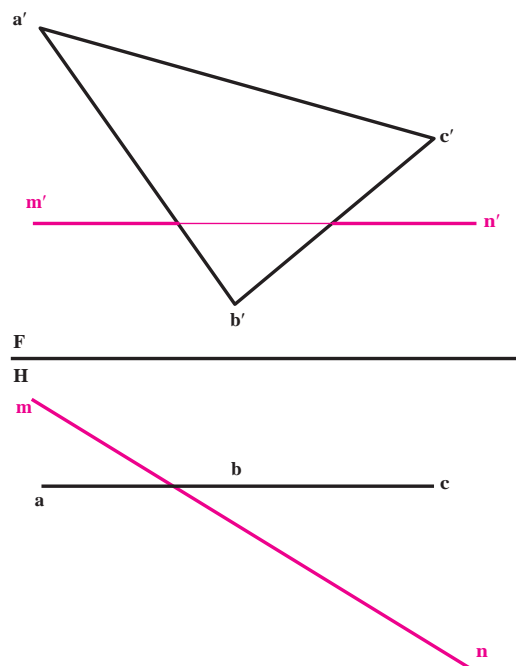


شکل ۷-۶





شکل ۹-۷



شکل ۸-۷

برای مطالعه

- ۱- چگونگی دو خط نیمرخ AB و CD را بررسی کنید. معلومات زیر را داریم :
 $A(60^\circ, 60^\circ, 5)$, $B(60^\circ, 10^\circ, 55)$, $C(10^\circ, 45^\circ, 0)$ و $D(10^\circ, 5, 45)$
- ۲- دو خط AB و CD در نقطه O برخورد کرده اند. یک خط روبه‌رو با نام MN به طول ۶۶ را به گونه‌ای رسم کنید که M روی AB و N روی CD باشد. معلومات زیر را داریم :
 $B(0^\circ, 0^\circ, 70)$, $D(20^\circ, 60^\circ, 10)$ و $O(60^\circ, 30^\circ, 30)$ طول A برابر 90° و طول C برابر 100°
- ۳- O مرکز یک صفحه منتصب به شکل حقیقی مربع (ABCD) است. این صفحه با زاویه 30° درجه دارد. معلومات زیر را داریم :
 $O(60^\circ, 40^\circ, 30)$ خطی روبه‌رو، ضلع مربع برابر $20\sqrt{2}$. مربع را بسازید.