سیمای فصل دوم

انبساط و انقباض اجسام

۲- انبساط و انقباض اجسام

۱-۲- انبساط خطی، سطحی و حجمی

۲-۲- روابط انبساط خطی، سطحی و حجمی

۱-۲-۲- انبساط ظاهری و حقیقی مایعات

۲-۲-۲- تعیین انبساط سطوح سوراخ دار و حجم‌های توخالی

۳-۲- انقباض اجسام در اثر کاهش درجه حرارت

۱-۳-۲- انقباض در حالت مذاب

- انقباض حین انجماد (خمیری)

۲-۳-۲- انقباض در حالت جامد

۳-۳-۲- تغییرات چگالی نسبت به انبساط و انقباض اجسام

انبساط و انقباض اجسام

تعریف انبساط : هنگامی که اجسام حرارت داده می‌شوند ابعاد و در نتیجه حجم آنها افزایش پیدا می‌کند، این افزایش در ابعاد و حجم اجسام را انبساط می‌گویند.

تعریف انقباض : هنگامی که اجسام تحت سرما یا برودت قرار می‌گیرند، ابعاد و در نتیجه حجم آنها کاهش پیدا می‌کند، این کاهش در ابعاد و حجم اجسام را انقباض می‌گویند.

مثال : اگر یک میله فلزی را از درجه حرارت محیط ($۲۵^{\circ}c$)حرارت دهیم، هرچقدر درجه حرارت افزایش می‌یابد، طول میله افزایش می‌یابد، برعکس اگر درجه حرارت میله مجدد تا درجه حرارت محیط کاهش داده شود، با کاهش درجه حرارت طول میله کوتاه‌تر می‌شود و به اندازه اولیه برمی‌گردد. البته این تغییر طول در انبساط و انقباض مقدار کمی می‌باشد.

مثال دیگر در هنگام سرد شدن مذاب در قالب می‌باشد، به این صورت که با کاهش درجه حرارت، مذاب منقبض شده تا درجه حرارت انجماد، همچنین در هنگام انجماد به علت تبدیل حالت مایع به جامد نیز مجدد انقباض حاصل شده که به انقباض حین انجماد معروف است. از طرف دیگر جامد ایجاد شده نیز با کاهش درجه حرارت تا رسیدن به درجه حرارت محیط ($۲۵^{\circ}c$) مجدد منقبض می‌شود. بنابراین در هنگام انجماد مذاب در قالب معمولاً سه نوع انقباض صورت می‌گیرد که این انقباض‌ها معمولاً عیوبی را در قطعه ریختگی ایجاد می‌کنند. بنابراین باید در کلیه مراحل ریخته‌گری، مدلسازی، تکنولوژی قالب و انجماد و همچنین اثرات درجه حرارت فوق ذوب، ترکیب آلیاژ و نحوه انجماد آن و میزان انقباض ایجاد شده در نظر گرفته شود تا بتوان قطعه‌ای با کم‌ترین عیوب به‌دست آورد، لذا لازم است جهت طراحی، ابتدا بتوان مقادیر انبساط و انقباض محاسبه نمود.

۱-۲- انبساط خطی، سطحی و حجمی :

اگر تمام نقاط یک جسم را به‌طور یکنواخت حرارت دهیم نه تنها طول آن افزایش می‌یابد بلکه سطوح مختلف و حجم آن نیز افزایش می‌یابد که در مورد تمام حالات ماده (جامد، مایع، گاز) به غیر از چند مورد استثناء این پدیده اتفاق می‌افتد، اما در مورد جامدات این افزایش در طول، سطح و حجم مقدار کمی می‌باشد و بستگی به ابعاد اولیه، جنس و میزان درجه حرارت آنها دارد. در مورد مایعات و گازها افزایش طول، سطح و حجم یا به عبارت دیگر انبساط خطی یا طولی، انبساط سطحی و انبساط حجمی بیشتر می‌باشد. علت اصلی این پدیده این است که در اثر افزایش درجه حرارت جسم، انرژی اتم‌ها و مولکول‌های جسم افزایش یافته و در نتیجه دامنه حرکت و ارتعاشات آنها زیاد می‌شود، که این افزایش دامنه حرکت و ارتعاشات نیاز به فضای بیشتری دارد و در نتیجه ابعاد جسم بزرگ‌تر شده و به عبارت دیگر منبسط می‌شود.

انبساط خطی متناسب با طول اولیه جسم ($L_{\circ}$) و درجه حرارت آن ($^{\circ}c$) می‌باشد، علاوه بر این دو عامل،

انبساط خطی به ضریب انبساط خطی که متناسب با جنس جسم و فاصله دمایی می‌باشد بستگی دارد. که به‌طور خلاصه ازدیاد واحد طول به ازای افزایش یک واحد درجه حرارت ($^{\circ}c$ یا $^{\circ}k$) را ضریب انبساط خطی می‌نامند که آن را با α نشان می‌دهند.

به همین ترتیب انبساط سطحی جسم متناسب با سطح اولیه و درجه حرارت جسم می‌باشد. علاوه بر این دو عامل، انبساط سطحی به ضریب انبساط سطحی که متناسب با جنس جسم و فاصله دمایی است بستگی دارد، که بنا به تعریف ازدیاد واحد سطح جسم به ازای افزایش یک واحد درجه حرارت ($^{\circ}c$ یا $^{\circ}k$) را ضریب انبساط سطحی می‌نامند که آن را با β نشان می‌دهند. به همین ترتیب انبساط حجمی متناسب با حجم اولیه و درجه حرارت جسم می‌باشد علاوه بر این دو عامل، انبساط حجمی به ضریب انبساط حجمی که متناسب با جنس جسم و فاصله دمایی می‌باشد، بستگی دارد و بنا به تعریف، ازدیاد حجم جسم به ازای افزایش یک واحد درجه حرارت ($^{\circ}c$ و $^{\circ}k$) را ضریب انبساط حجمی می‌گویند و آن را با γ نشان می‌دهند.

با توجه به این‌که این ضرایب متناسب با فاصله دمایی (از $\theta_۱$ تا $\theta_۲$) می‌باشند، معمولاً مقدار متوسط آنها را در آن فاصله دمایی در نظر می‌گیرند.

۲-۲- روابط انبساط خطی، سطحی و حجمی :

انبساط خطی : یک میله فلزی را در نظر می‌گیریم اگر فرض کنیم که در صفر درجه سانتی‌گراد، طول میله $L_{\circ}$ باشد، اگر میله را تا درجه حرارت θ حرارت دهیم، طول میله L خواهد بود در این صورت میزان انبساط خطی یا طولی میله برابر خواهد بود با $L-L_{\circ}$ که معمولاً آن را با ΔL نشان می‌دهند، که خواهیم داشت :

$$\Delta L = L - L_{\circ}$$

هرچقدر که طول اولیه یا $L_{\circ}$ بیشتر باشد، میزان انبساط نیز به همان اندازه بیشتر خواهد بود، بنابراین انبساط طولی میله متناسب با طول اولیه $(L_{\circ})$ خواهد بود به عبارت دیگر :

$$\Delta L \propto L$$

مثلا اگر طول میله ۱cm باشد، انبساط طولی آن ۱mm خواهد شد. اما اگر طول میله ۱۰cm باشد انبساط طولی آن ۱۰mm خواهد شد.

از طرف دیگر هرچقدر درجه حرارت (θ) بیشتر باشد، میزان انبساط نیز بیشتر خواهد شد یعنی : $\Delta L \propto \theta$

به عنوان مثال اگر یک میله ۱۰cm را تا $۱۰۰^{\circ}c$ حرارت دهیم، میزان انبساط آن حدود ۱mm خواهد شد. اما اگر آن را تا $۱۰۰۰^{\circ}c$ حرارت دهیم، میزان انبساط آن حدود ۱۰mm خواهد شد.

بنابراین با توجه به رابطه ۱ و ۲ می‌توان نوشت : $\Delta L \propto L_{\circ}\theta$

حال برای این‌که این تناسب را به تساوی تبدیل کنیم، نیاز به یک ضریب می‌باشد، که این ضریب را با α

نمایش می‌دهند، که قبلاً توضیح داده شد، در نتیجه میزان انبساط خطی برابر خواهد بود با :

$$\Delta L = \alpha L_{\circ} \theta$$

از طرفی $\Delta L = L - L_{\circ}$ می‌باشد بنابراین خواهیم داشت :

$$L - L_{\circ} = \alpha L_{\circ} \theta$$

$$L = \alpha L_{\circ} \theta + L_{\circ}$$

$$\boxed{L = L_{\circ}(1 + \alpha\theta)}$$

این رابطه در صورتی قابل استفاده است که اندازه θ کوچک باشد که به این ترتیب تقریباً می‌توان ضریب انبساط خطی را ثابت در نظر گرفت، اما در درجه حرارت‌های بالا یا در فاصله‌های دمایی زیاد، ضریب انبساط خطی (α) ثابت نیست و متناسب با درجه حرارت تغییر می‌کند. مثلاً ضریب انبساط خطی آهن در $(-200^{\circ}c)$ برابر $0/000003 \frac{1}{^{\circ}c}$ و در صفر درجه سانتی‌گراد حدود $0/000012 \frac{1}{^{\circ}c}$ و در $600^{\circ}c$ برابر $0/000016 \frac{1}{^{\circ}c}$ می‌باشد. در این حالت بهتر است از ضریب انبساطی خطی متوسط $(\overline{\alpha})$ استفاده شود.

رابطه به‌دست آمده برای زمانی است که درجه حرارت اولیه صفر می‌باشد اما در حالت کلی زمانی که درجه حرارت جسم از θ_1 به θ_2 افزایش می‌یابد، طول میله نیز از $L_1 \to L_2$ تغییر می‌کند بنابراین رابطه به‌صورت زیر خواهد بود :

$$\Delta L = L_2 - L_1$$

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$\Delta L = L_1 \overline{\alpha}(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\Delta L = L_1 \overline{\alpha} \Delta\theta$$

$$L_2 - L_1 = L_1 \overline{\alpha} \Delta\theta$$

$$L_2 = L_1 + L_1 \overline{\alpha} \Delta\theta$$

$$\boxed{L_2 = L_1(1 + \overline{\alpha}\Delta\theta)}$$

در این رابطه :

$L_1 =$ طول اولیه میله در دمای θ_1

$L_2 =$ طول بعد از انبساط میله در درجه حرارت θ_2

L_2 و L_1 : برحسب mm ، cm یا m می‌باشد

$\Delta\theta$: برحسب $^{\circ}c$ و $^{\circ}k$

$\overline{\alpha}$ برحسب $\frac{1}{^{\circ}c}$ یا $\frac{1}{^{\circ}k}$ می‌باشد.

جدول ۱-۲- ضریب انبساط خطی بعضی از اجسام در $0^\circ c$:

جسم	α و $\frac{1}{^\circ c}$
آلومینیم	24×10^{-6}
برنج	18×10^{-6}
مس	17×10^{-6}
اینوار (آلیاژ آهن و نیکل)	$0/9\times10^{-6}$
آهن و فولاد	12×10^{-6}
سرب	29×10^{-6}
شیشه معمولی (تقریبی)	10×10^{-6}
چینی	3×10^{-6}
شیشه کوارتز	$0/7\times10^{-6}$
اینوار مخصوص (آلیاژ آهن، نیکل و کُرُم)	$0/03\times10^{-6}$
تنگستن	4×10^{-6}
چوب (عمود بر الیاف)	30×10^{-6}
چوب (به موازات الیاف)	6×10^{-6}
روی	30×10^{-6}
گرافیت	$7/9\times10^{-6}$
چدن	$10/2\times10^{-6}$

مثال ۱-۲: طول یک میله آهنی در $0^\circ c$ برابر $100cm$ می‌باشد. افزایش طول آن را در دمای $250^\circ c$ برحسب mm به‌دست آورید. ضریب انبساط خطی آهن به‌طور متوسط در این فاصله دمایی $14\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ است.

تمرین ۱-۲: طول یک قطعه فلزی در $25^\circ c$ برابر $1/5m$ می‌باشد افزایش طول آن را در دمای $350^\circ c$ برحسب mm به‌دست آورید. ضریب انبساط خطی فلز به‌طور متوسط در این فاصله دمایی $12\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ است.

حل (توسط هنرجو) :

حل :

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها را به‌طور خلاصه همراه با واحد مربوطه می‌نویسیم.

خواسته‌ها	داده‌ها
$L_۲ = ?\ \ cm$ $\Delta L = ?\ \ mm$	$\theta_۱ = ۰^\circ c$ $L_۱ = ۱۰۰^\circ c$ $\theta_۲ = ۲۵۰^\circ c$ $\bar{\alpha} = ۱۴ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^\circ c}$

مرحله ۲) رابطه مربوط به مسأله نوشته می‌شود.

$L_۲ = L_۱(۱ + \bar{\alpha}\Delta\theta)$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق و همچنین می‌دانیم. $\Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱$

$L_۲ = L_۱(۱ + \bar{\alpha}(\theta_۲ - \theta_۱))$

$L_۲ = ۱۰۰(۱ + ۱۴ \times ۱۰^{-۶}(۲۵۰ - ۰)$

$L_۲ = ۱۰۰(۱ + ۱۴ \times ۱۰^{-۶} \times ۲۵۰)$

$L_۲ = ۱۰۰(۱/۰۰۳۵)$

$\boxed{L_۲ = ۱۰۰/۳۵ cm}$

$\Delta L = L_۲ - L_۱$

$\Delta L = ۱۰۰/۳۵ - ۱۰۰$

$\Delta L = ۰/۳۵ cm$

چون ΔL را برحسب mm خواسته است لذا تبدیل واحد از cm به mm انجام می‌دهیم :

$\Delta L = ۰/۳۵ \times ۱۰ mm$

$\boxed{\Delta L = ۳/۵ mm}$

مثال ۲-۲: طول یک میله مسی پس از رسیدن به $500^{\circ}c$ برابر $250cm$ می‌باشد، طول اولیه این میله در $100^{\circ}c$ چقدر است، ضریب انبساط خطی مس در این فاصله دمایی $20\times10^{-6}\frac{1}{^{\circ}c}$ می‌باشد.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته می‌شود.

خواسته‌ها	داده‌ها
$L_1=?\quad cm$	$\theta_1=100^{\circ}c$ $\theta_2=500^{\circ}c$ $L_2=250cm$ $\alpha=20\times10^{-6}\frac{1}{^{\circ}c}$

مرحله ۲) رابطه مربوط به مسأله نوشته می‌شود

$$L_2=L_1(1+\alpha\Delta\theta)$$

در این رابطه

$$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$$

$$L_2=L_1(1+\alpha(\theta_2-\theta_1))$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها

$$250=L_1(1+20\times10^{-6}(500-100))$$

$$250=L_1(1+20\times10^{-6}\times400)$$

$$250=L_1\times1/008$$

طرفین تساوی را بر ضریب L_1 تقسیم می‌کنیم

$$\frac{250}{1/008}=\frac{L_1\times1/008}{1/008}$$

$$\boxed{L_1=248/02cm}$$

تمرین ۲-۲: طول یک میله گرافیتی پس از رسیدن به $600^{\circ}c$ برابر $13500mm$ می‌باشد. طول اولیه میله در $120^{\circ}c$ چقدر است. ضریب انبساط خطی میله در این فاصله دمایی برابر $8\times10^{-6}\frac{1}{^{\circ}c}$ می‌باشد.

حل (توسط هنرجو):

مثال ۳-۲: طول یک میله فلزی در $100^\circ c$ برابر ۱۵۰۰mm و در $500^\circ c$ برابر ۱۵۵cm می‌باشد، ضریب انبساط خطی متوسط این میله فلزی را به‌دست آورید.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\bar{\alpha} = ?$	$\theta_1 = 100^\circ c$ $L_1 = 1500mm$ $\theta_2 = 500^\circ c$ $L_2 = 155cm$

مرحله ۲) تبدیل واحد طول از mm به cm تبدیل می‌شود.

$L_1 = 1500mm$

داریم $1mm = 0/1cm$

$$L_1 = 1500 \times \frac{1}{10} cm$$

$$\boxed{L_1 = 150cm}$$

مرحله ۳) نوشتن رابطه :

$$L_2 = L_1(1 + \bar{\alpha}\Delta\theta)$$

$$L_2 = L_1(1 + \bar{\alpha}(\theta_2 - \theta_1))$$

$$155 = 150(1 + \bar{\alpha}(500 - 100))$$

$$155 = 150(1 + \bar{\alpha} \times 400)$$

عدد ۱۵۰ در عددهای داخل پرانتز ضرب می‌شود.

$$155 = 150 \times 1 + \bar{\alpha} \times 400 \times 150$$

$$155 = 150 + 60000\bar{\alpha}$$

تمرین ۳-۲: قطر یک استوانه فلزی در $120^\circ c$ برابر ۱۸dm و در $650^\circ c$ برابر ۱۸۵۰mm می‌باشد. ضریب انبساط خطی متوسط فلز را به‌دست آورید.

حل (توسط هنرجو):

معلوم‌ها یک طرف تساوی.

$$۱۵۵-۱۵۰=۶۰۰۰۰\bar{\alpha}$$

$$۵=۶۰۰۰۰\bar{\alpha}$$

طرفین بر ضریب مجهول تقسیم می‌شود

$$\frac{\cancel{۶۰۰۰۰}\bar{\alpha}}{\cancel{۶۰۰۰۰}}=\frac{۵}{۶۰۰۰۰}$$

$$\boxed{\bar{\alpha}=۸/۳\times ۱۰^{-۵}\frac{۱}{^{\circ}c}}$$

مثال ۴-۲: طول یک میله فلزی در صفر درجه سانتی‌گراد ۲۰۰۰mm و بعد از حرارت دادن به ۲۰۰۳mm افزایش می‌یابد. درصورتی‌که ضریب انبساط خطی متوسط آن برابر $۱۲/۵\times ۱۰^{-۶}\frac{۱}{^{\circ}c}$ باشد درجه حرارت نهایی میله فلزی را به‌دست آورید.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته می‌شود

داده‌ها	خواسته‌ها
$\theta_{۱}=۰^{\circ}c$ $L_{۱}=۲۰۰۰mm$ $L_{۲}=۲۰۰۳mm$ $\bar{\alpha}=۱۲/۵\times ۱۰^{-۶}\frac{۱}{^{\circ}c}$	$\theta_{۲}=?\quad {}^{\circ}c$

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوطه :

$$L_{۲}=L_{۱}(۱+\bar{\alpha}\Delta\theta)$$

$$L_{۲}=L_{۱}(۱+\bar{\alpha}(\theta_{۲}-\theta_{۱}))$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه :

تمرین ۴-۲: قطر یک بوش فلزی در $۲۰^{\circ}c$ ‏۲/۵cm و بعد از حرارت دادن به ۲۵/۵mm افزایش می‌یابد. درصورتی‌که ضریب انبساط خطی متوسط آن برابر $۱۰/۵\times ۱۰^{-۶}\frac{۱}{^{\circ}c}$ باشد، درجه حرارت نهایی بوش فلزی را به‌دست آورید.

حل (توسط هنرجو):

$$۲۰۰۳ = ۲۰۰۰(1 + ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۶}(\theta_۲ - ۰))$$

$$۲۰۰۳ = ۲۰۰۰(1 + ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۶}\theta_۲)$$

$$۲۰۰۳ = ۲۰۰۰ + ۲۰۰۰ \times ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۶}\theta_۲$$

$$۲۰۰۳ - ۲۰۰۰ = ۰/۰۲۵\theta_۲$$

طرفین تقسیم بر ضریب مجهول

$$\frac{۳}{۰/۰۲۵} = \frac{۰/۰۲۵\theta_۲}{۰/۰۲۵}$$

$$\theta_۲ = \frac{۳}{۰/۰۲۵}$$

$$\boxed{\theta_۲ = ۱۲۰^\circ c}$$

مثال ۵-۲: برای داخل کردن یک میله فولادی به قطر ۵۰/۴mm به درون یک بوش لازم است بوش را گرم کنیم. اگر قطر داخلی بوش ۵۰mm بوده و ضخامت بوش در مقابل قطر آن ناچیز باشد. دمای لازم برای گرم کردن بوش حداقل چند درجه سانتی‌گراد باید باشد؟ (دمای محیط $۲۵^\circ c$ و $\bar{\alpha} = ۱۰ \times ۱۰^{-۶} \frac{1}{^\circ c}$).

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته شود

داده‌ها	خواسته‌ها
$D_۱ = ۵۰mm$ $D_۲ = ۵۰/۴mm$ $\theta_۱ = ۲۵^\circ c$ $\bar{\alpha} = ۱۰ \times ۱۰^{-۶} \frac{1}{^\circ c}$	$\theta_۲ = ? \quad ^\circ c$

تمرین ۵-۲: برای داخل کردن یک میله فولادی به قطر ۶۵/۴mm درون یک بوش، لازم است میله را سرد کنیم، اگر قطر داخلی بوش ۶/۵cm باشد ضخامت بوش در مقابل قطر آن ناچیز باشد، دمای لازم برای سرد کردن میله حداقل چند درجه سانتی‌گراد باید باشد (دمای محیط $۲۵^\circ c$ و ضریب انبساط خطی متوسط برابر $۱۲ \times ۱۰^{-۶} \frac{1}{^\circ c}$ می‌باشد).

حل (توسط هنرجو):

مرحله ۲) نوشتن رابطه $D_2 = D_1(1+\alpha\Delta\theta)$ مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها $50/4 = 50(1+10\times10^{-6}\times\Delta\theta)$ $50/4 = 50\times1+50\times10\times10^{-6}\times\Delta\theta$ $50/4 = 50+5\times10^{-4}\Delta\theta$ $50/4-50 = 5\times10^{-4}\Delta\theta$ $0/4 = 5\times10^{-4}\Delta\theta$ طرفین تقسیم بر ضریب مجهول $\frac{0/4}{5\times10^{-4}} = \frac{\cancel{5\times10^{-4}}\Delta\theta}{\cancel{5\times10^{-4}}}$ $\boxed{\Delta\theta = 800^\circ c}$ $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ $800 = \theta_2 - 25$ $800+25 = \theta_2$ $\boxed{\theta_2 = 825^\circ c}$	
تمرین ۶-۲: طول یک میله آلومینیمی در $5^\circ c$ برابر ۸۵cm است. افزایش طول آن برحسب mm در $155^\circ c$ چقدر می‌شود، ضریب انبساط خطی آلومینیم به‌طور متوسط در این فاصله دمایی $22/5\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ است حل (توسط هنرجو):	

تمرین ۷-۲: طول یک میله مسی در $15^{\circ}c$ برابر $115cm$ است، افزایش طول آن برحسب mm در $185^{\circ}c$ حساب کنید، ضریب انبساط خطی میله مسی به‌طور متوسط در این فاصله دمایی $14\times10^{-6}\frac{1}{^{\circ}c}$ می‌باشد. حل (توسط هنرجو):	

* برای به‌دست آوردن میزان انبساط قطعات و اجسام می‌توان مقدار انبساط ابعاد مختلف آنها را به‌دست آورد سپس به کمک آنها می‌توان اندازه سطح و حجم انبساط یافته را به‌دست آورد. به‌طور مثال اگر یک جسم استوانه‌ای شکل داشته باشید می‌توانیم ابتدا میزان انبساط قطر و ارتفاع آن را به‌دست آوریم و سپس با استفاده از آنها سطح و حجم انبساط یافته را محاسبه نماییم. اما این کار زمان‌بر است و حجم محاسبات را افزایش می‌دهد. به همین منظور باید بتوانیم میزان انبساط سطحی و حجمی را مستقیماً به‌دست آوریم. برای این منظور روابطی مانند رابطه انبساط خطی برای محاسبه میزان انبساط سطح و حجم وجود دارد. در مورد انبساط سطحی رابطه به‌صورت زیر است :

$$A = A_{\circ}(1+\beta\theta)$$

که در آن :

A = میزان سطح انبساط یافته در درجه حرارت θ برحسب مترمربع، سانتی‌مترمربع و میلی‌مترمربع

$A_{\circ}$ = میزان سطح اولیه در درجه حرارت صفر درجه سانتی‌گراد برحسب مترمربع، سانتی‌مترمربع، میلی‌مترمربع

β = ضریب انبساط سطحی برحسب $\frac{1}{^{\circ}c}$ یا $\frac{1}{^{\circ}k}$

θ = درجه حرارت نهایی برحسب $^{\circ}c$ یا $^{\circ}k$

با توجه به تجربیات به‌دست آمده معمولاً ضریب انبساط سطحی (β) را دو برابر ضریب انبساط خطی (α) در نظر می‌گیرند یعنی $\boxed{\beta = 2\alpha}$

رابطه انبساط سطحی را می‌توان برای به‌دست آوردن، میزان انبساط سطحی ایجاد شده هنگامی که از درجه حرارت θ_1 به θ_2 می‌رسیم به‌صورت زیر نوشت :

$$A_2 = A_1(1+\overline{\beta}.\Delta\theta)$$

که در آن :

A_2 = سطح انبساط یافته در درجه حرارت θ_2

A_1 = سطح اولیه در درجه حرارت θ_1

$\overline{\beta}$ = ضریب انبساط سطحی متوسط در فاصله دمایی θ_1 و θ_2 (لازم به توضیح است که با تغییر درجه حرارت میزان انبساط خطی و در نتیجه ضریب انبساط سطحی تغییر می‌کند بنابراین در یک فاصله دمایی ضریب انبساط سطحی متوسط در نظر می‌گیرند).

* در مورد انبساط حجمی رابطه به‌صورت زیر است :

$$V = V_{\circ}(1+\gamma\theta)$$

که در آن :

V = حجم انبساط یافته در درجه حرارت θ برحسب مترمکعب، سانتی‌متر مکعب و میلی‌متر مکعب

$V_\circ$ = حجم انبساط یافته در درجه حرارت صفر درجه سانتی‌گراد برحسب مترمکعب، سانتی‌متر مکعب و میلی‌متر مکعب

γ = ضریب انبساط حجمی برحسب $\frac{1}{^\circ c}$ یا $\frac{1}{^\circ k}$

θ = درجه حرارت نهایی برحسب $^\circ c$ یا $^\circ k$

با توجه به تجربیات به‌دست آمده معمولاً ضریب انبساط حجمی (γ) را سه برابر ضریب انبساط خطی (α) در نظر می‌گیرند یعنی $\boxed{\gamma = 3\alpha}$

همچنین رابطه انبساط حجمی را می‌توان برای به‌دست آوردن میزان انبساط حجمی ایجاد شده هنگامی که از درجه حرارت θ_1 به θ_2 می‌رسیم به‌صورت زیر نوشت :

$$V_2 = V_1(1+\bar{\gamma}\Delta\theta)$$

که در آن :

V_2 = حجم انبساط یافته در درجه حرارت θ_2

V_1 = حجم اولیه در درجه حرارت θ_1

$\bar{\gamma}$ = ضریب انبساط حجمی متوسط در فاصله دمایی θ_1 و θ_2

$\Delta\theta$ = اختلاف درجه حرارت بین θ_1 و θ_2

مثال ۶-۲: یک ورق فلزی با مساحت ۰/۵ مترمربع در $25^\circ c$ را تا $200^\circ c$ حرارت داده‌ایم با فرض این‌که ضریب انبساط خطی متوسط فلز $\frac{1}{^\circ c}\,28\times10^{-6}$ باشد مساحت نهایی ورق را بعد از انبساط برحسب سانتی‌متر مربع به‌دست آورید.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحد مربوطه نوشته شود.

تمرین ۸-۲: یک ورق فلزی به مساحت $6500\,cm^2$ در $35^\circ c$ را تا $300^\circ c$ حرارت داده‌ایم با فرض این‌که ضریب انبساط خطی متوسط فلز $\frac{1}{^\circ c}\,24\times10^{-6}$ باشد، مساحت نهایی ورق را بعد از انبساط برحسب مترمربع به‌دست آورید.

حل (توسط هنرجو):

خواسته‌ها	داده‌ها
$A_2 = ? \quad cm^2$	$A_1 = 0/5 m^2$ $\theta_1 = 25^\circ c$ $\theta_2 = 200^\circ c$ $\overline{\alpha} = 28\times 10^{-6} \frac{1}{^\circ c}$

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوطه :

$$A_2 = A_1(1+\overline{\beta}\Delta\theta)$$

در این رابطه

$$\begin{cases}\overline{\beta} = 2\alpha \\ \Delta\theta = \theta_2 - \theta_1\end{cases}$$

پس خواهیم داشت :

$$A_2 = A_1(1+2\overline{\alpha}(\theta_2 - \theta_1))$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق

$$A_2 = 0/5(1+2\times 28\times 10^{-6}(200-25))$$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی :

$$A_2 = 0/5(1+56\times 10^{-6}\times 175)$$

$$A_2 = 0/5(1+0/0098)$$

$$A_2 = 0/5(1/0098)$$

$$A_2 = 0/5049 m^2$$

چون واحد را به cm^2 خواسته است لذا m^2 را به cm^2 تبدیل می‌کنیم :

$$1m^2 = 10000 cm^2$$

$$A_2 = 0/5049\times 10000 cm^2$$

$$\boxed{A_2 = 5049 cm^2}$$

مثال ۷-۲: یک ورق فلزی به شکل مستطیل با طول و عرض ۱۰۰ و ۵۰ سانتی‌متر در درجه حرارت $25^\circ c$ را تا $250^\circ c$ حرارت داده‌ایم. سطح ورق را برحسب مترمربع پس از انبساط به‌دست آورید. ضریب انبساط خطی متوسط فلز $\bar{\alpha} = 15\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ می‌باشد.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$A_2 = ?\quad m^2$	طول ورق $= 100cm$ عرض ورق $= 50cm$ $\theta_1 = 25^\circ c$ $\theta_2 = 250^\circ c$ $\bar{\alpha} = 15\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$

مرحله ۲) به‌دست آوردن سطح اولیه :

عرض × طول= A_1 مساحت مستطیل

$$A_1 = 100\times50$$

$$A_1 = 5000cm^2$$

مرحله ۳) نوشتن رابطه مربوطه :

$$A_2 = A_1(1+\bar{\beta}\Delta\theta)$$

همان‌طوری که قبلاً گفته شد می‌دانیم که :

$$\bar{\beta} = 2\bar{\alpha}$$

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

لذا خواهیم داشت :

$$A_2 = A_1(1+2\bar{\alpha}(\theta_2-\theta_1))$$

$$A_2 = 5000(1+2\times15\times10^{-6}(250-25))$$

تمرین ۹-۲: یک ورق فلزی به ابعاد $1\times1/5$ متر در درجه حرارت $35^\circ c$ را تا $280^\circ c$ حرارت داده‌ایم. سطح ورق را برحسب سانتی‌مترمربع پس از انبساط به‌دست آورید. ضریب انبساط خطی متوسط $18\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ می‌باشد.

حل (توسط هنرجو):

$$A_2 = 5000(1+30\times10^{-6}\times225)$$

$$A_2 = 5000(1+0/006750)$$

$$A_2 = 5000(1/00675)$$

$$A_2 = 5033/75\,cm^2$$

چون جواب را برحسب m^2 خواسته لذا cm^2 را به m^2 تبدیل می‌کنیم.

$$1m^2 = 10000\,cm^2$$

$$A_2 = 5033/75\times\left(\frac{1}{10000}m^2\right)$$

$$A_2 = \frac{5033/75}{10000}m^2$$

$$\boxed{A_2 = 0/503375\,m^2}$$

مثال ۸-۲: یک ورق آلومینیمی به شکل دایره به شعاع ۰/۸m در دمای $50^\circ c$ را تا $500^\circ c$ حرارت می‌دهیم. مطلوب است سطح نهایی فلز پس از انبساط برحسب سانتی‌متر مربع، ضریب انبساط خطی متوسط $26\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ و $\pi = 3$ می‌باشد.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها را به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$A_2 = ?\quad cm^2$	$R = 0/8m$ $\theta_1 = 50^\circ c$ $\theta_2 = 500^\circ c$ $\bar{\alpha} = 26\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$

مرحله ۲) مساحت دایره را حساب می‌کنیم.

مساحت دایره $= \pi\times(R)^2$

تمرین ۱۰-۲: یک ورق مسی به شکل دایره به قطر ۱۲۰cm در دمای $80^\circ c$ را تا $600^\circ c$ حرارت می‌دهیم. مطلوب است سطح نهایی فلز پس از انبساط برحسب مترمربع، ضریب انبساط خطی متوسط $19\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ و $\pi = 3/14$ می‌باشد.

حل (توسط هنرجو):

$A_۱ = ۳ \times (۰/۸)^۲$

$\boxed{A_۱ = ۱/۹۲\text{m}}$

مرحله ۳) نوشتن رابطه مربوط به مسأله :

$A_۲ = A_۱(۱ + \overline{\beta}\Delta\theta)$

می دانیم که : $\overline{\beta} = ۲\overline{\alpha}$ و $\Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱$ لذا خواهیم داشت :

$A_۲ = A_۱(۱ + ۲\alpha(\theta_۲ - \theta_۱))$

مرحله ۴) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق

$A_۲ = ۱/۹۲(۱ + ۲ \times ۲۶ \times ۱۰^{-۶}(۵۰۰ - ۵۰))$

مرحله ۵) محاسبات ریاضی :

$A_۲ = ۱/۹۲(۱ + ۵۲ \times ۱۰^{-۶} \times ۴۵۰)$

$A_۲ = ۱/۹۲(۱ + ۰/۰۲۳۴)$

$A_۲ = ۱/۹۲(۱/۰۲۳۴)$

$A_۲ = ۱/۹۶۴۹۲۸\text{m}^۲$

چون برحسب $\text{cm}^۲$ خواسته شده، $\text{m}^۲$ را به $\text{cm}^۲$ تبدیل می‌کنیم

$A_۲ = ۱/۹۶۴۹۲۸ \div ۱۰۰۰۰\text{cm}^۲$

$\boxed{A_۲ = ۱۹۶۴۹/۲۸\text{cm}^۲}$

مثال ۹-۲: یک ورق آلومینیم از ۲۵°c تا ۵۰۰°c حرارت داده می‌شود اگر بعد از حرارت دادن مساحت آن به $۰/۵۴\text{m}^۲$ برسد مساحت اولیه ورق در ۲۵°c برحسب سانتی‌متر مربع چقدر خواهد بود. ضریب انبساط خطی متوسط آلومینیم در این فاصله دمایی برابر $۲۴ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^\circ\text{c}}$ است.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه و همراه با واحدها نوشته شود.

تمرین ۱۱-۲: یک ورق فولادی را از ۰°c تا ۹۵۰°c حرارت داده ایم اگر بعد از حرارت دادن مساحت آن به $۷۰۰۰\text{cm}^۲$ برسد مساحت اولیه ورق را در ۰°c برحسب مترمربع حساب کنید. ضریب انبساط خطی متوسط فولاد در این فاصله دمایی برابر $۱۳ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^\circ\text{c}}$ است.

حل (توسط هنرجو):

خواسته‌ها	داده‌ها
$A_1 = ?\ \ cm^2$	$\theta_1 = 25^\circ c$ $\theta_2 = 500^\circ c$ $A_2 = 0/54 m^2$ $\overline{\alpha} = 24 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ c}$

مرحله ۲) رابطه مربوطه نوشته می‌شود

داریم : $\overline{\beta} = 2\overline{\alpha}$ و $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$:

$$A_2 = A_1(1 + \overline{\beta}\Delta\theta)$$

$$A_2 = A_1(1 + 2\overline{\alpha}(\theta_2 - \theta_1))$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق

محاسبات ریاضی :

$$0/54 = A_1(1 + 2 \times 24 \times 10^{-6}(500 - 25))$$

$$0/54 = A_1(1 + 48 \times 10^{-6} \times 475)$$

$$0/54 = A_1 \times 1/0228$$

طرفین تقسیم بر ضریب مجهول

$$\frac{0/54}{1/0228} = \frac{A_1 \times 1/0228}{1/0228}$$

$$A_1 = 0/528 m^2$$

چون جواب را برحسب cm^2 خواسته است لذا m^2 را به cm^2 تبدیل می‌کنیم

$$1m^2 = 10000 cm^2$$

$$A_1 = 0/528 m^2$$

$$A_1 = 0/528 \times 10000 cm^2$$

$$\boxed{A_1 = 5280 cm^2}$$

مثال ۲-۱۰: سطح یک فلز در صفر درجه سانتی‌گراد و $۵۰۰^\circ c$ به ترتیب $۵۸۰cm^۲$ و $۵۹۵cm^۲$ است، ضریب انبساط سطحی و خطی این فلز را در محدوده دمای فوق حساب کنید.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌صورت خلاصه همراه با واحدها نوشته شود

خواسته‌ها	داده‌ها
	$\theta_۱ = ۰^\circ c$
$\bar{\alpha} = ?$	$\theta_۲ = ۵۰۰^\circ c$
$\bar{\beta} = ?$	$A_۱ = ۵۸۰cm^۲$
	$A_۲ = ۵۹۵cm^۲$

مرحله ۲) رابطه مربوطه نوشته می‌شود.

$$A_۲ = A_۱(۱+\bar{\beta}\Delta\theta)$$

$$A_۲ = A_۱(۱+\bar{\beta}(\theta_۲ - \theta_۱))$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$۵۹۵ = ۵۸۰(۱+\bar{\beta}(۵۰۰-۰))$$

$$۵۹۵ = ۵۸۰(۱+۵۰۰\bar{\beta})$$

$$۵۹۵ = ۵۸۰\times۱+۵۸۰\times۵۰۰\bar{\beta}$$

$$۵۹۵ = ۵۸۰+۲۹۰۰۰۰\bar{\beta}$$

معلوم‌ها در یک طرف تساوی قرار می‌گیرند

$$۵۹۵-۵۸۰ = ۲۹۰۰۰۰\bar{\beta}$$

$$۱۵ = ۲۹۰۰۰۰\bar{\beta}$$

طرفین بر ضریب مجهول تقسیم می‌شوند

$$\frac{۱۵}{۲۹۰۰۰۰} = \frac{\cancel{۲۹۰۰۰۰}\bar{\beta}}{\cancel{۲۹۰۰۰۰}}$$

$$\boxed{\bar{\beta} = ۵/۱۷\times۱۰^{-۵}\,\frac{۱}{^\circ c}}$$

تمرین ۲-۱۲: سطح یک فلز در $۲۰^\circ c$ و $۶۰۰^\circ c$ به ترتیب $۰/۹m^۲$ و $۰/۹۰۵m^۲$ است. ضریب انبساط سطحی و خطی این فلز را در محدود دمایی فوق حساب کنید.

حل (توسط هنرجو):

مرحله ۳) محاسبه مقدار α :

$$\bar{\beta} = 2\bar{\alpha}$$

$$5/17 \times 10^{-5} = 2 \times \bar{\alpha}$$

طرفین بر ضریب مجهول تقسیم می‌شود

$$\frac{5/17 \times 10^{-5}}{2} = \frac{2 \times \bar{\alpha}}{2}$$

$$\boxed{\bar{\alpha} = 2/586 \times 10^{-5} \frac{1}{^{\circ}c}}$$

مثال ۱۱-۲: یک ورق از ماده دیرگداز به شکل مستطیل که در $20^{\circ}c$ دارای طول و عرض ۰/۶ و ۰/۵ متر می‌باشد را حرارت می‌دهیم تا مساحت آن به $0/33m^2$ برسد. مطلوب است تعیین درجه حرارت این ورق درصورتی‌که ضریب انبساط خطی متوسط این ماده در این فاصله دمایی $\bar{\alpha} = 15 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}c}$ باشد.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\theta_2 = ?\ \ ^{\circ}c$	$\theta_1 = 20^{\circ}c$ طول $= 0/6m$ عرض $= 0/5m$ $A_2 = 0/33m^2$ $\bar{\alpha} = 15 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}c}$

مرحله ۲) نوشتن روابط مربوطه :

$$\begin{cases} A_1 = \text{طول} \times \text{عرض} \\ \bar{\beta} = 2\bar{\alpha} \end{cases}$$

تمرین ۱۳-۲: یک ورق عایق که در $15^{\circ}c$ دارای ابعاد ۱۰۰ و ۱۲۰ سانتی‌متر می‌باشد را حرارت می‌دهیم تا مساحت آن به $1/2004m^2$ برسد مطلوب است تعیین درجه حرارت این ورق درصورتی‌که ضریب انبساط خطی متوسط این ماده در این فاصله دمایی $0/05 \times 10^{-6} \frac{1}{^{\circ}c}$ می‌باشد.

حل (توسط هنرجو):

$$A_2 = A_1(1+\beta\Delta\theta)$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$A_1 = 0/6 \times 0/5 = 0/3m^2$$

$$\overline{\beta} = 2 \times 15 \times 10^{-6} = 30 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ c}$$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی :

$$0/33 = 0/3(1+30 \times 10^{-6} \times \Delta\theta)$$

$$0/33 = 0/3 \times 1 + 0/3 \times 30 \times 10^{-6} \times \Delta\theta$$

$$0/33 = 0/3 + 9 \times 10^{-6}\Delta\theta$$

معلوم‌ها در یک طرف تساوی قرار می‌گیرند.

$$0/33 - 0/3 = 9 \times 10^{-6}\Delta\theta$$

$$0/03 = 9 \times 10^{-6}\Delta\theta$$

طرفین تساوی بر ضریب مجهول تقسیم می‌شوند

$$\frac{0/03}{9 \times 10^{-6}} = \frac{\cancel{9 \times 10^{-6}}\Delta\theta}{\cancel{9 \times 10^{-6}}}$$

$$\Delta\theta = 3333/3$$

مرحله ۵) به‌دست آوردن θ_2.

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$3333/3 = \theta_2 - 20$$

$$3333/3 + 20 = \theta_2$$

$$\boxed{\theta_2 = 3353/3^\circ c}$$

مثال ۱۲-۲: حجم یک قطعه چدنی در دمای $25^\circ c$ برابر $450cm^3$ است، حجم آن را در $600^\circ c$ به‌دست آورید. ضریب انبساط خطی متوسط چدن در این فاصله دمایی $9 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ c}$ می‌باشد.

تمرین ۱۴-۲: حجم یک قطعه شیشه‌ای در دمای $0^\circ c$ برابر $350cm^3$ است، حجم آن را در $250^\circ c$ به‌دست آورید. ضریب انبساط خطی متوسط چدن در این فاصله دمایی برابر $1 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ c}$ می‌باشد.

حل (توسط هنرجو):

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته می‌شوند

خواسته‌ها	داده‌ها
$\overline{\gamma} = ? \quad \frac{1}{^\circ c}$ $V_2 = ? \quad cm^3$	$\theta_1 = 25^\circ c$ $V_1 = 450^\circ c$ $\theta_2 = 600^\circ c$ $\overline{\alpha} = 9\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوطه :

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$$

$$\overline{\gamma} = 3\overline{\alpha}$$

$$V_2 = V_1(1+\overline{\gamma}\Delta\theta)$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها :

$$\Delta\theta = 600 - 25 = 575^\circ c$$

$$\overline{\gamma} = 3\times9\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$$

$$V_2 = 450(1+3\times9\times10^{-6}\times575)$$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی :

$$V_2 = 450(1+0/01550)$$

$$V_2 = 450\times1/01550$$

$$\boxed{V_2 = 456/976 cm^3}$$

مثال ۱۳-۲: شعاع یک کره فولادی در $25^\circ c$ ، $50 cm$ است حجم آن در $700^\circ c$ چقدر خواهد بود. ضریب انبساط خطی متوسط فولاد در این فاصله دمایی $1/25\times10^{-5}\frac{1}{^\circ c}$ می‌باشد.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه

تمرین ۱۵-۲: قطر یک کره فولادی در $30^\circ c$ برابر $1/2 m$ است. حجم آن را در $650^\circ c$ به‌دست آورید. ضریب انبساط خطی متوسط این فولاد در این فاصله دمایی برابر $12/5\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ می‌باشد.

حل (توسط هنرجو):

با واحدها نوشته شود

داده‌ها	خواسته‌ها
$\theta_{۱} = ۲۵^{\circ}c$ $r = ۵۰cm$ $\theta_{۲} = ۷۰۰^{\circ}c$ $\overline{\alpha} = ۱/۲۵ \times ۱۰^{-۵} \frac{۱}{^{\circ}c}$	$V_{۱} = ? \quad cm^{۳}$ $V_{۲} = ? \quad cm^{۳}$

مرحله ۲) محاسبه حجم کره :

$V_{۱} = \frac{۴}{۳}\pi r^{۳}$ حجم کره

$$V_{۱} = \frac{۴}{۳} \times ۳/۱۴ \times (۵۰)^{۳}$$

$$V_{۱} = \frac{۴}{۳} \times ۳/۱۴ \times ۵۰ \times ۵۰ \times ۵۰$$

$$V_{۱} = \frac{۱۵۷۰۰۰۰}{۳}$$

$$V_{۱} = ۵۲۳۳۳۳/۳cm^{۳}$$

مرحله ۳) نوشتن رابطه مربوطه

$$V_{۲} = V_{۱}(۱ + \overline{\gamma}\Delta\theta)$$

اگر $\Delta\theta = \theta_{۲} - \theta_{۱}$ و $\overline{\gamma} = ۳\overline{\alpha}$ باشد داریم :

$$V_{۲} = V_{۱}(۱ + ۳\overline{\alpha}(\theta_{۲} - \theta_{۱}))$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$V_{۲} = ۵۲۳۳۳۳/۳(۱ + ۳ \times ۱/۲۵ \times ۱۰^{-۵}(۷۰۰ - ۲۵))$$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی

$$V_{۲} = ۵۲۳۳۳۳/۳(۱ + ۳/۷۵ \times ۱۰^{-۵} \times ۶۷۵)$$

$$V_{۲} = ۵۲۳۳۳۳/۳(۱/۰۲۵)$$

$$\boxed{V_{۲} = ۵۳۶۴۱۶/۶۳cm^{۳}}$$

مثال ۱۴-۲: یک قطعه مسی از $۲۰^\circ c$ تا $۴۰۰^\circ c$ حرارت داده می‌شود. اگر حجم آن بعد از حرارت دادن $۹۰۰ cm^۳$ شود. حجم قطعه در $۲۰^\circ c$ برحسب مترمکعب چقدر برده است. ضریب انبساط خطی متوسط مس در این فاصله دمایی $۱۶\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ می‌باشد.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته می‌شود

داده‌ها	خواسته‌ها
$\theta_۱=۲۰^\circ c$ $\theta_۲=۴۰۰^\circ c$ $V_۲=۹۰۰cm^۳$ $\overline{\alpha}=۱۶\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$	$V_۱=?\quad m^۳$

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوط :

$$V_۲=V_۱(۱+\overline{\gamma}\Delta\theta)$$

اگر $\Delta\theta=\theta_۲-\theta_۱$ و $\overline{\gamma}=۳\overline{\alpha}$ باشد داریم :

$$V_۲=V_۱(۱+۳\overline{\alpha}(\theta_۲-\theta_۱))$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$۹۰۰=V_۱(۱+۳\times۱۶\times۱۰^{-۶}(۴۰۰-۲۰))$$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی

$$۹۰۰=V_۱(۱+۴۸\times۱۰^{-۶}\times۳۸۰)$$

$$۹۰۰=V_۱(۱+۰/۰۱۸)$$

$$۹۰۰=V_۱\times۱/۰۱۸$$

طرفین تساوی را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم

$$\frac{۹۰۰}{۱/۰۱۸}=\frac{V_۱\times\cancel{۱/۰۱۸}}{\cancel{۱/۰۱۸}}$$

تمرین ۱۶-۲: یک قطعه آلومینیمی از $۲۵^\circ c$ تا $۴۵۰^\circ c$ حرارت داده می‌شود. اگر حجم آن بعد از حرارت دادن $۷\times۱۰^{-۴}m^۳$ شود. حجم قطعه را در $۲۵^\circ c$ برحسب سانتی‌متر مکعب به‌دست آورید، ضریب انبساط خطی متوسط آلومینیم در فاصله دمایی $۲۶\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ می‌باشد.

حل (توسط هنرجو):

$V_1 = ۸۸۴/۰۹ cm^3$

مرحله ۵) تبدیل واحد. چون جواب را برحسب m^3 خواسته لذا cm^3 را به m^3 تبدیل می‌کنیم

$1m^3 = ۱۰۰۰۰۰۰ cm^3$

طرفین تساوی بر ۱۰۰۰۰۰۰ تقسیم می‌کنیم

$$\frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰} m^3 = \frac{\cancel{۱۰۰۰۰۰۰}}{\cancel{۱۰۰۰۰۰۰}} cm^3$$

$$1cm^3 = \frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰} m^3$$

$$V_1 = ۸۸۴/۰۹ cm^3$$

$$V_1 = ۸۸۴/۰۹ \times \frac{۱}{۱۰۰۰۰۰۰} m^3$$

$$V_1 = ۰/۰۰۰۸۸۴۰۹ m^3$$

$$\boxed{V_1 = ۸/۸۴۰۹ \times ۱۰^{-۴} m^3}$$

مثال ۱۵-۲: حجم یک قطعه فلزی در درجه حرارت‌های $۲۵^\circ c$ و $۴۰۰^\circ c$ به ترتیب $۰/۷m^3$ و $۰/۷۳m^3$ می‌باشد، مطلوب است تعیین ضریب انبساط حجمی و خطی متوسط آن.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\bar{\gamma} = ?$	$\theta_1 = ۲۵^\circ c$
$\bar{\alpha} = ?$	$\theta_2 = ۴۰۰^\circ c$
	$V_1 = ۰/۷ m^3$
	$V_2 = ۰/۷۳ m^3$

تمرین ۱۷-۲: حجم یک قطعه در درجه حرارت‌های $۳۵^\circ c$ و $۳۵۰^\circ c$ به ترتیب $۰/۸m^3$ و $۰/۸۰۴m^3$ می‌باشد ضریب انبساط حجمی و خطی متوسط آن را به‌دست آورید.

حل (توسط هنرجو):

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوط به مسأله :

$$V_2 = V_1(1+\overline{\gamma}\Delta\theta)$$

اگر $\Delta\theta = (\theta_2 - \theta_1)$ باشد داریم :

$$V_2 = V_1(1+\overline{\gamma}(\theta_2 - \theta_1))$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$0/73 = 0/7(1+\overline{\gamma}(400-25))$$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی :

$$0/73 = 0/7(1+\overline{\gamma}\times 375)$$

$$0/73 = 0/7 + 0/7\times 375\times\overline{\gamma}$$

$$0/73 = 0/7 + 262/5\overline{\gamma}$$

اگر عددی از یک طرف تساوی به طرف دیگر تساوی برده شود علامت آن تغییر می‌کند

$$0/73 - 0/7 = 262/5\overline{\gamma}$$

$$0/03 = 262/5\overline{\gamma}$$

طرفین تساوی بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم

$$\frac{0/03}{262/5} = \frac{262/5\overline{\gamma}}{262/5\overline{\gamma}}$$

$$\boxed{\overline{\gamma} = 1/14\times 10^{-4}\,\frac{1}{^{\circ}c}}$$

مرحله ۵) محاسبه ضریب انبساط حرارتی خطی متوسط

$$\overline{\gamma} = 3\overline{\alpha}$$

$$1/14\times 10^{-4} = 3\overline{\alpha}$$

طرفین تساوی بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم

$$\frac{1/14\times 10^{-4}}{3} = \frac{3\overline{\alpha}}{3}$$

$$\boxed{\overline{\alpha} = 3/8\times 10^{-5}\,\frac{1}{^{\circ}c}}$$

مثال ۱۶-۲: حجم یک استوانه برنجی در دمای $۳۰^\circ c$ برابر با $۷۵۰cm^۳$ می‌باشد، پس از حرارت دادن حجم آن به $۷۶۲cm^۳$ می‌رسد. مطلوب است درجه حرارت قطعه پس از حرارت دادن. ضریب انبساط خطی متوسط برنج برابر $۱۷\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ می‌باشد.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدهای مربوطه نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\gamma = ?\ \ \frac{۱}{^\circ c}$	$\theta_۱ = ۳۰^\circ c$
$\theta_۲ = ?\ \ ^\circ c$	$V_۱ = ۷۵۰^\circ c$
	$V_۲ = ۷۶۲^\circ c$
	$\overline{\alpha} = ۱۷\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوط به مسأله :

$$V_۲ = V_۱(۱+\overline{\gamma}\Delta\theta)$$

اگر $\overline{\gamma} = ۳\overline{\alpha}$ باشد داریم :

$$V_۲ = V_۱(۱+۳\overline{\alpha}\Delta\theta)$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق

$$۷۶۲ = ۷۵۰(۱+۳\times۱۷\times۱۰^{-۶}\Delta\theta)$$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی

$$۷۶۲ = ۷۵۰+۷۵۰\times۳\times۱۷\times۱۰^{-۶}\Delta\theta$$

$$۷۶۲ = ۷۵۰+۰/۰۳۸\Delta\theta$$

عددهای معلوم در یک طرف تساوی قرار می‌گیرند

$$۷۶۲-۷۵۰ = ۰/۰۳۸\Delta\theta$$

$$۱۲ = ۰/۰۳۸\Delta\theta$$

تمرین ۱۸-۲: حجم یک استوانه فولادی در دمای $۲۵^\circ c$ برابر $۶/۵\times۱۰^{-۴}m^۳$ می‌باشد. پس از حرارت دادن حجم آن به $۶۶۰cm^۳$ می‌رسد. درجه حرارت قطعه را پس از حرارت دادن به‌دست آورید. ضریب انبساط خطی فولاد برابر $۱۲\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ می‌باشد.

حل (توسط هنرجو):

طرفین تساوی بر ضریب مجهول تقسیم می‌شود

$$\frac{۱۲}{۰/۰۳۸}=\frac{۰/۰۳۸\Delta\theta}{۰/۰۳۸}$$

$$\Delta\theta=۳۱۵/۷۹^\circ c$$

مرحله ۵) محاسبه $\theta_۲$:

$$\Delta\theta=\theta_۲-\theta_۱$$

$$۳۱۵/۷۹=\theta_۲-۳۰$$

$$۳۱۵/۷۹+۳۰=\theta_۲$$

$$\boxed{\theta_۲=۳۴۵/۷۹^\circ c}$$

تمرین ۱۹-۲: حجم یک گلوله فولادی در $۱۰^\circ c$ برابر $۲۸۳/۵cm^۳$ است. حجم آن در $۴۸۲^\circ c$ چقدر خواهد بود. ضریب انبساط خطی فولاد در این فاصله دمایی به‌طور متوسط $۱۲\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ می‌باشد.

حل (توسط هنرجو):

تمرین ۲۰-۲: یک ورق آهنی به شکل مستطیل که طول و عرض آن در $30^{\circ}c$ به ترتیب ۰/۳ و ۰/۵ متر است تا $135^{\circ}c$ گرم می‌کنیم سطح ورق را بعد از انبساط برحسب cm^2 حساب کنید. ضریب انبساط خطی متوسط آهن در این فاصله دمایی $14/5\times10^{-6}\frac{1}{^{\circ}c}$ می‌باشد.

حل (توسط هنرجو):

۱-۲-۲- انبساط ظاهری و حقیقی مایعات :

درصورتی‌که یک مقدار معین مایع یا مذاب که درون یک ظرف قرار دارد حرارت داده شود، علاوه بر مایع، ظرف حاوی مایع نیز منبسط می‌شود. در این حالت انبساط حجمی مایع به علت انبساط ظرف حاوی مایع کمتر از انبساط حقیقی مایع به‌نظر می‌رسد که به آن انبساط ظاهری مایع می‌گویند. بنابراین در محاسبات باید دقت شود که انبساط ظاهری مایعات در اثر حرارت دادن کمتر از انبساط حقیقی آنها است. به همین منظور برای به‌دست آوردن میزان انبساط واقعی مایعات باید انبساط ظاهری مایع را با انبساط ظرف جمع نمود، یا به عبارت دیگر :

$$\gamma_L = \gamma + \gamma_\beta$$

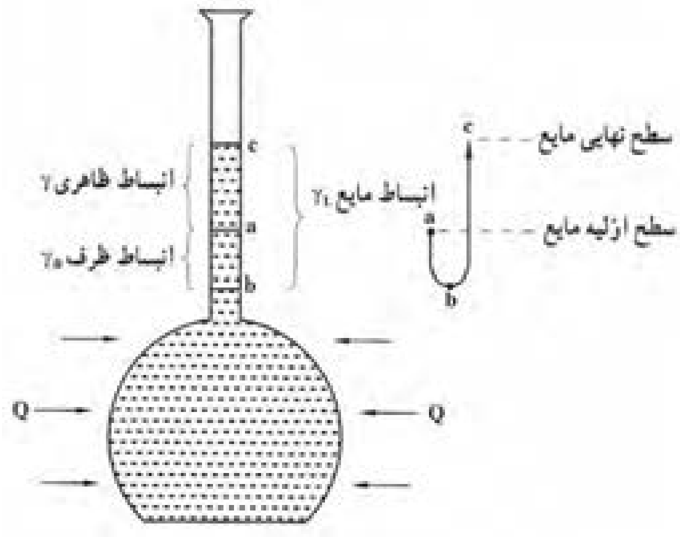
که در آن :

γ_L : انبساط حقیقی مایع

γ : میزان انبساط ظاهری مایع

γ_β : میزان انبساط حجمی ظرف

این موضوع در شکل ۱-۲ نشان داده شده است.



شکل ۱-۲- تعیین انبساط حقیقی مایع

۳-۲- انقباض اجسام در اثر کاهش درجه حرارت :

اجسام همان‌طور که در اثر حرارت دادن انبساط پیدامی کنند و ابعادشان بزرگ‌تر می‌شود. هنگامی که سرد می‌شوند و حرارت خود را از دست می‌دهند ابعاد، سطوح و حجم آنها کاهش می‌یابد که این کاهش ابعاد، سطوح و حجم آنها در اثر کاهش درجه حرارت را انقباض می‌نامند. به‌طور مثال هنگامی که مذاب فلز در قالب ریخته‌گری می‌شود پس از گذشت زمان و از دست دادن درجه حرارت به تدریج کاهش حجم پیدا کرده و منقبض می‌شود که این مسأله با پایین رفتن سطح مذاب از راهگاه کاملاً مشهود است.

براساس تجربیات گذشته و آزمایشات صورت گرفته میزان انقباض در اثر کاهش حرارت برابر با میزان انبساط در اثر حرارت دادن است. بنابراین تمام روابطی که برای انبساط طولی، سطحی و حجمی اجسام ذکر شده است، در مورد انقباض اجسام نیز صادق است. به عنوان مثال در مورد انقباض خطی رابطه به‌صورت زیر است :

$$L_{۲} = L_{۱}(۱+\alpha\Delta\theta)$$

که در آن :

$L_{۲}$: طول جسم منقبض شده در درجه حرارت $\theta_{۲}$

$L_{۱}$: طول جسم اولیه (قبل از انقباض) در درجه حرارت $\theta_{۱}$

α : ضریب انبساط خطی

$\theta_{۲}$: درجه حرارت نهایی

$\theta_{۱}$: درجه حرارت اولیه

که $\theta_{۲} < \theta_{۱}$ است.

به همین ترتیب رابطه برای انقباض سطحی و حجمی به ترتیب به‌صورت زیر است :

$$A_۲ = A_۱(۱+\beta\Delta\theta)$$

$$V_۲ = V_۱(۱+\gamma\Delta\theta)$$

که در آنها $\Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱$ و $\theta_۲ < \theta_۱$ می‌باشد.

همان‌طوری که در مثال ذکر شد ریخته‌گری فلزات و آلیاژها به علت کاهش درجه حرارت مذاب در قالب، انقباض در حالت مذاب از درجه حرارت مذاب تا رسیدن به درجه حرارت انجماد، انقباض حین انجماد در درجه حرارت انجماد و انقباض بعد از انجماد در حالت جامد تا رسیدن به درجه حرارت محیط در قطعه اتفاق می‌افتد، که اهمیت زیادی دارد.

۱-۳-۲- انقباض در حالت مذاب :

مذاب برای ریخته‌گری در قالب معمولاً تا $۱۰۰^\circ c$ الی $۲۰۰^\circ c$ بالاتر از نقطه ذوب حرارت داده می‌شود، سپس به داخل قالب ریخته می‌شود. این درجه حرارت فوق ذوب یا فوق گداز نام دارد. هنگامی که مذاب به داخل قالب ریخته می‌شود با گذشت زمان، درجه حرارت تا رسیدن به نقطه انجماد فلز کاهش می‌یابد که در اثر آن حجم مذاب کاهش می‌یابد که آن را انقباض در حالت مذاب می‌نامند، که برای جبران این انقباض، کافی است که مقداری مذاب به داخل قالب اضافه شود که مقدار این انقباض از رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\Delta V = V_m . \bar{\gamma}(\theta_p - \theta_m)$$

که در آن :

ΔV : انقباض حجمی مذاب برحسب $cm^۳$

V_m : حجم محفظه قالب برحسب $cm^۳$

$\bar{\gamma}$: ضریب انبساط حجمی متوسط مذاب در فاصله دمایی نقطه فوق ذوب تا نقطه ذوب برحسب $\frac{۱}{^\circ c}$

θ_p : درجه حرارت ریختن مذاب (فوق ذوب) برحسب $^\circ c$

θ_m : درجه حرارت انجماد برحسب $^\circ c$

مثال ۱۷-۲: یک میله آهنی به طول $۱۰۰ cm$ در درجه حرارت $۸۰۰^\circ c$ را با هوای سرد خنک می‌کنیم مطلوب است طول نهایی این میله آهنی در درجه حرارت $۲۵^\circ c$. ضریب انبساط خطی متوسط در این فاصله دمایی برابر است با $۱۱/۵ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^\circ c}$	تمرین ۲۱-۲: یک قطعه مسی به طول $۱/۲ m$ در درجه حرارت $۶۰۰^\circ c$ را با هوای سرد خنک می‌کنیم. مطلوب است طول نهایی این قطعه مسی در درجه حرارت $۰^\circ c$، ضریب انبساط خطی متوسط در این فاصله دمایی برابر است با $۱۸ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^\circ c}$

<table>
<tr>
<td>

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه و همراه با واحدها نوشته می‌شود.

داده‌ها	خواسته‌ها
$L_۱ = ۱۰۰cm$ $\theta_۱ = ۸۰۰^\circ c$ $\theta_۲ = ۲۵^\circ c$ $\bar{\alpha} = ۱۱/۵ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^\circ c}$	$L_۲ = ? \quad cm$

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوط به حل مسأله :

$L_۲ = L_۱(۱ + \alpha\Delta\theta)$

می دانیم که $\Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱$

$L_۲ = L_۱(۱ + \alpha(\theta_۲ - \theta_۱))$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول

$L_۲ = ۱۰۰(۱ + ۱۱/۵ \times ۱۰^{-۶}(۲۵ - ۸۰۰))$

$L_۲ = ۱۰۰(۱ + ۱۱/۵ \times ۱۰^{-۶}(-۷۷۵))$

$L_۲ = ۱۰۰(۱ + (-۸/۹ \times ۱۰^{-۳}))$

$L_۲ = ۱۰۰(۰/۹۹)$

$\boxed{L_۲ = ۹۹cm}$

</td>
<td>

حل (توسط هنرجو):

</td>
</tr>
<tr>
<td>

مثال ۱۸-۲: یک ورق آلومینیمی مستطیل شکل به طول و عرض $۸۰cm$ و $۴۰cm$ در دمای $۴۵۰^\circ c$ را خنک می‌کنیم. مطلوب است سطح نهایی آن در درجه حرارت $۳۰^\circ c$. ضریب انبساط خطی متوسط آلومینیم $۲۲ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^\circ c}$ می‌باشد.

</td>
<td>

تمرین ۲۲-۲: یک ورق برنجی به ابعاد ۱×۰/۸۵ متر در دمای $۳۰۰^\circ c$ را خنک می‌کنیم. مطلوب است سطح نهایی آن در درجه حرارت $۲۰^\circ c$. ضریب انبساط خطی متوسط برنج $۱۹ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^\circ c}$ می‌باشد.

حل (توسط هنرجو):

</td>
</tr>
</table>

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه و همراه با واحدها نوشته می‌شود

داده‌ها	خواسته‌ها
طول $= ۸۰cm$	$\bar{\beta} = ? \quad \frac{۱}{^\circ c}$
عرض $= ۴۰cm$	$A_۱ = ? \quad cm^۲$
$\theta_۱ = ۴۵۰^\circ c$	$A_۲ = ? \quad cm^۲$
$\theta_۲ = ۳۰^\circ c$	
$\bar{\alpha} = ۲۲\times۱۰^{-۶} \frac{۱}{^\circ c}$	

مرحله ۲) نوشتن رابطه‌های مربوطه :

می دانیم که :

$$A_۲ = A_۱(۱+\bar{\beta}\Delta\theta)$$

$$\begin{cases} A_۱ = \text{عرض} \times \text{طول} \\ A_۱ = ۸۰\times۴۰ \\ A_۱ = ۳۲۰۰cm^۲ \\ \bar{\beta} = ۲\bar{\alpha} \\ \Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱ \end{cases}$$

$$A_۲ = A_۱(۱+۲\bar{\alpha}(\theta_۲ - \theta_۱))$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق

$$A_۲ = ۳۲۰۰\times(۱+۲\times۲۲\times۱۰^{-۶}(۳۰-۴۵۰))$$

$$A_۲ = ۳۲۰۰\times(۱+۴۴\times۱۰^{-۶}\times(-۴۲۰))$$

$$A_۲ = ۳۲۰۰\times(۱+(-۰/۰۱۸))$$

$$A_۲ = ۳۲۰۰\times۰/۹۸۲$$

$$\boxed{A_۲ = ۳۱۴۲/۴cm^۲}$$

مثال ۱۹-۲: حجم یک قطعه برنجی در $500^\circ c$ برابر $100 cm^3$ است حجم قطعه در $20^\circ c$ چقدر خواهد بود. ضریب انبساط خطی متوسط برنج برابر $17\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ است.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌صورت خلاصه و همراه با واحدها نوشته می‌شود

داده‌ها	خواسته‌ها
$V_1=100 cm^3$ $\theta_1=500^\circ c$ $\theta_2=20^\circ c$ $\overline{\alpha}=17\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$	$V_2=?\quad cm^3$

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوط به حل مسأله :

$V_2=V_1(1+\overline{\gamma}\Delta\theta)$

با توجه به این‌که $\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$ و $\overline{\gamma}=3\overline{\alpha}$ داریم :

$V_2=V_1(1+3\overline{\alpha}(\theta_2-\theta_1))$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$V_2=100(1+3\times17\times10^{-6}(20-500))$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی

$V_2=100(1+51\times10^{-6}(-480))$

$V_2=100(1+(-0/02))$

$V_2=100\times0/98$

$\boxed{V_2=98 cm^3}$

تمرین ۲۳-۲: حجم یک قطعه شیشه‌ای در دمای $500^\circ c$ برابر $1/5\times10^{-4} cm^3$ است، حجم قطعه در $0^\circ c$ چقدر خواهد بود. ضریب انبساط خطی متوسط شیشه برابر $8\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ است.

حل (توسط هنرجو):

مثال ۲۰-۲: حجم محفظه یک قالب ریخته‌گری برای تولید یک قطعه آلومینیمی $۵۰۰cm^۳$ است. درصورتی‌که دمای مذاب آلومینیم در هنگام ریختن $۷۲۰^\circ c$ و نقطه ذوب آلومینیم $۶۶۰^\circ c$ باشد. انقباض حجمی مذاب را برحسب سانتی‌مترمکعب حساب کنید. ضریب انبساط حجمی متوسط مذاب در فاصله دمایی نقطه ذوب تا نقطه فوق ذوب $۹۰\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ می‌باشد.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌صورت خلاصه و همراه با واحدهای خواسته شده نوشته می‌شود

داده‌ها	خواسته‌ها
$V_m=۵۰۰cm^۳$ $\theta_p=۷۲۰^\circ c$ $\theta_m=۶۶۰^\circ c$ $\bar{\gamma}=۹۰\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$	$\Delta V=?\quad cm^۳$

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوط به حل مسأله :

$$\Delta V=V_m.\bar{\gamma}(\theta_p-\theta_m)$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر معلوم در رابطه فوق

$$\Delta V=۵۰۰\times۹۰\times۱۰^{-۶}(۷۲۰-۶۶۰)$$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی

$$\Delta V=۵۰۰\times۹۰\times۱۰^{-۶}\times۶۰$$

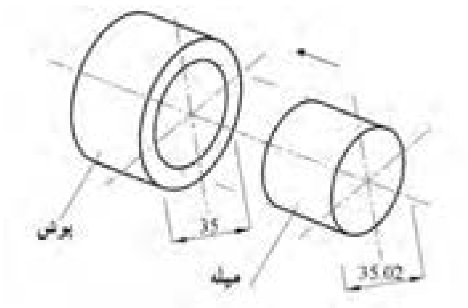
$$\boxed{\Delta V=۲/۷cm^۳}$$

تمرین ۲۴-۲: حجم محفظه یک قالب ریخته‌گری برای تولید یک قطعه چدن $۴۵۰cm^۳$ است. درصورتی‌که دمای مذاب چدن در هنگام ریختن $۱۶۰۰^\circ c$ و نقطه ذوب $۱۴۵۰^\circ c$ باشد. انقباض حجمی مذاب را برحسب مترمکعب حساب کنید. ضریب انبساط حجمی متوسط مذاب در فاصله دمایی نقطه ذوب تا نقطه فوق ذوب $۴۵\times۱۰^{-۵}\frac{۱}{^\circ c}$ می‌باشد.

حل (توسط هنرجو):

تمرین ۲۵-۲: برای داخل کردن یک میله فولادی به درون یک بوش مطابق شکل زیر لازم است که آن را سرد کنیم. اگر ضریب انبساط خطی این فولاد به‌طور متوسط $14\times10^{-6}\frac{1}{^{\circ}c}$ و درجه حرارت محیط $30^{\circ}c$ باشد دمای میله چند درجه سانتی‌گراد خواهد بود.

حل (توسط هنرجو):



شکل۲-۲- نحوه جا زدن میله درون یک بوش بر اثر برودت و سرما

انقباض حین انجماد (خمیری) :

پس از این‌که مذاب به درجه حرارت انجماد رسید مذاب شروع به انجماد می‌کند. در حین انجماد نیز حجم مذاب و جامد به وجود آمده کاهش یافته و مجدداً منقبض می‌شود. این انقباض و کاهش حجم اگر جبران نشود قطعه معیوب خواهد شد. برای این منظور معمولاً این انقباض و کاهش حجم را با طراحی صحیح سیستم‌های تغذیه گذاری جبران می‌کنند تا از ایجاد عیوب انقباض در حین انجماد مذاب در محفظه قالب جلوگیری کند. انقباض یا انبساط در طول مدت انجماد یا ذوب در منطقه جامد و مایع به شکل ساختمانی و ماهیت مایع و جامد بستگی دارد. معمولاً فلزات و آلیاژها در این منطقه ۲ تا ۸ درصد حجمی انقباض یا انبساط پیدا می‌کنند. بعضی فلزات و آلیاژها در جریان انجماد از منطقه جامد و مایع به جای انقباض، منبسط می‌شوند. بیسموت و آنتیموان و بعضی از آلیاژها نظیر چدن‌های خاکستری و انواع چدن با گرافیت کروی در حین انجماد منبسط می‌شوند.

با شروع انجماد و هنگامی که ذرات جامد و مذاب با هم در حال تعادل هستند نمی‌توان مذاب اضافی را وارد

قالب نمود زیرا کاهش و کمبودهای حجم در این منطقه در تمام قطعه پراکنده می‌شوند، اما در یک نقطه متمرکز نمی‌شوند.

۲-۳-۲- انقباض در حالت جامد :

پس از آن‌که مذاب به‌طور کامل منجمد شد، تا رسیدن فلز به درجه حرارت محیط، حجم قطعه کاهش می‌یابد، این کاهش حجم را انقباض در حالت جامد می‌نامند. انقباض در حالت جامد را با بزرگ‌تر در نظر گرفتن مدل، می‌توان جبران نمود. برای این منظور طراح و مدلساز اضافه مجاز انقباض را در مدل منظور می‌نماید. این اضافه مجاز که به‌صورت درصد بیان می‌شود به ابعاد مدل افزوده می‌شود تا پس از انقباض قطعه در حالت جامد به اندازه مورد نظر برسد.

درصد اضافه مجاز انقباض در ریخته‌گری به عوامل زیر بستگی دارد :

- جنس و نوع آلیاژ
- ابعاد و اندازه مدل
- نوع و جنس قالب

فلزات مختلف دارای نقاط ذوب و ضریب انبساط منحصربه فردی می‌باشند و نقاط ذوب و ضریب انبساط خطی یکسانی دارند. معمولاً عناصر آلیاژی موجود در آلیاژها سبب تغییر در نقاط ذوب (معمولاً به‌صورت کاهش) و تغییر ضریب انبساط حرارتی فلز اصلی می‌شوند. در نتیجه این عوامل سبب تغییر در مقدار انقباض در حالت جامد شده بنابراین مقدار اضافه مجاز انقباض نیز تغییر خواهد کرد.

ابعاد مدل نیز در مقدار اضافه مجاز مؤثر است. هرچه قدر که طول قطعه بیشتر باشد مقدار اضافه مجاز انقباض کمتری نسبت به قطعات با طول کمتر، برای آنها در نظر می‌گیرند. علت این است که در قطعات با طول بیشتر مقداری از انقباض ایجاد شده در حالت جامد در ریز ساختار قطعه (یا دانه‌های آن) مستهلک می‌شود. جنس قالب، نوع انجماد و سرعت انجماد نیز در مقدار انقباض قطعه مؤثر می‌باشد، علت این مسأله به نوع ریز ساختار فلز (دانه‌بندی) آن بر می‌گردد. به عنوان مثال ضریب انبساط یا انقباض خطی قطعاتی که در قالب‌های فلزی ریخته‌گری می‌شوند نسبت به قطعاتی که در قالب‌های ماسه‌ای ریخته‌گری می‌شوند، متفاوت است، علت این است که قطعات ریختگی در قالب‌های فلزی دارای دانه‌های ریزتر و در جهات مشخص می‌باشند، اما قطعات ریختگی در قالب‌های ماسه‌ای دارای دانه‌های درشت‌تر و بدون جهت می‌باشند.

در نقطه انجماد (یا ذوب)، تغییرات (افزایش یا کاهش) مقدار حرارت باعث تغییر نوع اتصال اتم‌ها می‌شود و سبب تبدیل جامد به مذاب و برعکس می‌شود. در این حالت انبساط یا انقباض حجمی با درجه حرارت رابطه ساده (یا خطی) نداشته و به تبدیلات ساختاری فلز ارتباط می‌یابد. معمولاً بیشتر عناصر و ترکیبات در مراحل مختلف

سرد شده، کاهش حجم یا انقباض پیدا می‌کنند. در مورد فلزات یا آلیاژها میزان تغییرات حجمی از حالت مذاب به جامد برابر با مجموع انقباض‌های منطقه مایع، فاصله انجماد (خمیری) و حالت جامد است.

در مورد مذاب چدن خاکستری هنگامی که سرد می‌شود تا درجه حرارت انجماد، انقباض در آن اتفاق می‌افتد. در فاصله انجماد (خمیری) چدن خاکستری برخلاف دیگر فلزات است که انقباض پیدا می‌کنند، انبساط می‌یابد که علت آن در حقیقت به آزاد شدن کربن و رسوب آن به‌صورت گرافیت ارتباط دارد، این پدیده سبب می‌شود که انقباضی که در حین انجماد در چدن خاکستری به وجود می‌آید، جبران شده و حتی مقداری انبساط نیز در آن حاصل شود. اما پس از این‌که چدن خاکستری جامد شد، با سرد شدن تا درجه حرارت محیط منقبض می‌شود.

برای به‌دست آوردن درصد اضافه مجاز انقباض خطی یک جسم جامد در فاصله حرارتی نقطه ذوب تا درجه حرارت محیط برحسب ضریب انبساط خطی متوسط از رابطه زیر استفاده می‌شود.

$$\%s = \bar{\alpha}(\theta_m - \theta_i) \times ۱۰۰$$

که در آن :

$\%s$: اضافه مجاز انقباض خطی (تئوری) برحسب درصد

$\bar{\alpha}$: ضریب انبساط خطی متوسط فلز جامد در فاصله دمایی θ_m (نقطه ذوب) تا θ_i (درجه حرارت محیط برابر $۲۵^\circ c$) است.

با توجه به رابطه فوق درصد انقباض خطی (تئوری) ($\%s$) مشخص می‌شود. همچنین با معلوم بودن ابعاد قطعه ریختگی (مطابق نقشه قطعه طراحی شده) می‌توان ابعاد مدل (یا قالب) را با استفاده از رابطه زیر به‌دست آورد.

$$\alpha_m = \alpha_c\left(۱ + \frac{\%s}{۱۰۰}\right)$$

که در آن :

α_c : اندازه قطعه ریختگی برحسب cm

α_m : اندازه مدل (یا قالب) برحسب cm

$\%s$: اضافه مجاز انقباض تئوری (خطی) برحسب درصد

در جدول زیر درصد اضافه مجاز انقباض خطی (تئوری) برای بعضی از فلزات و آلیاژهای ریختگی نشان داده شده است.

جدول ۲-۲- درصد اضافه مجاز انقباض خطی آلیاژها (تئوری)

آلیاژ	درصد انقباض	آلیاژ	درصد انقباض
چدن‌های خاکستری	۱/۳-۰/۶	آلیاژهای آلومینیم و سیلیسیم	۱/۶-۱/۳
چدن‌های سفید (مالی بل)	۲	آلیاژهای آلومینیم و منیزیم	۱/۲
فولادهای ساده کربنی	۲-۱/۵	آلومینیم برنزها	۲/۵-۲
فولاد کرم دار	۲	برنج‌ها و برنزها	۱/۶-۱/۳
فولادهای منگنزدار	۲/۵	آلیاژهای سرب و آنتیموان	۲/۵-۱/۵
روی و آلیاژهای روی	۲/۶	آلیاژهای قلع	۲-۱/۵

مثال ۲۱-۲: ضریب انبساط خطی آلومینیم به‌طور متوسط از درجه حرارت $20^\circ c$ تا نقطه ذوب $660^\circ c$ برابر $28\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ می‌باشد مطلوب است محاسبه :

الف) درصد اضافه مجاز انقباض

ب) اندازه طول مدل درصورتی‌که طول قطعه ریختگی $100cm$ باشد

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه و همراه با واحدها نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\%s=?$ $\alpha_m=?$	$\theta_i=20^\circ c$ $\theta_m=660^\circ c$ $\overline{\alpha}=28\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ $\alpha_c=100cm$

مرحله ۲) رابطه‌های مربوط به حل مسأله نوشته می‌شود

$$\%s=\overline{\alpha}(\theta_m-\theta_i)\times100$$

تمرین ۲۶-۲: ضریب انبساط خطی مس به‌طور متوسط از درجه حرارت $25^\circ c$ تا نقطه ذوب $1056^\circ c$ برابر $17\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ می‌باشد.

الف) درصد اضافه مجاز انقباض را به‌دست آورید

ب) اندازه طول مدل درصورتی‌که طول قطعه ریختگی $1100mm$ باشد را به‌دست آورید.

حل (توسط هنرجو):

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول

$$\%s = ۲۸\times۱۰^{-۶}(۶۶۰-۲۰)\times۱۰۰$$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی

$$\%s = ۲۸\times۱۰^{-۶}\times۶۴۰\times۱۰۰$$

$$\boxed{\%s = \%۱/۷۹}$$

مرحله ۵) رابطه مربوطه نوشته می‌شود

$$a_m = a_c(۱+\frac{\%s}{۱۰۰})$$

$$a_m = ۱۰۰(۱+\frac{۱/۷۹}{۱۰۰})$$

$$a_m = ۱۰۰\times۱/۰۱۷۹$$

$$\boxed{a_m = ۱۰۱/۷۹}$$

مثال ۲۲-۲: ضریب انبساط خطی آلیاژی از چدن به‌طور متوسط از درجه حرارت $۲۵^\circ c$ تا نقطه ذوب آن $۱۴۵۰^\circ c$ برابر $۱۴\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ می‌باشد. مطلوب است محاسبه و تعیین :

الف) درصد اضافه مجاز انقباض

ب) اندازه طول مدل درصورتی‌که طول قطعه ریختگی $۵۰cm$ است.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\%s = ?$ $a_m = ?$	$\theta_i = ۲۵^\circ c$ $\theta_m = ۱۴۵۰^\circ c$ $\bar{\alpha} = ۱۴\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ $a_c = ۵۰cm$

تمرین ۲۷-۲: ضریب انبساط خطی آلیاژی از روی به‌طور متوسط از درجه حرارت $۱۵^\circ c$ تا نقطه ذوب آن $۴۲۰^\circ c$ برابر $۳۰\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ می‌باشد.

الف) درصد اضافه مجاز انقباض آن را حساب کنید.

ب) اندازه قطر مدل درصورتی‌که قطر قطعه ریختگی $۰/۸۵m$ باشد را به‌دست آورید.

حل (توسط هنرجو):

مرحله ۲) نوشتن رابطه‌های مربوطه :

$$\%s = \overline{\alpha}(\theta_m - \theta_i)\times 100$$

$$\%s = 14\times 10^{-6}(1450 - 25)\times 100$$

مرحله ۳) محاسبات ریاضی :

$$\%s = 14\times 10^{-6}\times 1425\times 100$$

$$\boxed{\%s = \%1/995}$$

مرحله ۴) نوشتن رابطه دیگری

$$a_m = a_c(1+\frac{\%s}{100})$$

$$a_m = 50(1+\frac{1/995}{100})$$

$$a_m = 50\times 1/01995$$

$$\boxed{a_m = 50/995}$$

تمرین ۲۸-۲: ضریب انبساط خطی یک نوع آلیاژ مس به‌طور متوسط از درجه حرارت محیط $25^\circ c$ تا نقطه ذوب $1030^\circ c$ برابر است با $19\times 10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ مطلوبست:

الف) محاسبه درصد اضافه مجاز انقباض

ب) اندازه طول مدل درصورتی‌که طول قطعه ریختگی ۷۵cm باشد.

حل (توسط هنرجو):

تمرین ۲۹-۲: ضریب انبساط خطی یک نوع آلیاژ برنج به‌طور متوسط از درجه حرارت $۳۵^\circ c$ تا نقطه ذوب $۹۵۸^\circ c$ برابر است با $۲۰\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ مطلوبست محاسبه : الف) درصد اضافه مجاز انقباض ب) اندازه طول مدل، درصورتی‌که طول قطعه ریختگی ۸۵cm باشد حل (توسط هنرجو):	
تمرین ۳۰-۲: ضریب انبساط خطی آلیاژ برنج (۶۵٪ مس و ۳۵٪ روی) از $۴۰^\circ c$ تا $۹۲۵^\circ c$ برابر $۱۶\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ است مطلوب است محاسبه و تعیین درصد اضافه مجاز انقباض در طراحی مدل و همچنین اندازه طول مدل، درصورتی‌که طول قطعه ریختگی ۷۵cm باشد. حل (توسط هنرجو):	

	تمرین ۳۱-۲: قطعه‌ای مکعب مستطیل شکل به ابعاد ۲۰×۶۰×۱۰ سانتی‌متر از جنس آلیاژی از آلومینیم با ضریب انبساط خطی $22\times10^{-6}\frac{1}{^\circ c}$ را می‌خواهیم ریخته‌گری کنیم، اگر نقطه ذوب آلیاژ $630^\circ c$ و دمای محیط $27^\circ c$ باشد مطلوبست : الف) محاسبه درصد اضافه مجاز انقباض ب) محاسبه ابعاد مدل این قطعه حل (توسط هنرجو):

انقباض تئوری که در قسمت قبل نحوه محاسبه آن ارائه گردید معمولاً با توجه به مواردی با انقباض عملی متفاوت است. این موارد بستگی به نحوه سرد شدن مذاب، نوع انجماد، سرعت انجماد و درجه حرارت شروع انجماد، نوع قالب، ابعاد قالب، تنش تسلیم قالب، پیچیده یا ساده بودن قالب می‌باشند که باعث ایجاد اختلافاتی بین انقباض عملی و تئوری می‌شوند. بنابراین برای به‌دست آوردن انقباض عملی لازم است که درصد انقباض تئوری در یک ضریب (k) که به عوامل ذکر شده بستگی دارد، ضرب شود. به عبارت دیگر خواهیم داشت :

$$\%s_{pr} = k \times \%s$$

که در آن :

$\%s_{pr}$: انقباض عملی برحسب درصد

$\%s$: انقباض تئوری برحسب درصد

k : ضریبی است که بستگی به عوامل ذکر شده دارد و معمولاً برای قالب‌های ماسه‌ای کوچک‌تر از یک می‌باشد.

همان‌طوری که از جدول مشاهده می‌شود هرچه قدر که ابعاد قطعه ریختگی بزرگ‌تر و جرم قطعه بیشتر باشد، درصد انقباض آن کوچک‌تر خواهد بود.

جدول ۳-۲- درصد اضافه مجاز انقباض خطی آلیاژها (عملی)

آلیاژ	اندازه قطعه ریختگی	جرم قطعه ریختگی kg	انقباض خطی ٪
چدن	کوچک	تا ۱۰۰	۱-۰/۷۵
	متوسط	۱۰۰ تا ۱۰۰۰	۱-۰/۵
	بزرگ و خیلی بزرگ	بیشتر از ۱۰۰۰	۰/۷۵-۰/۵
فولاد ساده کربنی	کوچک	تا ۱۰۰	۲/۲-۱/۵
	متوسط	۱۰۰ تا ۱۰۰۰	۲-۱/۵
	بزرگ و خیلی بزرگ	بیشتر از ۱۰۰۰	۱/۸-۱/۴
آلیاژهای مس	کوچک	تا ۱۰۰	۱/۸-۱/۵
	متوسط	۱۰۰ تا ۱۰۰۰	۱/۵-۱
	بزرگ	۱۰۰۰ تا ۵۰۰۰	۱-۰/۷۵
آلیاژهای آلومینیم و منیزیم	کوچک	تا ۱۰۰	۱/۲-۱
	متوسط	۱۰۰ تا ۱۰۰۰	۱-۰/۷۵
	بزرگ	۱۰۰۰ تا ۵۰۰۰	۱-۰/۵

۳-۳-۲- تغییرات چگالی نسبت به انبساط و انقباض اجسام :

با توجه به مطالب ذکر شده افزایش دما باعث انبساط حجمی اجسام می‌گردد به عبارت دیگر حجم اجسام افزایش می‌یابد. اما تغییر دما سبب تغییر جرم جسم نمی‌شود. مقدار جرم حجمی اجسام نسبت مستقیم با جرم و نسبت عکس با حجم اجسام دارد. با افزایش درجه حرارت، جرم تغییر نمی‌کند اما حجم افزایش می‌یابد با توجه به این‌که جرم حجمی نسبت عکس با حجم دارد، بنابراین افزایش حجم سبب کاهش جرم حجمی خواهد شد. براساس مطالب ذکر شده می‌توان رابطه ای به‌دست آورد که در محاسبات فنی کاربرد دارد و به‌صورت زیر می‌باشد:

رابطه انبساط حجمی $V_2 = V_1(1+\overline{\gamma}\Delta\theta)$

جرم حجمی $\rho = \dfrac{m}{V}$

m : جرم

v : حجم

طرفین و وسطین انجام می‌دهیم $\dfrac{\rho_1}{1} = \dfrac{m_1}{V_1}$ رابطه جرم حجمی

طرفین تساوی را بر ρ_1 تقسیم می‌کنیم $\rho_1 \times V_1 = m_1 \times 1$

$$\frac{\cancel{\rho_1}V_1}{\cancel{\rho_1}} = \frac{m_1}{\rho_1}$$

$$V_1 = \frac{m_1}{\rho_1}$$

به همین ترتیب خواهیم داشت :

$$V_2 = \frac{m_2}{\rho_2}$$

با توجه به این‌که جرم جسم ثابت است یعنی $m_1 = m_2 = m$ لذا خواهیم داشت :

$$V_1 = \frac{m}{\rho_1} \text{ و } V_2 = \frac{m}{\rho_2}$$

که در آن :

m : جرم قطعه

V_1 : حجم قطعه قبل از انبساط

ρ_1 : جرم حجمی قطعه قبل از انبساط

V_2 : حجم قطعه بعد از انبساط

ρ_2 : جرم حجمی قطعه بعد از انبساط

با توجه به این‌که بعد از انبساط، حجم قطعه افزایش می‌یابد، بنابراین جرم حجمی قطعه کاهش می‌یابد. چون جرم حجمی نسبت عکس با حجم دارد لذا جرم حجمی قبل از انبساط (ρ_1) بزرگ‌تر از جرم حجمی بعد از انبساط (ρ_2) می‌باشد یعنی $\rho_1 > \rho_2$

با جای‌گذاری مقادیر V_1 و V_2 در رابطه انبساط حجمی خواهیم داشت :

$$V_2 = V_1(1 + \overline{\gamma}\Delta\theta)$$

طرفین رابطه را بر m تقسیم می‌کنیم

$$\frac{m}{\rho_2} = \frac{m}{\rho_1}(1 + \overline{\gamma}\Delta\theta)$$

$$\frac{\cancel{m}}{\cancel{m}\rho_2} = \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}\rho_1}(1 + \overline{\gamma}\Delta\theta)$$

طرفین رابطه را عکس می‌کنیم

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_1}(1 + \overline{\gamma}\Delta\theta)$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_1}{(1 + \overline{\gamma}\Delta\theta)}$$

با توجه به این‌که ضریب $\overline{\gamma}$ مقدار بسیار کوچکی است می‌توان کسر $\frac{1}{(1+\overline{\gamma}\Delta\theta)}$ را با یک تقریب برابر با $(1 - \overline{\gamma}\Delta\theta)$ قرار داد، بنابراین خواهیم داشت :

$$\rho_2 = \rho_1\left(\frac{1}{(1+\overline{\gamma}\Delta\theta)}\right) \approx \rho_1(1 - \overline{\gamma}\Delta\theta)$$

$$\boxed{\rho_۲ = \rho_۱(۱-\bar{\gamma}\Delta\theta)}$$

که در آن :

$\rho_۲$: جرم حجمی جسم بعد از انبساط حرارتی برحسب $\frac{g}{cm^۳}$ یا $\frac{kg}{m^۳}$

$\rho_۱$: جرم حجمی جسم قبل از انبساط حرارتی برحسب $\frac{g}{cm^۳}$ یا $\frac{kg}{m^۳}$

$\bar{\gamma}$: ضریب انبساط حجمی برحسب $\frac{۱}{^\circ c}$

$\Delta\theta$: تغییرات درجه حرارت برحسب $^\circ c$

براساس روابط ذکر شده می‌توان رابطه دیگری به‌دست آورد که به کمک آن می‌توان درصد کاهش حجم جسم را نسبت به چگالی آن در درجه حرارت‌های $\theta_۱$ و $\theta_۲$ تعیین نمود.

$$\frac{\Delta V}{V_۱}\times ۱۰۰ = (۱-\frac{\rho_۲}{\rho_۱})\times ۱۰۰$$

مثال ۲۳-۲: یک قطعه ریختگی از آلیاژ برنج مورد نیاز است درصورتی‌که ضریب انبساط خطی این آلیاژ به‌طور متوسط $۲۰\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ و نقطه ذوب آن $۹۱۰^\circ c$ باشد مطلوب است : محاسبه و تعیین چگالی قطعه در نقطه ذوب درصورتی‌که چگالی آن در $۲۵^\circ c$ برابر $۶/۷\frac{g}{cm^۳}$ باشد. همچنین درصد کاهش حجم قطعه نسبت به حجم مدل (یا قالب) را به‌دست آورید.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه و همراه با واحدها نوشته می‌شود

داده‌ها	خواسته‌ها
$\bar{\alpha} = ۲۰\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ $\theta_i = ۲۵^\circ c$ $\theta_m = ۹۱۰^\circ c$ $\rho_۱ = ۶/۷\frac{g}{cm^۳}$	$\rho_۲ = ?$ $\frac{\Delta V}{V_۱} = ?$

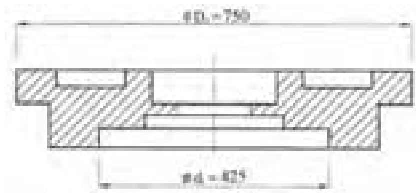
تمرین ۳۲-۲: یک قطعه ریختگی از آلیاژ آلومینیم مورد نیاز است درصورتی‌که ضریب انبساط خطی این آلیاژ به‌طور متوسط $۲۵\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ و نقطه ذوب آن $۶۲۰^\circ c$ باشد مطلوبست محاسبه و تعیین چگالی قطعه در نقطه ذوب درصورتی‌که چگالی آن در $۴۵^\circ c$ برابر $۳۱۰۰\frac{kg}{m^۳}$ باشد. همچنین درصد کاهش حجم قطعه نسبت به حجم مدل را به‌دست آورید.

حل (توسط هنرجو):

مرحله ۲) نوشتن رابطه‌های مربوط به حل مسأله $\rho_۲ = \rho_۱(۱-\overline{\gamma}\Delta\theta)$ مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول محاسبات ریاضی $\rho_۲ = ۶/۷(۱-۲۰\times۱۰^{-۶}\times(۹۱۰-۲۵))$ $\rho_۲ = ۶/۷(۱-۲۰\times۱۰^{-۶}\times۸۸۵)$ $\rho_۲ = ۶/۷(۱-۰/۰۲)$ $\rho_۲ = ۶/۷\times۰/۹۸$ $\boxed{\rho_۲ = ۶/۵۷ \ {}^{g}/_{cm^۳}}$ مرحله ۴) فرمول مربوطه نوشته می‌شود $\frac{\Delta V}{V_۱}\times۱۰۰=(۱-\frac{\rho_۲}{\rho_۱})\times۱۰۰$ $\frac{\Delta V}{V_۱}\times۱۰۰=(۱-\frac{۶/۵۷}{۶/۷})\times۱۰۰$ $\frac{\Delta V}{V_۱}\times۱۰۰=(۱-۰/۹۸)\times۱۰۰$ $\frac{\Delta V}{V_۱}\times۱۰۰=۰/۰۲\times۱۰۰$ $\boxed{\frac{\Delta V}{V_۱}\times۱۰۰=۲\%}$	
تمرین ۳۳-۲: یک قطعه ریختگی از آلیاژ سیلومین مطابق نقشه زیر مورد نیاز است. درصورتی‌که ضریب انبساط خطی این آلیاژ به‌طور متوسط $۲۱\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ و نقطه ذوب آن $۶۷۰^\circ c$ باشد مطلوب است : الف) درصد اضافه مجاز انقباض خطی آلیاژ از نقطه ذوب تا درجه حرارت $۲۲^\circ c$	

ب) تعیین ابعاد مدل این قطعه برحسب mm

ج) محاسبه و تعیین چگالی قطعه در نقطه ذوب درصورتی‌که چگالی آن در $۲۲^{\circ}c$ برابر $۳/۲۵\frac{g}{cm^{۳}}$ باشد و همچنین درصد کاهش حجم قطعه نسبت به حجم مدل را به‌دست آورید.



شکل ۵-۲- تعیین ابعاد مدل یک قطعه ریختگی

مثال ۲۴-۲: طول یک میله فلزی در صفردرجه سانتی‌گراد ۲۰۰۰mm و در $100^\circ c$ برابر ۲۰۰۳mm می‌باشد ضریب انبساط خطی متوسط این فلز را به‌دست آورید.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه همراه با واحدها نوشته می‌شود

داده‌ها	خواسته‌ها
$\theta_1 = 0^\circ c$ $L_1 = 2000mm$ $\theta_2 = 100^\circ c$ $L_2 = 2003mm$	$\bar{\alpha} = ? \quad \frac{1}{^\circ c}$

مرحله ۲) نوشتن رابطه‌های مرتبط :

$$L_2 = L_1(1+\bar{\alpha}\Delta\theta)$$

می دانیم $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

$$L_2 = L_1(1+\bar{\alpha}(\theta_2 - \theta_1))$$

$$2003 = 2000(1+\bar{\alpha}(100-0))$$

$$2003 = 2000(1+100\bar{\alpha})$$

$$2003 = 2000+2000\times 100\bar{\alpha}$$

$$2003 = 2000+200000\bar{\alpha}$$

عددهای معلوم در یک تساوی قرار می‌گیرند

$$2003-2000 = 200000\bar{\alpha}$$

$$3 = 200000\bar{\alpha}$$

طرفین را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم

$$\frac{3}{200000} = \frac{\cancel{200000}\bar{\alpha}}{\cancel{200000}}$$

$$\boxed{\bar{\alpha} = 1/5\times 10^{-5}\frac{1}{^\circ c}}$$

تمرین ۳۴-۲: ارتفاع یک استوانه فلزی در $25^\circ c$ برابر ۲۵۰۰ mm و در $120^\circ c$ برابر ۲/۵۱m می‌باشد ضریب انبساط خطی متوسط این فلز را به‌دست آورید.

حل (توسط هنرجو):

مثال ۲۵-۲: حجم یک گلوله فولادی در $\circ^{\circ}c$ برابر $۲\circ\circ cm^{۳}$ می‌باشد حجم آن را در $۴\circ\circ^{\circ}c$ حساب کنید. ضریب انبساط خطی متوسط فولاد $۱۲/۵\times۱\circ^{-۶}\frac{۱}{^{\circ}c}$ می‌باشد.

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها را به‌طور خلاصه و همراه با واحدها می‌نویسیم

خواسته‌ها	داده‌ها
$V_{۲}=?\quad cm^{۳}$	$\theta_{۱}=\circ^{\circ}c$ $V_{۱}=۲\circ\circ cm^{۳}$ $\theta_{۲}=۴\circ\circ^{\circ}c$ $\overline{\alpha}=۱۲/۵\times۱\circ^{-۶}\frac{۱}{^{\circ}c}$

مرحله ۲) رابطه مرتبط با حل مسأله نوشته می‌شود

$V_{۲}=V_{۱}(۱+\overline{\gamma}\Delta\theta)$

می دانیم $\Delta\theta=\theta_{۲}-\theta_{۱}$ و $\overline{\gamma}=۳\overline{\alpha}$ خواهیم داشت:

$V_{۲}=۲\circ\circ(۱+۳\times۱۲/۵\times۱\circ^{-۶}(۴\circ\circ-\circ))$

مرحله ۳) محاسبات ریاضی

$V_{۲}=۲\circ\circ(۱+۳۷/۵\times۱\circ^{-۶}\times۴\circ\circ)$

$V_{۲}=۲\circ\circ(۱+\circ/\circ۱۵)$

$V_{۲}=۲\circ\circ\times۱/\circ۱۵$

$\boxed{V_{۲}=۲\circ۳cm^{۳}}$

تمرین ۳۵-۲: حجم یک مکعب فولادی در $۱۵^{\circ}c$ برابر $۲/۵\times۱\circ^{-۴}m^{۳}$ می‌باشد حجم آن را در $۴۵\circ^{\circ}c$ حساب کنید. ضریب انبساط خطی متوسط فولاد $۱۱/۵\times۱\circ^{-۶}\frac{۱}{^{\circ}c}$ می‌باشد.

حل (توسط هنرجو):

مثال ۲۶-۲: یک ورق آهنی به شکل مستطیل را که طول و عرض آن در $۲۵^\circ c$ به ترتیب ۰/۸m و ۰/۴m می‌باشد تا $۱۲۵^\circ c$ گرم کرده ایم، سطح ورق را پس از انبساط برحسب $cm^۲$ حساب کنید، $\overline{\alpha} = ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^\circ c}$

حل:

مرحله ۱) داده‌ها و خواسته‌ها را به‌طور خلاصه می‌نویسیم

خواسته‌ها	داده‌ها
$A_۲ = ? \quad cm^۲$	طول ورق $= ۰/۸m$ عرض ورق $= ۰/۴m$ $\theta_۲ = ۱۲۵^\circ c$ $\overline{\alpha} = ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^\circ c}$ $\theta_۱ = ۲۵^\circ c$

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوطه :

$A_۲ = A_۱(۱ + \overline{\beta}\Delta\theta)$

می دانیم که $\Delta\theta = \theta_۲ - \theta_۱$

$A_۱ = ۰/۴ \times ۰/۸ = ۰/۳۲m^۲$ مساحت مستطیل قبل از انبساط

$A_۲ = ۰/۳۲(۱ + ۲\alpha(\theta_۲ - \theta_۱))$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق

$A_۲ = ۰/۳۲(۱ + ۲ \times ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۶}(۱۲۵ - ۲۵))$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی

$A_۲ = ۰/۳۲(۱ + ۲۵ \times ۱۰^{-۶} \times ۱۰۰)$

$A_۲ = ۰/۳۲(۱ + ۲/۵ \times ۱۰^{-۳})$

تمرین ۳۶-۲: یک ورق آلومینیمی که طول و عرض آن در $۳۵^\circ c$ به ترتیب ۹۰cm و ۶۵cm می‌باشد تا $۱۴۵^\circ c$ گرم کرده ایم، سطح ورق را پس از انبساط برحسب $m^۲$ حساب کنید ($\overline{\alpha} = ۲۳ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^\circ c}$)

حل (توسط هنرجو):

$A_2 = 0/32(1/0025)$

$A_2 = 0/3208 m^2$

چون جواب را برحسب cm^2 خواسته است لذا m^2 را به cm^2 تبدیل می‌کنیم

$1m^2 = 10000 cm^2$

$A_2 = 0/3208 m^2$

$A_2 = 0/3208 \times (10000 cm^2)$

$\boxed{A_2 = 3208 cm^2}$

مثال ۲-۲۷: طول یک میله فلزی در $0^\circ c$ برابر ۱۰۰۰mm و در $100^\circ c$ برابر ۱۰۰۱/۵ می‌باشد

الف) تغییر طول این میله را در این فاصله دمایی مشخص کنید.

ب) ضریب انبساط خطی متوسط $(\overline{\alpha})$ این فلز را به‌دست آورید.

حل:

داده‌ها و خواسته مسأله را به‌صورت خلاصه می‌نویسیم

داده‌ها	خواسته‌ها
$\theta_1 = 0^\circ c$ $L_1 = 1000 mm$ $\theta_2 = 100^\circ c$ $L_2 = 1001/5$	$\Delta L = ?$ $\overline{\alpha} = ?$

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوط به مسأله

$L_2 = L_1(1 + \overline{\alpha}\Delta\theta)$

تمرین ۲-۳۷: طول یک قطعه فلزی در $15^\circ c$ برابر ۱۵dm و در $120^\circ c$ برابر ۱۵/۰۳dm می‌باشد.

الف) تغییر طول این قطعه را در این فاصله دمایی مشخص کنید (برحسب mm)

ب) ضریب انبساط خطی متوسط این قطعه را به‌دست آورید.

حل (توسط هنرجو):

$L_{۲} = L_{۱}(۱+\bar{\alpha}(\theta_{۲} - \theta_{۱}))$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول

$۱۰۰۱/۵ = ۱۰۰۰(۱+\bar{\alpha}(۱۰۰-۰))$

$۱۰۰۱/۵ = ۱۰۰۰(۱+۱۰۰\bar{\alpha})$

$۱۰۰۱/۵ = ۱۰۰۰ + ۱۰۰۰۰۰ \times \bar{\alpha}$

$۱۰۰۱/۵ - ۱۰۰۰ = ۱۰۰۰۰۰\bar{\alpha}$

$۱/۵ = ۱۰۰۰۰۰\bar{\alpha}$

طرفین تساوی را بر ضریب مجهول تقسیم می‌کنیم

$$\frac{۱/۵}{۱۰۰۰۰۰} = \frac{\cancel{۱۰۰۰۰۰}\bar{\alpha}}{\cancel{۱۰۰۰۰۰}}$$

$$\boxed{\bar{\alpha} = ۱/۵ \times ۱۰^{-۵} \frac{۱}{^{\circ}c}}$$

$\Delta L = L_{۲} - L_{۱}$

$\Delta L = ۱۰۰۱/۵ - ۱۰۰۰$

$$\boxed{\Delta L = ۱/۵mm}$$

مثال ۲۸-۲: قطر یک میله فولادی در $۰^{\circ}c$ برابر ۲۵mm است. اختلاف قطر آن را در دماهای $-۳۰^{\circ}c$ و $۴۰^{\circ}c$ به‌دست آورید. $\bar{\alpha} = ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^{\circ}c}$ فولاد

حل:

۱) داده‌ها و خواسته‌ها را به‌طور خلاصه و همراه با واحدها نوشته می‌شود

تمرین ۳۸-۲: ارتفاع یک مخروط مسی در $۱۰^{\circ}c$ برابر ۳/۵m است. اختلاف ارتفاع آن را در دماهای $-۲۰^{\circ}c$ و $۵۰^{\circ}c$ به‌دست آورید. $\alpha = ۱۸ \times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^{\circ}c}$

حل (توسط هنرجو):

خواسته‌ها	داده‌ها
قطر میله $D_2 = ?\ mm$ در $-30^\circ c$ قطر میله $D_3 = ?\ mm$ در $40^\circ c$ $D_3 - D_2 = ?$ $\Delta D = ?$	$\theta_1 = 0$ $D_1 = 25$ $\theta_2 = -30$ $\theta_3 = 40^\circ c$ $\bar{\alpha} = 12/5 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ c}$

نکته: در این مسأله باید یک بار قطر میله را با استفاده از رابطه انبساط حرارتی خطی در $-30^\circ c$ به‌دست آورید و یک بار نیز قطر میله را در $40^\circ c$ به‌دست آورید، سپس برای به‌دست آوردن اختلاف قطر، تفاضل این دو را حساب می‌کنیم.

مرحله ۲) نوشتن رابطه برای محاسبه D_2 :

$$D_2 = D_1(1 + \bar{\alpha}\Delta\theta_1)$$

می دانیم که $\Delta\theta_1 = \theta_2 - \theta_1$ لذا خواهیم داشت :

$$D_2 = D_1(1 + \bar{\alpha}(\theta_2 - \theta_1))$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق

$$D_2 = 25(1 + 12/5 \times 10^{-6}(-30 - 0))$$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی

$$D_2 = 25(1 + 12/5 \times 10^{-6}(-30))$$

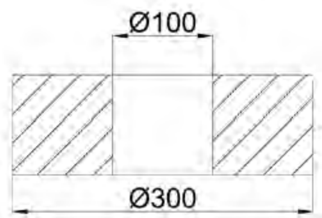
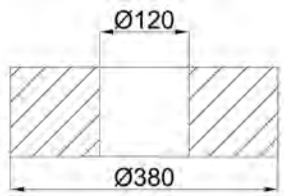
$$D_2 = 25(1 + (-3/75 \times 10^{-4}))$$

$$D_2 = 25 \times 0/99625$$

$$\boxed{D_2 = 24/991 mm}$$

مرحله ۵) نوشتن رابطه برای محاسبه D_3 :

$$D_3 = D_1(1 + \bar{\alpha}\Delta\theta_2)$$

می دانیم که $\Delta\theta_{۲} = \theta_{۳} - \theta_{۱}$ لذا خواهیم داشت : $D_{۳} = D_{۱}(۱+\bar{\alpha}(\theta_{۳} - \theta_{۱}))$ مرحله ۶) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در فرمول فوق $D_{۳} = ۲۵(۱+۱۲/۵\times۱۰^{-۶}(۴۰-۰))$ مرحله ۷) محاسبات ریاضی $D_{۳} = ۲۵(۱+۱۲/۵\times۱۰^{-۶}\times۴۰)$ $D_{۳} = ۲۵(۱+۰/۰۰۰۵)$ $D_{۳} = ۲۵\times۱/۰۰۰۵$ $\boxed{D_{۳} = ۲۵/۰۱۲۵mm}$ حال برای به‌دست آوردن اختلاف قطر، تفاضل $D_{۲}$ و $D_{۳}$ را به‌دست می‌آوریم. $\Delta D = D_{۳} - D_{۲}$ $\Delta D = ۲۵/۰۱۲۵ - ۲۴/۹۹۱$ $\boxed{\Delta D = ۰/۰۲۱۵mm}$	
مثال ۲۹-۲: یک قطعه از جنس آلومینیم مطابق شکل زیر مورد نیاز است درصورتی‌که ضریب انبساط خطی آن برابر $\bar{\alpha} = ۲۴\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ باشد و نقطه ذوب آلومینیم $۶۵۹^\circ c$ باشد مطلوب است : الف) محاسبه درصد انقباض خطی این آلیاژ از نقطه ذوب تا درجه حرارت محیط $(۲۹^\circ c)$ ب) تعیین قطر داخلی و خارجی  شکل ۶-۲	تمرین ۳۹-۲: یک قطعه از جنس فولاد مطابق شکل زیر مورد نیاز است درصورتی‌که ضریب انبساط خطی آن برابر $۱۴\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ و نقطه ذوب فولاد $۱۶۵۰^\circ c$ باشد مطلوبست : الف) محاسبه درصد انقباض خطی این آلیاژ از نقطه ذوب تا درجه حرارت $۲۰^\circ c$ ب) تعیین قطر داخلی و خارجی  شکل ۷-۲

حل (توسط هنرجو):	حل:
	۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه و همراه با واحدها نوشته می‌شود

خواسته‌ها	داده‌ها
$\%s = ?$ قطر داخلی مدل $d_۲ = ?$ قطر خارجی مدل $D_۲ = ?$	$\bar{\alpha} = ۲۴\times ۱۰^{-۶} \frac{۱}{^\circ c}$ $\theta_m = ۶۵۹^\circ c$ $\theta_i = ۲۹^\circ c$ قطر داخلی $d_۱ = ۱۰۰ mm$ قطر خارجی $D_۱ = ۳۰۰ mm$

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوط به محاسبه درصد انقباض :

$$\%s = \bar{\alpha}(\theta_m - \theta_i)\times ۱۰۰$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$\%s = ۲۴\times ۱۰^{-۶}(۶۵۹-۲۹)\times ۱۰۰$$

مرحله ۴) محاسبه ریاضی :

$$\%s = ۲۴\times ۱۰^{-۶}\times ۶۳۰\times ۱۰۰$$

$$\boxed{\%s = \%۱/۵۱۲}$$

مرحله ۵) نوشتن رابطه مربوط به محاسبه قطر داخلی مدل $(d_۲)$:

$$d_۲ = d_۱(۱+\frac{\%s}{۱۰۰})$$

مرحله ۶) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$d_۲ = ۱۰۰(۱+\frac{۱/۵۱۲}{۱۰۰})$$

مرحله ۷) محاسبات ریاضی

$$d_۲ = ۱۰۰(۱+۰/۰۵۱۲)$$

$d_2 = 100 \times 1/01512$

قطر داخلی $\boxed{d_2 = 101/512 mm}$

مرحله ۸) نوشتن رابطه برای محاسبه قطر خارجی مدل (D_2) :

$$D_2 = D_1(1+\frac{\%s}{100})$$

مرحله ۹) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$D_2 = 300(1+\frac{1/512}{100})$$

مرحله ۱۰) محاسبات ریاضی

$$D_2 = 300(1+0/0512)$$

$$D_2 = 300 \times 1/0512$$

قطر خارجی $\boxed{D_2 = 304/536 mm}$

مثال ۳۰-۲: ضریب انبساط خطی متوسط یک آلیاژ برنج از $25^\circ c$ دمای محیط تا درجه حرارت ذوب برنج $925^\circ c$ برابر $20 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ c}$ می‌باشد مطلوبست :

الف) محاسبه و تعیین درصد انقباض مجاز این برنج

ب) اندازه طول مدل درصورتی‌که طول قطعه ۲۰۰cm باشد.

حل:

۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌صورت خلاصه و همراه با واحدها نوشته می‌شود

داده‌ها	خواسته‌ها
$\theta_i = 25^\circ c$ $\theta_m = 925^\circ c$ $\overline{\alpha} = 20 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ c}$ طول قطعه $L_1 = 200 cm$	$\%s = ?$ طول مدل $L_2 = ?$

تمرین ۴۰-۲: ضریب انبساط خطی متوسط یک آلیاژ روی از $35^\circ c$ تا درجه حرارت ذوب آن $380^\circ c$ برابر $19 \times 10^{-6} \frac{1}{^\circ c}$ می‌باشد مطلوبست :

الف) محاسبه و تعیین درصد انقباض مجاز این آلیاژ

ب) اندازه طول مدل درصورتی‌که طول قطعه ۲۵ dm باشد

حل (توسط هنرجو):

مرحله ۲) نوشتن رابطه برای محاسبه درصد انقباض $\%s=\overline{\alpha}(\theta_m-\theta_i)\times ۱۰۰$ مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق $\%s=۲۰\times ۱۰^{-۶}(۹۲۵-۲۵)\times ۱۰۰$ مرحله ۴) محاسبات ریاضی $\%s=۲۰\times ۱۰^{-۶}\times ۹۰۰\times ۱۰۰$ $\boxed{\%s=\%۱/۸}$ مرحله ۵) نوشتن رابطه برای محاسبه اندازه طول مدل $(L_۲)$: $L_۲=L_۱(۱+\frac{\%s}{۱۰۰})$ مرحله ۶) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق $L_۲=۲۰۰(۱+\frac{۱/۸}{۱۰۰})$ مرحله ۷) محاسبات ریاضی : $L_۲=۲۰۰(۱+۰/۰۱۸)$ $L_۲=۲۰۰\times ۱/۰۱۸$ $\boxed{L_۲=۲۰۳/۶cm}$	
مثال ۳۱-۲: ضریب انبساط خطی یک نوع آلیاژ برنج به‌طور متوسط از درجه حرارت محیط $(\theta_i=۲۰^\circ c)$ تا نقطه ذوب $\theta_m=۹۸۰^\circ c$ برابر است با $۲۰\times ۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ مطلوبست محاسبه و تعیین : الف) درصد اضافه مجاز انقباض در طراحی مدل برای قطعه‌ای از این آلیاژ ب) اندازه طول مدل درصورتی‌که طول قطعه ۸۰cm باشد.	تمرین ۴۱-۲: ضریب انبساط خطی یک نوع چدن به‌طور متوسط از درجه حرارت محیط $۲۵^\circ c$ تا نقطه ذوب $۱۵۵۰^\circ c$ برابر است با $۱۱\times ۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ الف) درصد اضافه مجاز انقباض در طراحی مدل برای قطعه ای از این آلیاژ را حساب کنید ب) اندازه طول مدل درصورتی‌که طول قطعه ۱m باشد را به‌دست آورید. حل (توسط هنرجو):

حل:

۱) داده‌ها و خواسته‌ها به‌طور خلاصه و همراه با واحدها نوشته می‌شود

داده‌ها	خواسته‌ها
$\theta_i = ۲۰^\circ c$ $\theta_m = ۹۸۰^\circ c$ $\bar{\alpha} = ۲۰\times۱۰^{-۶}\frac{۱}{^\circ c}$ $L_۱ = ۸۰cm$	$\%s = ?$ $L_۲ = ?\quad cm$

مرحله ۲) نوشتن رابطه مربوط به درصد اضافه مجاز انقباض :

$$\%s = \bar{\alpha}(\theta_m - \theta_i)\times۱۰۰$$

مرحله ۳) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$\%s == ۲۰\times۱۰^{-۶}(۹۸۰-۲۰)\times۱۰۰$$

مرحله ۴) محاسبات ریاضی

$$\%s == ۲۰\times۱۰^{-۶}\times۹۶۰\times۱۰۰$$

$$\boxed{\%s = \%۱/۹۲}$$

مرحله ۵) نوشتن رابطه مربوط به محاسبه طول مدل : $(L_۲)$

$$L_۲ = L_۱(۱+\frac{\%s}{۱۰۰})$$

مرحله ۶) جای‌گذاری مقادیر داده‌ها در رابطه فوق

$$L_۲ = ۸۰(۱+\frac{۱/۹۲}{۱۰۰})$$

$$L_۲ = ۸۰(۱+۰/۰۱۹۲)$$

$$L_۲ = ۸۰\times۱/۰۱۹۲$$

$$\boxed{L_۲ = ۸۱/۵۳۶cm}$$