

فصل  
ششم

# اندازه گیری زاویه با وسایل ساده



## هدف های رفتاری :

- ۱- زاویه‌ی افقی و قائم را با رسم شکل توضیح دهد.
- ۲- روش‌های اندازه‌گیری زاویه‌ی افقی با وسایل ساده را نام ببرد و هر کدام را با ذکر مثال توضیح دهد.
- ۳- زاویه‌ی قائم و انواع آنرا توضیح دهد.
- ۴- اندازه‌گیری زاویه‌ی قائم با وسایل ساده را توضیح دهد.

قبل از مطالعه‌ی این فصل از فراگیرنده انتظار می‌رود با مطالب زیر آشنا باشد:

- ۱- آشنایی با مفهوم زاویه
- ۲- آشنایی با قطب نما
- ۳- آشنایی با مثلث متساوی الساقین
- ۴- آشنایی با فرمول کسینوس ها
- ۵- آشنایی با روابط معکوس مثلثاتی (  $\arcsin$ ,  $\arccos$  )
- ۶- آشنایی با شیب سنج

: مطالب پیش نیاز

زاویه

.....

زاویه‌ی افقی

.....

زاویه‌ی قائم

.....

قطب نما

.....

زاویه‌ی شیب

.....

زاویه‌ی زینیتی

.....

شیب سنج

.....

## مقدمه - زاویه در نقشه برداری

زاویه از عناصری است که در نقشه برداری زیاد مورد استفاده قرار می‌گیرد، چرا که برای تهیه نقشه، دانستن زوایای بین عوارض طبیعی و مصنوعی روی زمین امری مهم است. به این دلیل آشنایی با مفهوم زاویه، انواع زاویه و روش‌های اندازه‌گیری آن برای نقشه‌بردار کاملاً ضروری است.

در این فصل با روش‌های ساده‌ی اندازه‌گیری زوایای افقی و قائم آشنا شده و روش‌های پیشرفته‌ی آن‌را در سال آینده فرا می‌گیرید.

بیش تر بدانیم . . .

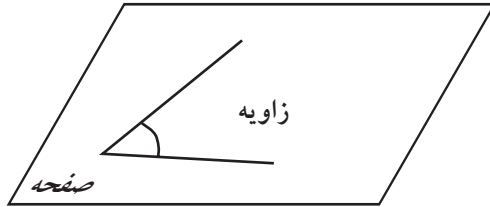


انواع زاویه:

انواع زاویه عبارت‌اند از: زاویه‌ی نیم صفحه، زاویه‌ی قائمه، زاویه‌ی حاده، زاویه‌ی منفرجه، زاویه‌ی صفر، زاویه‌ی کوژ، زاویه‌ی کاو (به کتاب هندسه مراجعه کنید).

## ۱-۶ اندازه‌گیری زاویه با وسایل ساده

می‌دانیم (در درس هندسه خوانده‌ایم):  
- قسمتی از صفحه که بین دو امتداد متقاطع قرار گرفته باشد زاویه نامیده می‌شود.



شکل ۱-۶. زاویه

- در نقشه برداری، زاویه را در صفحه‌ی افقی و قائم اندازه‌گیری می‌کنیم.



در این فصل با روش‌های اندازه‌گیریِ زوایای افقی و قائم توسط وسایل ساده آشنا خواهیم شد.

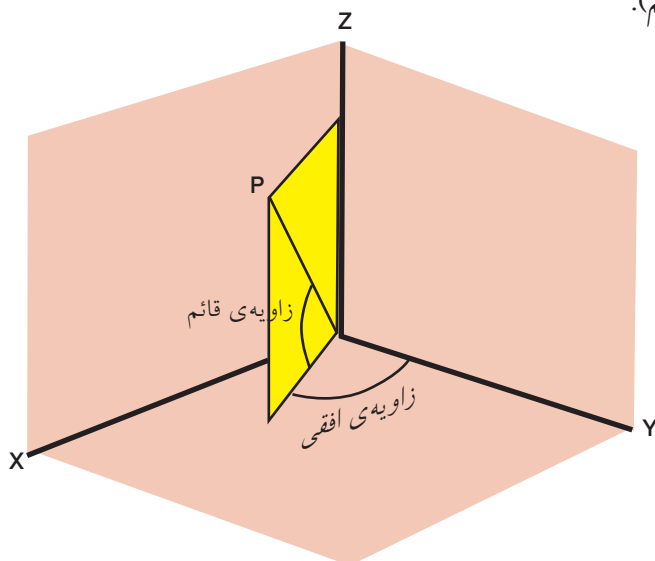
زاویه‌ی افقی و زاویه‌ی قائم ( ..... .. )

فرض کنیم مطابق شکل می‌خواهیم زاویه‌ی بین دو امتداد  $OA$  و  $OB$  را اندازه‌گیری کنیم. (زاویه  $AOB$ )



شکل ۲-۶. اندازه‌گیری زاویه‌ی بین دو امتداد

در نقشه برداری برای اندازه گیری این زاویه، یک بار امتدادها را در صفحه ی افقی تصویر کرده (زاویه ی افقی) و یک بار نیز امتداد ها را در صفحه ی قائم تصویر می کنیم (زاویه ی قائم).



شکل ۶-۳. زاویه ی افقی و زاویه ی قائم

زاویه ی افقی زاویه ای است که بین دو امتداد روی صفحه ی افقی به دست می آید .  
 زاویه ی قائم زاویه ای است که بین یک امتداد و امتداد افق یا قائم بر محل، روی صفحه ی قائم به دست می آید .

بیش تر بدانیم . . .



حالات دو زاویه نسبت به هم دو زاویه نسبت به هم ممکن است مجاور، متمم، مکمل، مجانب و متقابل به رأس باشند (به کتاب هندسه مراجعه کنید).

## ۲-۶ اندازه‌گیری زاویه‌ی افقی با وسایل ساده

برای اندازه‌گیری زاویه‌ی افقی توسط وسایل ساده، دو روش متداول زیر پیشنهاد می‌شود:

روش اول: استفاده از قطب‌نما (.....)

برای اندازه‌گیری مستقیم یک زاویه‌ی افقی ساده‌ترین وسیله قطب‌نماست، که دارای دقت کم‌تری نسبت به سایر وسایل اندازه‌گیری زاویه است. قطب‌نما دارای صفحه‌ی مدرج و عقربه بوده که صفحه‌ی مدرج آن از ۰ تا ۳۶۰ درجه تقسیم بندی شده است.



شکل ۶-۴. قطب‌نما

عقربه‌ی قطب‌نما حول محور خود می‌چرخد و سپس به علت نیروی مغناطیسی کره‌ی زمین همیشه در یک جهت معین که همان قطب شمال مغناطیسی (N) است، می‌ایستد و آن را به ما نشان می‌دهد. بهتر است در هنگام عملیات درجه‌ی صفر قطب‌نما بر شمال مغناطیسی (N) منطبق باشد.

برای محاسبه‌ی زاویه‌ی افقی بین دو امتداد به صورت زیر عمل می‌کنیم:  
دو عارضه‌ی مختلف مثلاً گوشه‌ی یک ساختمان و یک تیربرق را در نظر می‌گیریم و مقدار عددی امتداد هر کدام را بر روی قطب‌نما می‌خوانیم و یادداشت می‌کنیم.



شکل ۶-۵. اندازه‌گیری زاویه‌ی افقی با قطب‌نما

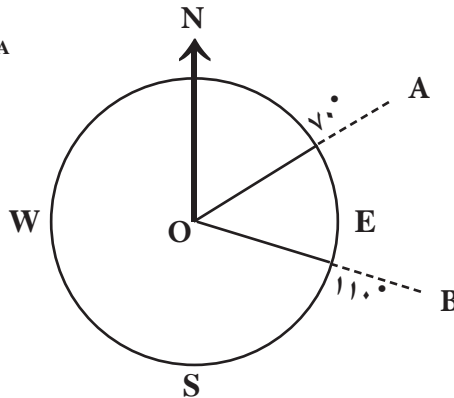
مقدار زاویه بین این دو امتداد مطابق شکل از تفاضل دو عدد خوانده شده به دست

می‌آید:

$$\angle AOB = R_{OB} - R_{OA}$$

$$\angle AOB = 110^\circ - 70^\circ$$

$$\angle AOB = 40^\circ$$



شکل ۶-۶. محاسبه‌ی زاویه‌ی افقی با استفاده از قطب‌نما

بیش‌تر بدانیم . . .



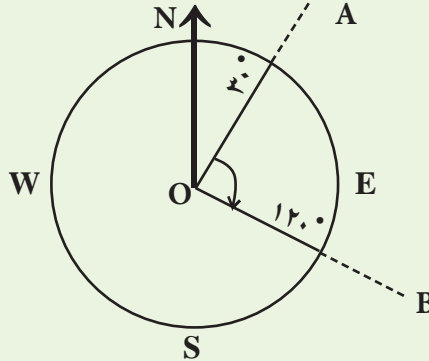
اسطرلاب از ابزارهای قدیم نجوم و طالع‌بینی است. اسطرلاب وسیله بسیار کارآمدی در نجوم رصدی بوده است.

این ابزار برای سنجش ارتفاع، سمت، بعد و میل خورشید و ستارگان، تعیین وقت در ساعات روز و شب، قبله و زمان طلوع و غروب آفتاب و بسیاری کاربردهای دیگر به کار می‌رفته‌است.



اندازه گیری زاویه ی افقی با استفاده از قطب نما

با قطب نما بر روی نقطه ی O مستقر می شویم و دو امتداد OA و OB را قرائت می کنیم. اعداد مربوط به دو امتداد را بر روی صفحه ی قطب نما بصورت زیر قرائت و یادداشت می کنیم:



زاویه ی AOB ( زاویه ی بین دو امتداد ) چند درجه است؟

راهکار کلی: همان طور که در شکل می بینید، زاویه ی AOB از تفاضل دو امتداد OB و OA تشکیل شده است. بنابراین:

$$\angle AOB = R_{OB} - R_{OA}$$

روش حل:

$$\angle AOB = R_{OB} - R_{OA}$$

$$\angle AOB = 120^\circ - 30^\circ$$

$$\angle AOB = 90^\circ$$

بحث و بررسی: • می دانیم در قطب نما همواره امتداد شمال یک امتداد ثابت است که بهتر



است این امتداد با صفر قطب نما منطبق باشد و آنرا مبدأ در نظر می گیریم.

• هر امتداد نسبت به شمال زاویه ای می سازد. با ثابت بودن شمال در قطب نما می توانیم زوایا را نسبت به هم مقایسه کنیم.

• منظور از  $R_{OB}$  و  $R_{OA}$  اعداد قرائت شده روی امتداد های OA و OB با قطب نماست.

(R مخفف Reading به معنی خواندن یا قرائت می باشد.)

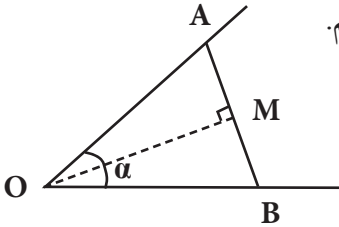


روش دوم : استفاده از متر

برای محاسبه‌ی زاویه‌ی افقی با استفاده از متر چندین راه وجود دارد که دو نمونه‌ی آن‌ها را در زیر بیان می‌کنیم:

الف) روش مثلث متساوی الساقین:

روی دو ضلع زاویه، دو طول مساوی جدا می‌کنیم (شکل ۶ - ۱۰) داریم  $AO = OB$  می‌خواهیم زاویه‌ی افقی  $AOB = \alpha$  را حساب کنیم.



شکل ۶ - ۷. روش مثلث متساوی الساقین در اندازه‌گیری زاویه

چون مثلث  $AOB$  متساوی الساقین است در نتیجه نیمساز زاویه‌ی  $AOB = \alpha$  همان عمودمنصف طول  $AB$  ( $OM$ ) است. بنابراین، دو مثلث قائم الزاویه  $OMA$  و  $OMB$  تشکیل می‌شود.

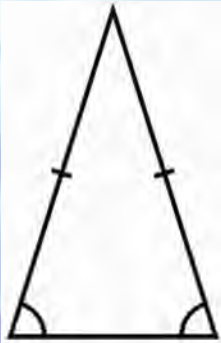
$$\left. \begin{aligned} \sin \frac{\alpha}{2} &= \frac{AM}{OA} \\ AM &= \frac{AB}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AB}{2OA}$$

حال در یکی از این دو مثلث ( $OMA$ ) داریم:

$$\frac{\alpha}{2} = \arcsin\left(\frac{AB}{2OA}\right) \Rightarrow \alpha = 2\arcsin\left(\frac{AB}{2OA}\right)$$

بنابراین در عمل کافی است پس از جدا کردن دو طول مساوی  $OA$  و  $OB$ ، تنها طول  $AB$  اندازه‌گیری شود تا با جای‌گذاری در رابطه‌ی بالا مقدار زاویه‌ی  $AOB = \alpha$  به دست آید.

بیش تر بدانیم . . .

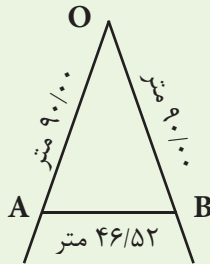


قضیه در مثلث متساوی الساقین اگر ارتفاع وارد بر قاعده مثلث متساوی الساقین را رسم کنیم، آن را به دو مثلث قائم الزاویه تقسیم کرده‌ایم. ارتفاع وارد بر قاعده نیمساز زاویه رأس می‌باشد.



اندازه گیری زاویه‌ی افقی با استفاده از متر - روش مثلث متساوی الساقین

با توجه به شکل زیر اندازه‌ی زاویه‌ی  $\text{AOB}$  چند درجه است؟



راهکار کلی: چون دو طول  $\text{OA}$  و  $\text{OB}$  با هم برابر انتخاب شده‌اند در نتیجه مثلث  $\text{AOB}$  متساوی الساقین است، پس خواهیم داشت:

$$\angle \text{AOB} = 2 \arcsin\left(\frac{\text{AB}}{2\text{OA}}\right)$$

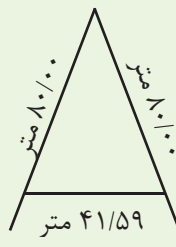
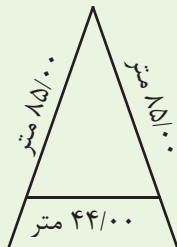
روش حل:

$$\angle \text{AOB} = 2 \arcsin\left(\frac{\text{AB}}{2\text{OA}}\right)$$

$$\angle \text{AOB} = 2 \arcsin\left(\frac{۴۶/۵۲}{۲ \times (۹۰)}\right)$$

$$\angle \text{AOB} = ۲۹/۹۵ = ۲۹^\circ ۵۷' ۲۰''$$

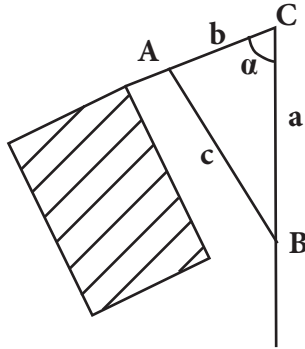
بحث و بررسی: برای کنترل درست بودن اندازه‌ی زاویه‌ی  $\text{AOB}$  می‌توانیم طول‌های مساوی دیگری مانند شکل‌های زیر را روی دو امتداد  $\text{OA}$  و  $\text{OB}$  جدا کنیم و با اندازه‌گیری ضلع  $\text{AB}$  و استفاده از رابطه‌ی فوق مجدداً زاویه‌ی  $\text{AOB}$  را محاسبه کنیم.



زوایای محاسبه شده‌ی جدید با زاویه‌ی  $\text{AOB}$  در حد چند دقیقه اختلاف دارند، زیرا اندازه‌گیری با متر دقت کمی دارد. بهترین مقدار برای زاویه، میانگین‌گیری از این چند عدد است

ب) روش مثلث نامشخص

گاهی اوقات امکان جدا کردن دو طول مساوی روی دو ضلع زاویه وجود ندارد (مانند شکل ۶-۸) در این حالت دو طول دلخواه را از دو ضلع زاویه جدا می‌کنیم تا نقاط A و B به دست آید. سپس طول افقی AB را با متر اندازه‌گیری کرده و با استفاده از فرمول «کسینوس‌ها» به صورت زیر عمل می‌کنیم:



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \times \cos \alpha$$

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2 \times a \times b}\right)$$

شکل ۶-۸. روش مثلث نامشخص در اندازه‌گیری زاویه‌ی افقی

بیش‌تر بدانیم . . .



قضیه‌ی کسینوس‌ها

مربع اندازه‌ی هر ضلع مثلث مساوی است با مجموع مربع‌های اندازه‌های دو ضلع دیگر منهای دو برابر حاصل ضرب این دو ضلع در کسینوس زاویه‌ی بین همین دو ضلع:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

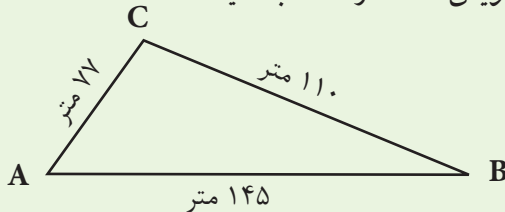
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



اندازه گیری زاویه‌ی افقی با استفاده از متر - روش مثلث نامشخص

مطابق شکل زیر اندازه‌ی زاویه‌ی  $ABC$  را محاسبه کنید.



راهکار کلی: همان‌طور که در کتاب هندسه (نقشه برداری) آموختید در حل مسائل مثلث که سه ضلع آن معلوم باشد، زوایا را از رابطه کسینوس‌ها محاسبه می‌کنیم، پس داریم:

$$\angle B = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \times a \times c}\right)$$

روش حل:

$$\angle B = \arccos\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2 \times a \times c}\right)$$

$$\angle B = \arccos\left(\frac{110^2 + 145^2 - 77^2}{2 \times 110 \times 145}\right)$$

$$\angle B = 31^{\circ}30'40''$$

بحث و بررسی: وقتی می‌گوییم  $\cos A = 0/5$  یعنی چه؟

زمانی که مقدار  $\sin$  ,  $\cos$  یا  $\tan$  زاویه‌ای برابر عددی شد آیا می‌توان مقدار آن زاویه را به دست آورد؟ چگونه؟

برای محاسبه‌ی زاویه‌ی  $A$  از رابطه‌ی  $\cos A = 0/5$  کافی است تابع معکوس آنرا به دست آوریم؛ یعنی:

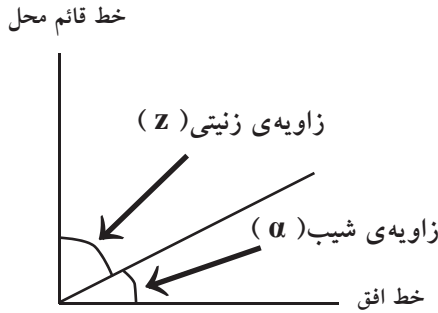
$$\cos A = 0/5 \Rightarrow A = \arccos 0/5$$

$$\Rightarrow A = 60^{\circ}$$

$\arccos$  در ماشین حساب و بعضی از کتاب‌ها به صورت  $\cos^{-1}$  نوشته می‌شود.

## ۳-۶ اندازه گیری زاویه قائم با وسایل ساده

همان طور که در کتاب هندسه (نقشه برداری) خوانده اید، زاویه ی قائم شامل دو زاویه ی شیب و زینتی است.



شکل ۶ - ۹. زاویه ی قائم و حالت های آن (زاویه ی شیب و زاویه ی زینتی)

زاویه ی شیب ( $\alpha$ ) زاویه ای است بین امتداد مورد نظر و خط افق که در صفحه ی قائم اندازه گیری می شود. زاویه ی زینتی ( $z$ ) زاویه ای است بین امتداد مورد نظر و خط قائم محل که در صفحه ی قائم اندازه گیری می شود.

چون این دو زاویه متمم اند همیشه بین آن دو رابطه ی زیر برقرار است:

$$\alpha + z = 90^\circ \quad \text{یا} \quad 100 \text{ g}$$

بنابراین با اندازه گیری زاویه ی شیب مقدار زاویه ی زینتی از رابطه ی زیر به دست می آید:

$$z = 90 - \alpha$$

اگر زاویه ی شیب منفی باشد آیا رابطه ی فوق تغییری می کند؟

بیش تر بدانیم . . .



تابع های مثلثاتی معکوس (  $\arccos$  و  $\arcsin$  ) منشاء توابع مثلثاتی معکوس مسائلی است که در آن ها باید با استفاده از اضلاع یک مثلث زوایای آن را به دست آوریم.

با استفاده از این توابع می توان با معلوم بودن سینوس یا کسینوس یک زاویه مقدار زاویه را به دست آورد.

$$\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \text{ArcSin} 1$$

$$\cos \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \text{ArcCos} 0$$

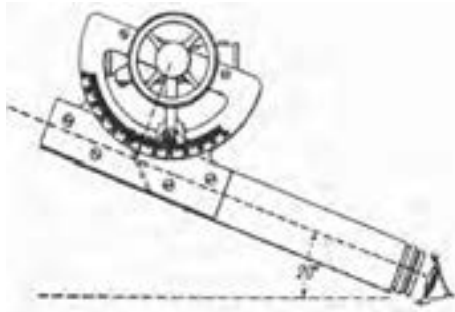
اندازه گیری زاویه ی شیب به وسیله ی شیب سنج:

در این قسمت روش اندازه گیری زاویه ی شیب به وسیله ی شیب سنج بیان می شود، که کاربردی ترین و متداول ترین وسیله ی ساده برای اندازه گیری زاویه ی قائم است. شیب سنج وسیله ای ساده و سبک است که در کارهای کم دقت برای اندازه گیری زاویه ی شیب بین دو نقطه به کار می رود. این دستگاه مطابق شکل ( ۶ - ۱۰ ) از یک دوربین کوچک، یک تراز و یک نقاله تشکیل شده است.



شکل ۶ - ۱۰ . کاربرد شیب سنج در اندازه گیری زاویه ی شیب

اصول اندازه گیری زاویه ی شیب با این وسیله به این صورت است که ابتدا روی نقطه ی اول مستقر شده و با دوربین شیب سنج به نقطه ی دوم نشانه روی می کنیم، سپس نقاله ی روی شیب سنج را چرخانده تا به حالت تراز (افقی) در آید. در این حالت عدد روی نقاله ی شیب سنج زاویه ی شیب را نمایش می دهد.



شکل ۶ - ۱۱ . قرائت زاویه ی شیب با شیب سنج

## خلاصه ی فصل

- زاویه قسمتی از صفحه است که بین دو امتداد متقاطع قرار گرفته باشد.
- زاویه ی افقی زاویه ای است که بین دو امتداد روی صفحه ی افقی به دست می آید.
- زاویه ی قائم زاویه ای است که بین یک امتداد و امتداد افقی یا قائم بر محل روی صفحه ی قائم به دست می آید.

• دو روش ساده و معمول برای اندازه گیری زاویه ی افقی استفاده می شود:

- ۱- استفاده از قطب نما
- ۲- استفاده از متر که خود به دو روش مثلث متساوی الساقین و روش مثلث نامشخص تقسیم می شود.

- زاویه ی قائم به دو زاویه ی زینتی و شیب تقسیم می شود.
- زاویه ی شیب ( $\alpha$ ) زاویه ای است بین امتداد مورد نظر و خط افق که در صفحه ی قائم اندازه گیری می شود.
- زاویه ی زینتی ( $Z$ ) زاویه ای است بین امتداد مورد نظر و خط قائم محل که در صفحه ی قائم اندازه گیری می شود.
- متداول ترین روش به دست آوردن زاویه ی قائم با وسایل ساده، استفاده از شیب سنج است که به ما زاویه ی شیب ( $\alpha$ ) را نشان می دهد.
- با استفاده از زاویه ی شیب می توان زاویه ی زینتی را محاسبه کرد:

$$Z + \alpha = 90^\circ \text{ یا } 100g$$

$$Z = 90 - \alpha$$



## خودآزمایی

### سؤالات تشریحی

- ۱- زاویه ی افقی و قائم را با رسم شکل توضیح دهید.
- ۲- روش های اندازه گیری زاویه ی افقی با وسایل ساده را نام ببرید و هر کدام را با ذکر مثال توضیح دهید.
- ۳- زاویه ی زینتی و شیب را تعریف کنید و تفاوت آن ها را توضیح دهید.
- ۴- چگونه می توان با استفاده از شیب سنج زاویه ی شیب و زینتی را به دست آورد. توضیح دهید.



سؤالات چهارگزینه‌ای

۵- اگر زاویه‌ی شیب یک امتداد را  $\alpha$  بنامیم زاویه‌ی زینتی این امتداد کدام است؟

(۱)  $90 - \alpha$       (۲)  $90 + \alpha$

(۳)  $180 - \alpha$       (۴)  $180 + \alpha$

۶- زاویه‌ی زینتی امتداد AB برابر ۴۵ درجه اندازه‌گیری شده است. زاویه‌ی شیب این

امتداد چند گراد است؟

(۱) ۴۰      (۲) ۴۵

(۳) ۵۰      (۴) ۵۵

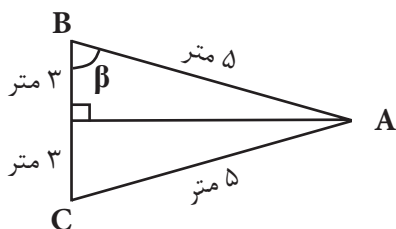
۷- قطب نما بر نقطه‌ی O مستقر شده و بر روی صفحه‌ی آن در امتدادهای OA و OB،

نسبت به امتداد شمال مغناطیسی، به ترتیب زوایای ۱۲۲ و ۱۸۵ درجه را خوانده است.

زاویه‌ی AOB چند درجه است؟

(۱) ۳۹      (۲) ۴۷

(۳) ۵۲      (۴) ۶۳



۸- در شکل روبه‌رو  $\sin \beta$  چه قدر است؟

(۱)  $0/8$       (۲)  $0/6$

(۳)  $0/4$       (۴)  $0/3$

۹- در شکل زیر زاویه‌ی A چند گراد است؟

(۱)  $20/55$

(۲)  $52/34$

(۳)  $41/11$

(۴)  $37/83$

