فصل ۳

نیرو و ایستایی

هدف کلی

تحلیل نیروها در حالت‌های ایستا

هدف های رفتاری

هنرجو پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود :

۱ــ نیرو را تعریف کند.

۲ــ شرایط ایستایی را توصیف کند.

۳ــ تفاوت قاب و خرپا را توضیح دهد.

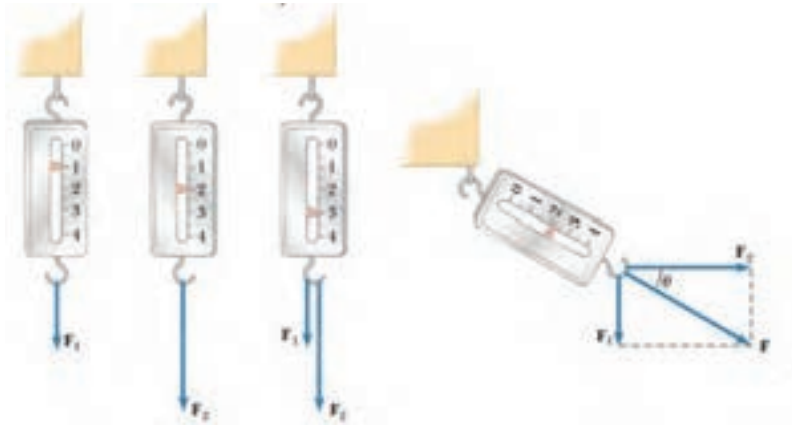
۴ــ معادلات یک سامانهٔ ایستا را حل کند.

۱ــ۳ــ نیرو

در کتاب‌های فیزیک سال اول و دوم با مبحث نیرو و قوانین نیوتن آشنا شدید. نیرو یکی از معدود کمیت‌هایی است که ما می‌توانیم به کمک حواس پنجگانه آن را حس کنیم. در تعریف نیرو گفته‌اند، کشش یا فشاری است که در دستان خود موقع حمل یک بار حس می‌کنیم.

نیرو یک بردار است و خواص برداری آن مشهود است. فرض کنید نیروی F_1 برابر ۱ نیوتن و F_2 برابر ۲ نیوتن را به یک نیرو سنج وارد کنیم. اگر هر بار یکی را وارد کنیم نیروسنج همان مقدار را نشان می‌دهد و اگر هر دور را همزمان با هم و در جهت نیروسنج وارد کنیم این بار نیروسنج جمع بزرگی دو نیرو را نشان می‌دهد. در آزمایش بعدی اگر نیروی F_1 را عمودی و F_2 را افقی وارد کنیم می‌بینیم که نیرو سنج زاویه می‌گیرد و مقداری که نشان می‌دهد برابر بزرگی برآیند برداری دو نیرو است (شکل ۱ــ۳) یعنی :

$$|F| = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{1+4} = 2/24N$$



شکل ۱ــ۳ــ نیرو یک بردار است.

● می‌دانیم که تا بر جسمی نیرو وارد نشود بردار سرعت آن جسم تغییر نخواهد کرد، این موضوع را قانون اول نیوتن می‌نامند.

● اگر بردار سرعت یک جسم تغییر کند یعنی $\Delta\vec{V}/\Delta t \neq 0$ باشد به این معنی است که حرکت آن جسم شتاب‌دار است. قانون دوم نیوتن می‌گوید که مقدار شتابی که یک جسم می‌گیرد $(\vec{a} = \Delta\vec{V}/\Delta t)$ با نیروی وارد بر آن جسم رابطهٔ مستقیم و با جرم آن رابطهٔ عکس دارد، یعنی $\vec{a} = \vec{F}/m$. هرچه جرم جسم بیشتر باشد لخت‌تر است و در برابر شتاب گرفتن مقاومت بیشتری از خود نشان می‌دهد. حال اگر تعداد زیادی نیرو بر یک جسم وارد شود چه اتفاقی می‌افتد؟ جسم به اندازهٔ برآیند بردار نیروهای وارد شده شتاب خواهد گرفت.

● وقتی روی یک قایق سعی کنیم فرد دیگری از یک قایق دیگر را به سمت خود بکشیم (یا هل دهیم) هر دو قایق به هم نزدیک (یا دور) می‌شوند. قانون سوم نیوتن این پدیده را توجیه می‌کند. این قانون می‌گوید هر نیرویی که جسم ۱ به جسم ۲ وارد کند، به همان میزان، ولی در خلاف جهت، جسم ۲ به جسم ۱ وارد می‌کند (شکل ۲ــ۳).

شکل ۲ــ۳ ــ الف ــ نیرویی که بین میخ و چکش است.

شکل ۲ــ۳ــ ب ــ قانون سوم را در تیراندازی توضیح دهید.

یادآوری

جرم جسم با وزن آن دو تعریف جداگانه دارند. جرم به محیط وابسته نیست و برای یک جسم کاملاً یکتا است. اما وزن برای یک جسم روی کرات مختلف آسمانی مقادیر مختلفی دارد و حتی روی کره زمین متغیر است.

حال می‌توانیم از این قوانین در بحث‌های این کتاب استفاده کنیم.

فعالیت کلاسی ۱

ــ آیا اگر جسمی در حال سکون باشد به این معنی است که نیرویی برآن وارد نمی‌شود؟ با ذکر مثال توضیح دهید.

ــ یک شناور که با سرعت ثابت در حال حرکت در آب است چطور؟ اگر این جسم یک ذرهٔ معلق در هوا باشد چطور؟

۱ــ۱ــ۳ــ حل مسائل حرکت شناسی و ایستایی به کمک قوانین نیوتن : برای حل مسائل دینامیک و ایستایی به کمک قوانین نیوتن باید موارد زیر را به خوبی اجرا کنید :

۱ــ رسم شکل مناسب

۲ــ پیدا کردن تمام نیروهای وارد بر جسم مورد تحلیل

۳ــ رسم نمودار جسم آزاد

۴ــ نوشتن معادلات نیرو و شتاب (قانون دوم) ترجیحاً در راستای x و y به‌طور مجزا.

در انجام مراحل بالا نیز نکاتی را نباید فراموش کرد. برخی از این نکات در زیر فهرست شده است :

✓ فقط جایی نیرو وجود دارد که حداقل دو جسم وجود دارد. یعنی اگر نیرویی بر جسمی وارد شد حتماً جسم دومی وجود دارد و در غیر این صورت نیرویی که در نظر گرفته‌اید اشتباه است.

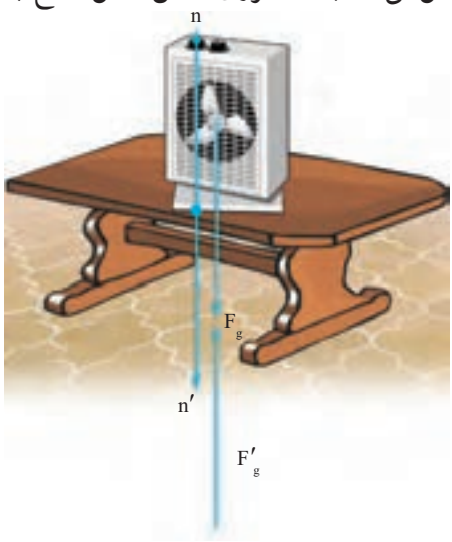
✓ نیروهای کنش و واکنش همزمان وجود دارند ولی از آنجایی که این نیروها به ۲ جسم مختلف وارد می‌شوند همدیگر را خنثی نمی‌کنند.

✓ برای بررسی حرکت یا حرکت نکردن یک جسم باید همهٔ نیروهای وارد بر آن جسم را به‌حساب بیاوریم. به فعالیت کلاسی ۱ مراجعه کنید.

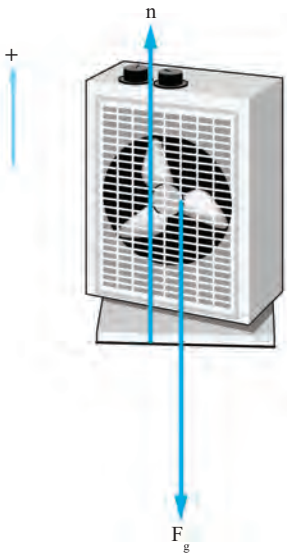
۲ــ۱ــ۳ــ رسم نمودار جسم آزاد : برای اینکه بتوان تمام نیروهای وارد بر جسم را به‌خوبی از هم تفکیک کرد و برآیند آنها را محاسبه کرد لازم است که این نیروها در شکلی کاملاً از هم تفکیک شده رسم شوند. به این شکل «نمودار جسم آزاد» می‌گویند. در نمودار جسم آزاد، فقط جسم مورد نظر را رسم می‌کنند و سایر اجسام حذف می‌شوند و فقط اثر نیرویی آنها در شکل باقی می‌ماند. به شکل ۳ــ۳ توجه کنید.

در شکل ۳ــ۳ــ الف نیروهای بین پنکه، میز و کره زمین رسم شده است. F_g نیروی جاذبه بین زمین و پنکه است و n نیروی عکس العمل سطح است که میز به پنکه وارد می‌کند. نیروهای قانون سوم نیز با علامت پریم مشخص شده اند. یعنی F'_g نیرویی است که پنکه به کره زمین وارد می‌کند و n' نیز نیروی عکس العمل سطح است که جسم به میز وارد می‌کند.

در شکل ۳ــ۳ــ ب جسم‌های غیر از پنکه حذف شده‌اند و فقط اثر آنها باقی مانده است. به این رسم نمودار جسم آزاد می‌گویند. یعنی مثلاً میز که پنکه را در موقعیتش نگه می‌داشته و در واقع آن را به بالا هل می‌داده با یک نیروی عکس العمل سطح جایگزین شده است.



شکل ۳ــ۳ــ الف ــ نیروهای وارده برپنکه، میز و کره زمین



شکل ۳ــ۳ــ ب ــ نمودار جسم آزاد (پنکه)

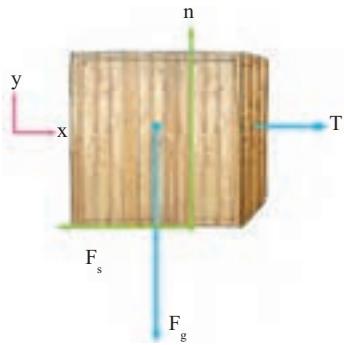
می‌دانیم که پنکه در جایش ایستاده است. پس ایستا است. طبق قانون‌های اول و دوم نیوتن باید برآیند نیروهای وارد بر این جسم صفر باشد. پس داریم :

$$n - F_g = 0 \Longrightarrow n = F_g$$

مثال ۱ : یک جعبه توسط یک طناب روی زمین کشیده می‌شود. مقدار اصطکاک چقدر باشد تا جسم ساکن بماند؟

حل : ابتدا شکل و سپس نمودار آزاد جعبه را رسم می‌کنیم. از آنجا که جسم ساکن است باید در هر دو جهت عمودی و افقی برآیند نیروهای وارد بر آن صفر شود.

شکل ۴ــ۳ــ الف ــ فردی سعی دارد جعبه را بکشد!



شکل ۴ــ۳ــ ب ــ نمودار جسم آزاد (جعبه)

در شکل ۴ــ۳، T نیروی طناب و F_s نیروی اصطکاک ایستایی است که از طرف زمین بر جعبه وارد می‌شود.

حال معادلات سامانه را به‌طور مجزا و در جهت‌های x و y که در شکل فرض کرده‌ایم، می‌نویسیم.

$$x:\ T - F_s = ma_x = 0 \Rightarrow T = F_s$$

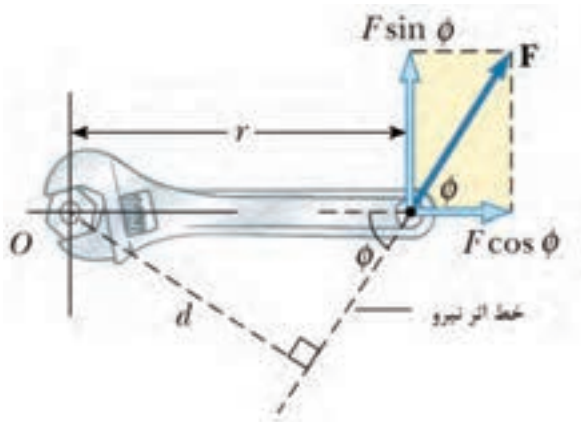
$$y:\ n - F_g = ma_y = 0 \Rightarrow n = F_g$$

که در آن g_x شتاب در راستای x و g_y شتاب در راستای y است. پس می‌بینیم تا زمانی که جعبه به حرکت در نیامده نیروی اصطکاک ایستایی دقیقاً برابر نیرویی است که ما بر جعبه وارد می‌کنیم.

۳ــ۱ــ۳ــ گشتاور : همان‌طورکه در فیزیک سال گذشته خوانده‌اید به اثر گرداننده نیرو، گشتاور می‌گوییم. وقتی نیرو در خارج از تکیه‌گاه یا خارج از مرکز جرم جسم به آن وارد می‌شود، اثر گشتاوری خود را نشان می‌دهد. گشتاور می‌تواند مانند نیرو موجب تغییر شکل و یا به حرکت در آمدن یک جسم شود.

قوانین نیوتن با کمی تفاوت برای گشتاور نیز کاربرد دارد. قانون اول به همان شکل است. یعنی تا بردار سرعت جسمی تغییر نکند گشتاوری برآن وارد نشده یا برآیند گشتاورهای وارد برآن صفر است.

قانون دوم نیز در فصل ۴ توضیح داده شده است. اما در مورد قانون سوم نمی‌توان به همان شکل استناد کرد، زیرا در واقع، گشتاور ناشی از یک نیرو و یک بازو است. پس ممکن است عکس‌العمل آن به دلیل متفاوت بودن بازو و نیرویی یکسان، به گشتاوری متفاوت منجر شود. گشتاور وارد بر یک جسم از طریق ضرب خارجی بازو در نیرو به‌دست می‌آید. گشتاور یک بردار است که بزرگی آن از رابطهٔ (۱ــ۳) که بر اساس متغیرهای شکل ۵ــ۳ نوشته شده، به‌دست آمده و جهت آن از قانون دست راست به‌دست می‌آید.



شکل ۵ــ۳ــ نیروی خارج از مرکز گشتاور ایجاد می‌کند.

همان‌طور که گفته شد، برای محاسبهٔ مقدار گشتاور از ضرب خارجی استفاده می‌کنیم. البته می‌توان همانند شکل ۵ــ۳، امتداد خط اثر نیرو را رسم کرد و سپس از نقطه‌ای که می‌خواهیم گشتاور را حول آن حساب کنیم خطی فرضی برآن عمود کنیم. طول پاره خط برابر d است. مقدار d از روابط مثلثاتی برابر $r.\cos(\theta)$ خواهد بود. همچنین می‌توان مؤلفهٔ عمود بردار نیرو را بر بردار بازو پیدا کرد. این مؤلفهٔ عمودی برابر $F.\sin(\theta)$ است. هر ۳ روش در واقع به یک رابطه ختم می‌شود :

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \Rightarrow \tau = rF.\sin(\theta) \qquad (۳ــ۱)$$

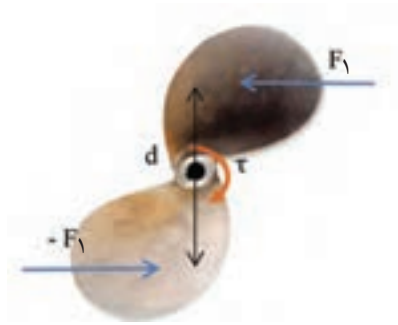
که در این رابطه $\vec{\tau}$ بردار گشتاور را نشان می‌دهد.

واحد گشتاور از رابطهٔ بالا برابر می‌شود با نیوتن در متر یا به اختصار نیوتن متر $(N.m)$ و باوجود شباهت رابطه به رابطهٔ کار و انرژی این واحد با ژول متفاوت است و واحدی مستقل است.

قانون دست راست : هرگاه انگشتان دست راست را ابتدا در جهت بازوی گشتاور نگه‌دارید و سپس به سمت نیرو مشت کنید، انگشت شست شما جهت بردار گشتاور را نشان می‌دهد. (این روش در ضرب‌های خارجی برداری کاربرد دارد). در اینجا برای ساده‌سازی از حالت ضرب خارجی برداری برای بیان گشتاور اجتناب شده است (شکل ۶ــ۳).

شکل ۶ــ۳ــ قانون دست راست

گشتاور جفت نیرو : هنگامی که دو نیرو، که از نظر اندازه با هم برابرند ولی در خلاف جهت هم هستند و خط اثری متفاوت دارند همزمان بر یک جسم وارد شوند، باعث ایجاد گشتاور جفت نیرو می‌شوند و باعث جابه‌جایی یا شتاب گرفتن خطی جسم نخواهند شد. پرهٔ یک قایق را که در شکل ۷ــ۳ آمده است فرض کنید.



شکل ۷ــ۳ــ جفت نیروی وارد بر یک پروانه قایق

اگر برآیند این نیروها صفر نبود باعث می‌شد که قایق به یک طرف (سمت یکی از نیروها) کشیده شود. اما می‌بینیم که این نیروها فقط باعث دوران جسم می‌شوند (در اینجا این نیروها باعث ثابت ماندن سرعت دورانی جسم می‌شوند). پس برآیند نیروهای وارده صفر است ولی گشتاور از رابطهٔ (۲ــ۳) به‌دست می‌آید.

$$\tau = d.F_{۱} \qquad (۳ــ۲)$$

مثال ۲ : در اطلاعات فنی مونتاژ یک سرسیلندر نوشته شده است که پیچ‌های آن باید با گشتاور ۱۲۰ نیوتن‌متر سفت شوند. برای این‌کار از یک آچار ترک‌متر[۱] به طول بازوی ۸۰ سانتی‌متر استفاده می‌شود. با فرض اینکه نیروی دست عمود بر دسته آچار وارد شود نیرویی که ما باید بر آچار وارد کنیم را بیابید؟

حل : از آنجا که نیرو به صورت عمود وارد شده است، مسئله به راحتی قابل حل است. داریم :

$$\theta = ۹۰^{\circ} \text{ و } r = ۰/۸\,m,\ \tau = ۱۲۰\,N.m$$

پس از رابطهٔ ۱ــ۳ خواهیم داشت :

$$F = \frac{\tau}{r.\sin(\theta)} = \frac{۱۲۰}{۰/۸} = ۱۵۰N$$

۱ــ Torque meter

۲ــ۳ــ ایستایی

هرگاه جسمی با وجود تمام نیروها و گشتاورهای وارده ثابت باشد به آن ایستا می‌گوییم و محدوده حل مسئله آن را نیز مسئله ایستایی می‌نامیم. در این حالت طبق قانون دوم نیوتن برآیند نیروها و گشتاورهای وارد بر جسم صفر است یعنی :

$$\sum \vec{F} = 0 \qquad (۳ــ۳)$$

$$\sum \vec{\tau} = 0 \qquad (۳ــ۴)$$

رابطهٔ (۳ــ۳) برای حالت برداری نیرو نوشته شده است، برای حل راحت‌تر مسائل، این رابطه را به مؤلفه‌های اصلی تجزیه می‌کنیم. رابطهٔ (۳ــ۵) شکل مؤلفه‌ای این رابطه را برای مسائل ۲ بعدی نشان می‌دهد.

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \quad و \quad \sum \overrightarrow{F_y} = 0 \qquad (۳ــ۵)$$

فراموش نکنید که رابطهٔ (۳ــ۴) نیز در مورد یک نقطهٔ خاص نوشته می‌شود. معمولاً برای این‌کار یکی از تکیه‌گاه‌ها یا مرکز جرم جسم را در نظر می‌گیرند.

یادآوری

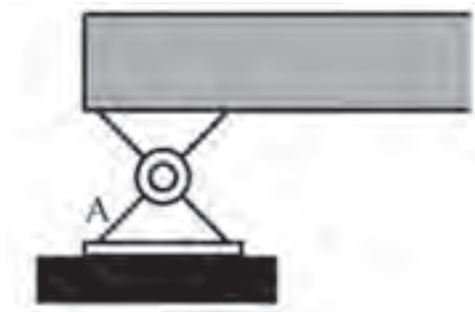
دقت داشته باشید که اگر جسمی با سرعت ثابت و نیز در حرکت باشند برآیند نیروها و گشتاورهای وارد بر آن صفر است.

۱ــ۲ــ۳ــ انواع تکیه‌گاه : برای اینکه یک سازه، تحت تأثیر نیروهای خارجی یا وزن خود حرکت نکند، باید توسط قیدهایی به محیط (زمین یا هر جسم دیگر) متصل شود. به این قیدها، تکیه‌گاه[۱] می‌گویند. تکیه‌گاه‌ها بر حسب قیدی که در مقابل حرکت به وجود می‌آورند، به انواع مختلفی دسته‌بندی می‌شوند. در ادامه، سه نمونه از معروفترین و کاربردی‌ترین آنها فهرست شده است.

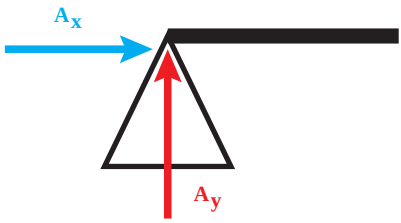
تکیه‌گاه مفصلی ثابت (لولایی) : تکیه‌گاه مفصلی ثابت یا تکیه‌گاه لولایی[۲] نوعی از تکیه‌گاه‌است که از تغییر مکان نقطهٔ تکیه‌گاهی (در فضا و یا در صفحه) جلوگیری به‌عمل می‌آورد، ولی هیچ‌گونه مقاومتی در برابر دوران سازه، حول محورهای تکیه‌گاه ندارد. بنابراین چنانچه سازه‌ای به این نوع تکیه‌گاه متکی باشد، در مقابل چرخش آن حول محورهای پایه، هیچ گونه گشتاور واکنشی ایجاد نمی‌شود و به علت محدود شدن دو امتداد حرکت در صفحه، درحالت کلی دو مؤلفه واکنش تکیه‌گاهی

۱ــ Support ۲ــ Hinged Support

در صفحه ایجاد می‌شود. لولای در، یک نمونه از این تکیه‌گاه است.شکل ۸ــ۳ــ الف نماد این تکیه‌گاه و شکل ۸ــ۳ــ ب نمودار آزاد عکس‌العمل تکیه‌گاه را نشان می‌دهد.

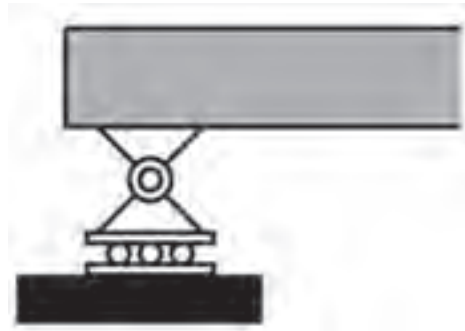


شکل ۸ــ۳ــ الف ــ تکیه‌گاه لولایی



شکل ۸ــ۳ــ ب ــ نمودار آزاد تکیه‌گاه لولایی

تکیه‌گاه مفصلی متحرک (غلتکی) : تکیه‌گاه غلتکی[1] یا تکیه‌گاه مفصلی متحرک[2] کاملاً شبیه تکیه‌گاه لولایی است، با این تفاوت که نسبت به آن درجهٔ آزادی بیشتری دارد. این درجهٔ آزادی، همان حرکت پایه در امتداد حرکت غلتک‌هاست. در واقع در این نوع تکیه‌گاه‌ها تنها یک امتداد حرکت محدود می‌شود و در نتیجه واکنش تکیه‌گاهی ایجاد شده، در امتدادی است که از حرکت پایه در آن امتداد جلوگیری شده‌است. این واکنش تکیه‌گاهی، عمود بر امتداد قابل حرکت تکیه‌گاه‌است که از مرکز مفصل هم می‌گذرد. وقتی یک انتهای خط‌کش را روی لبه میز می‌گذارید چیزی شبیه به تکیه‌گاه غلتکی تشکیل می‌شود. شکل ۹ــ۳ــ الف نماد این تکیه‌گاه و شکل ۹ــ۳ــ ب نمودار آزاد عکس‌العمل تکیه‌گاه را نشان می‌دهد.



شکل ۹ــ۳ــ الف ــ تکیه‌گاه غلتکی

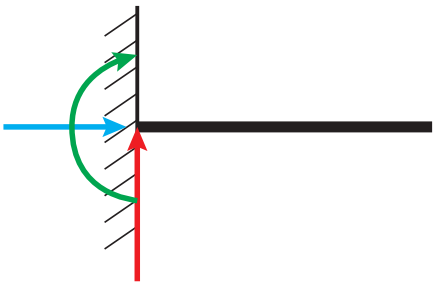
شکل ۹ــ۳ــ ب ــ نمودار آزاد تکیه‌گاه غلتکی

۱ــ Roller Support

۲ــ Movable Support

تکیه‌گاه گیردار[1] (طره‌ای) : تکیه‌گاه گیردار از حرکت نقطهٔ تکیه‌گاهی در امتداد محورهای x و y و همچنین از دوران جسم حول نقطهٔ تکیه‌گاهی جلوگیری می‌کند. بنابر این سه مؤلفه واکنش تکیه‌گاهی در این نوع تکیه‌گاه ایجاد می‌شود. اگر جسمی فقط یک تکیه‌گاه گیردار داشته باشد کاملاً پایدار خواهد بود. برای مثال از این نوع تکیه‌گاه می‌توان به میلهٔ پرچم در پایهٔ آن اشاره کرد. شکل ۱۰ــ۳ــ الف نماد این تکیه‌گاه و شکل ۱۰ــ۳ــ ب نمودار آزاد عکس‌العمل تکیه گاه را نشان می‌دهد.

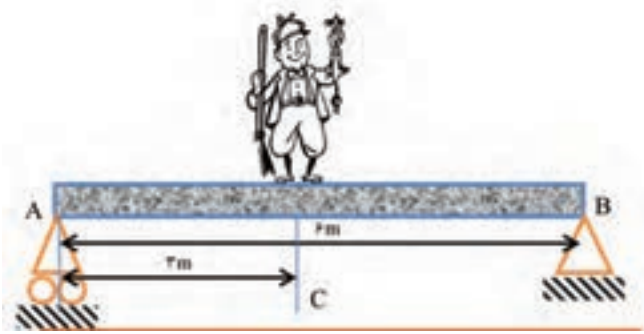
شکل ۱۰ــ۳ــ الف ــ تکیه‌گاه طره‌ای



شکل ۱۰ــ۳ــ ب ــ نمودار آزاد تکیه‌گاه طره‌ای

۲ــ۲ــ۳ــ حل مسائل ایستایی جسم صلب : حل مسائل استاتیکی با دانستن معادلات (۳ــ۳) الی (۵ــ۳)، دانسته‌های بند ۱ــ۱ــ۳ و بند ۲ــ۱ــ۳ و آشنا شدن با نمودار آزاد انواع تکیه‌گاه بسیار ساده خواهد بود.

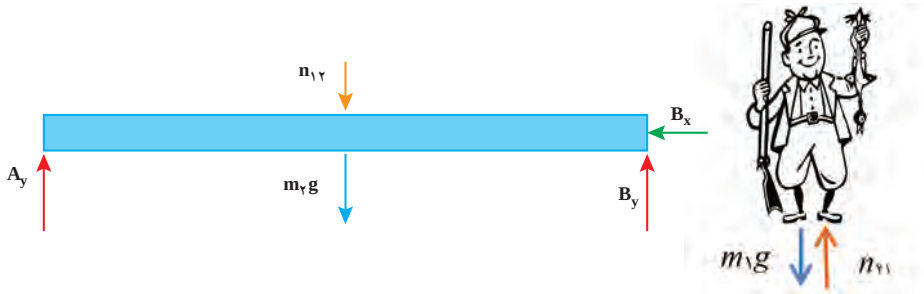
مثال ۳ : از یک تیرآهن به جرم ۲۰۰ کیلوگرم برای برقراری ارتباط بین دو ساحل رودخانه به فاصلهٔ ۶ متر، استفاده می‌کنند. یک شکارچی، که به همراه شکار و ادوات شکارش ۱۲۰ کیلوگرم جرم دارد در حال عبور از این پل است (شکل ۱۱ــ۳). وقتی که شکارچی به مرکز پل می‌رسد، عکس‌العمل تکیه‌گاه‌ها را محاسبه کنید. تکیه‌گاه سمت راست از نوع مفصلی و سمت چپ از نوع غلتکی است.



شکل ۱۱ــ۳ــ یک پل ساخته شده از تیرآهن

۱ــ Fixed Support

حل : باید نمودار آزاد همهٔ اجسام داده شده در شکل رسم شود. شکارچی را جرم شماره ۱ و تیرآهن را جرم شماره ۲ می‌نامیم.



شکل ۱۲ــ۳ــ الف ــ نمودار آزاد شکارچی

شکل ۱۲ــ۳ــ ب ــ نمودار آزاد تیرآهن (پل)

نمودار آزاد شکارچی در شکل ۱۲ــ۳ــ الف رسم شده است می‌بینیم که تنها نیروهای موجود فقط در راستای عمودی هستند. پس معادله ایستایی را برای این جسم می‌نویسیم :

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0 \Rightarrow n_{21} - m_1 g = 0 \Rightarrow n_{21} = m_1 g = 120 \times 10 \Rightarrow n_{21} = 1200\,N$$

حال معادلات تعادل را برای تیر می‌نویسیم، فراموش نکنیم که $n_{12} = n_{21}$:

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0 \Rightarrow A_y + B_y - n_{12} - m_2 g = 0 \Rightarrow A_y + B_y = n_{12} + m_2 g$$

$$\Rightarrow A_y + B_y = 1200 + 2000 = 3200\,N \quad \text{معادله (I)}$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \Rightarrow B_x = 0$$

برای محاسبهٔ تعادل گشتاوری ابتدا نقطه‌ای را در نظر می‌گیریم و گشتاور نیروها حول آن را محاسبه می‌کنیم، در اینجا نقطهٔ A را انتخاب کرده‌ایم :

$$\sum \overrightarrow{\tau_A} = 0 \Rightarrow B_y \times AB - n_{12} \times AC - m_2 g \times AC = 0 \quad \text{معادله (II)}$$

حال دو معادله داریم و دو مجهول. نیروهای تکیه‌گاه‌ها مجهول‌اند و معادله (I) و (II) معادلاتی که برای یافتن مجهولات به آنها نیاز داریم.

$$\text{معادله (II)} \Rightarrow 6B_y = 3 \times 3200 \Rightarrow B_y = \frac{9600}{6} = 1600\,N$$

با جای‌گذاری B_y در معادله (I) مقدار نیروی عکس العمل تکیه‌گاه دوم نیز به دست می‌آید.

$$A_y = 3200 - B_y = 1600\,N$$

البته شاید پاسخ این مسئله از ابتدا هم مشخص بود اما مهم این بود که شما روش حل را بیاموزید. حال به سراغ فعالیت ۱ــ۳ بروید و آموزه‌های خود را محک بزنید.

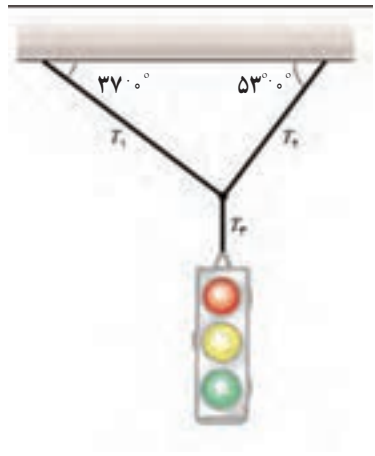
فعالیت ۱-۳

در مثال قبل فرض کنید شکارچی در ۱ متری تکیه‌گاه A باشد. حال نیروهای تکیه‌گاهی را بیابید.

مسائل خاص: در برخی مسائل خاص، ممکن است نیروها هم‌رأس باشند (یعنی امتدادشان از یک نقطه عبور کند) این اتفاق بیشتر در مورد سازه‌هایی که از طناب ساخته شده‌اند رخ می‌دهد. وقتی که نیروها هم رأس باشند طبعاً برآیند گشتاور آنها صفر است. زیرا با گشتاور گیری حول نقطهٔ تقاطع این نیروها مقدار بازوی گشتاور همهٔ آنها صفر خواهد بود و در نتیجه گشتاور نیز برابر صفر خواهد شد.

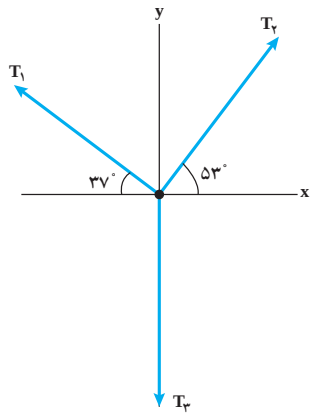
از طرفی به دلیل حالت هندسی خاص، دیگر نیازی به تجزیه نیروها به مؤلفه‌هایشان نخواهد بود. بلکه می‌توان از روش‌هایی مثل قانون سینوس‌ها استفاده کرد. مثال بعدی به خوبی این قضیه را نشان می دهد. البته برای استفاده از این روش‌ها شرط ایستایی یا تعادل سامانه الزامی است.

مثال ۴ : یک چراغ راهنمایی به وزن ۱۰۰ نیوتن، مطابق شکل ۱۳ــ۳ــ الف به کمک دو طناب آویزان شده است. نیروی کشش طناب‌ها را بیابید.



شکل ۱۳ــ۳ــ الف ــ چراغ راهنمایی که به کمک ۳ طناب معلق شده است.

شکل ۱۳ــ۳ــ ب ــ نمودار آزاد چراغ راهنمایی



شکل ۱۳ــ۳ــ پ ــ نمودار آزاد گره اتصال ۳ طناب

حل اول : روش نوشتن معادلات تعادل را پی می‌گیریم. ابتدا نمودار آزاد اجسام را مطابق شکل ۱۳ــ۳ــ ب و ۱۳ــ۳ــ پ رسم می‌کنیم. سپس معادلات تعادل را از نمودار آزاد، استخراج می‌کنیم. از آنجا که برای این‌کار نیاز به مؤلفه‌های نیروی طناب‌ها داریم باید بردارهای نیروی T_1 و T_2 را تجزیه کنیم. T_3 در راستای محور عمودی است و با توجه به شکل ۱۳ــ۳ــ ب به سادگی در می‌یابیم که برابر F_g یا وزن چراغ راهنمایی خواهد بود.

$$\sum \overrightarrow{F_y} = 0 \Rightarrow T_1.\sin(37) + T_2.\sin(53) - T_3 = 0 \Rightarrow 0/6T_1 + 0/8T_2 - 100 = 0 \quad (I)$$

$$\sum \overrightarrow{F_x} = 0 \Rightarrow -T_1.\cos(37) + T_2.\sin(53) = 0 \Rightarrow -0/8T_1 + 0/6T_2 = 0 \quad (II)$$

با استفاده از معادلهٔ (II) داریم :

$$T_1 = \frac{0/6}{0/8} T_2 = 0/75T_2$$

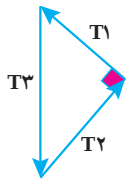
با جای‌گذاری این معادله در معادله (I) خواهیم داشت :

$$0/6 \times 0/75T_2 + 0/8T_2 - 100 = 0 \Rightarrow T_2 = 80\,N \text{ و } T_1 = 0/75 \times 80 = 60\,N$$

حل دوم : استفاده از روش سینوس‌ها در حل به جای مؤلفه‌گیری :

زاویه بین دوبردار T_1 و T_2 برابر ۹۰ درجه است، زاویه بین T_1 و T_3 ، ۵۳ درجه است و زاویه بین T_3 و T_2 برابر ۳۷ درجه است.

با نوشتن قاعده سینوس‌ها داریم :



$$\frac{T_3}{\sin 90} = \frac{T_1}{\sin 37}$$

مشهود است که با حل معادله بالا همان پاسخ‌ها به‌دست می‌آید. اما خیلی سریع‌تر و ساده‌تر.

۳ــ۲ــ۳ ــ خرپا : در هندسهٔ سال‌های پیش می‌خواندیم اگر بین دو مثلث سه متغیر با هم برابر باشند هر دو مثلث با هم برابرند و مثلاً اگر۲ مثلث سه ضلع یک به یک برابر داشته باشند، می‌گفتیم مثلث‌ها به حالت **سه ضلع** با هم برابرند. اما در دو چهار ضلعی با داشتن چهار متغیر، مثلاً طول چهار ضلع، نمی‌توانستیم بگوییم این اَشکال برابرند. حال اگر به کمک ۳ میله که در انتها به هم لولا (مفصل) شده‌اند یک سازه بسازیم، مثلثی تشکیل خواهند داد که این مثلث از نظر هندسی یکتا است. یعنی با اعمال نیروی خارجی به مثلث دیگری تبدیل نخواهد شد. به این مثلث پایدار **خرپا** می‌گوییم.

ــ خرپا سازه‌ای صلب از واحدهای مثلثی شکل است که از اتصال اجزای باریک و بلند ساخته شده است. خرپاها توانایی تحمل نیروهای کششی و فشاری را دارند.

ــ خرپاها از جملهٔ ساده‌ترین اعضای باربر سازه‌ها هستند، که در کل، به‌صورت اعضای خمشی عمل نموده و در سقف‌ها، پل‌ها و سازه‌های هوا و فضا مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این‌گونه سازه‌ها به علت نبودن نیروی برشی و لنگر خمشی در تک تک اعضای متشکله مثلث‌ها، اتصالات باید به‌صورت مفصلی در نظر گرفته شود.

خرپا بر حسب تعریف از مجموعه‌ای از اعضایی به‌وجود می‌آید که همگی در یک صفحه قرار دارند و ترکیب آنها یک شبکه مثلثی ایجاد می‌نماید. چون در خرپاها فرض می‌شود که اعضا در انتهای خود به اعضای دیگر لولا شده‌اند بنابراین شکل مثلثی تنها شکل پایدار خواهد بود. به شکل ۱۴ــ۳ نگاه کنید. می‌بینید که اضلاع متوازی‌الاضلاع و مستطیل دو به دو با هم برابرند ولی شکل‌ها یکسان نیستند. اما مثلث‌ها کاملاً با هم برابرند.

شکل ۱۴ــ۳ــ دو مثلث با سه ضلع برابر با هم، برابرند اما دو چهارضلعی خیر!

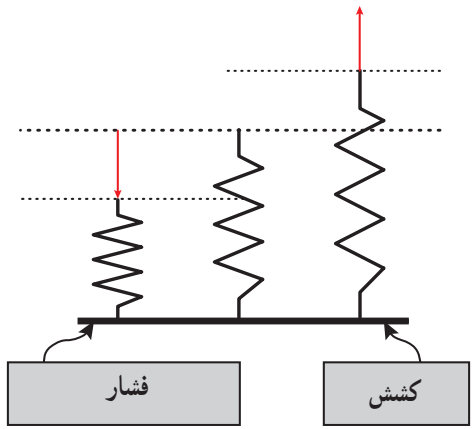
در شکل ۱۵ــ۳ پل بزرگ کارون آمده است. این پل که تماماً توسط مهندسان ایرانی طراحی و اجرا شده است در قوس زیرین خود دارای تعداد زیادی خرپا است.

به دلیل اینکه در خرپاها، میله‌ها (یا لینک‌ها) فقط در دو انتهای آن، به صورت مفصلی با هم در ارتباط هستند، اعضای آنها فقط می‌توانند تحت کشش یا فشار قرار گیرند. به این اعضا عضو دو نیرویی می‌گویند.

شکل ۱۵ــ۳ــ پل بزرگ کارون در جنوب کشور، قوس زیرین آن از خرپا ساخته شده است.

فشار(Compression) : نیرویی که تمایل دارد عضو تحت اثرش را فشرده یا کوتاه کند (شکل ۱۶ــ۳).

کشش(Tension) : نیرویی که تمایل دارد عضو تحت اثرش را طویل یا گسترده کند.



شکل ۱۶ــ۳ــ تعریف کشش و فشار

۴ــ۲ــ۳ــ پایداری سازه : با اجرای یک آزمون بسیار ساده می‌توان فهمید که یک سازه خرپا است یا خیر. خرپا بودن به معنی پایدار بودن سازه است. رابطهٔ (۶ــ۳) می‌تواند تعداد مجهولات را در یک سازه تعیین کند.

$$K = 2J - R \qquad (۶ــ۳)$$

که در آن

K= تعداد مجهولات

J= تعداد مفاصل

M= تعداد اعضا

(تعداد اضلاع مثلث) R = ۳

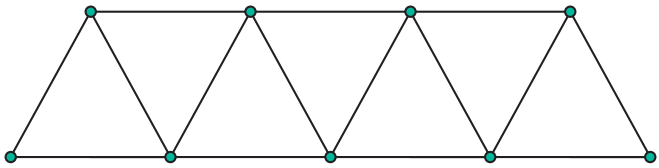
حال با توجه به شرایط زیر، پایداری و قابل حل بودن سازه مشخص می‌شود :

اگر M = K باشد سازه خرپا است، یعنی پایدار و قابل حل است.

اگر M < K باشد سازه نه پایدار است نه قابل حل.

اگر M > K باشد سازه پایدار است اما معادلات آن، قابل حل نیست.

مثال ۵ : تعیین کنید که آیا شکل ۱۷ــ۳ خرپا است یا خیر؟

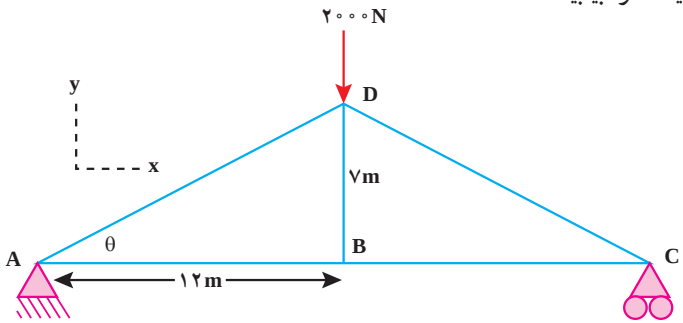


شکل ۱۷ــ۳ــ یک سازه با ۱۵ عضو

حل : J=۹ و M=۱۵ است پس K = ۲ (۹) − ۳ = ۱۵، با توجه به شرایط ذکر شده، سازه خرپا است (پایدار و قابل حل است.).

حل خرپا : برای حل معادلات یک خرپا پس از اینکه بررسی کردیم و متوجه خرپا بودن آن شدیم، کافی است معادلات تعادل را یک‌بار برای کل و یک‌بار برای تک تک مفاصل بنویسیم. در مثال زیر با این روش آشنا می شوید. دقت کنید که در نوشتن معادلات برای یک مفصل نیازی به نوشتن معادلات مربوط به گشتاور نیست زیرا همهٔ نیروها از یک نقطه می‌گذرند.

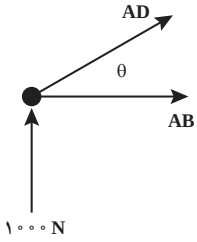
مثال ۶ : آیا سازهٔ زیر خرپا است؟ نیروهای وارد بر اعضا، کششی یا فشاری بودن آنها و عکس‌العمل تکیه‌گاه را بیابید.



حل : با توجه به تقارن داریم : Ay = Cy = ۱۰۰۰N و به سمت مثبت محور y

معادله تعادل را برای نقطهٔ A می‌نویسیم :

$$\theta = \tan^{-1}\frac{۷}{۱۲} = ۳۰/۳^\circ$$



$$\begin{cases} \sum F_y = ۰ \Rightarrow AD\sin ۳۰/۳ + ۱۰۰۰ = ۰ \Rightarrow AD = -۱۹۸۵N \\ \sum F_x = ^{\circ} \Rightarrow \frac{AD\cos ۳۰}{۳} + AB = ۰ \Rightarrow AB = ۱۷۱۴N \end{cases}$$

از اینکه مقدار نیروی AD منفی شد نتیجه می‌گیریم که جهت این نیرو را در شکل اشتباه گرفته‌ایم. یعنی این نیرو کششی نیست بلکه فشاری است. اما نیروی AB همان نیروی کششی است، که از ابتدا حدس زده‌ایم. به‌دلیل تقارن، نیروی DC برابر نیروی AD خواهد بود . نیروی BC هم برابر نیروی AB.

با نوشتن معادله در نقطهٔ B هم متوجه می‌شویم که DB = ۰ است، زیرا تنها نیروی راستای عمود نیروی DB است و برآیند نیروهای عمودی و افقی هردو صفر است.

هر ساله در سراسر ایران و جهان مسابقاتی با عنوان سازه‌های ماکارونی برگزار می شود. در این مسابقات هر شرکت کننده یک سازهٔ ماکارونی را طبق قوانین ساخته و تحت بارگذاری قرار می‌دهد. معمولاً سازه‌هایی که در حین سبک‌تر بودن بار بیشتری را تحمل کنند برنده خواهند شد.

هدف از برگزاری این مسابقات، شبیه‌سازی سازه‌ها و خرپاهای واقعی به روشی ارزان و مقرون به‌صرفه است. علاوه بر آن دانش فنی دانش‌آموزان و دانشجویان در رابطه با مسائل مربوط به ایستایی ومقاومت مصالح محک می‌خورد.

چگونه سازه ماکارونی بسازیم

ابتدا خوب است که یک مسابقه تعریف کنیم. فرض کنید می‌خواهید یک پل از جنس ماکارونی بسازید دهانه این پل ۳۰ سانتی متر است و قرار است که یک بار ۲ کیلوگرمی را تحمل کند. عرض پل نمی‌تواند از ۱۰ سانتی‌متر تجاوز کند و ارتفاع آن نیز نباید از ۲۰ سانتی‌متر بیشتر باشد.

نکات اولیهٔ طراحی :

- وقتی که دهانه ۳۰ سانتی‌متر است شما باید پل را به شکلی بسازید که حداقل طول آن بیشتر از ۳۰ سانتی‌متر باشد تا به خوبی روی تکیه‌گاه قرار بگیرد.
- نقشه پل باید طوری باشد که بار را از وسط گرفته و به سمت تکیه‌گاه هدایت کند.
- همه قسمت‌ها باید به شکل خرپا باشد. وجود مربع یعنی که یک قسمت خرپا نیست.

● برای قسمت‌هایی که نیروی فشاری تحمل می‌کنند از ماکارونی‌های ضخیم (۲/۸ میلی‌متری) و برای اجزاء تحت کشش از ماکارونی نازک استفاده کنید. در طراحی سازه‌ها، عضوهای فشاری به دلیل طول زیاد ممکن است دچار پدیدهٔ کمانش شوند و فرو بریزند. بنابراین سعی کنید تا جای ممکن طول آنها را کم و قطر آنها را زیاد کنید.

● ماکارونی‌های ضخیم را با طول‌های مختلف تحت فشار قراردهید و ببینید هر طول تحمل چه نیرویی را دارد.

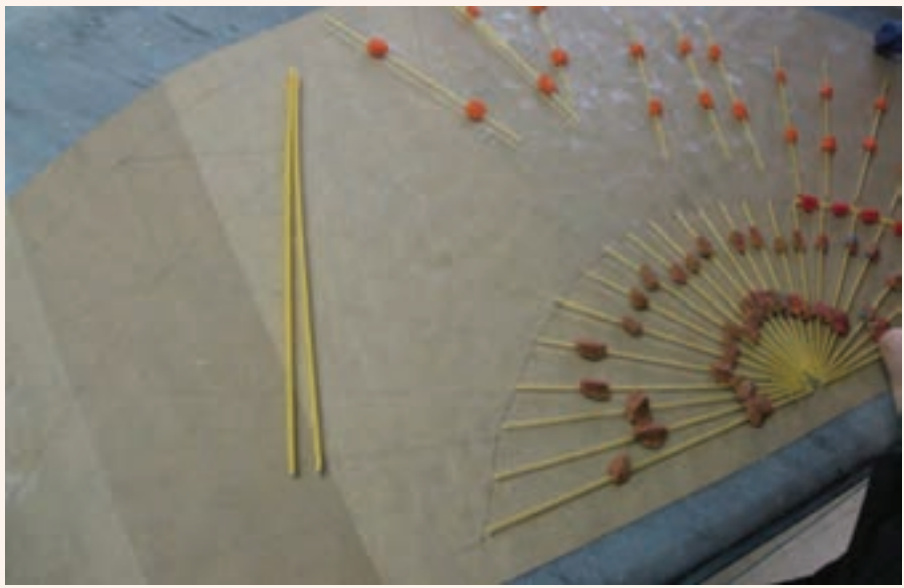
● نقشه‌خود را تحلیل کنید و ببینید که به عضوهای فشاری چه نیرویی وارد می‌شود. طول عضو را طوری انتخاب کنید که تحمل آن نیرو را داشته باشد.

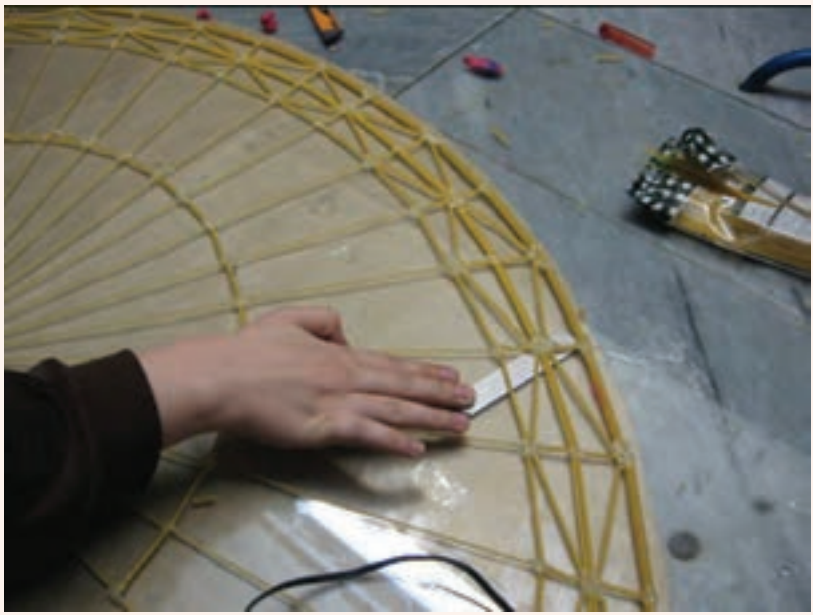
● هر پل از دو صفحه دوبعدی و یک سازه عرضی برای اتصال صفحات ساخته می‌شود.

● نقشه صفحه ۲ بعدی را روی کاغذ رسم کنید.

● ترجیحاً نقشه را زیر یک شیشه ۶ میلی‌متری بچسبانید.

● ماکارونی‌ها را روی نقشه بچینید و بچسبانید. پس از تکمیل هر دو صفحه آنها را در جهت عرضی به هم بچسبانید. بادبندهای عرضی را فراموش نکنید.





SH 1

خودآزمایی فصل سوم

۱ــ خرپا را تعریف کنید.

۲ــ جاهای خالی را پر کنید :

الف) هر کنشی را واکنشی است _____ و در خلاف جهت آن.

ب) جرم جسم به محیط وابسته _____ و برای یک جسم در سطح زمین _____ است.

۳ــ گزینهٔ صحیح را علامت بزنید :

الف) وزن برای یک جسم روی کرات مختلف آسمانی مقادیر _____ دارد و حتی روی کرهٔ زمین _____ است.

۱ــ ثابت، متغیر ۲ــ مختلف، ثابت

۳ــ ثابت، ثابت ۴ــ مختلف، متغیر

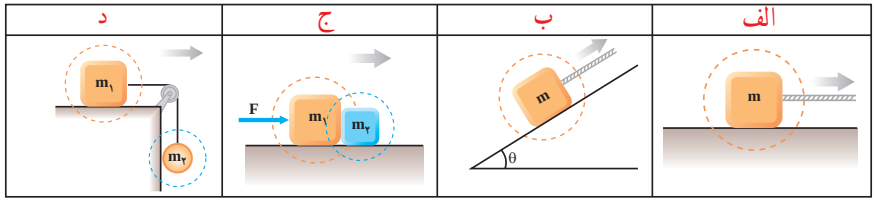
ب) تا بر جسمی نیرو وارد _____ بردار سرعت آن تغییر _____.

۱ــ نشود، نمی‌کند. ۲ــ بشود، نمی‌کند.

۳ــ بشود، می‌کند. ۴ــ گزینه‌های ۱ و ۳

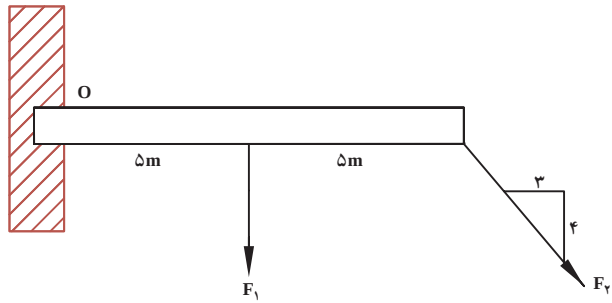
۴ــ انواع تکیه‌گاه را نام ببرید.

۵ــ نمودار آزاد اجسام زیر را که در شکل ۱۸ــ۳ آمده‌اند، تحت نیروهای نشان داده شده رسم کنید. در همهٔ موارد اصطکاک وجود دارد.



شکل ۱۸ــ۳

۶ــ دو نیروی $\vec{F_1}$ و $\vec{F_2}$ مطابق شکل ۱۹ــ۳ بر تیر وارد می‌شوند. گشتاور هر یک از نیروها در محل تکیه‌گاه چقدر است؟

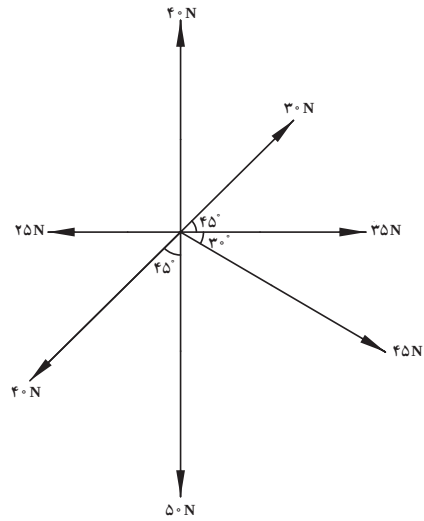


شکل ۱۹ــ۳

۷ــ در مسئله قبل عکس‌العمل تکیه‌گاه را محاسبه کنید.

۸ــ چند نیرو مطابق شکل ۲۰ــ۳ بر نقطه‌ای عمل می‌کنند. با استفاده از روش رسم، اندازه و جهت نیروی برآیند را بیابید.

۹ــ برآیند نیروهای شکل ۲۰ــ۳ را از روش تحلیلی محاسبه کنید.



شکل ۲۰ــ۳

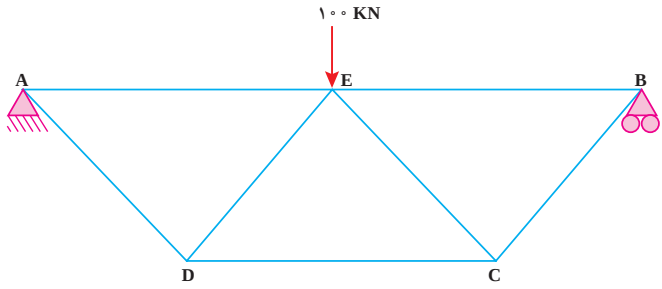
۱۰ــ یک کیسه ۵۰ کیلوگرمی سیمان از دو طناب مانند شکل ۲۱ــ۳ آویخته شده‌است. نیروی هر یک از طناب‌ها را بیابید. ($\theta_1=60^\circ$ و $\theta_2=37^\circ$)

شکل ۲۱ــ۳

۱۱ــ یک پروانهٔ کشتی برای گشتن در سرعت مورد نظر نیاز به گشتاور ۳۰۰ نیوتن متر دارد. با فرض آنکه نقطهٔ اثر نیروی آب روی پروانه در فاصلهٔ ۱/۲ متری از مرکز پروانه باشد، نیروی متوسط وارد شده بر هر پره را بیابید.

۱۲ــ شافتی به جرم ۵/۰۹۷ تن به‌وسیله دو زنجیر از یک قلاب جرثقیل آویزان می‌باشد. طول هر زنجیر ۴ متر و فاصلهٔ بین نقاط اتصال زنجیرها به شافت نیز ۴ متر است. فاصلهٔ مرکز ثقل شافت از یکی از نقاط اتصال شافت و زنجیر ۱/۲۵ متر است. نیروی کششی در هر زنجیر چقدر است؟

۱۳ــ در سازهٔ شکل ۲۲ــ۳ کلیه عضوهای مورّب دارای زاویه ۴۵ درجه با عضو مجاورخود هستند. باری به اندازهٔ ۱۰۰ KN در وسط سازه قرار دارد. نمودار برداری نیروهای موجود در عضوها را رسم و اندازه‌گیری کنید. اندازهٔ نیروها و ماهیت آنها (کششی یا فشاری) را در یک جدول بنویسید.



شکل ۲۲ــ۳