فصل ۲

استفاده از بردار برای تحلیل نیروها

هدف کلی

استفاده از بردار در تحلیل‌های نیرویی

هدف‌های رفتاری

هنرجو پس از آموزش این فصل قادر خواهد بود :

۱ــ بردار را تعریف کند.

۲ــ کمیت‌های برداری و نرده‌ای را تشخیص دهد.

۳ــ جمع برداری را به روش **ترسیمی** و **تحلیلی** انجام دهد.

۴ــ ضرب داخلی و خارجی را بر روی بردارهای ۲ بعدی انجام دهد.

۱ــ۲ــ کمیت‌های برداری

شما در دوران راهنمایی و ابتدایی با مبحث محورهای مختصات و بردار آشنا شده‌اید. اما شاید تاکنون به کاربرد آنها فکر نکرده‌اید یا با آنها برخوردی نداشته‌اید. در این کتاب به‌وفور از محاسبات برداری و مختصاتی در علم مکانیک استفاده شده است. اما بهتر است قبل از آن بدانیم چرا این محاسبات در علم استاتیک و دینامیک کاربرد دارد.

در فیزیک سال گذشته با کمیت‌های فراوانی روبه‌رو شدید. برخی از این کمیت‌ها فقط مقدار دارند، مثل کار[۱]، جرم[۲]، دما[۳]، فاصله[۴] و تندی[۵]. این‌گونه کمیت‌ها را کمیت‌های اسکالر یا نرده‌ای می‌نامند.

امّا برخی کمیت‌ها هستند که علاوه براندازه، راستا و جهت نیز دارند. به عنوان مثال فاصلهٔ جزیره قشم (از بندر قشم) تا بندر عباس ۱۰/۸ مایل (۲۰ کیلومتر) است. اما آیا به نظر شما برای طی کردن یک مسافت دریایی دانستن فاصله به تنهایی کافی است؟ مسلماً برای دانستن موقعیت این دو بندر نسبت به هم لازم است، طول و عرض جغرافیایی هردو و یا راستا و جهت حرکت از بندری به بندر دیگر مشخص شود. به همین دلیل است که در کشتی‌ها از وسایل جهت‌یابی مختلفی استفاده می‌شود. برای مثالی دیگر می‌توان به نیرو اشاره کرد. اگر یک جعبه را با نیروی ۱۰۰ نیوتن روی زمین بکشید، به کدام طرف حرکت می‌کند؟ باید اول معلوم کنید که این نیرو در چه جهت و در چه راستایی وارد شده است. مثلاً اگر نیرو به سمت پایین وارد شود اصلاً جعبه از جایش تکان نمی‌خورد بلکه به زمین فشرده می‌شود.

۱ــ work　　۲ــ mass　　۳ــ temperature
۴ــ distance　　۵ــ speed

شکل ۲ــ۲ــ سرعت‌سنج دریایی دیجیتال

شکل ۱ــ۲ــ سرعت‌سنج کشتی قدیمی

شکل ۱ــ۲و شکل ۲ــ۲ سرعت سنج‌های دریایی را نشان می‌دهد. در واقع این سرعت سنج‌ها فقط تندی را نشان می‌دهند و اطلاعاتی در مورد جهت در اختیار نمی‌گذارند. (در واقع شکل ۱ــ۲یک دسته تلگراف است و نه یک سرعت سنج واقعی به‌این معنی که فقط سرعت دلخواه ناخدا را نمایش می‌دهد نه سرعتی که کشتی واقعاً به‌آن رسیده‌است.) به همین دلیل از دیرباز ملوانان از وسایلی همچون قطب‌نما[۱] (شکل ۳ــ۲) و یا نشان‌دهنده راه کشتی[۲] (شکل ۴ــ۲) استفاده کرده‌اند.

شکل ۴ــ۲ــ قطب نمای دیجیتال یا نشان‌دهنده راه کشتی

شکل ۳ــ۲ــ قطب نمای معمولی

۱ــ compass

۲ــ cruise indicator

توضیح

سرعت[1] به دلیل اینکه جهت و راستای حرکت را نشان می‌دهد، یک کمیت برداری و تندی به دلیل اینکه صرفاً مسافت طی شده در زمان را نشان می‌دهد یک کمیت نرده‌ای است.

جدول ۲ــ۱ کمیت‌های برداری و نرده‌ای را که در این کتاب کاربرد دارند، فهرست کرده است.

جدول ۲ــ۱ــ کمیت‌های برداری و نرده‌ای

کمیت	نوع	واحد	نماد
نیرو	برداری	N نیوتن	$\vec{F}$
زمان	نرده‌ای	s ثانیه	t
شتاب	برداری	$m.s^{-2}$ متر بر مجذور ثانیه	$\vec{a}$
سرعت	برداری	$m.s^{-1}$ متر بر ثانیه	$\vec{v}$
تندی	نرده‌ای	$m.s^{-1}$ متر بر ثانیه	V
مسافت	نرده‌ای	m متر	d یا s
جابه‌جایی	برداری	m متر	$\Delta\vec{R}$

دقت داشته باشید که ممکن است در کتاب‌های دیگر و یا در بخش‌های دیگر همین کتاب از نمادهای دیگری برای این کمیت‌ها استفاده شود و یا برای ساده سازی از نوشتن علامت بردار در بالای آن نماد خودداری شود. در این موارد باید به توضیحات توجه کرد و حل مناسب را با توجه به برداری یا نرده‌ای بودن آن کمیت، ارائه کرد.

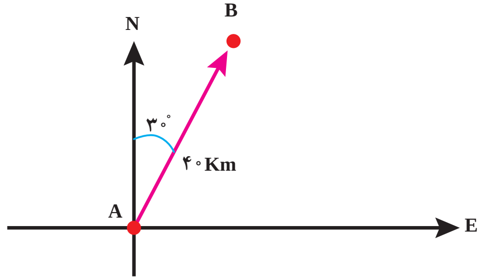
تعریف بردار : کمیتی را که هم اندازه و هم راستا و جهت داشته باشد، بردار می‌گویند. در این کتاب فقط بردارهایی که در مختصات دوبعدی هستند مورد بحث قرار می‌گیرد.

۱ــ Velocity

۲ــ۲ــ محاسبات برداری

قبل از اینکه به نحوه محاسبات برداری بپردازیم باید خواص بردار و نحوهٔ نمایش آن یادآوری شود. بردار را می‌توان با بزرگی و جهت آن تعریف کرد.

مثال ۱ : یک کشتی فاصلهٔ شهر A تا B را به اندازهٔ ۴۰ کیلومتر و در جهت ۳۰ درجه نسبت به شمال و به سمت شرق حرکت کرده است بردار این جابجایی را رسم کنید (شکل ۵ــ۲).

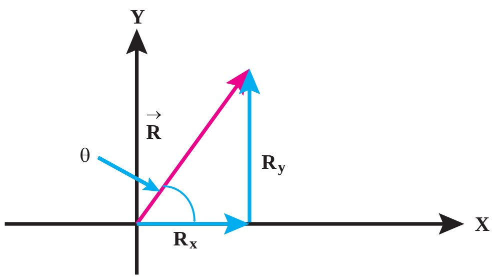


شکل ۵ــ۲ــ بردار جابه‌جایی یک کشتی

حل : ابتدا برای رسم این بردار دو محور مختصات رسم می‌کنیم. خطی در امتداد زاویهٔ ۳۰ درجه از محور شمال رسم می‌کنیم. با مقیاس‌بندی مناسب طول مورد نظر معادل ۴۰ کیلومتر را جدا می‌کنیم.

می‌توان بردار را با مؤلفه‌های طول و عرض (X و Y) نیز نمایش داد. فرض کنید برداری به اندازهٔ $|\vec{R}|$ داریم. این بردار با محور X زاویه θ می‌سازد. تصویر بردار $\vec{R}$ روی محور Xها را مؤلفهٔ R_x و تصویر بردار روی محور Y را مؤلفهٔ R_y می‌نامیم.

این دو نوع تعریف با استفاده از آموزه‌های فصل قبل به یکدیگر تبدیل خواهند شد.



شکل ۶ــ۲ــ مؤلفه‌های یک بردار

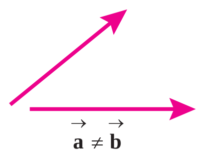
در این‌جا می‌توان بردار $\vec{R}$ رابه‌جای بزرگی و زاویه، به کمک مؤلفه‌های R_x و R_y تعریف کرد. یعنی بگوییم به اندازهٔ R_x در جهت X و سپس به اندازهٔ R_y در جهت Y، بردار $\vec{R}$ را تشکیل می‌دهد.

فعالیت کلاسی ۱

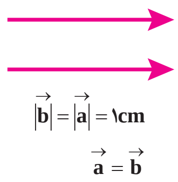
به همراه دوستان و با کمک هنرآموزتان، سعی کنید از روابطی که در فصل ۱ خوانده‌اید استفاده کنید و مؤلفه‌های برداری شکل ۶ـ۲ را برحسب بزرگی و زاویه بردار به‌دست آورید.

۱ـ۲ـ۲ـ خواص بردار : خواص زیر برای بردارهای مفروض است :

۱ـ اگر دو بردار جهت، راستا و اندازهٔ مساوی داشته باشند آن دو بردار را همسنگ می‌نامند. به زبان شیواتر، آن دو بردار با هم برابرند. فقط ممکن است مبدأ آنها متفاوت باشد.



شکل ۷ـ۲ـ الف ـ دو بردار هم‌اندازه ناهمسنگ



شکل ۷ـ۲ـ ب ـ دو بردار همسنگ

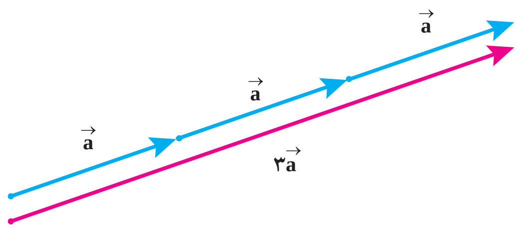
۲ـ حاصل جمع دو بردار با هم یک بردار جدید خواهد بود. (در مورد تفریق هم همین‌طور است.)

۳ـ حاصل ضرب یک کمیت نرده‌ای در یک بردار یک بردار خواهد بود، به شکلی که بزرگی آن چند برابر می‌شود، راستای آن ثابت می‌ماند و اگر کمیت نرده‌ای علامت مثبت داشته باشد، جهت ثابت می‌ماند وگرنه جهت نیز تغییر خواهد کرد. یعنی :

$$|a\times\vec{A}|=|a|\times|\vec{A}| \qquad (۲ـ۱)$$

و

$$\vec{A}=\vec{A}_x+\vec{A}_y \Leftrightarrow a\times\vec{A}=a\times\vec{A}_x+a\times\vec{A}_y \qquad (۲ـ۲)$$

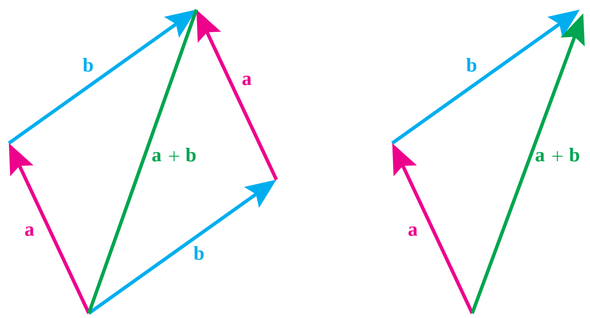


شکل ۷ـ۲ـ ج ـ ضرب مقدار عددی در بردار

۴ــ برای ضرب بردارها دو نوع ضرب تعریف می‌شود. ضرب داخلی یا نقطه‌ای و ضرب خارجی یا کراس. حاصل‌ضرب نقطه‌ای دو بردار یک کمیت نرده‌ای خواهد بود و حاصل‌ضرب خارجی دوبردار یک کمیت برداری.

۲ــ۲ــ۲ــ جمع برداری : همان‌طور که در سال‌های گذشته آموخته‌اید، بردارها را می‌توان به دو روش با هم جمع کرد. روش ترسیمی و روش تحلیلی. روش ترسیمی به منظور دست‌یابی سریع و بدون استفاده از محاسبات پیچیده به پاسخ مورد نظر کاربرد دارد و روش تحلیلی به منظور دست‌یابی به پاسخ دقیق به‌کار می‌رود. در روش ترسیمی از دو روش متوازی‌الاضلاع و روش مثلث استفاده می‌شود. شکل ۸ــ۲ــ الف، جمع به روش مثلث و شکل ۸ــ۲ــ ب، جمع به روش متوازی‌الاضلاع را نشان می‌دهد.

الف) روش مثلث : در این روش انتهای یکی از بردارها (در این‌جا $\vec{a}$) را روی ابتدای بردار دیگر (در این‌جا $\vec{b}$) می‌گذاریم. سپس ابتدای بردار اول را به انتهای بردار دوم وصل می‌کنیم. پاره خط جدید بردار برآیند جمع دو بردار $(\vec{a}+\vec{b})$ است.



شکل ۸ــ۲ــ ب ــ جمع به روش متوازی‌الاضلاع

شکل ۸ــ۲ــ الف ــ جمع به روش مثلث

ب) روش متوازی‌الاضلاع: در این روش ابتدای آنها را روی هم قرار می‌دهیم. سپس از انتهای آنها بردار همسنگ بردار دیگر را رسم می‌کنیم. مثلاً در این‌جا از انتهای بردار $\vec{b}$ همسنگ بردار $\vec{a}$ را رسم می‌کنیم. یک متوازی‌الاضلاع به‌دست می‌آید. قطر این چهار ضلعی برابر بردار برآیند جمع دو بردار است.

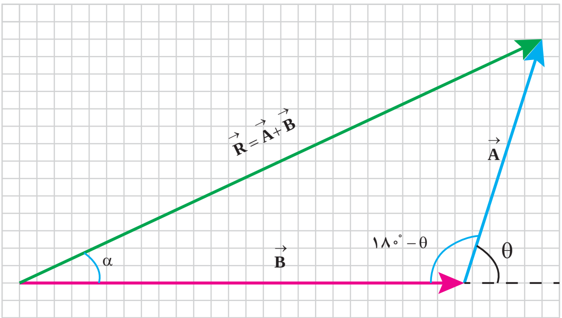
فکر می‌کنید چه موقع از روش مثلث و چه زمانی از روش متوازی‌الاضلاع باید استفاده کرد؟

برای استفاده از روش ترسیمی استفاده از نقاله و خط کش الزامی است.

مثال ۲ : بردار برآیند دو بردار A و B را رسم کنید، طول بردار برآیند و زاویه‌ای که با بردار B می‌سازد را محاسبه کنید.

$|\vec{A}|=۱۵/۸$ و $|\vec{B}|=۲۶$ ، زاویهٔ بین دو بردار $\theta = ۷۱/۷^\circ$

حل : ابتدا با استفاده از خط کش و نقاله بردارها را رسم می‌کنیم. یک‌بار برای حل با روش مثلث (شکل ۹ــ۲) و یک‌بار برای حل با روش متوازی‌الاضلاع (شکل ۱۰ــ۲) رسم را کامل می‌کنیم.



شکل ۹ــ۲ــ رسم بردارهای مثال ۲

داریم : $۱۸۰ - \theta = ۱۰۸/۳^\circ$

با استفاده از این رابطه و قاعدهٔ کسینوس‌ها اندازهٔ بردار برآیند به دست می‌آید :

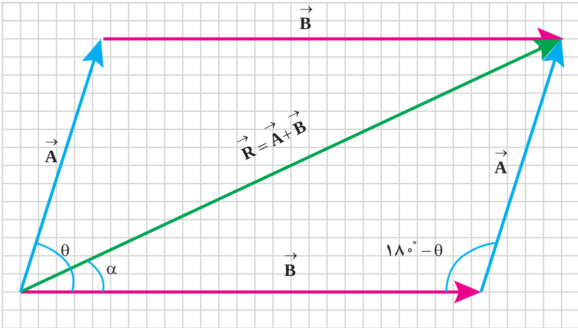
$$|\vec{R}|=\sqrt{|\vec{A}|^۲+|\vec{B}|^۲-۲\times|\vec{A}||\vec{B}|\cos(۱۸۰-\theta)}=\sqrt{۱۱۸۶}=۳۴/۴$$

با استفاده از قانون سینوس‌ها نیز می‌توانیم زاویه بین بردار برآیند و بردار B را محاسبه کنیم.

می‌توان برای ساده‌سازی در زمان نمایش طول بردار، علامت بردار و قدرمطلق را حذف کرد.

$$\frac{A}{\sin\alpha}=\frac{R}{\sin(۱۸۰-\theta)}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{A}{R}\sin(۱۸۰-\theta)=\frac{۱۵/۸}{۳۴/۴}\times ۰/۹۵=۰/۴۳۶\Rightarrow \alpha=۲۵/۹^\circ$$

اگر از روش متوازی‌الاضلاع هم استفاده کنیم باز به نتیجه مشابه می‌رسیم. این روش در شکل ۱۰ــ۲ رسم شده است.



شکل ۱۰ــ۲ــ رسم بردارهای مثال ۲

فعالیت ۱-۲

ــ برآیند دو بردار به طول‌های ۱۰ و ۱۵ واحد را در ۳ حالات زیر حساب کنید.

از هر دو روش ترسیمی استفاده کنید. چه نکته خاصی در هر یک از این حالات وجود دارد؟

ــ دو بردار بر هم عمود باشند.

ــ دو بردار با یکدیگر زاویه ۳۰ درجه بسازند.

ــ دو بردار با هم زاویه ۲۱۰ درجه بسازند.

ــ دو بردار هم راستا و هم‌جهت باشند.

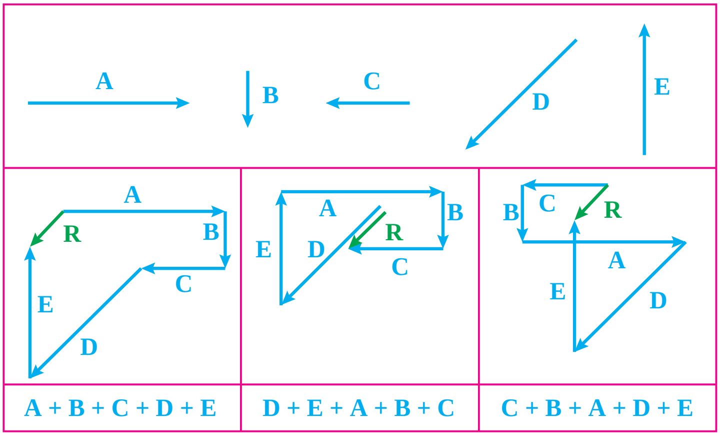
ــ دو بردار هم راستا و در خلاف جهت هم باشند.

جمع بیش از ۲ بردار: برای جمع بیش از ۲ بردار می‌توانید ابتدا دو بردار را به‌عنوان بردارهای اول انتخاب کنید و سپس با هم جمع کنید و در مرحله بعد بردار برآیند دوبردار اول را با بردار سوم جمع نمایید. این‌کار را تا به دست آوردن بردار برآیند کل بردارها ادامه دهید.

اما روش دیگری وجود دارد به نام روش چند ضلعی، در این روش ابتدای هر بردار را در انتهای بردار قبلی قرار می‌دهید تا یک چند ضلعی باز تشکیل شود. ابتدای بردار اول را به انتهای بردار آخر وصل کنید. پاره خط به‌دست آمده، برآیند کل بردارها است. ترتیب انتخاب بردارها در هیچ یک از روش‌ها تأثیری روی پاسخ ندارد.

در شکل ۱۱ــ۲ نمونه‌ای از جمع چند بردار به روش چند ضلعی آمده‌است. در این شکل ۳

ترتیب مختلف برای جمع بردارها در نظر گرفته شده است. مشاهده می‌کنید که در هر سه حالت، پاسخ‌ها یکسان است.



شکل ۱۱ـ۲ـ بردار برآیند ۵ بردار به روش ترسیمی

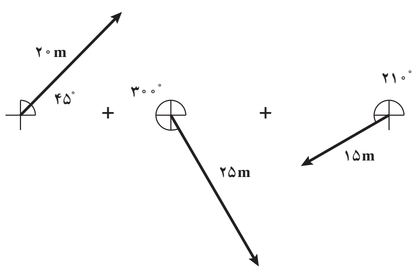
مثال ۳ : فرض کنید در یک مسابقه شنا شرکت کرده‌اید. در مسابقه به شما می‌گویند در سه جهت و به طول‌های مشخص باید شنا کنید. انتخاب اولویت مسیرها با خودتان است. اطلاعات مسئله به شکل زیر است :

(زوایای اعلام شده برحسب درجه است)

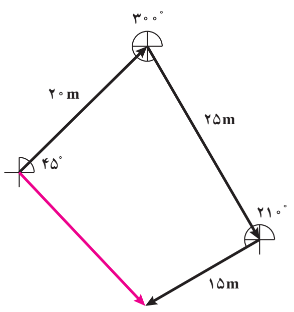
۱۵متر	۲۵ متر	۲۰ متر
۲۱۰ درجه	۳۰۰ درجه	۴۵ درجه

نقطه نهایی در چه فاصله‌ای از مبدأ واقع شده‌است.

حل : ابتدا شکل را رسم می‌کنیم.



شکل ۱۲ـ۲ـ الف ـ بردارهای مثال ۳

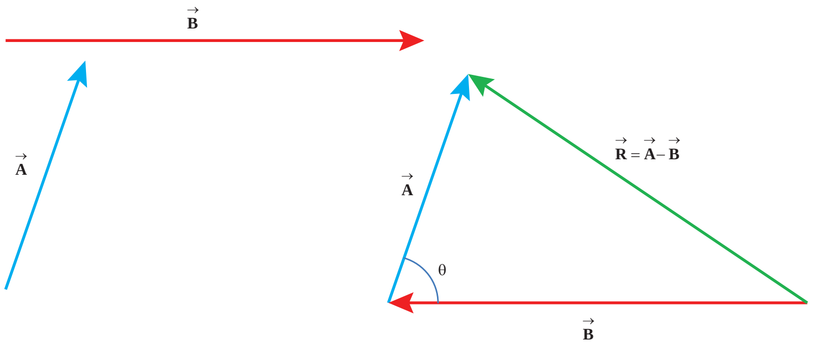


برآیند : ۲۰/۳ متر و ۳۰۰ درجه

شکل ۱۲ـ۲ـ ب ـ جمع بردارهای مثال ۳

همان‌طور که در متن درس آمده است فرقی نمی‌کند که ابتدا کدام مسیر را انتخاب کنید. لذا پاسخی که با انتخاب در شکل ۲ــ۱۲ــ ب به‌دست آمده است تنها پاسخ این مسئله می‌باشد.

۳ــ۲ــ۲ــ تفریق بردارها : برای تفریق دو بردار کاملاً مانند جمع در روش مثلث عمل می‌شود. به عنوان مثال در شکل ۲ــ۱۳ می‌خواهیم برآیند $\vec{R}=\vec{A}-\vec{B}$ را محاسبه کنیم. برای این‌کار کافی است معادله را به این شکل بازنویسی کنیم : $\vec{R}=\vec{A}+(-\vec{B})$ در نتیجه به یک جمع می‌رسیم که در آن بردار B معکوس شده‌است.



شکل ۲ــ۱۳ــ تفریق بردارها

فعالیت ۲-۲

در مثال ۲ به جای جمع بردارها، $\vec{A}-\vec{B}$ را محاسبه کنید.

۴ــ۲ــ۲ــ تجزیه بردار : همان‌طور که در فعالیت کلاسی ۱ آمد، می‌توان هر بردار (۲ بعدی) را به دو مؤلفه در راستای محورهای X و Y تجزیه کرد. برای اینکه بتوان از این تجزیه در محاسبات استفاده کرد، برداری به نام بردار یکه تعریف شده است.

بردار یکه :

برداری است به طول واحد در راستای یکی از محورهای مختصات.

بردار یکه در راستای محور X را بردار یکهٔ $\hat{i}$ می‌نامند.

بردار یکه در راستای محور Y را بردار یکهٔ $\hat{j}$ می‌نامند.

حال می‌توان بردارهای مؤلفهٔ بردار R در شکل ۲ــ۶ را به این شکل نوشت :

$\overrightarrow{R_x}=R_x\hat{i}$ و $\overrightarrow{R_y}=R_y\hat{j}$

در نتیجه بردار R را می‌توان به دو مؤلفهٔ برداری خود به شکل زیر تجزیه کرد:

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} \qquad (۲\text{ـ}۳)$$

از طرفی در فعالیت کلاسی ۱ مقادیر مؤلفه‌ها به شکل زیر به‌دست آمد:

$$\begin{aligned} R_x &= |\vec{R}|\cos\theta \\ R_y &= |\vec{R}|\sin\theta \end{aligned} \qquad (۲\text{ـ}۴)$$

حال می‌توان از معادله ۳ــ۲ و ۴ــ۲به خوبی برای جمع و تفریق برداری استفاده کرد. همچنین می‌توان برای نمایش یک بردار به جای داشتن یک زاویه و یک طول از دو مؤلفهٔ آن استفاده کرد. مثلاً:

بردار R به طول ۵ واحد و زاویه ۳۷ درجه نسبت به محور X را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$R_x = |\vec{R}|\cos\theta = ۵\cos(۳۷) = ۵\times ۰/۸ = ۴$$

$$R_y = |\vec{R}|\sin\theta = ۵\sin(۳۷) = ۵\times ۰/۶ = ۳$$

$$\vec{R} = R_x\hat{i} + R_y\hat{j} = ۴\hat{i} + ۳\hat{j} \text{ یا } \vec{R} = (۴,۳)$$

برای جمع دو بردار نیز می‌توان از رابطهٔ (۵ــ۲) استفاده کرد:

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \Rightarrow \begin{Bmatrix} C_x = B_x + A_x \\ C_y = B_y + A_y \end{Bmatrix} \qquad (۲\text{ـ}۵)$$

با استفاده از فیثاغورث می‌توان نوشت:

$$|\vec{R}| = \sqrt{R_x^{۲} + R_y^{۲}} \qquad (۲\text{ـ}۶)$$

و همچنین با استفاده از رابطه (۴ــ۲) و روابط موجود در فصل ۱ می‌توان رابطهٔ زیر را به‌دست آورد:

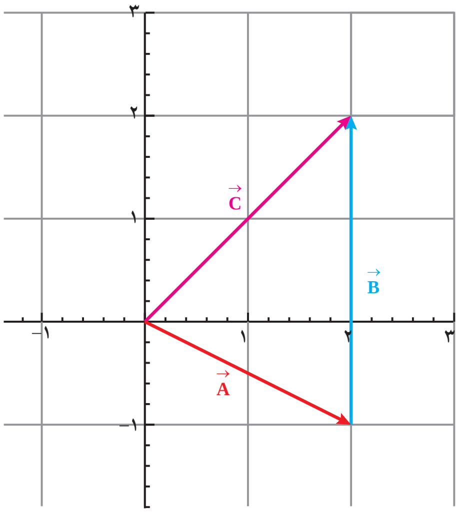
$$\tan(\theta) = \frac{R_y}{R_x} \qquad (۲\text{ـ}۷)$$

مثال ۴ : جمع دو بردار $\vec{A}=2\hat{i}-1\hat{j}$ و $\vec{B}=0\hat{i}-3\hat{j}$ را محاسبه کنید.

حل : توجه کنید که برای حل این مثال ساده می‌توان از دو روش استفاده کرد. روش اول استفاده از ترسیم است و روش دوم روش تجزیه بردار و استفاده از روابط (۴ــ۲) و (۵ــ۲) (یا روش تحلیلی) که در ادامه خواهد آمد.

$$\vec{B}=0\hat{i}-3\hat{j}$$
$$\vec{A}=2\hat{i}-1\hat{j}$$
$$\vec{C}=\vec{B}+\vec{A}\Rightarrow\begin{cases}C_x=B_x+A_x\\C_y=B_y+A_y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_x=2\hat{i}-0\hat{i}\\C_y=3\hat{j}-1\hat{j}\end{cases}\Rightarrow\vec{C}=2\hat{i}+2\hat{j}$$

هر دو روش نیاز به ترسیم دارد. اما در روش تحلیلی ترسیم فقط به فهم بهتر مسئله کمک می‌کند. لذا شما هم در حل مسائل برداری در صورت استفاده از روش تحلیلی، ترسیم را فراموش نکنید. اما نیازی به دقت بالا در ترسیم و ابزارهای ترسیمیِ خاص وجود ندارد.



شکل ۱۴ــ۲ــ بردارهای مثال ۴

مثال ۵ : یک کشتی از بندر A به سمت بندر B و سپس از بندر B به سمت بندر C حرکت می‌کند. فاصلهٔ AB برابر ۱۲۰۰Km و در جهت ۳۰ درجه نسبت به شرق و فاصلهٔ BC برابر ۶۰۰Km و در جهت ۴۵− درجه نسبت به محور شرق است. بردار جابه‌جایی AC را از روش تحلیلی محاسبه کنید.

حل : برای شروع به حل باید بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BC}$ را به مؤلفه‌های عمودی و افقی تجزیه کنیم.

برای این‌کار از رابطهٔ (۴ــ۲) کمک می‌گیریم.

$$\overrightarrow{AB}_x = ۱۲۰۰ \times \cos(۳۰)\hat{i} = ۱۰۳۹/۲\hat{i}$$

$$\overrightarrow{AB}_y = ۱۲۰۰ \times \sin(۳۰)\hat{j} = ۶۰۰\hat{j}$$

$$\overrightarrow{BC}_x = ۱۲۰۰ \times \cos(-۴۵)\hat{i} = ۴۲۴/۳\hat{i}$$

$$\overrightarrow{BC}_y = ۱۲۰۰ \times \sin(-۴۵)\hat{j} = -۴۲۴/۳\hat{j}$$

حال با استفاده از رابطهٔ (۵ــ۲) بردارها را جمع می‌کنیم :

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

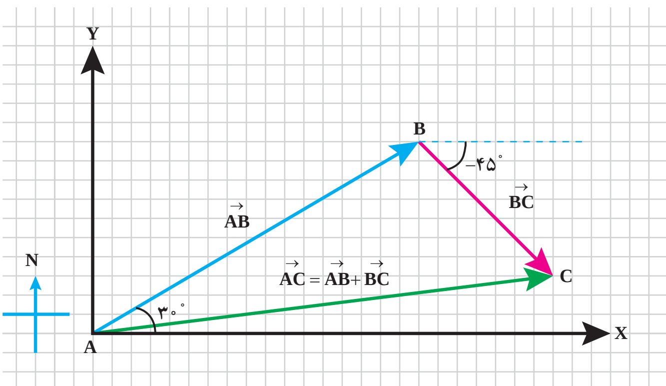
$$\Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC}_x = \overrightarrow{AB}_x + \overrightarrow{BC}_x = ۱۴۶۳/۵\hat{i} \\ \overrightarrow{AC}_y = \overrightarrow{AB}_y + \overrightarrow{BC}_y = ۱۷۵/۷\hat{j} \end{cases}$$

در نتیجه بردار جابه‌جایی کشتی که همان بردار AC باشد به شکل زیر به‌دست می‌آید :

$$\overrightarrow{AC} = ۱۴۶۳/۵\hat{i} + ۱۷۵/۷\hat{j}$$

با استفاده از فیثاغورث (یعنی رابطهٔ ۶ــ۲) طول این بردار را می‌توان محاسبه کرد :

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{۱۴۶۳/۵^۲ + ۱۷۵/۷^۲} = ۱۴۷۴\text{km}$$



شکل ۱۵ــ۲ــ بردارهای مثال ۵

و با استفاده از روابط مثلثاتی (یعنی رابطهٔ ۷ــ۲) می‌توان به راحتی زاویه بردار نسبت به محور شرق را یافت :

$$\tan(\theta)=\frac{R_y}{R_x}=\frac{۱۷۵/۷}{۱۴۶۳/۵}=۰/۱۲$$

با استفاده از جدول مقادیر مثلثاتی در انتهای کتاب و یا استفاده از ماشین حساب می‌توان زاویه مورد نظر را یافت : $\theta = ۶/۸^{\circ}$

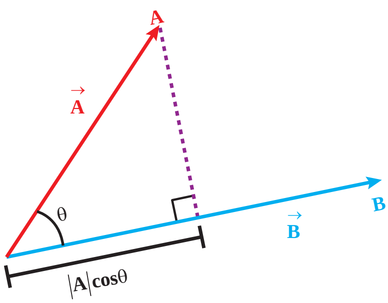
فعالیت ۳-۲

فرض کنید در مثال ۵ فاصلهٔ A تا B برابر ۸۰۰ کیلومتر و فاصلهٔ B تا C برابر ۱۰۰۰ کیلومتر باشد. در انتها نیز به شهر D برود که تا C، ۵۰۰ کیلومتر فاصله دارد و در امتداد شرقی شهر C واقع شده است. بردار برآیند جابجایی از A تا D را محاسبه کنید.

۵ــ۲ــ۲ــ ضرب بردارها : در کل دو نوع ضرب برداری داریم. ضرب در بردارها با ضرب در کمیت‌های نرده‌ای متفاوت است. شاید این موضوع را بتوان با ذکر مثالی، روشن کرد. در بحث کار و انرژی، مقدار کار در اصل نوعی حاصل‌ضرب بردارهای جابه‌جایی و نیرو است. مقدار کار به‌دست آمده از این طریق یک بردار نیست و بلکه یک کمیت نرده‌ای است. به این نوع ضرب ضرب برداری می‌گویند. یا درمورد گشتاور، که در فصل آینده با آن آشنا می‌شوید، در ضربی مشابه بحث کار و انرژی اما ضرب از نوع خارجی یا برداری، حاصل‌ضرب که همان گشتاور باشد، یک بردار است.

ضرب داخلی : همان‌طور که گفته شد حاصل‌ضرب این نوع ضرب یک بردار نیست، بلکه یک کمیت نرده‌ای (اسکالر) است. رابطهٔ (۸ــ۲) که با توجه به شکل ۱۶ــ۲ نوشته شده است، ضرب داخلی دو بردار A و B را نشان می‌دهد.

$$\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta) \qquad (۲ــ۸)$$



شکل ۱۶ــ۲ــ ضرب داخلی

در واقع ضرب داخلی حاصل ضرب طول تصویر بردار A بر روی بردار B، ضرب‌در طول بردار B است. همچنین داریم :

$$\vec{A}.\vec{B}=\vec{B}.\vec{A}$$

این نوع ضرب به دلیل علامت ضربی که بین دو بردار قرار می‌گیرد به ضرب نقطه‌ای مشهور است.

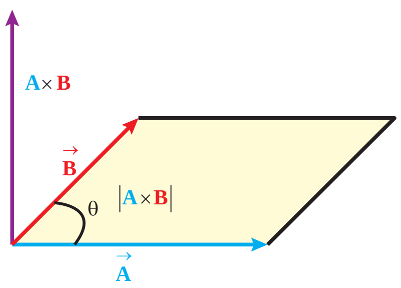
یادآوری

مقدار کار انجام شده توسط نیرو درجابه‌جایی یک جسم توسط رابطهٔ $W = F.d\cos(\theta)$ به‌دست می‌آید. حالا به خوبی متوجه شده‌اید که در واقع این رابطه همان ضرب داخلی دوبردار نیرو و جابه‌جایی‌است.

ضرب خارجی: در ضرب خارجی حاصل ضرب یک بردار است. اما محاسبهٔ بردار حاصله از حوصله کتاب خارج است و مورد نیاز فعالیت‌های بعدی نیز نیست. لذا در این‌جا فقط به رابطه‌ای برای محاسبهٔ مقدار یا طول بردار حاصله از این ضرب بسنده می‌شود. همان‌طور که از شکل ۱۷ــ۲ و رابطهٔ (۹ــ۲) بر می‌آید، حاصل ضرب خارجی برابر است با مساحت متوازی‌الاضلاع تشکیل شده توسط دو بردار.

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin(\theta) \qquad (۲\text{ـ}۹)$$

این ضرب در فیزیک و مکانیک بسیار پرکاربرد است. فراموش نکنید که رابطهٔ (۹ــ۲) فقط و فقط مقدار یا طول بردار حاصل ضرب خارجی دو بردار را نشان می‌دهد، نه خود بردار حاصل‌ضرب را.



شکل ۱۷ــ۲ــ ضرب خارجی

مثال ۶ : با استفاده از روابطی که در بالا آمد، ضرب داخلی و طول بردار ضرب خارجی دو بردار A و B را که به ترتیب به طول‌های ۱۰ واحد و ۱۵ واحد دارند و با هم زاویه ۶۰ درجه می‌سازند، محاسبه کنید.

حل : با استفاده از رابطهٔ (۸ــ۲) ضرب داخلی را محاسبه می‌کنیم.

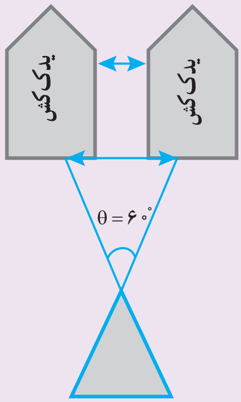
$$\vec{A}.\vec{B}=|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\theta)=۱۰\times۱۵\times\cos(۶۰)=۱۵۰\times۰/۵=۷۵$$

با استفاده از رابطهٔ (۹ــ۲) نیز حاصل طول بردار ضرب خارجی به‌دست خواهد آمد.

$$|\vec{A}\times\vec{B}|=|\vec{A}||\vec{B}|\sin(\theta)=۱۰\times۱۵\times\sin(۶۰)=۱۵۰\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۷۵\sqrt{۳}=۱۲۹/۹$$

فعالیت ۴-۲

در مثال ۶ از فصل ۱، اگر کشتی بزرگ ۳۰۰۰۰ تن جرم داشته باشد و یدک‌کش‌ها هر کدام با نیروی ۵۰ کیلونیوتن در امتداد کابل‌ها کشتی را یدک کنند. در صورتی که کشتی به‌این وسیله ۲ کیلومتر جابه‌جا شود مقدار کار انجام شده روی کشتی چقدر است.



خودآزمایی فصل دوم

۱ــ روش‌های جمع برداری را نام ببرید.

۲ــ آیا حاصل جمع دوبردار، یک کمیت برداری خواهد شد یا نرده‌ای؟

۳ــ جای خالی را پر کنید.

الف) نیرو یک کمیت ______ است.

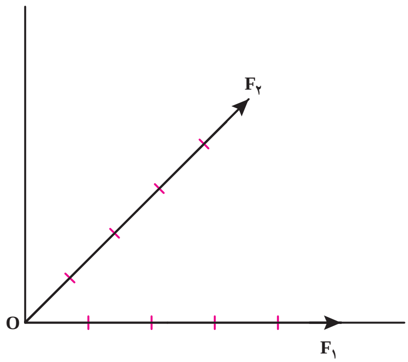
ب) جرم یک کمیت ______ و وزن یک کمیت ______ است.

پ) جابه‌جایی تقسیم بر تغییرات زمان ______ نام دارد که یک کمیت ______ و مسافت تقسیم بر زمان ______ نام دارد که یک کمیت ______ است.

۴ــ الف) برآیند دو بردار عمود بر هم به طول ۳ واحد (افقی) و ۴ واحد (عمودی) را با استفاده از روش‌های ترسیمی و ریاضی تعیین کنید. (بردارها را در جهت مثبت محور فرض کنید)

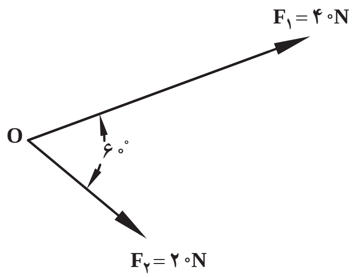
ب) زاویه بردار برآیند با محور افقی را به روش ترسیمی و روش ریاضی به‌دست آورید.

۵ــ دو نیروی $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ مطابق شکل ۱۸ــ۲ بر نقطهٔ O وارد می‌شوند. زاویهٔ بین دو نیرو ۴۵ درجه است. طول بردار برآیند و زاویه بردار برآیند با محور افق را بیابید.



شکل ۱۸ــ۲

۶ــ برآیند دو بردار $\vec{F}_1$ و $\vec{F}_2$ در شکل ۱۹ــ۲ چقدر است؟ از روش مثلث برای ترسیم استفاده کنید و پاسخ آن را با روش متوازی‌الاضلاع و روش ریاضی مقایسه کنید.



شکل ۱۹ــ ۲

۷ــ حاصل‌ضرب داخلی دو بردار مسئله شماره ۶ و ۷ را بیابید.

۸ــ حاصل‌ضرب خارجی (اندازه) دو بردار مسئله شماره ۶ و ۷ را بیابید.

۹ــ یک قایق تفریحی مسیر زیر را در یک ساعت می‌پیماید :

۵ کیلومتر به طرف شمال

۴ کیلومتر به طرف شرق

۳ کیلومتر به طرف شمال

۸ کیلومتر به طرف جنوب

الف) با مقیاس‌گذاری مناسب مسیر این قایق را رسم کنید، بردار برآیند جابجایی را به‌دست آورید.

ب) مسافت پیموده شده قایق را حساب کنید.

ج) سرعت و تندی متوسط قایق را برای این مسیر حساب کنید.