«آینده از آن کسانی است که برای آن، برنامه‌ریزی کرده باشند.»

فصل چهارم

سریهای زمانی

هدفهای رفتاری: در پایان این فصل، از فراگیر انتظار می‌رود :

۱ــ مفهوم سریهای زمانی و هدف از مطالعه آنها را توضیح دهد.

۲ــ سریهای زمانی را تعریف کرده، کاربرد آنها را در مسائل مالی توضیح دهد.

۳ــ عوامل مهم در سریهای زمانی را برشمرده، برای هرکدام تعریف مناسبی ارائه دهد.

۴ــ نمودار حرکات سریهای زمانی را رسم کند.

۵ــ خطّ گرایش را از روشهای چهارگانه : دست آزاد، میانگینهای مضاعف، میانگینهای متحرّک و حدّاقل مربعات رسم کند.

۶ــ وضعیّت آینده را با کمک خطّ روند، پیش‌بینی کند.

۷ــ منحنی سهمی گرایش را محاسبه و رسم کند.

مفهوم کلّی سریهای زمانی[1]

واژه «سری» به معنای ردیف و کلمهٔ «زمانی» به معنای نسبت داده شده به زمان می‌باشد و اصطلاح «سریهای زمانی» به معنای داده‌هایی است که با نظمی مشخّص در طی زمان تغییر می‌کنند.

به چند مثال توجّه کنید :

۱ــ Time Series

ـ در دایرهٔ حسابداری یک شرکت، همه ماهه در موعد معیّنی از ماه، باید لیست حقوق ماه آیندهٔ کارکنان به صورت پیش‌نویس تهیّه شود ؛ در روز معیّنی از هر ماه، باید تغییرات احتمالی حقوق کارکنان (نظیر ترفیعات، بازنشستگی، اضافه‌کار، مرخصی، وامها، نوسانات مالیاتی و...) در لیست اعمال شود ؛ در روزهای مشخّصی از هر ماه، این لیست باید پاکنویس شده، برای تأمین اعتبار و تأیید و امضا به مسئولین امر ارائه شود و سرانجام در روزهای معیّنی حقوق کارکنان به بانک فرستاده شده، در حسابهای آنها ثبت شود.

ـ در شرکتهای بازرگانی در برخی از ماههای سال، فروش کم و در بعضی از ماهها، فروش زیاد است. مثلاً شرکتهای توزیع‌کنندهٔ لوازم التحریر در شهریورماه و مهرماه هر سال به دلیل گشایش مدارس، بیشترین فروش را دارند و در خردادماه به دلیل نزدیک شدن به انتهای سال تحصیلی، کمترین مشتریها را خواهند داشت.

ـ در کشاورزی در برخی از فصول، فعالیّت بیشتر است و در بعضی از فصول فعالیّت کمتر است.

ـ فروش نفت در آغاز زمستان و فروش یخ در تابستان افزایش پیدا می‌کند.

ـ در اوایل فصل تابستان، میوه نسبتاً گران است و بتدریج ارزان می‌شود، زیرا در آغاز تابستان، مقدار محصول کم است و در اواسط تابستان عرضه میوه زیاد می‌شود و مجدداً در اواخر تابستان که مقدار میوه‌های تابستانی کاهش پیدا می‌کند، قیمت آن رو به فزونی می‌گذارد.

ـ در کتابخانهٔ یک دبیرستان یا یک دانشکده، در روزهای قبل از امتحانات، تعداد زیادتری از دانش‌آموزان یا دانشجویان برای امانت گرفتن کتاب مراجعه می‌کنند.

مثالهای بالا، همه از نوساناتی حکایت می‌کنند که در پدیده‌های مختلف اقتصادی، اجتماعی، فرهنگی و . . . در طول زمان و در فواصل مشخّصی از ماه، فصل، سال و... رخ می‌نمایند. مطالعه و تجزیه و تحلیل این وقایع به‌صورت کلّی ما را در درک اوضاع گذشته، ارزشیابی وضعیّت حال و برنامه‌ریزی برای آینده، یاری خواهد کرد.

طبیعی است که هر تغییر که در یک پدیده به وجود می‌آید، می‌تواند تحت تأثیر عوامل مختلفی ایجاد شده باشد. مثلاً، وقتی قیمت یک کالای کشاورزی افزایش می‌یابد، باید عواملی نظیر : شرایط آب و هوا، قیمت کود و بذر، هزینه‌های آبیاری، سیستم توزیع، نحوهٔ انبارداری و . . . را مورد بررسی قرار داد. شناخت و اندازه‌گیری تأثیرات این عوامل، هدف اصلی تجزیه و تحلیل سریهای زمانی است. در این فصل از کتاب، به روشهایی توجّه خواهیم کرد که با کمک آنها خواهیم توانست با استفاده از تجارب گذشته، حوادث آینده را پیش‌بینی کنیم.

این مبحث، می‌تواند کمک مفیدی به سازمانهای مالی، صنعتی، اقتصادی و تجاری باشد. مثلاً یک متخصّص امور مالی، با شناخت درآمد شرکتهای تجاری در سالهای آینده می‌تواند سطح درآمد مالیاتی دولت را در آن سالها پیش‌بینی کند و یا مدیر یک فروشگاه بزرگ با استفاده از سریهای زمانی، متوجّه خواهد شد که چه موقع از سال و با چه مقیاسی باید کالا سفارش دهد تا بموقع بتواند تقاضای بازار را پاسخگو باشد.

تعریف سریهای زمانی

با توجّه به توضیحات بالا، می‌توان گفت؛ **رخدادهای متوالی و منظم یک پدیده را در طول یک دورهٔ معیّن از زمان «سری زمانی» گویند.**

عوامل مهمّ در سریهای زمانی

آمارشناسان تغییرات ایجاد شده در سریهای زمانی را ناشی از چهار عامل زیر می‌دانند:

گرایشهای دراز مدت (روند[۱])

گرایشهای دراز مدّت، به آن دسته از عوامل گویند که در تمام طول دورهٔ فعالیّت یک سری زمانی، به صورت منظم و پیوسته وجود دارد و باید مورد بررسی قرار گیرد. مانند تغییرات ایجاد شده در رشد جمعیّت و یا مانند پیشرفتهای تکنولوژیکی یک جامعه.

تغییرات فصلی[۲]

تغییراتی را که به طور منظّم و متوالی در فواصلی از یک سال اتفّاق می‌افتند، «تغییرات فصلی» گویند. توجّه دارید که اصطلاح «فصلی» همیشه نشانه‌ای از یک فصل شامل سه ماه نیست و گاهی برای هر نوع تغییر در دورهٔ کوتاه یا بلندی از یک سال، به کار برده می‌شود. مثل: فصل آغاز مدارس،

۱ـ Trend   ۲ـ Seasonal Variations

فصل امتحانات، فصل تنظیم ترازنامه شرکتها، فصل سرما. (که می‌تواند در برخی از مناطق بیش از سه ماه و در بعضی از جاها کمتر از سه ماه باشد.)

تغییرات ادواری[1] (دوره‌ای)

تغییراتی را که نشاندهندهٔ افزایش و کاهش متناوب یک فعالیّت تجاری ـ اقتصادی به‌طور مداوم، مرتّب و منظّم باشند، «تغییرات ادواری» گویند. این تغییرات را در فعالیّتهای بازرگانی «سیکلهای تجاری» نیز می‌نامند. بررسی دوره‌هایی نظیر دورهٔ بهبود، دورهٔ رونق، دورهٔ بحران و دوره کسادی و رکود در اقتصاد از این گونه هستند.

تغییرات ناگهانی[2] (بی‌قاعده ــ تصادفی ــ نامنظّم)

تغییرات ناگهانی، تغییراتی هستند که به صورتی کاملاً تصادفی و غیر منتظره اتفّاق می‌افتند. به همین دلیل، این عامل از عوامل سریهای زمانی غالباً به طور دقیق قابل پیش‌بینی نیست. تغییرات ناگهانی، می‌توانند ناشی از رفتار انسان باشند، مانند جنگ، اعتصاب و... و یا منشأ طبیعی (غیرانسانی) داشته باشند. نظیر سیل، زلزله، توفان و مواردی از این قبیل. غالباً در بررسی عوامل سریهای زمانی، آن دسته را که نمی‌توان در گرایشهای دراز مدّت، تغییرات فصلی و تغییرات ادواری طبقه‌بندی کرد، جزءِ تغییرات ناگهانی به حساب می‌آورند و به همین دلیل، گروهی از آمارشناسان به این دسته از عوامل «تغییرات پس‌ماند» نام داده‌اند.

به این ترتیب، هر سری زمانی می‌تواند حاصل جمع جبری چهار عامل فوق‌الذکر باشد، که اگر جزءِ گرایشهای دراز مدّت را با علامت «T»، جزءِ تغییرات فصلی را با علامت «S»، جزءِ تغییرات ادواری را با علامت «C» و جزءِ تغییرات ناگهانی را با علامت «I» نشان دهیم، می‌توان هر مشاهده از سری زمانی مانند y را، به صورت زیر بیان کرد:

$$\boxed{y = T + S + C + I} \qquad \text{(فرمول ۱)}$$

این مدل را «مدل حاصل جمع» می‌نامند. مدل دیگری نیز به نام «مدل حاصل ضرب» وجود دارد که دقیق امّا اندکی مشکلتر است و به شکل $y = T.S.C.I$ نوشته می‌شود.

در این کتاب، از مدل حاصل جمع استفاده می‌کنیم. هدف از بررسی سریهای زمانی، جدا کردن هر یک از چهار عامل بالا در یک سری زمانی و اندازه‌گیری میزان تأثیر آن عامل در کلّ مقدار سری

[1] ــ Cyclical Flactuations
[2] ــ Irregular Variations

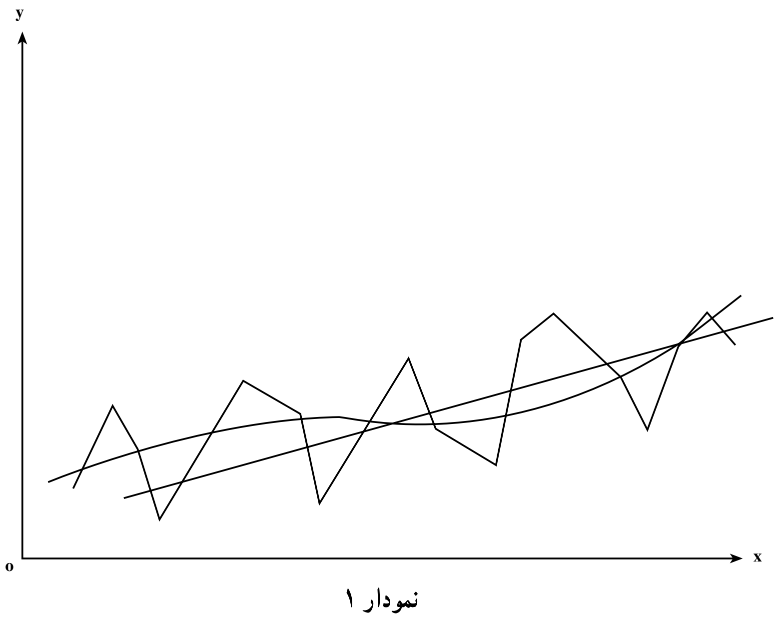
زمانی (y) است. مثلاً وقتی در دراز مدّت، قیمت یک کالا افزایش پیدا می‌کند، باید بررسی کرد که این افزایش (تغییر) به چه نسبتهایی مربوط به T، S، C و I بوده است.

چون در بین چهار عامل بالا، گرایشهای دراز مدّت یک عامل اصلی و سرنوشت‌ساز است، در این کتاب به منظور کوتاه کردن مطلب، این عامل را بیشتر مورد بحث و بررسی قرار داده‌ایم.

نمودار حرکات سریهای زمانی

برای رسم حرکات زمانی، می‌توانید از اصولی استفاده کنید که در رسم نمودارهای آماری با آنها آشنا می‌باشید. برای این منظور، کافی است عامل زمان را روی محور افقی و اندازه‌های متغیّر مورد بررسی را روی محور عمودی محورهای مختصّات قرار داده، پس از نقطه‌یابی، از اتصّال نقاط، نمودار حرکات سریهای زمانی را بسازید.

در نمودار ۱، یک مدل کلّی از سه نوع عامل گرایشهای دراز مدّت، تغییرات ادواری و تغییرات فصلی را مشاهده می‌کنید. گرایشهای دراز مدّت به وسیله خطّی مستقیم، تغییرات ادواری با خطّی انحنایی و تغییرات فصلی با پاره‌خطّهایی که نقاط را به هم وصل کرده‌اند، مشخّص شده‌اند.



نمودار ۱

تذکّر: در نمودار ۱، عامل تغییرات ناگهانی منظور نشده است. زیرا این حرکات، قابل پیش‌بینی نیست و یا پیش‌بینی آنها، بسیار مشکل است و به همین دلیل، غالباً مورد اندازه‌گیری قرار نمی‌گیرند.

روشهای رسم خط روند (خط گرایش دراز مدّت)

برای رسم خطّی مستقیم روی نمودار حرکات سریهای زمانی، چهار روش معمول است :

روش ترسیم آزاد (دست آزاد[1])

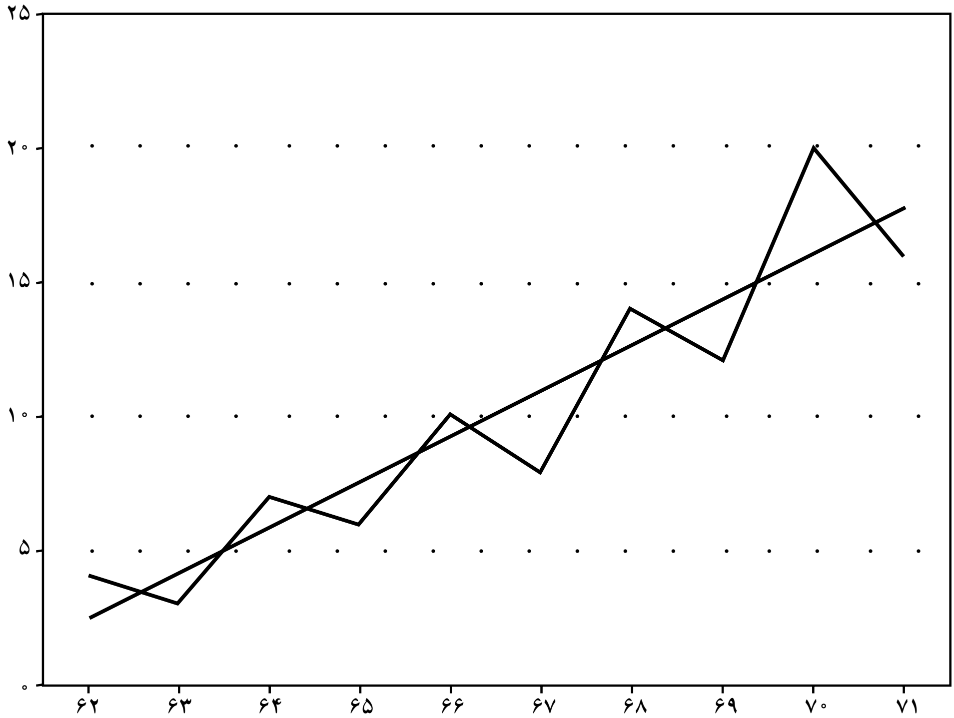
در این روش، ابتدا نمودار حرکات سریهای زمانی را رسم می‌کنند. سپس به طور تقریبی، یک خطّ مستقیم روی نمودار به‌گونه‌ای رسم می‌نمایند که خطّ مذکور شیب کلّی حرکات نمودار را از جهت صعودی بودن، نزولی بودن، افقی بودن یا عمودی بودن نشان دهد. این روش از دقّت چندانی برخوردار نیست و تحت تأثیر رسم‌کننده قرار می‌گیرد، اما روش بسیار ساده‌ایست.

مثال ۱ــ در جدول زیر، فروش یک فروشگاه را در ده سال متوالی مشاهده می‌کنید. ابتدا نمودار حرکات فروش را رسم کنید. سپس خطّ گرایش را از طریقهٔ دست‌آزاد، روی آن برازنده کنید.

جدول ۱

سالها	۱۳۷۲	۱۳۷۳	۱۳۷۴	۱۳۷۵	۱۳۷۶	۱۳۷۷	۱۳۷۸	۱۳۷۹	۱۳۸۰	۱۳۸۱
فروش	۴	۳	۷	۶	۱۰	۸	۱۴	۱۲	۲۰	۱۶

۱ــ Free Hand



نمودار ۲ــ خط روند از طریقه ترسیم آزاد

روش میانگینهای مضاعف

در این روش، پس از رسم نمودار حرکات سریهای زمانی، مقادیر سری زمانی (y_i) را به دو بخش مساوی تقسیم کرده، میانگین هر بخش را روی زمان متناظرش نقطه‌یابی می‌کنیم، سپس نقاط حاصل را به هم وصل کرده، خطّ گرایش را به‌وجود می‌آوریم.

اگر تعداد داده‌ها(y_i) فرد باشد، عدد وسطی (مربوط به زمان وسطی) را یک‌بار با گروه قبلی و یک‌بار با گروه بعدی درنظر می‌گیریم.

مثال ۲ــ اگر تولید یک کارخانه در۶ سال متوالی، طبق جدول ۲ باشد، پس از رسم نمودار حرکات تولید، خطّ گرایش را روی نمودار از طریقهٔ میانگینهای مضاعف برازنده نمایید.

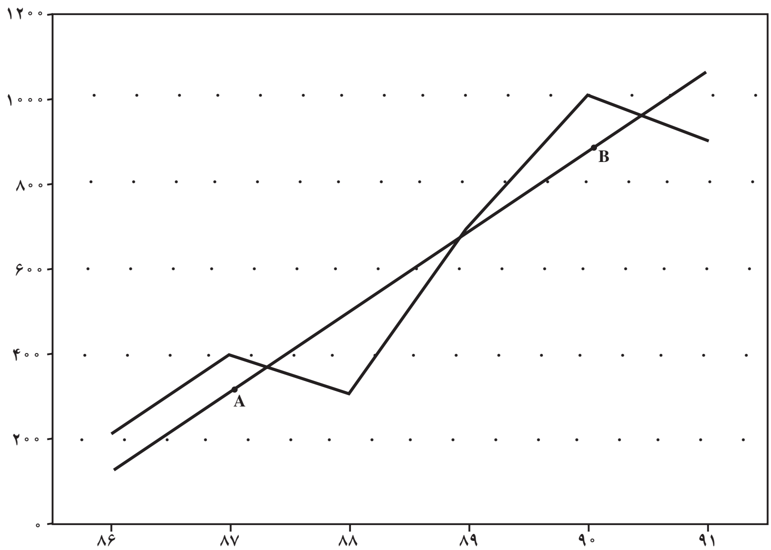
جدول ۲

سالها	۱۹۸۶	۱۹۸۷	۱۹۸۸	۱۹۸۹	۱۹۹۰	۱۹۹۱
مقدار تولید	۲۰۰	۴۰۰	۳۰۰	۷۰۰	۱۰۰۰	۹۰۰

ابتدا میانگینهای مضاعف را طبق جدول ۳ مشخّص می‌کنیم. آنگاه، نمودار تولید را رسم کرده، خطّ گرایش را با داشتن دو نقطه میانگینهای مضاعف روی نمودار، برازنده خواهیم کرد.

جدول ۳

سالها	y_i = تولید	مجموع هربخش	میانگینهای مضاعف	نقطه میانگین
۱۹۸۶	۲۰۰			
۱۹۸۷	۴۰۰	۹۰۰	۳۰۰ = ۳ ÷ ۹۰۰	A
۱۹۸۸	۳۰۰			
۱۹۸۹	۷۰۰			
۱۹۹۰	۱۰۰۰	۲۶۰۰	۸۶۷ ≃ ۳ ÷ ۲۶۰۰	B
۱۹۹۱	۹۰۰			



نمودار۳ ـــ خط روند از طریقه میانگینهای مضاعف

روش میانگینهای متحرّک

در این روش، میانگینهای متحرّک K دوره‌ای (مثلاً سه ساله) را به این شکل محاسبه می‌کنند : ابتدا از اوّلین K داده سری زمانی میانگین می‌گیرند، سپس اوّلین داده را حذف کرده، دادهٔ بعدی را طوری به داده‌ها اضافه می‌کنند که K ثابت بماند و مجدداً میانگین را محاسبه می‌کنند. (مثلاً اگر K = ۳ باشد،

یعنی میانگینهای متحرّک را سه ساله محاسبه کنند، ابتدا میانگین مقادیر مربوط به‌سالهای اوّل، دوم و سوم را محاسبه می‌نمایند و سپس میانگین مقادیر مربوط به سالهای دوم، سوم و چهارم را. بعد از آن میانگین مقادیر مربوط به سالهای سوم، چهارم و پنجم را محاسبه خواهند کرد و...) این کار را آنقدر ادامه می‌دهند تا آخرین داده، در آخرین گروه K دوره‌ای قرار گیرد، میانگینهای حاصل را میانگینهای متحرّک گویند که تعداد آنها را می‌توان از رابطهٔ $(n-K+1)$ به‌دست آورد. n(تعداد مقادیر سری زمانی است.)

پس از محاسبهٔ میانگینهای متحرّک آنها را در مقابل وسط دورهٔ زمانی که برای آن دوره محاسبه شده‌اند، قرار می‌دهیم. مشاهده خواهیم کرد که این میانگینها نسبت به مقادیر اصلی سری زمانی، از نوسانات کمتری برخوردار هستند و تمایل دارند که سری زمانی را هموار کنند. غالباً برای بررسی اثرات روند بلند مدّت، از میانگینهای سه ساله یا پنج ساله یا هفت ساله یا... استفاده می‌کنند و اگر سری زمانی مربوط به فصول مختلف چند سال متوالی باشد، بهتر است از میانگینهای متحرّک چهار فصلی استفاده شود و چنانچه داده‌های سری زمانی در ارتباط با ماههای مختلف چند سال متوالی باشد، مفیدتر خواهد بود که از میانگینهای متحرّک دوازده ماهه استفاده کنیم.

مثال ۳ــ در جدول ۴ تولید یک کارخانه را در هشت سال متوالی مشاهده می‌کنید. ابتدا نمودار حرکات سریهای زمانی را رسم کنید. سپس خطّ روند را از روش میانگینهای متحرّک سه ساله، روی نمودار حرکات بگنجانید.

جدول ۴

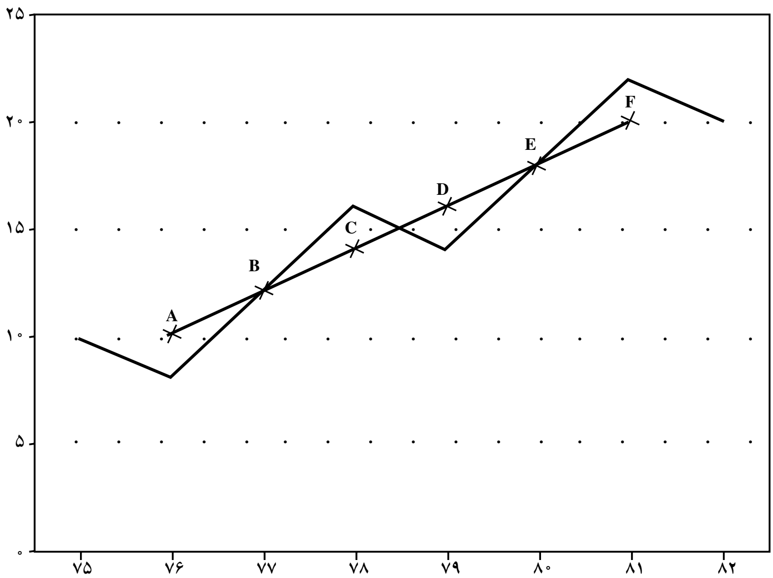
سالها	۱۳۷۵	۱۳۷۶	۱۳۷۷	۱۳۷۸	۱۳۷۹	۱۳۸۰	۱۳۸۱	۱۳۸۲
مقدار تولید = y_i	۱۰	۸	۱۲	۱۶	۱۴	۱۸	۲۲	۲۰

ابتدا میانگینهای متحرّک سه ساله را در جدول ۵ محاسبه می‌کنیم.

جدول ۵

سالها	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲
y_i	۱۰	۸	۱۲	۱۶	۱۴	۱۸	۲۲	۲۰
مجموع سه ساله متحرک	ـ	۳۰	۳۶	۴۲	۴۸	۵۴	۶۰	ـ
میانگینهای متحرک	ـ	۱۰	۱۲	۱۴	۱۶	۱۸	۲۰	ـ
نقاط	ـ	A	B	C	D	E	F	ـ

و آنگاه به رسم نمودار و خط روند می‌پردازیم :



نمودار ۴ ــ خط روند از طریقه میانگینهای متحرک

مثال ۴ــ فروش یک فروشگاه را در فصول مختلف سه سال متوالی، در جدول ۶ در اختیار دارید، مطلوب است :

الف) محاسبهٔ میانگینهای متحرّک چهار فصلی

ب) تعدیل مقدار فروش از نظر نوسانات فصلی

ج) رسم نمودار حرکات سری زمانی (فروش) و نمودار مقادیر تعدیل شده فروش بر روی یک دستگاه محورهای مختصّات

جدول ۶

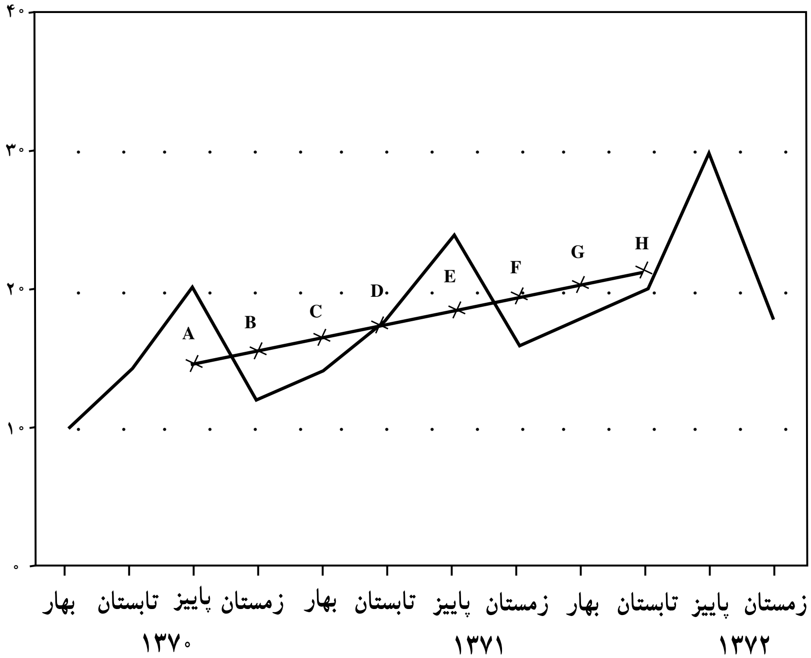
فصول / سالها	بهار	تابستان	پاییز	زمستان
۱۳۷۰	۱۰	۱۴	۲۰	۱۲
۱۳۷۱	۱۴	۱۸	۲۴	۱۶
۱۳۷۲	۱۸	۲۰	۳۰	۱۸

ابتدا، مقادیر فروش مربوط به اوّلین چهار فصل ۷۰ را جمع کرده، میانگین آنها را محاسبه می‌کنیم. آنگاه مقادیر مربوط به تابستان، پاییز و زمستان ۷۰ و بهار ۷۱ را جمع کرده، میانگین آنها را معلوم می‌کنیم. در مرحلهٔ بعد، مقادیر مربوط به پاییز و زمستان سال ۷۰ و بهار و تابستان سال ۷۱ را جمع کرده و میانگین آنها را معلوم می‌کنیم. این عمل را تا آنجا ادامه می‌دهیم که مقادیر فروش(y_i) چهار فصل مربوط به سال ۷۲ را جمع کرده، میانگین آنها را محاسبه کنیم. (به جدول ۷ نگاه کنید.) در این مثال چون مجموعهای متحرّک چهار فصلی دقیقاً مقابل زمانهای مشخّص قرار نمی‌گیرند، یک‌بار دیگر مجموعهای متحرّک ۲ دوره‌ای را محاسبه می‌کنیم، تا میانگینها درست متناظر با زمانهای جدول فروش باشند. به همین دلیل، برای محاسبهٔ میانگینها، مقسوم علیه ۸ منظور شده است.(مثلاً عدد ۱۱۶ مجموع ۸ عدد است.)

جدول ۷

سالها	فصول	فروش = y_i	مجموعهای متحرک چهارفصل	دومین مجموعهای متحرّک	میانگینهای متحرک (T_i)	نقاط میانگین
۱۳۷۰	بهار	۱۰				
۱۳۷۰	تابستان	۱۴	۵۶			
۱۳۷۰	پاییز	۲۰	۶۰	۱۱۶	۱۱۶÷۸=۱۴/۵	A
۱۳۷۰	زمستان	۱۲	۶۴	۱۲۴	۱۲۴÷۸=۱۵/۵	B
۱۳۷۱	بهار	۱۴	۶۸	۱۳۲	۱۳۲÷۸=۱۶/۵	C
۱۳۷۱	تابستان	۱۸	۷۲	۱۴۰	۱۴۰÷۸=۱۷/۵	D
۱۳۷۱	پاییز	۲۴	۷۶	۱۴۸	۱۴۸÷۸=۱۸/۵	E
۱۳۷۱	زمستان	۱۶	۷۸	۱۵۴	۱۵۴÷۸=۱۹/۲۵	F
۱۳۷۲	بهار	۱۸	۸۴	۱۶۲	۱۶۲÷۸=۲۰/۲۵	G
۱۳۷۲	تابستان	۲۰	۸۶	۱۷۰	۱۷۰÷۸=۲۱/۲۵	H
۱۳۷۲	پاییز	۳۰				
۱۳۷۲	زمستان	۱۸				

اکنون ابتدا نمودار حرکات سری زمانی را رسم می‌کنیم، آنگاه نقاط میانگینهای متحرّک را روی محورهای مختصّات مشخّص کرده، به هم وصل می‌کنیم. در نمودار ۵ مشاهده می‌کنید که نوسانات میانگینهای متحرّک به مراتب آرامتر از نوسانات اندازه‌های اصلی (y_i) است.



نمودار ۵ ــ خط روند از طریقه میانگین‌های متحرک تعدیل شده

روش کمترین مربعّات

دقیق‌ترین روش به دست آوردن خطّ روند بلند مدّت، استفاده از روش رگرسیونی است که در فصل قبل با معادلهٔ آن آشنا شده‌اید. شکل کلّی معادله به‌صورت $y' = ax + b$ بود. در این روش، خطّ گرایش را با استفاده از تابع خطّی رسم می‌کنیم.

همانگونه که در خط رگرسیون در فصل قبل دیدید : $y = ax + b$

$$a = \frac{SP_{xy}}{SS_x} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{(\sum x_i)(\sum y_i)}{n}}{\sum x_i^{۲} - \frac{(\sum x_i)^{۲}}{n}}$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x}$$

اگر تمام عوامل صورت و مخرج کسر بالا را در n ضرب کنیم، خواهیم داشت :

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^۲ - (\sum x_i)^۲} \qquad , \qquad b = \bar{y} - a\bar{x}$$ (فرمول ۲)

در روابط بالا :

n = تعداد عوامل سری زمانی (سالها، ماهها و...) می‌باشد.

y_i = مقادیر تعدیل شدهٔ سری زمانی است.

a = ضریب تغییر سری زمانی است که تندی شیب خطّ را نشان می‌دهد. (ضریب زاویه خطّ).

b = میانگین مقدار سری زمانی است که ارتفاع خطّ روند را در سال وسطی (یا به طور کلّی در زمان وسطی) مشخّص می‌کند.

x_i = بیانگر زمان است که نقش متغیّر مستقل را به عهده دارد. برای تعیین اعداد x در سالهای مختلف به ترتیب اعداد، ۰، ۱، ۲ و ... را در نظر می‌گیریم (مثال ۷).

اما چنانچه بتوانیم مقادیر x_i را با تغییر مبدأ از زمان آغاز بررسی سری زمانی به زمان وسط، به‌گونه‌ای تنظیم کنیم که $\sum x_i = ۰$ بشود (که این مطلب را در چند سطر بعد بیشتر توضیح خواهیم داد.) در آن صورت فرمولهای بالا به شکل زیر خلاصه خواهند شد :

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^۲} \qquad b = \bar{y}$$ (فرمول ۳)

و برای اینکه مجموع اندازه‌های x (یعنی $\sum x_i$) مساوی صفر بشود، کافی است، هرگاه تعداد سالها فرد باشد، مقابل سال وسطی صفر منظور کرده، سالهای قبل از آن را به ترتیب، ۱− ، ۲− ، ۳− و ... و سالهای بعد از آن به ترتیب ۱+ ، ۲+ ، ۳+ و ... قرار دهیم و هرگاه تعداد سالها زوج باشد، دو سال وسطی را در نظر گرفته، مقابل سال بالاتری ۱− و مقابل سال پایین‌تری ۱+ را برای x اختصاص داده، اعداد ۳− ، ۵− ، ۷− و ... را قبل از ۱− و اعداد ۳+ ، ۵+ ، ۷+ و ... را بعد از ۱+ درنظر می‌گیریم و به این ترتیب، هرگاه تعداد سالها زوج باشد، x تعداد دوره‌های تناوب شش ماهه را قبل و بعد از زمان وسطی نشان می‌دهد.

مثال ۵ــ مقدار تولید یک کارخانه را در هفت سال متوالی در جدول ۸ مشاهده می‌کنید. نمودار حرکات سری زمانی را رسم کرده، خطّ روند را روی نمودار حرکات از طریقهٔ کمترین مربّعات بگنجانید.

جدول ۸

۱۳۸۲	۱۳۸۱	۱۳۸۰	۱۳۷۹	۱۳۷۸	۱۳۷۷	۱۳۷۶	سالها
۱۱۰	۲۰۰	۱۶۰	۱۷۰	۱۴۰	۱۵۰	۱۲۰	مقدار تولید y_i

ابتدا در جدول ۹، محاسبات لازم را برای تعیین a و b انجام می‌دهیم.

جدول ۹

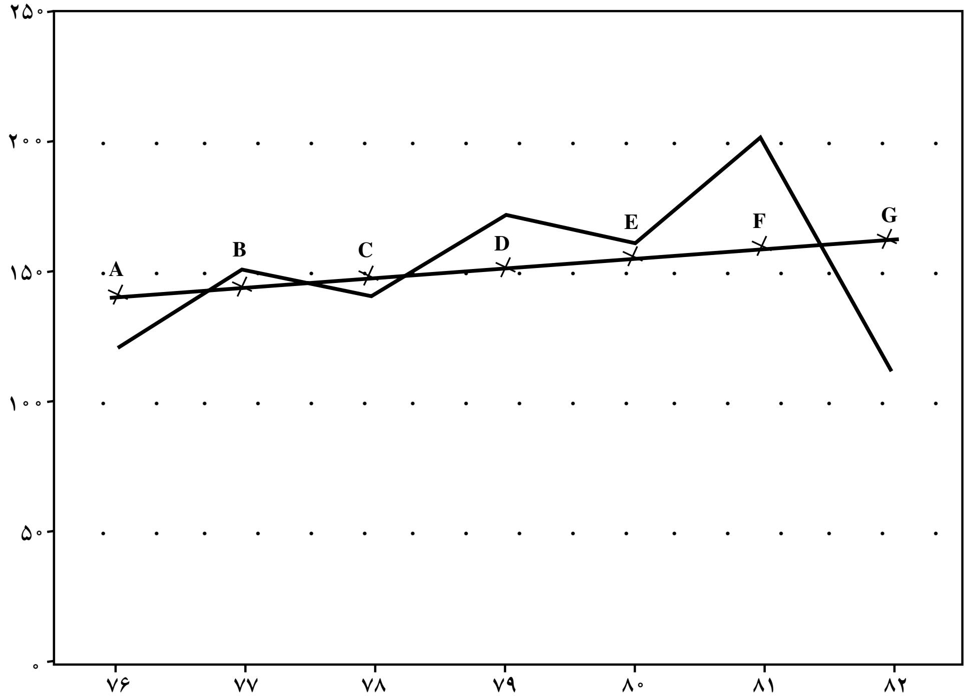
نقاط	مقادیر تعدیل شده سری زمانی = y''	$x_i^{۲}$	$x_i y_i$	x_i	y_i	سالها
A	$y'_{(۶۶)}$ = ۳/۲(−۳)+۱۵۰=۱۴۰/۴	۹	−۳۶۰	−۳	۱۲۰	۷۶
B	$y'_{(۶۷)}$ = ۳/۲(−۲)+۱۵۰=۱۴۳/۶	۴	−۳۰۰	−۲	۱۵۰	۷۷
C	$y'_{(۶۸)}$ = ۳/۲(−۱)+۱۵۰=۱۴۶/۸	۱	−۱۴۰	−۱	۱۴۰	۷۸
D	$y'_{(۶۹)}$ = ۳/۲(۰)+۱۵۰=۱۵۰	۰	۰	۰	۱۷۰	۷۹
E	$y'_{(۷۰)}$ = ۳/۲(+۱)+۱۵۰=۱۵۳/۲	۱	۱۶۰	+۱	۱۶۰	۸۰
F	$y'_{(۷۱)}$ = ۳/۲(+۲)+۱۵۰=۱۵۶/۴	۴	۴۰۰	+۲	۲۰۰	۸۱
G	$y'_{(۷۲)}$ = ۳/۲(+۳)+۱۵۰=۱۵۹/۶	۹	۳۳۰	+۳	۱۱۰	۸۲
		$\sum$ ۲۸	$\sum$ ۹۰		۱۰۵۰	

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^{۲}} = \frac{۹۰}{۲۸} = ۳/۲۱ \simeq ۳/۲$$

$$b = \bar{y} = \frac{۱۰۵۰}{۷} = ۱۵۰$$

$$y' = ۳/۲x + ۱۵۰$$

اکنون با کمک معادلهٔ اخیر، مقادیر فروش (y_i) را تعدیل می‌کنیم. برای این مقصود، کافی است برای هرسال در معادله به جای x مقدار x آن سال را قرار دهیم. برای سهولت کار می‌توانید فقط مقادیر تعدیل شدهٔ اوّلین سال و آخرین سال را به‌دست آورده، خطّ را رسم کنید.



نمودار ۶

مثال ۶ـــ فرض کنید مقدار ضایعات تولید یک کارخانه را در ده سال متوالی، طبق جدول ۱۰ در اختیار دارید. خطّ روند را روی منحنی نوسانات، از طریقهٔ کمترین مجذورات برازنده کنید :

جدول ۱۰

سال	۱۳۷۳	۷۴	۷۵	۷۶	۷۷	۷۸	۷۹	۸۰	۸۱	۸۲
ضایعات	۲۰	۲۲	۱۶	۱۴	۱۸	۱۲	۱۰	۶	۸	۴

ابتدا در جدول ۱۱، عملیّات لازم را برای تعدیل کردن مقادیر انجام می‌دهیم. سپس منحنی حرکات و خطّ روند را رسم می‌کنیم.

جدول ۱۱

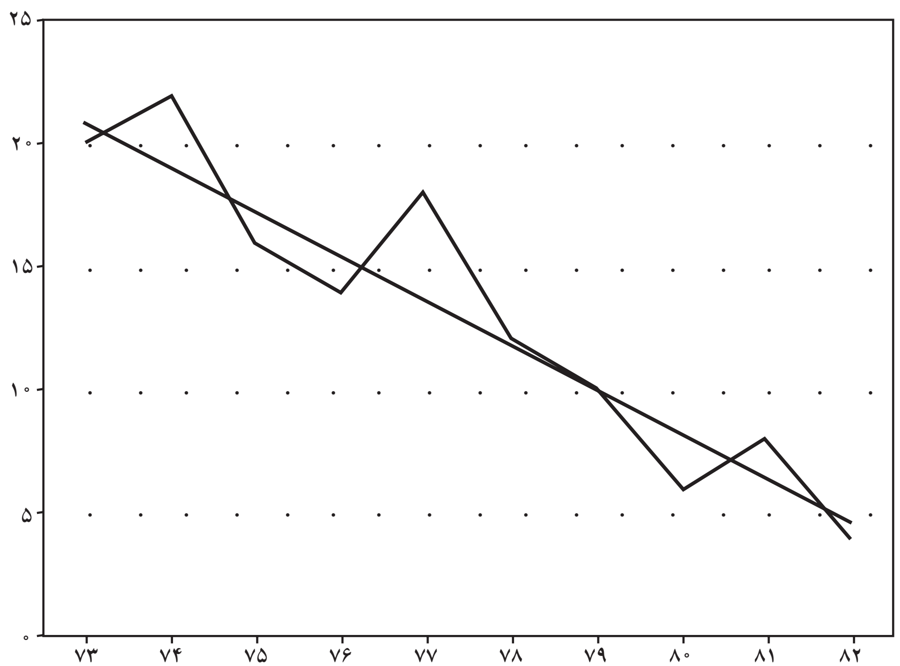
سالها	y_i	x_i	$x_i^۲$	x_iy_i	مقادیر تعدیل شدهٔ ضایعات = y'	نقاط
۷۳	۲۰	۹-	۸۱	۱۸۰-	$y'_{(۷۳)} = -۰/۹۳(-۹)+۱۳ = ۲۱/۳۷$	A
۷۴	۲۲	۷-	۴۹	۱۵۴-		
۷۵	۱۶	۵-	۲۵	۸۰-		
۷۶	۱۴	۳-	۹	۴۲-		
۷۷	۱۸	۱-	۱	۱۸-		
۷۸	۱۲	۱+	۱	۱۲+		
۷۹	۱۰	۳+	۹	۳۰+		
۸۰	۶	۵+	۲۵	۳۰+		
۸۱	۸	۷+	۴۹	۵۶+		
۸۲	۴	۹+	۸۱	۳۶+	$y'_{(۸۲)} = -۰/۹۳(+۹)+۱۳ = ۴/۶۳$	B
	۱۳۰		۳۳۰	۳۱۰-		

$$a = \frac{\sum x_i y_i}{\sum x_i^۲} = \frac{-۳۱۰}{۳۳۰} = -۰/۹۳$$

$$b = \frac{\sum y_i}{N} = \frac{۱۳۰}{۱۰} = ۱۳$$

$$y' = -۰/۹۳x + ۱۳$$

تذکّر: توجّه دارید که در این مثال، که تعداد سالها زوج است، در ستون x_i عدد صفر متناظر با زمان معیّنی نیست. بنابراین x تعداد دوره‌های شش ماهه را نشان می‌دهد.



نمودار ۷

پیش‌بینی مقادیر سریهای زمانی

برای پیش‌بینی مقادیر یک سری زمانی، دقیق‌ترین روش، استفاده از معادلهٔ خطّ رگرسیون بلندمدّت است. خطّی که با کمک معادله $y' = ax + b$ و با ضرایب a و b به‌صورت زیر تعیین می‌شود :

$$a = \frac{n\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{n\sum x_i^{۲} - (\sum x_i)^{۲}}$$

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

بعد از تعیین معادلهٔ رگرسیونی، از مُدل $y = T + S + C + I$ و حذف عامل تغییرات ناگهانی (I) به صورت $y = T + S + C$ استفاده می‌کنیم. (حذف I به این دلیل است که پیش‌بینی تغییرات ناگهانی برایمان مقدور نیست.)

مثال ۷ــ در مثال ۴ (که قبلاً حل کرده‌ایم) معادلهٔ خطّ رگرسیونی را تنظیم کنید و با ثابت فرض کردن تغییرات ناگهانی و دوره‌های تجاری، مقدار پیش‌بینی فروش را برای بهار و تابستان سال ۱۳۷۳ برآورد کنید.

ابتدا جدول فروش را مجدداً درنظر می‌گیریم :

جدول ۱۲

فصول / سالها	بهار	تابستان	پاییز	زمستان
۱۳۷۰	۱۰	۱۴	۲۰	۱۲
۱۳۷۱	۱۴	۱۸	۲۴	۱۶
۱۳۷۲	۱۸	۲۰	۳۰	۱۸

اکنون در جدول ۱۳ محاسبات a و b و معادله رگرسیونی را انجام می‌دهیم.

جدول ۱۳

سال	فصل	y_i	x_i	$x_i^۲$	x_iy_i	
۷۰	بهار	۱۰	۰	۰	۰	
۷۰	تابستان	۱۴	۱	۱	۱۴	$a=\frac{n\sum xy-\sum x\sum y}{n\sum x^۲-(\sum x)^۲}=$
۷۰	پاییز	۲۰	۲	۴	۴۰	
۷۰	زمستان	۱۲	۳	۹	۳۶	$\frac{(۱۲\times۱۳۱۴)-(۶۶\times۲۱۴)}{(۱۲\times۵۰۶)-(۶۶)^۲}=۰/۹۶$
۷۱	بهار	۱۴	۴	۱۶	۵۶	
۷۱	تابستان	۱۸	۵	۲۵	۹۰	$b=\bar{y}-a\bar{x}=۱۷/۸۳-(۰/۹۶)\times\frac{۶۶}{۱۲}$
۷۱	پاییز	۲۴	۶	۳۶	۱۴۴	
۷۱	زمستان	۱۶	۷	۴۹	۱۱۲	$b=۱۲/۵۵$
۷۲	بهار	۱۸	۸	۶۴	۱۴۴	معادله خط رگرسیون $y'=۰/۹۶x+۱۲/۵۵$
۷۲	تابستان	۲۰	۹	۸۱	۱۸۰	
۷۲	پاییز	۳۰	۱۰	۱۰۰	۳۰۰	
۷۲	زمستان	۱۸	۱۱	۱۲۱	۱۹۸	
		۲۱۴	۶۶	۵۰۶	۱۳۱۴	

اکنون با کمک معادله خط روند $(y' = ۰/۹۶x + ۱۲/۵۵)$ مقادیر مربوط به روند بلند مدت را به شکلی که در جدول زیر نشان داده‌ایم معلوم می‌کنیم.

جدول ۱۴

سال	فصل	y_i	x_i	T = روند بلند مدت = y''
۷۰	بهار	۱۰	۰	$y' = ۰/۹۶(۰) + ۱۲/۵۵ = ۱۲/۵۵$
۷۰	تابستان	۱۴	۱	$y' = ۰/۹۶(۱) + ۱۲/۵۵ = ۱۳/۵۱$
۷۰	پاییز	۲۰	۲	$y' = ۰/۹۶(۲) + ۱۲/۵۵ = ۱۴/۴۷$
۷۰	زمستان	۱۲	۳	$= ۱۵/۴۳$
۷۱	بهار	۱۴	۴	۱۶/۳۹
۷۱	تابستان	۱۸	۵	۱۷/۳۵
۷۱	پاییز	۲۴	۶	۱۸/۳۱
۷۱	زمستان	۱۶	۷	۱۹/۲۷
۷۲	بهار	۱۸	۸	۲۰/۲۳
۷۲	تابستان	۲۰	۹	۲۱/۱۹
۷۲	پاییز	۳۰	۱۰	۲۲/۱۵
۷۲	زمستان	۱۸	۱۱	$y' = ۰/۹۶(۱۱) + ۱۲/۵۵ = ۲۳/۱۱$
		۲۱۴	۶۶	

حالا با کمک مدل کلی سری زمانی یعنی :

$$y = T + C + S + I$$

و بعد از حذف I یعنی تغییرات ناگهانی، (به دلیل این‌که پیش‌بینی تغییرات ناگهانی یا بسیار مشکل و یا غیرممکن است.) به صورت $y_i = T + C + S$ [1] تأثیر نوسانات فصلی را برای فصول مختلف معلوم می‌کنیم. برای این‌کار اختلاف هر یک از مقادیر اولیه (y_i) را با مقدار روند بلند مدت تعدیل شده (T_i) به دست آورده (جدول ۱۵)، برای هر فصل میانگین تأثیرات را محاسبه می‌کنیم (جدول ۱۶).

۱ــ از رابطه $y_i = T + C + S$ رابطه $y_i - T = C + S$ نتیجه خواهد شد.

جدول ۱۵

y_i	T_i	$y_i - T_i$
۱۰	۱۲/۵۵	-۲/۵۵
۱۴	۱۳/۵۱	۰/۴۹
۲۰	۱۴/۴۷	۵/۵۳
۱۲	۱۵/۴۳	-۳/۴۳
۱۴	۱۶/۳۹	-۲/۳۹
۱۸	۱۷/۳۵	۰/۶۵
۲۴	۱۸/۳۱	۵/۶۹
۱۶	۱۹/۲۷	-۳/۲۷
۱۸	۲۰/۲۳	-۲/۲۳
۲۰	۲۱/۱۹	-۱/۱۹
۳۰	۲۲/۱۵	۷/۸۵
۱۸	۲۳/۱۱	-۵/۱۱

جدول ۱۶

سال‌ها / فصول	۱۳۷۰	۱۳۷۱	۱۳۷۲	مجموع تغییرات فصول	میانگین تغییرات فصول
بهار	-۲/۵۵	-۲/۳۹	-۲/۲۳	-۷/۱۷	-۲/۳۹
تابستان	۰/۴۹	۰/۶۵	-۱/۱۹	-۰/۰۵	-۰/۰۱۶۶
پاییز	۵/۵۳	۵/۶۹	۷/۸۵	۱۹/۰۷	+۶/۳۵۶۶
زمستان	-۳/۴۳	-۳/۲۷	-۵/۱۱	-۱۱/۸۱	-۳/۹۳۶۶

حالا اگر مقادیر x را در معادلهٔ $y' = ۰/۹۶x + ۱۲/۵۵$ جایگذاری کنیم، مقادیر روند بلند مدّت (T) حاصل می‌شوند. مثلاً برای تعیین مقدار روند بلند مدّت در بهار ۱۳۷۳ و تابستان ۱۳۷۳ که مقدار x آنها به ترتیب ۱۲ و ۱۳ خواهد بود، خواهیم داشت :

برآورد بلند مدّت در بهار ۷۳ ← ۲۴/۰۷ = ۱۲/۵۵ + (۱۲)۰/۹۶ = (بهار ۷۳) y'

برآورد روند بلند مدّت درتابستان ۷۳ ← ۲۵/۰۳ = ۱۲/۵۵ + (۱۳)۰/۹۶ = (تابستان۷۳) y'

حال، اگر مقدار نوسان فصلی مربوط به فصول بهار و تابستان ۷۳ را از جدول ۱۵ به مقدار روند بلند مدّت اضافه کنیم، رقم پیش‌بینی فروش برای فصول بهار و تابستان ۱۳۷۳ معلوم خواهد شد.

برای مثال، در مورد بهار سال ۱۳۷۳ خواهیم داشت:

$$۲۴/۰۷ + (-۲/۳۹) = ۲۱/۶۸$$

و برای تابستان سال ۱۳۷۳ خواهیم داشت:

$$۲۵/۰۳ + (-۰/۰۱۶۶) = ۲۵/۰۱۳۴$$

تذکّر مجدداً این مطلب لازم است که در این مثال، مقدار برآورد فروش را شامل تغییرات فصلی و روند دراز مدّت درنظر گرفته‌ایم.

روش محاسبه و رسم منحنی سهمی گرایش

در سریهای زمانی ممکن است مشاهده شود که تغییرات سری زمانی غیر خطّی است. در این موارد، چنانچه تغییرات نمودار از تابع درجهٔ دوم تبعیّت کند، شکل کلّی تابع به‌صورت $y = ax^۲ + bx + c$ خواهد بود. در این تابع، مقادیر a، b و c را مقادیر ثابت و x و y را مقادیر متغیّر می‌نامند. مقادیر b و c می‌توانند مثبت، منفی و یا صفر باشند و نمودار تابع درجهٔ دوم تحت تأثیر این مقادیر، شکلهای مختلفی به‌خود می‌گیرد.

مثال ۸ـــفرض کنید تابع $y = x^۲ - ۶x + ۸$ مربوط به تغییرات یک سری زمانی باشد. نمودار این تابع را رسم کرده، ویژگیهای آن را توضیح دهید.

حل: برای رسم نمودار تابع بالا، کافی است، مقادیر مختلفی به x نسبت داده، مقادیر متناظر y را از تابع به‌دست آوریم و روی محورهای مختصّات، نقاط مذکور را معلوم کرده، به هم وصل کنیم.

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
y	۸	۳	۰	۱-	۰	۳	۸

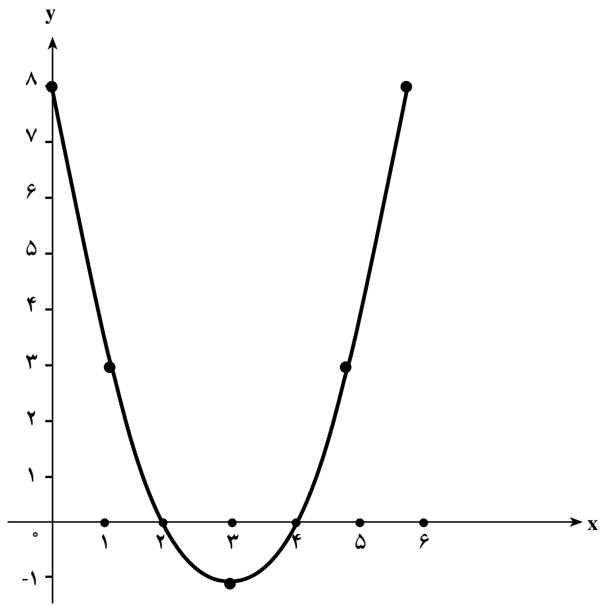
مشاهده می‌شود که این تابع محور عرضها را در یک نقطه قطع می‌کند که مقدار آن در تابع، معادل مقدار ثابت c می‌باشد و تغییر دادن این مقدار، موجب انتقال تابع به بالا یا پایین دستگاه

محورهای مختصّات خواهد بود و این تابع با محور طولها در دو نقطه برخورد دارد، که این دو نقطه معادله را صفر می‌کنند. به این دو مقدار «ریشه‌های معادله» گفته می‌شود. معادله‌های درجهٔ دو، دارای دو ریشه خواهند بود، مگر در موارد زیر :

۱ــ اگر تابع در پایین‌ترین نقطه خود با محور طولها مماس باشد، که در این صورت، فقط یک ریشه خواهد داشت.

۲ــ اگر نمودار، در بالای محور طولها واقع شود که ریشه نخواهد داشت.

اکنون به شکل منحنی تابع توجّه کنید :



نمودار ۸

تمرینهای فصل چهارم

۱ــ مفهوم سریهای زمانی را توضیح دهید.

۲ــ سریهای زمانی را تعریف کنید و کاربرد آنها را در مسائل مالی توضیح دهید.

۳ــ عوامل را در سریهای زمانی نام برده، برای هرکدام تعریف مناسبی بیان کنید.

۴ــ چند روش برای رسم خط روند می‌شناسید؟ آنها را نام برده، نحوهٔ رسم هر کدام را به‌طور کلّی توضیح دهید.

۵ــ در جدول زیر، فروش یک فروشگاه را در ۱۲ ماه از یک سال مشاهده می‌کنید. نمودار حرکات سریهای زمانی را رسم کرده، خطّ روند را روی نمودار از طریقهٔ دست‌آزاد برازنده کنید.

اسفند	بهمن	دی	آذر	آبان	مهر	شهریور	مرداد	تیر	خرداد	اردیبهشت	فروردین	ماهها
۲۸	۳۵	۲۵	۳۰	۱۸	۱۲	۸	۴	۶	۲۰	۱۰	۸	$y_i =$ فروش

۶ ــ مقدار تولید یک کارخانه را در فصول مختلف چهار سال متوالی در اختیار دارید. مطلوب است : اوّلاً، رسم نمودار حرکات فصلی. ثانیاً، رسم خطّ روند دراز مدّت با استفاده از روش میانگینهای متحرّک چهار فصلی.

۱۳۸۶	۱۳۸۵	۱۳۸۴	۱۳۸۳	سالها → / فصول ↓
۲۲	۱۹	۱۲	۱۰	بهار
۲۵	۲۱	۱۶	۱۴	تابستان
۲۰	۱۸	۱۴	۱۲	پاییز
۱۶	۱۲	۱۰	۸	زمستان

۷ــ اگر صادرات یک کشور در ده سال متوالی، به‌صورت صفحه‌بعد باشد، نمودار حرکات سری زمانی را رسم کرده، خطّ روند دراز مدّت را با کمک روشهای زیر روی نمودار حرکات سریهای زمانی برازنده کنید.

الف) طریقهٔ میانگینهای مضاعف   ب) طریقهٔ میانگینهای متحرّک سه ساله

ج) طریقهٔ کمترین مجذورات

سالها	۱۹۸۰	۱۹۸۱	۱۹۸۲	۱۹۸۳	۱۹۸۴	۱۹۸۵	۱۹۸۶	۱۹۸۷	۱۹۸۸	۱۹۸۹
صادرات	۲۰۰	۱۸۰	۲۲۰	۲۶۰	۲۴۰	۲۵۰	۳۰۰	۲۸۰	۳۲۰	۲۶۰

۸ ــ تعداد دانشجویان یک دانشگاه در طول پنج سال متوالی، طبق جدول زیر بوده است. خطّ روند دراز مدّت را از طریقهٔ رگرسیونی رسم کنید و تعداد دانشجو را برای سه سال متوالی بعد از سال ۱۳۷۲ پیش‌بینی کنید.

سالها	۱۳۸۲	۱۳۸۳	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶
تعداد دانشجو	۱۵۰۰	۱۸۰۰	۱۶۰۰	۲۰۰۰	۲۲۰۰

۹ــ در جدول تمرین ۸ خطّ روند را از طریقهٔ میانگینهای متحرّک سه ساله، روی نمودار حرکات سریهای زمانی برازنده کنید.

۱۰ــ تعداد مشتریهای یک بانک را در ساعات مختلف پنج روزکاری، در جدول زیر در اختیار دارید. نمودار حرکات سری زمانی را رسم کرده، خطّ روند را از طریقهٔ میانگینهای متحرّک روی نمودار حرکات سری زمانی برازنده کنید.

روزها / ساعت	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه
۸	۲۰	۱۵	۱۲	۱۴	۱۸
۱۰	۱۴	۱۲	۱۰	۱۲	۲۰
۱۲	۱۰	۸	۶	۸	۸
۱۴	۶	۴	۴	۵	۱۰

تستهای چهار گزینه‌ای

۱ــ در معادله کمترین مربّعات $y = ax + b$ مقدار a برابر است با :

۱) $\frac{\sum xy}{\sum x^{2}}$ ۲) $\frac{\sum x^{2}}{\sum xy}$ ۳) $\frac{\sum x}{\sum xy}$ ۴) $\frac{\sum xy}{\sum x}$

۲ــ اگر تعداد سالهای مورد بررسی در سریهای زمانی ۹ باشد، در تعیین مقادیر x_i برای سال چهارم چه عددی را در نظر می‌گیرید تا $\sum x_i$ مساوی صفر شود؟

۱) ۱ــ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) صفر

۳ــ کدام روش برای رسم خطّ روند، دقیقتر از سایر روشها است؟

۱) دست‌آزاد ۲) میانگینهای مضاعف

۳) میانگینهای متحرّک ۴) کمترین مربّعات

۴ــ کدام عامل از عوامل سریهای زمانی، غالباً قابل پیش‌بینی نیست؟

۱) تغییرات فصلی ۲) تغییرات ناگهانی ۳) تغییرات دوره‌ای ۴) تغییرات دراز مدّت

۵ ــ برای اینکه در تعیین ضرایب a و b در معادلهٔ خطّ رگرسیون، $\sum x_i = 0$ بشود، مقدار x را برای کدام سال صفر در نظر می‌گیرید؟ اگر تعداد سالها فرد باشد :

۱) سال اوّل ۲) سال آخر

۳) سال وسطی ۴) میانگین دو سال وسطی

۶ــ در تبدیل معادلهٔ رگرسیون به معادلهٔ کمترین مربّعات برای پیش‌بینی، مقدار b را در معادلهٔ «$y' = ax + b$» از کدام رابطه معلوم خواهید کرد؟

۱) $b = \bar{y}$ ۲) $b = \bar{y} - a\bar{x}$ ۳) $b = a\bar{x}$ ۴) $b = \bar{x}$

۷ ــ مقادیر تعدیل شده (y'_i) در روش میانگینهای متحرّک نسبت به مقادیر اوّلیه سری زمانی $(y_i =)$:

۱) از نوسانات بیشتری برخوردار است. ۲) از نوسانات کمتری برخوردار است

۳)تفاوتی ندارد. ۴) گاهی نوسانات، کمتر و گاهی بیشتر است.

۸ــ در جدول صفحه بعد اوّلین و دومین میانگینهای متحرّک سه ساله کدامند؟

۱) ۱۰و۱۸ ۲)۱۲و۱۴ ۳)۱۲و ۱۵ ۴)۱۰و۱۴

سالها	۶۵	۶۶	۶۷	۶۸	۶۹	۷۰	۷۱	۷۲
y_i	۱۰	۱۵	۵	۲۲	۱۸	۱۴	۱۹	۱۰

۹ــ استفاده از بررسی سریهای زمانی به منظور :

۱) شناخت گذشته است. ۲)پیش‌بینی آینده است.

۳) بررسی وضعیّت حال است. ۴) هر سه مورد درست هستند.

۱۰ــ تغییرات ناگهانی ناشی از کدام عامل زیر هستند؟

۱) عامل انسان ۲) عامل طبیعت

۳) هم عامل انسان و هم عامل طبیعت ۴) نه عامل انسان و نه عامل طبیعت