



## با ریاضیدانان نامی آشنا شوید

غیاث‌الدین جمشید بن مسعود بن محمود طیب کاشانی، (غیاث‌الدین جمشید مسعود کاشانی) اگر چه فیزیکدان بود، ولی علاقه‌ی اصلیش متوجه ریاضیات و اخترشناسی بود. این ریاضیدان و ستاره‌شناس مشهور ایرانی در حدود ۷۹۰ هجری قمری در کاشان به دنیا آمد. وی از نوابغ ریاضی قرن نهم محسوب می‌شود. در کتاب‌ها آمده است که این مرد بزرگ و با اراده در روزگاری می‌زیست که ایران، میدان تاخت و تاز و یورش مستبدانی همچون چنگیز، هلاکوخان و تیمور بود. غیاث‌الدین جمشید کاشانی در زمان تیموریان زندگی می‌کرد. زمانی که او در سن جوانی به کار تهیه جدول‌های محاسباتی نجوم مشغول بود، ایران در معرض ویرانی قرارداشت. هنگامی که در اوج خلاقیت ذهنی، برای راحتی کار با سایر منجمان، محاسبات دقیق نجومی را انجام می‌داد و ابزار اختراع می‌کرد، تیمور و پسرش شاهرخ با تجاوز خود به ایران، شهرها را یکی پس از دیگری به ویرانه تبدیل می‌ساختند. در آن موقعیت سخت امکان فعالیت‌ها و تحقیقات جدی برای او وجود نداشت. پسر شاهرخ یعنی الغ بیگ، که حاکم سمرقند بود، او را به رصدخانه دعوت کرد و وی از فرصت خوبی که پیش آمده بود، استقبال کرد. کاشی (کاشانی) برجسته‌ترین مقام را در میان کارکنان علمی «مدرسه» یعنی آموزشگاه الهیات و علم، که در سال ۷۹۹ به همت الغ بیگ بنیاد نهاده شده بود، داشت. تا هنگامی که الغ بیگ در سال ۸۲۸ به قتل رسید، سمرقند مهم‌ترین مرکز علمی در خاور زمین بود. کاشی به سازماندهی رصدخانه کمک کرد و در زیج الغ بیگ همکاری نزدیک داشت. مشهورترین اثرش «مفتاح الحساب» (۸۰۶) می‌باشد که دایرةالمعارف حساب مقدماتی است که صدها سال به عنوان کتاب راهنما به کار رفت. غیاث‌الدین نمونه عالم مسلمان بود. مسلمانی که نه تنها فهم دینی داشت، بلکه در اخلاق عملی و رفتار هم نمونه بود. در کارهای علمی ملاحظه‌ی هیچ کس را نداشت و انصاف، خصلت بزرگی بود که او در زندگی اجتماعی و علمی داشت. در مدرسه بزرگ سمرقند، نزدیک به پانصد طلبه علم از نقاط مختلف دور هم جمع شده بودند. الغ بیگ بیشتر وقت‌ها در کلاس‌های درس و مباحثه شرکت می‌کرد. برخی از روی ترس و حفظ منافع، گفتار غلطش را تأیید می‌کردند ولی غیاث‌الدین در این موارد هیچ ملاحظه‌ای از خودش نشان نمی‌داد و مصلحت‌اندیشی نمی‌کرد. در مقدمه کتاب «مفتاح الحساب» نوشته است «ستایش خداوندی را سزااست که در آفرینش آحاد بگانه است و در به هم پیوستن اعداد گوناگون بی‌همتاست و درود به بهترین آفریده‌ی او محمد (ص) که والاترین شفاعت‌کننده‌ی روز رستاخیز است و بر خاندان او و فرزندان او که راه‌های رهایی و رستگاری را رهنمودند. اما بعد نیازمندترین بندگان خدای تعالی به آموزش و بخشش او، جمشید پسر مسعود، پسر محمود پزشک کاشی، ملقب به غیاث‌الدین که خدا روزگارش را نیکو گرداند ...

در این کتاب روش ریشه‌گیری از اعداد صحیح را شرح می‌دهد و نخستین روش منظم برای پرداختن به کسرهای دهدهی را به دست می‌دهد که احتمالاً در اشاعه کسرهای دهدهی در اروپا تأثیر داشته است. بزرگ‌ترین آثار ریاضی وی عبارت‌اند از رساله المحيطیه (۸۰۳) و رساله الوتر و الجیب.

در رساله محیطیه مقدار سینوس را تا هفده رقم اعشاری تعیین می‌کند و در اثر دوم مقدار سینوس ۱ را تا ده رقم صحیح شصتگانی حساب می‌کند. در ابتدای کتاب رساله محیطیه این‌طور نوشته است «ستایش خداوندی را سزا که از نسبت قطر به محیط دایره آگاه است و اندازه هر مرکب و بسیط را می‌شناسد و آفریننده‌ی زمین و آسمان‌ها و قرار دهنده‌ی نور در تاریکی است و درود و سلام بر محمد مصطفی که مرکز دایره‌ی رسالت و محیط اقطار راهنمایی و دادگری است و بر خاندان و یاران پاک او باد»

جمشید کاشانی انسانی سختکوش، با هدف و منضبط و پر تلاش بود. عمر نسبتاً کوتاه و تعداد زیاد کتاب و تحقیقات او دلیل این ادعا است. جمشید کاشانی کتاب‌های زیادی در زمینه‌ی ریاضی کاربردی نوشته است که عموماً ارتباط نزدیکی با زندگی مردم و رفع مشکلات آنان داشته است. و همچنین تعداد زیادی ابزار نجومی برای محاسبات دقیق حرکت و وضعیت ستارگان ساخت که در روزگارش نظیر نداشت. روش او در حل عددی معادله‌ی تثلیث یکی از مهم‌ترین روش‌های جبر قرون وسطی است. از کارهای مهم کاشانی در نجوم تدوین زیج خاقانی است که در تکمیل نواقص زیج ایلخانی آن را تهیه کرد. وی در سال ۸۱۸ هـ. ق وسیله جدیدی برای رصد ستاره‌ها به نام طبق المناطق اختراع کرد و درباره‌ی چگونگی استفاده از آن و وسیله‌ی دیگری که پیش از آن ساخته بود (به نام لوح اتصالات) رساله جامع و مفیدی موسوم به نزهة الحقائق نوشت و از آثار دیگر او می‌توان به زیج تسهیلات و سلم السماء نیز اشاره کرد. این ریاضیدان بزرگ در سال ۸۳۲ هـ. ق در شهر سمرقند وفات یافت.

# بخش سوم

## فصل دوم

### کاربردهای مشتق (۱)

#### هدف کلی

به کاربردن مشتق تابع برای رسم خط مماس و قائم در یک نقطه از نمودار یک تابع، تعیین صعودی یا نزولی بودن یک تابع و به دست آوردن نقطه‌های اکسترمم یک تابع

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند:

- ۱- معادله‌ی خط مماس را در یک نقطه از نمودار یک تابع بنویسد.
- ۲- معادله‌ی خط قائم بر یک منحنی را در نقطه‌ای واقع بر آن بنویسد.
- ۳- به کمک مشتق، صعودی یا نزولی بودن یک تابع را مشخص کند.
- ۴- رفتار یک تابع را در بازه‌های مختلف تعیین کند.
- ۵- نقطه‌های اکسترمم یک تابع را تعیین کند.
- ۶- با توجه به جدول رفتار تابع و نقاط اکسترمم، نمودار توابع درجه دوم و سوم را رسم کند.

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱- فرض کنید نقطه‌ی  $A$  روی نمودار تابع زیر باشد :

$$y = f(x) = x^2 - x + 1$$

الف) اگر  $x_A = 1$  مقدار  $y_A$  را حساب کنید.

ب) مقدار  $f'(1)$  را به‌دست آورید.

پ) معادله‌ی خط  $(D)$  را بنویسید که از نقطه‌ی  $A$  بگذرد

و شیب آن  $f'(1)$  باشد.

ت) نمودار  $y = f(x)$  و خط  $(D)$  را رسم کنید.

ث) آیا خط  $(D)$  بر نمودار  $y = f(x)$  مماس است؟

۲- فرض کنید  $y = x^3$  در  $\mathbb{R}$  تعریف شده باشد.

الف) نمودار  $y$  را رسم کنید (از طریق نقطه‌یابی).

ب) دو نقطه‌ی  $A$  و  $B$  را روی نمودار این تابع چنان انتخاب

کنید که  $x_A < x_B$ . با توجه به نمودار، رابطه‌ی بین  $y_A$  و  $y_B$  را

بنویسید. بدون استفاده از نمودار ثابت کنید  $y_A < y_B$ .

ت) رفتار این تابع چگونه است؟ نام این تابع چیست؟

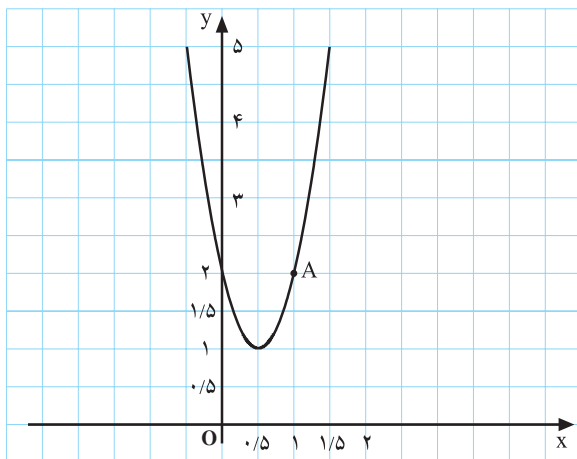
۳- فرض کنید  $f(x) = x^3 - x$ . علامت  $f'(x)$  را

در  $\mathbb{R}$  تعیین کنید.

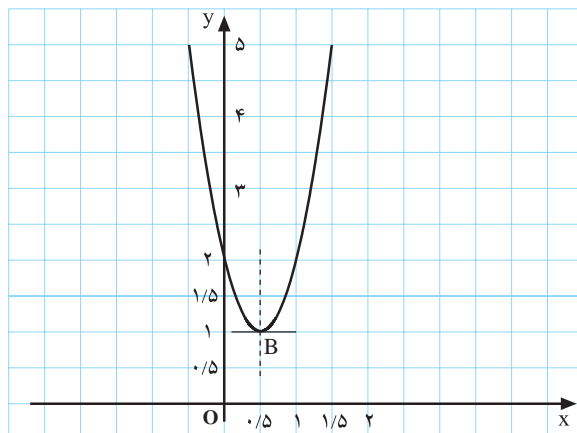
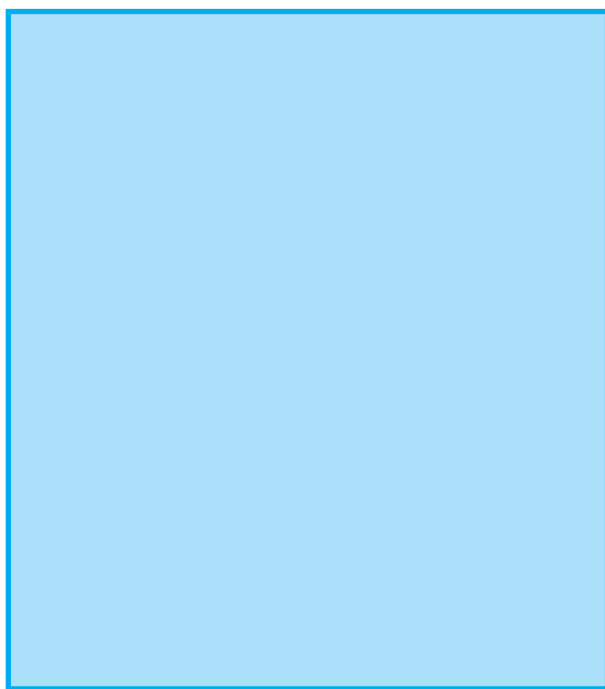
۴- اگر  $f(x) = x^2 - 2x + 3$  مینیمم مقدار  $f(x)$  را

به‌دست آورید. توضیح دهید چگونه مینیمم را به‌دست

آوردید.  $f'$  در  $x$  نقطه‌ی مینیمم چه مقداری دارد؟



شکل ۳-۱۴



شکل ۳-۱۵

## ۳-۲ کاربردهای مشتق (۱)

### ۳-۲-۱ تعیین معادله‌ی خط مماس و خط قائم:

یکی از کاربردهای مشتق، تعیین معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی خط قائم در یک نقطه‌ی دلخواه از نمودار یک تابع است.

### فعالیت ۳-۲

تابع  $y = f(x) = 4x^2 - 4x + 2$  و نمودار آن، (شکل ۳-۱۴)، داده شده است. برای نوشتن معادله‌ی خط مماس و معادله‌ی

خط قائم بر نمودار این تابع در نقطه‌ی  $A \left( 1, f(1) \right)$ ، کارهای زیر را انجام دهید.

۱- مقدار  $f(1)$  را حساب کنید.

۲- مشتق  $y$  را به دست آورید.

۳- مقدار  $f'(1)$  را حساب کنید.

۴- معادله‌ی خطی که از نقطه‌ی  $A$  می‌گذرد و شیب آن  $f'(1)$  است، بنویسید.

۵- آیا  $y = 4x - 2$  معادله‌ی خط مماس در نقطه‌ی  $A$

است؟

۶- با توجه به این که خط قائم بر منحنی در هر نقطه عمود

بر خط مماس بر منحنی در آن نقطه است، ابتدا شیب خط قائم و بعد معادله‌ی خط قائم بر نمودار فوق را در نقطه‌ی  $A$  بنویسید.

۷- خط مماس و خط قائم را در  $x = 1$  رسم کنید.

### کار در کلاس ۳-۳

با انتخاب  $B \left( \frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) \right)$  مراحل ۱ تا ۷ را تکرار کنید (شکل ۳-۱۵).

حل ۱: به ازای  $x = -1$ ، داریم:

$$f(-1) = -(-1)^2 + 6(-1) - 8 = -15$$

بنابراین،  $(-1, -15)$  نقطه‌ی تماس منحنی است.  
از طرفی:

$$f'(x) = -2x + 6$$

پس، ضریب زاویه‌ی  $m$  به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$m = f'(-1) = -2(-1) + 6 = 8$$

معادله‌ی خط مماس چنین است:

$$y - (-15) = 8(x - (-1))$$

$$y = 8x - 7$$

مثال ۱: معادله‌ی خط مماس بر تابع  $f(x) = -x^2 + 6x - 8$

در نقطه‌ی  $x = -1$  واقع بر منحنی را بنویسید.

حل ۲: اگر  $x = \frac{\pi}{6}$ ،

$$y = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$y' = -2 \sin x \cos x - 2 \sin x \cos x$$

$$= -4 \cos x \sin x$$

$$\text{شیب خط مماس} = -4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}$$

$$\text{شیب خط قائم} = -\frac{1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y - \frac{1}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{معادله‌ی خط قائم}$$

مثال ۲: معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع

$y = \cos^2 x - \sin^2 x$ ، در نقطه‌ی  $x = \frac{\pi}{6}$ ، واقع بر این تابع را بنویسید.

### تمرین ۳-۳

ث)  $y = \tan x$ ,  $x = 0$

ج)  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $x = 1$ .

۲) نمودار تابع‌های زیر را در بازه‌ی داده شده رسم کنید و معادله‌ی مماس در نقطه‌های داده شده را بنویسید. خط قائم را نیز رسم کنید.

الف)  $y = \sin x$ ,  $x = 0$ ,  $-\pi \leq x \leq \pi$

ب)  $y = \cos x$ ,  $x = 0$ ,  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$ .

۱) معادله‌ی خط مماس و خط قائم بر نمودار تابع‌های زیر

را، در نقطه‌هایی که  $x$  آن‌ها داده شده است، بنویسید.

الف)  $y = 2x^2 - x + 1$ ,  $x = 2$

ب)  $y = x^2 + 2x + 2$ ,  $x = -1$

پ)  $y = \sin^2 x$ ,  $x = \pi$

ت)  $y = \frac{x-1}{x+1}$ ,  $x = -2$

### ۲-۲-۳ رفتار تابع: مصرف آب یک مجتمع

مسکونی، بین ساعت ۸ صبح تا ساعت ۲۰ از رابطه‌ی زیر تبعیت می‌کند (x برحسب ساعت و f(x) برحسب مترمکعب است):

$$f(x) = 28x - x^2 - 155, \quad x \in [8, 20]$$

معین کنید در چه بازه‌ی زمانی مصرف آب در حال افزایش

(صعود) و در چه بازه‌ی زمانی در حال کاهش (نزول) است؟

در چه زمانی مصرف آب حداکثر است؟ و این حداکثر

چند مترمکعب است؟

حل: نمودار تابع  $y = f(x)$  در شکل ۳-۱۶ رسم شده

است، البته با استفاده از جدول ۳-۲ زیر:

جدول ۳-۲

x	۸	۱۲	۱۶	۲۰
f(x)	۵	۳۷	۳۷	۵

با توجه به شکل ۳-۱۶ بگویید حداکثر مصرف آب در

چه زمانی رخ می‌دهد؟

درست است، در ساعت ۱۴.

آیا بدون رسم شکل هم این عدد به دست می‌آید؟

$$f(14) = ?$$

عدد ۱۴ با اطلاعات قبلی چنین به دست می‌آید (امتحان

کنید):

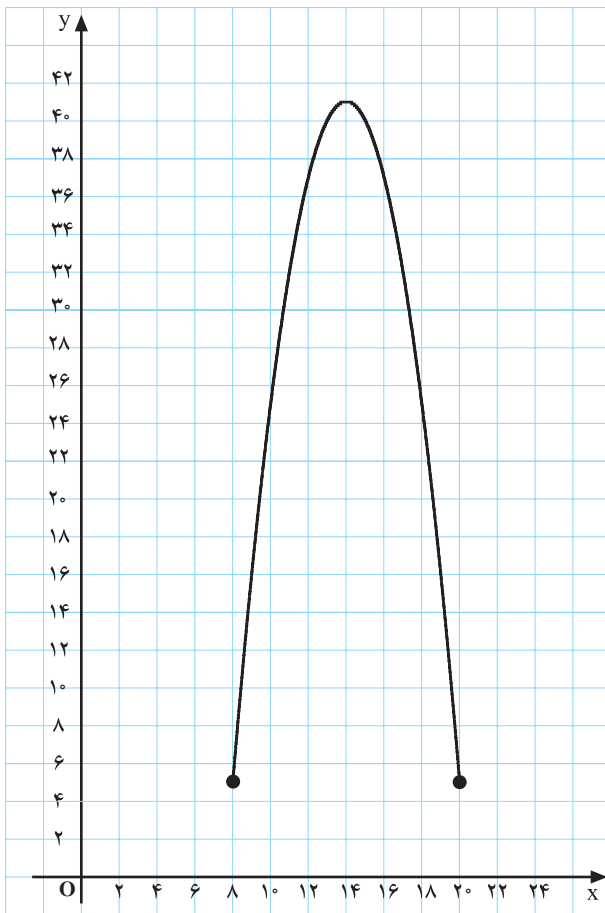
$$f(x) = 28x - x^2 - 155 = 41 - (x - 14)^2$$

واضح است که حداکثر f(x) مساوی ۴۱ و در  $x = 14$

به دست می‌آید.

اما، اگر قرار دهید  $f'(x) = 0$  آنگاه:

$$f'(x) = 28 - 2x = 0 \Rightarrow x = 14$$

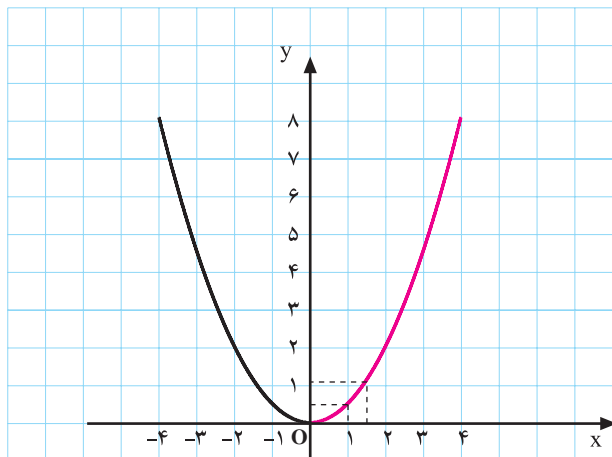


شکل ۳-۱۶

تابع f در بازه‌ی  $[8, 14]$  صعودی و در بازه‌ی  $[14, 20]$  نزولی است.

### فعالیت ۳-۳

تابع  $y = f(x) = \frac{1}{4}x^2$  و نمودار آن، در شکل ۳-۱۷، داده شده است. می‌خواهیم رفتار این تابع را در بازه‌های  $(0, +\infty)$  و  $(-\infty, 0)$  بررسی کنیم.



شکل ۳-۱۷ نمودار  $f(x) = \frac{1}{4}x^2$

۱- دو مقدار  $x_1 = 1$  و  $x_2 = 1/5$  متعلق به بازه‌ی  $(0, +\infty)$  را در نظر بگیرید. آیا،  $x_1 < x_2$  می‌باشد؟

۲- مقدارهای  $f(x_1)$  و  $f(x_2)$  را به دست آورید. آیا  $f(x_1) < f(x_2)$  می‌باشد؟

۳- قرار دهید  $x_1 = 2$  و  $x_2 = 2/5$ . آیا  $f(x_1) < f(x_2)$  می‌باشد؟

۴- دو عدد دلخواه  $x_1$  و  $x_2$  را در بازه‌ی  $(0, +\infty)$  در نظر بگیرید. با تشکیل عبارت  $f(x_1) - f(x_2) = \frac{1}{4}x_1^2 - \frac{1}{4}x_2^2$  نشان دهید که:

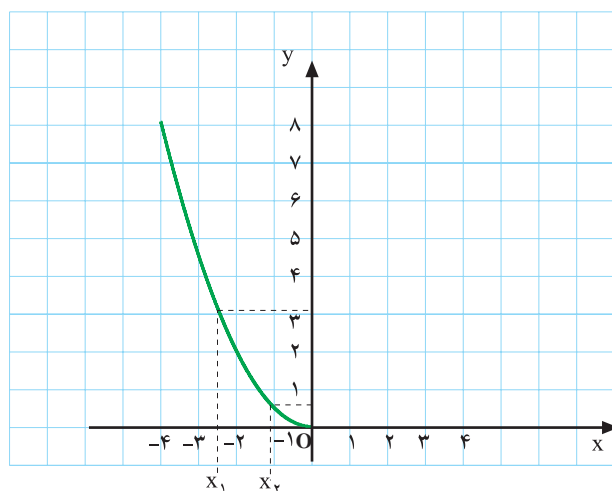
$$(*) \quad x_1 < x_2 \text{ آنگاه } f(x_1) < f(x_2)$$

۵- با توجه به  $(*)$  اگر  $x_1$  و  $x_2$  دو عدد دلخواه متعلق به بازه‌ی  $(0, +\infty)$  باشند علامت کسر زیر چیست؟

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

۶- با محاسبه‌ی  $y'$ ، علامت  $y'$  را در  $(0, +\infty)$  تعیین کنید.

با توجه به  $(*)$  تابع  $y = \frac{1}{4}x^2$  را بر  $(0, +\infty)$  صعودی گوئیم.



شکل ۳-۱۸ نمودار  $y = \frac{1}{4}x^2$  برای  $x \leq 0$

### کار در کلاس ۳-۴

مشابه فعالیت ۳-۳ را در مورد تابع  $y = \frac{1}{4}x^2$  بر بازه‌ی  $(-\infty, 0)$  انجام دهید (شکل ۳-۱۸).

۱- با تشکیل عبارت  $f(x_1) - f(x_2)$  نشان دهید که، به ازای هر  $x_1$  و  $x_2$  از  $(-\infty, 0)$ ،

$$(\dagger) \quad x_1 < x_2 \text{ آنگاه } f(x_1) > f(x_2)$$

۲- آیا رابطه‌ی  $(\dagger)$  از روی شکل ۳-۱۸ به وضوح دیده می‌شود؟



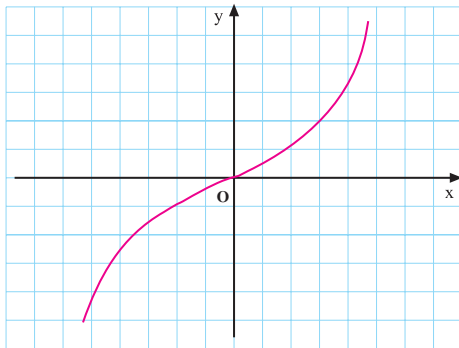
۳- علامت عبارت زیر را در بازه ی  $(-\infty, 0)$  تعیین کنید.

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

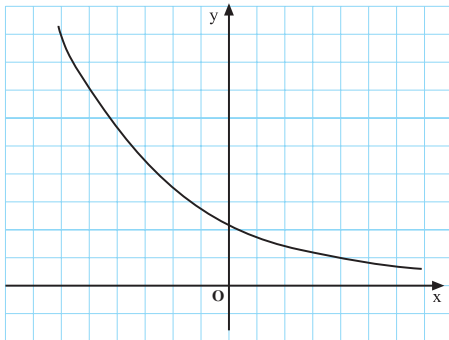
۴- با محاسبه ی  $y'$ ، علامت  $y'$  را در  $(-\infty, 0)$  تعیین کنید.

با توجه به تابع  $y = \frac{1}{4}x^2$  را بر  $(-\infty, 0)$  نزولی می نامیم.

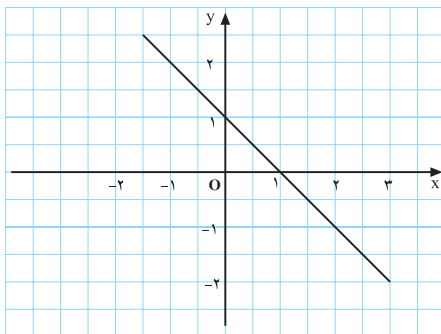
فرض کنید  $I$  یک بازه و  $y = f(x)$  یک تابع باشد و  $I \subset D_f$ .



شکل ۱۹-۳ نمودار یک تابع صعودی

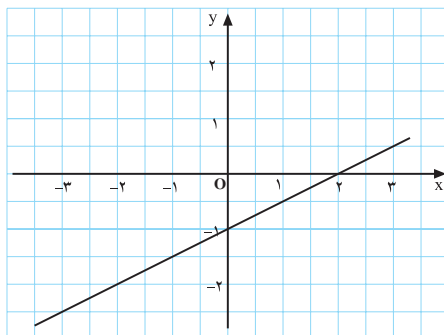


شکل ۲۰-۳ نمودار یک تابع نزولی



$$y = 1 - x$$

شکل ۲۱-۳



$$y = \frac{1}{4}x - 1$$

شکل ۲۲-۳

تعریف ۱. تابع  $f$  را بر  $I$  صعودی نامیم در صورتی که برای هر  $x_1$  و  $x_2$  متعلق به  $I$ ، اگر  $x_1 < x_2$  آنگاه  $f(x_1) \leq f(x_2)$ .

تعریف ۲. تابع  $f$  را بر  $I$  نزولی نامیم در صورتی که برای هر  $x_1$  و  $x_2$  متعلق به  $I$ ، اگر  $x_1 < x_2$  آنگاه  $f(x_1) \geq f(x_2)$ .

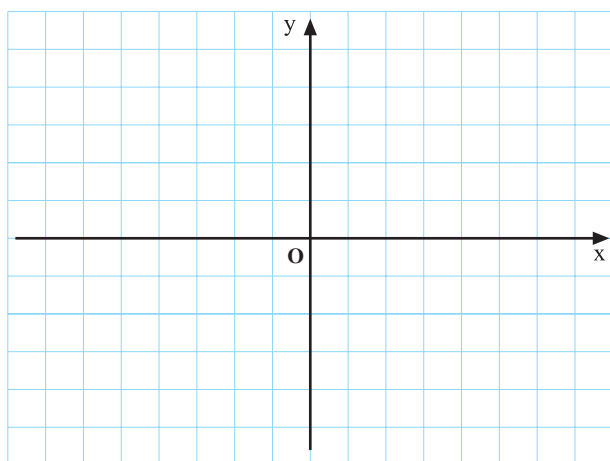
### کار در کلاس ۳-۵

۱- با استفاده از تعریف صعودی یا نزولی بودن یک تابع معین کنید در شکل های ۳-۲۱ و ۳-۲۲ کدام تابع صعودی و کدام نزولی است؟

آیا با استفاده از مشتق این تابع ها هم می توان در مورد صعودی یا نزولی بودن آن ها نظر داد؟

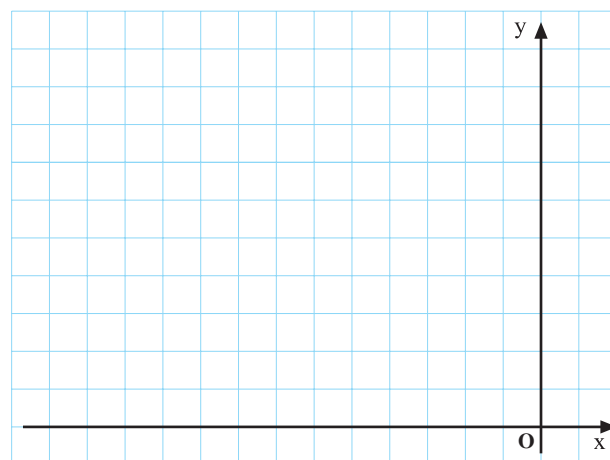
### تمرین ۳-۴

۱- تابع  $y = x^3$  داده شده است. در رفتار این تابع تحقیق کنید. (ابتدا نمودار این تابع را در شکل ۳-۲۳ رسم کنید.)



شکل ۳-۲۳

۲- تابع‌های زیر را در بازه‌ی  $(-\infty, 0]$  و در شکل ۳-۲۴ رسم کنید و نشان دهید که این تابع‌ها نزولی هستند.

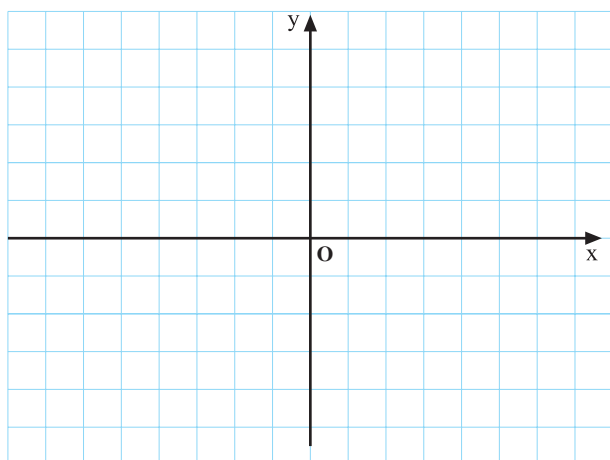


شکل ۳-۲۴

الف)  $f(x) = x^2$

ب)  $f(x) = x^4$

۳- نمودار تابع‌های زیر را در  $\mathbb{R}$  در شکل ۳-۲۵، رسم کنید و نشان دهید که این تابع‌ها صعودی هستند.



شکل ۳-۲۵

الف)  $f(x) = x$

ب)  $f(x) = x^5$

### ۳-۲-۳- مشتق و رفتار تابع: با توجه به ویژگی یک

تابع صعودی (یا نزولی)، در صورتی که این تابع در هر نقطه از دامنه‌اش مشتق داشته باشد، می‌توان با استفاده از علامت مشتق در مورد صعودی یا نزولی بودن آن، بدون رسم نمودارش، نظر داد.

فرض کنید تابع  $y = f(x)$  بر بازه‌ی  $I$  صعودی باشد. در

این صورت، اگر  $x_1$  و  $x_2$  متعلق به  $I$  باشند:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq 0$$

پس، با فرض  $x_1 = x$  و  $x_2 = x + h$ ، داریم:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0$$

لذا، اگر تابع  $f$  در هر نقطه‌ی داخلی از  $I$  مشتق داشته

باشد، داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x) \geq 0$$

به عکس، اگر برای هر نقطه‌ی داخلی  $x$  از بازه‌ی  $I$  داشته

باشیم  $f'(x) \geq 0$ ، آنگاه  $f$  بر  $I$  صعودی است.

لذا، قضیه‌ی زیر را داریم:

**قضیه‌ی ۱:** فرض کنید تابع  $f$  بر بازه‌ی باز  $I$  مشتق‌پذیر

باشد و برای هر نقطه‌ی داخلی  $x$  متعلق به  $I$  داشته باشیم

$f'(x) \geq 0$ ، در این صورت تابع  $f$  بر  $I$  صعودی است.

در ستون مقابل کاربرد این قضیه را، برای اثبات

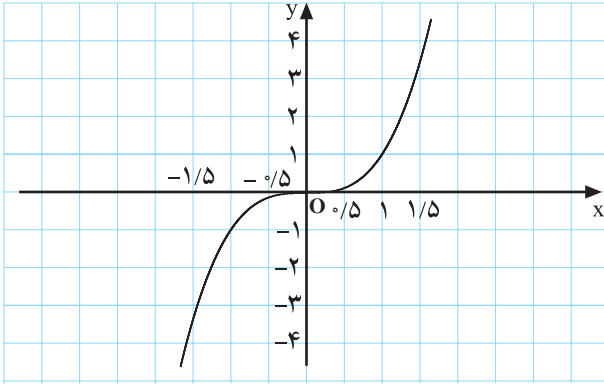
صعودی بودن چند تابع، ملاحظه می‌کنید.

### مثال‌ها (در رابطه با قضیه‌ی ۱)

الف)  $y = x^3$ ,  $x \in \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 \geq 0, x \in \mathbb{R}$$

لذا، تابع  $y = x^3$  بر  $\mathbb{R}$  صعودی است.



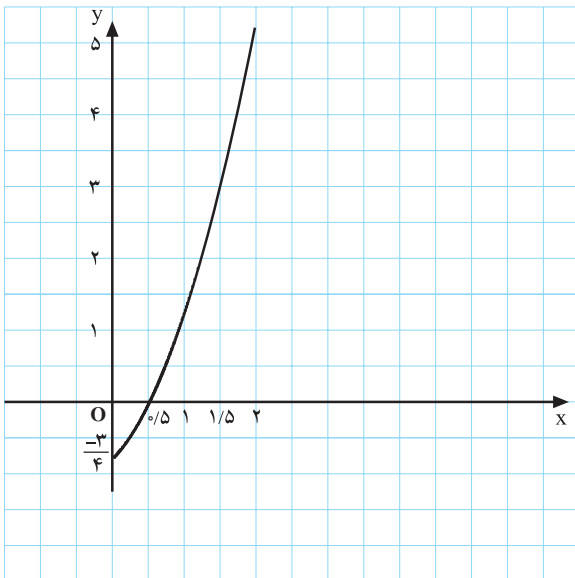
شکل ۳-۲۶- نمودار  $y = x^3$

ب)  $y = x^2 + x - \frac{3}{4}$ ,  $(x \geq 0)$

$$y' = 2x + 1 > 0, (x \geq 0)$$

لذا، تابع  $y = x^2 + x - \frac{3}{4}$  بر  $[0, +\infty)$  صعودی است

(شکل ۳-۲۷).



شکل ۳-۲۷- نمودار  $y = x^2 + x - \frac{3}{4}$

به طریق مشابه داریم :

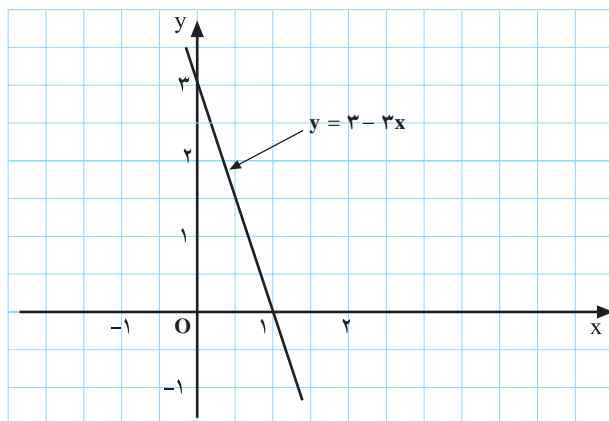
**قضیه ۲:** اگر تابع  $f$  بر بازه  $I$  مشتق پذیر باشد و برای هر نقطه  $x$  داخلی  $I$  داشته باشیم  $f'(x) \leq 0$  آنگاه تابع  $f$  بر  $I$  نزولی است.

مثالها (در رابطه با قضیه ۲)

الف)  $y = 3 - 3x, \quad x \in \mathbb{R}$

$$y' = -3 < 0$$

بنابراین، تابع  $y = 3 - 3x$  نزولی است (شکل ۲۸-۳).



شکل ۲۸-۳ نمودار  $y = 3 - 3x$

قضیه های ۱ و ۲ در تعیین رفتار یک تابع (یعنی نزولی یا صعودی بودن آن) بسیار مفیدند. در ستون مقابل، نزولی بودن چهار تابع، با استفاده از مشتق آنها، نشان داده شده است.

**تعریف ۳:** تابع  $f$  را بر بازه  $I$  یکنوا گوئیم در صورتی که  $f$  بر  $I$  صعودی یا نزولی باشد.

### کار در کلاس ۳-۶

با استفاده از قضیه های ۱ و ۲ رفتار تابع های زیر را در بازه های مشخص شده تعیین کنید.

۱)  $y = 2x - 1, \quad x \in (-\infty, +\infty)$

۲)  $y = x^2 - 1, \quad x \in (-\infty, 0)$

۳)  $y = \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$

۴)  $y = \frac{1}{x}, \quad x \in (-\infty, 0)$

۵)  $y = \tan x, \quad x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

۶)  $y = \cos x, \quad x \in (0, \pi)$

۷)  $y = \cot x, \quad x \in (0, \pi)$

۸)  $y = \cos x + x, \quad x \in \mathbb{R}$

ب)  $y = 1 - x - x^2, \quad x \in (0, +\infty)$

$$y' = -1 - 2x < 0, \quad x \in (0, +\infty)$$

بنابراین، تابع  $y = 1 - x - x^2$  بر  $(0, +\infty)$  نزولی است.

نمودار این تابع را رسم کنید و صحت نتیجه را بررسی کنید.

پ)  $y = \frac{1-x}{x}, \quad x \in (0, +\infty)$

$$y' = \frac{-1(x) - 1(1-x)}{x^2} = \frac{-1}{x^2} < 0, \quad (x > 0)$$

بنابراین، تابع  $y = \frac{1-x}{x}$  بر  $(0, +\infty)$  نزولی است.

ت)  $y = \sin x - x, \quad x \in \mathbb{R}$

$$y' = \cos x - 1 \leq 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

بنابراین، تابع  $y = \sin x - x$  نزولی است.

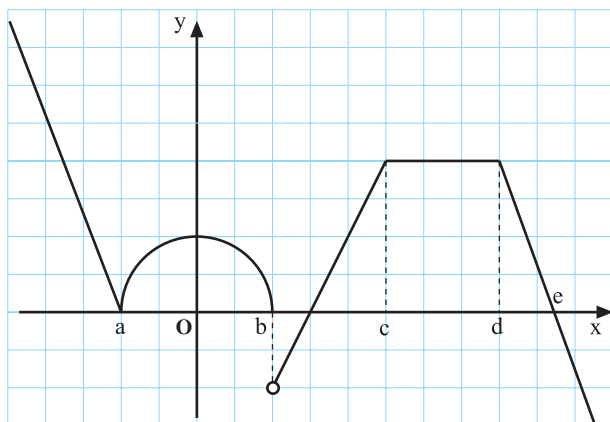
### تمرین ۳-۵

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x > 0 \\ 2x - 1, & x \leq 0 \end{cases}$$

۱- تابع  $f$  در روبه‌رو تعریف شده است. بازه‌هایی را که  $f$  در آن‌ها صعودی یا نزولی است مشخص کنید. آیا  $f$  در  $\mathbb{R}$  صعودی است؟ (نمودار  $f$  را رسم کنید.)

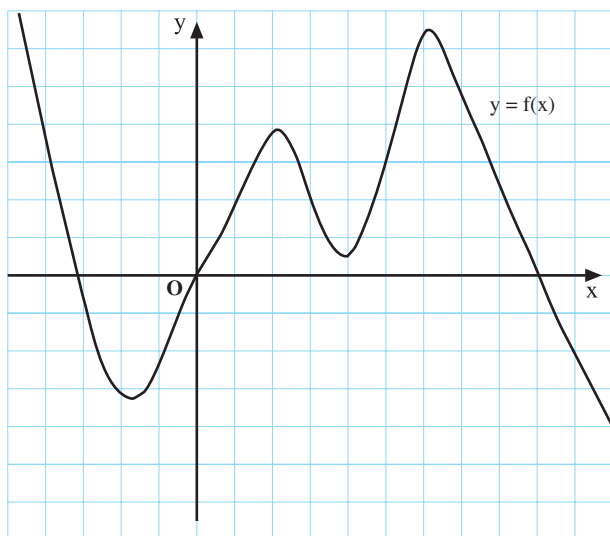
$$g(x) = \begin{cases} -2x - 1, & x \geq 0 \\ x^2 - 1, & x < 0 \end{cases}$$

۲- تابع  $g$  در روبه‌رو تعریف شده است. ثابت کنید  $g$  بر  $\mathbb{R}$  یکنواست. نمودار تابع  $g$  را رسم کنید. آیا نمودار هم همین نتیجه را می‌دهد؟



شکل ۳-۲۹ نمودار  $y = h(x)$

۳- با توجه به نمودار تابع  $y = h(x)$  (شکل ۳-۲۹) بازه‌های یکنوایی آن را تعیین کنید.



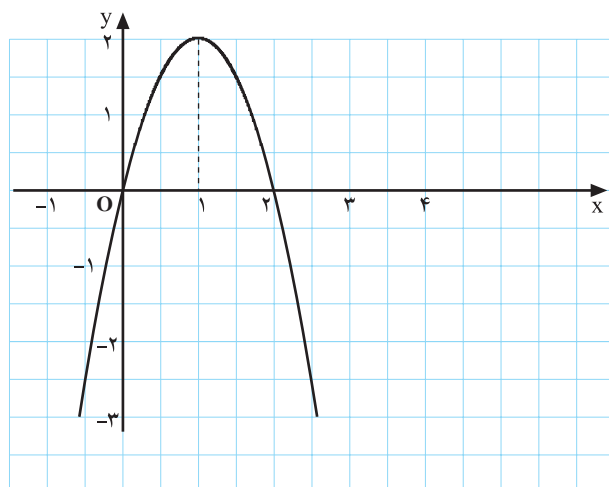
شکل ۳-۳۰

۴- تابع  $y = \frac{2x+a}{x+a-2}$  داده شده است. حدود  $a$  را چنان تعیین کنید که  $y' > 0$  باشد.

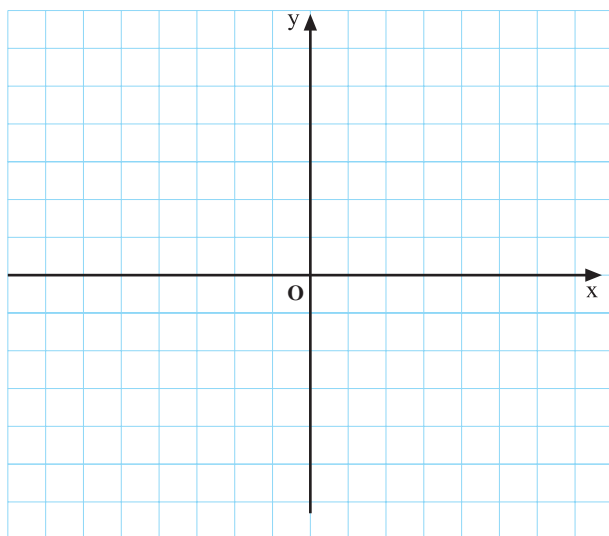
۴-۲-۳ تغییرات تابع: منظور از بررسی تغییرات تابع، معین کردن قسمت‌هایی از دامنه‌ی تابع است که تابع در آن‌ها صعودی یا نزولی است. این مطلب در رسم دقیق‌تر نمودار تابع مفید است و باعث دقت و سرعت در رسم نمودار می‌شود. در شکل ۳-۳۰ بازه‌هایی را که تابع  $f$  در آن‌ها صعودی یا نزولی است مشخص کنید.

### جدول ۳-۳

x	$-\infty$	۱	۲	$+\infty$
$y'$	+	۰	-	-
y	$-\infty$	↗ ۲ ↘	↘ ۰ ↗	$-\infty$



شکل ۳-۳۱



شکل ۳-۳۲

مثال: تابع  $y = -2x^2 + 4x$  مفروض است، تغییرات این

تابع را مورد بررسی قرار دهید.

حل: ابتدا  $y'$  را حساب می‌کنیم.

$$y' = -4x + 4$$

سپس  $y'$  را در جدول ۳-۳ تعیین علامت می‌کنیم، برای

این منظور قرار می‌دهیم  $y' = 0$ .

$$y' = 0 \Rightarrow -4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 1$$

با توجه به آنچه در مورد تابع‌های یکنوا گفته شد، جدول تغییرات، (جدول ۳-۳) و نمودار تابع در شکل ۳-۳۱ ملاحظه می‌شود. نمودار تابع، تنها به کمک جدول و نقاطی که نمودار محورها را قطع می‌کند، رسم شده است.

### کار در کلاس ۳-۷

با توجه به مثال بالا، تغییرات تابع‌های زیر را بررسی کنید

(از نمودار نیز می‌توانید استفاده کنید.) (شکل ۳-۳۲).

الف)  $y = x^2 - 4x + 3$

ب)  $y = 2x - 8x^3$ .

### تمرین ۳-۶

تغییرات تابع‌های زیر را بررسی کنید (بدون رسم نمودار).

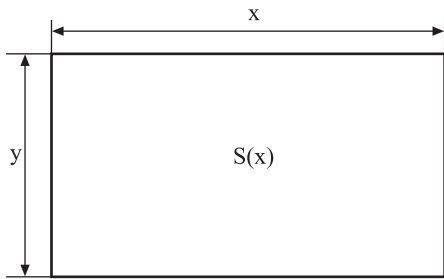
الف)  $y = (x - 3)^2$

ب)  $y = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + 1$

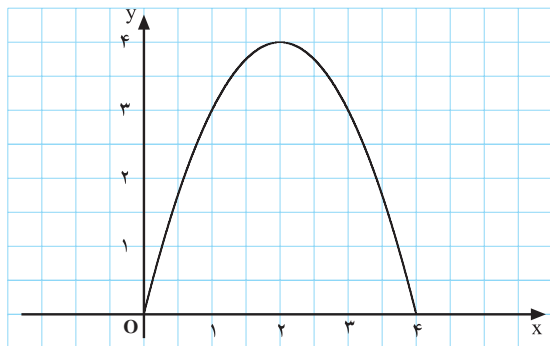
پ)  $y = x(2 - x)$

ت)  $y = -x$

ث)  $y = 2$ .



شکل ۳-۳۳



شکل ۳-۳۴ نمودار تابع  $s(x) = 4x - x^2$  در بازه  $(0, 4)$

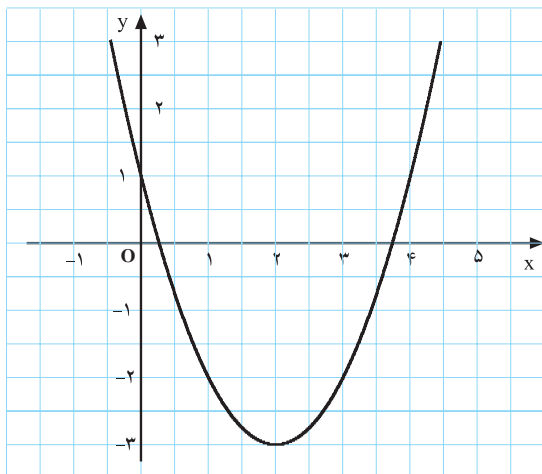
جدول ۳-۴

$x$	۰	۲	۴
$s'(x)$	+	۰	-
$s(x)$	۰	↗ ۴	↘ ۰

$$y = x^2 - 4x + 1$$

$$y' = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$y(2) = -3$$



شکل ۳-۳۵

۵-۲-۳- نقطه‌های ماکسیمم و مینیمم نسبی یک

تابع: فرض کنید می‌خواهیم مستطیلی رسم کنیم که محیط آن ۸ سانتی‌متر و مساحت آن ماکسیمم باشد. مطابق شکل ۳-۳۳ اگر طول و عرض مستطیل را  $x$  و  $y$  بنامیم داریم:

$$2(x + y) = 8$$

و یا

$$x + y = 4$$

و اگر مساحت مستطیل را با  $s(x)$  نمایش دهیم:

$$s(x) = xy = x(4 - x) = 4x - x^2$$

در شکل ۳-۳۴ نمودار تابع  $s(x)$  را در بازه  $(0, 4)$  و جدول تغییرات آن را در جدول ۳-۴ ملاحظه می‌کنید.

$$s'(x) = 4 - 2x = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$s(2) = 8 - 4 = 4$$

سانتی‌متر مربع

ملاحظه می‌کنید که تابع  $s(x)$  در  $(0, 2)$  صعودی و در  $(2, 4)$  نزولی است. ضمناً، مشتق آن در  $(0, 2)$  مثبت و در  $(2, 4)$  منفی است.

$s(x)$  به ازای  $x = 2$  بیشترین مقدار را دارد و ماکسیمم

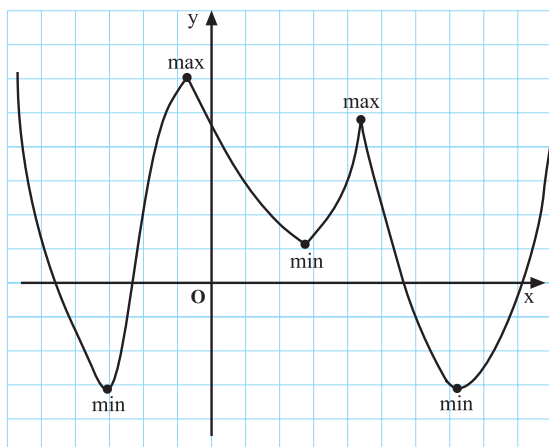
۴ است. این تابع در نقطه‌ی  $(2, 4)$  دارای **ماکسیمم نسبی** است.

در شکل ۳-۳۵ نمودار  $y = x^2 - 4x + 1$  در  $(-\infty, +\infty)$

رسم شده است و جدول تغییرات آن، جدول ۳-۵ نیز ملاحظه می‌شود. این تابع در  $(-\infty, 2)$  نزولی و در  $(2, +\infty)$  صعودی است. لذا، در  $x = 2$  کمترین مقدار یعنی  $-3$  را داراست.

جدول ۳-۵

$x$	$-\infty$	۰	۱	۲	۳	$+\infty$
$y'$	-	-	-	۰	+	+
$y$	$+\infty$	↘ ۱	↘ -۲	↘ -۳	↗ -۲	↗ $+\infty$



شکل ۳۶-۳ نمودار  $y=f(x)$

مثال‌ها:

$$۱) y = x^3 - x^2 - 5x + 2$$

$$y' = 3x^2 - 2x - 5$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x - 5 = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{5}{3} \end{matrix}$$

جدول ۳-۶

x	$-\infty$	-2	-1	$\frac{5}{3}$	2	$+\infty$
$y'$	+	+	+	-	+	+
y	$-\infty$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	$+\infty$

تابع  $y = x^3 - x^2 - 5x + 3$  در  $(-1, 5)$  ماکسیمم نسبی و در  $(\frac{5}{3}, \frac{-121}{27})$  مینیمم نسبی دارد.

$$۲) y = 2x^4 - x^2 + 1$$

$$y' = 8x^3 - 2x = 2x(4x^2 - 1)$$

$$y' = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = \pm \frac{1}{2}$$

جدول ۳-۷

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$y'$	-	-	+	-	+
y	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

لذا، تابع  $y$  در  $(-\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$  مینیمم نسبی، در  $(0, 1)$  ماکسیمم نسبی و در  $(\frac{1}{2}, \frac{7}{8})$  مینیمم نسبی دارد.

**تعریف ۴.** گوئیم تابع  $f$  در نقطه‌ی  $(x_0, f(x_0))$  دارای مینیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل  $x_0$ ، مانند  $(a, b) \subset D_f$  باشد به قسمی که برای هر  $x$  از این بازه:

$$f(x_0) \leq f(x)$$

$f(x_0)$  را اندازه‌ی مینیمم نسبی نامیم.

**تعریف ۵.** گوئیم تابع  $f$  در نقطه‌ی  $(x_0, f(x_0))$  دارای ماکسیمم نسبی است در صورتی که بازه‌ای باز شامل  $x_0$ ، مانند  $(a, b) \subset D_f$  باشد به قسمتی که برای هر  $x$  از این بازه:

$$f(x_0) \geq f(x)$$

$f(x_0)$  را اندازه‌ی ماکسیمم نسبی نامیم.

در شکل ۳۶-۳ نمودار  $y=f(x)$  را ملاحظه می‌کنید که دارای چند نقطه‌ی ماکسیمم و مینیمم نسبی است.

**تعریف ۶.** نقاط ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع را نقاط اکسترمم تابع نامند. با توجه به آنچه در صفحه‌ی قبل گفته شد نقطه‌های ماکسیمم و مینیمم نسبی یک تابع را، که در تمام نقاط دامنه‌اش مشتق دارد، به طریق زیر حساب می‌کنیم.

الف)  $y'$  را حساب می‌کنیم.

ب) ریشه‌های معادله‌ی  $y' = 0$  را به دست می‌آوریم.

پ) اگر  $y'$  در یک طرف یک ریشه مثبت (منفی) و در طرف دیگر آن منفی (مثبت) باشد تابع در آن نقطه ماکسیمم (مینیمم) نسبی است.

ت) در صورتی که  $y'$  در  $x_0$  صفر باشد ولی در دو طرف  $x_0$  دارای یک علامت باشد تابع در  $x_0$  ماکسیمم یا مینیمم نسبی ندارد. (به فعالیت ۳-۴ مراجعه کنید). در روبرو دو مثال حل شده است.



## فعالیت ۳-۴

تابع  $y = (x-1)^3$  داده شده است.

۱- مشتق  $y$  را حساب کنید.

$$y' =$$

$$y' = 0 \Rightarrow$$

جدول ۳-۸

x	$-\infty$	$+\infty$
$y'$		
y	$-\infty$	$+\infty$

۲- ریشه‌های معادله‌ی  $y' = 0$  را به دست آورید.

۳- جدول تغییرات (جدول ۳-۸)، تابع را کامل کنید.

۴- آیا در نقطه‌ای که  $y'$  صفر می‌شود،  $y'$  تغییر علامت

می‌دهد؟

۵- نمودار تابع را رسم کنید.

۶- علت این که تابع ماکسیمم یا مینیمم نسبی ندارد

چیست؟

## کار در کلاس ۳-۸

تابع  $y = \frac{2x-1}{x+2}$  داده شده است.

۱-  $y'$  را حساب کنید.

۲-  $y'$  را تعیین علامت کنید.

۳- آیا این تابع نقطه‌ی اکسترمم دارد؟ چرا؟

جدول ۳-۹

x	
$y'$	
y	

حل ۱: اولاً مختصات نقطه‌ی اکسترمم  $(2, -1)$  باید در

ضابطه‌ی تابع صدق کند. پس:

$$-1 = 4a + 2b + 3 \Rightarrow 2a + b = -2 \quad (1)$$

ثانیاً، باید  $y'(2) = 0$ . بنابراین،

$$y' = 2ax + b \Rightarrow 4a + b = 0 \quad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \begin{cases} 2a + b = -2 \\ 4a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = 1}, \boxed{b = -4}$$

مثال ۱: تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $y = ax^2 + bx + 3$  داده شده

است،  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که به ازای  $x = 2$  تابع دارای ماکسیمم

یا مینیمم نسبی به اندازه‌ی  $(-1)$  باشد.

حل ۲: نقطه‌ی برخورد نمودار تغییرات تابع با محور عرض‌ها نقطه‌ی (۰, ۳) و نقطه‌ی اکسترم این تابع (۱, ۴) است. بنابراین، نقطه‌ی (۰, ۳) روی نمودار تابع است:

$$(0, 3) \Rightarrow \boxed{3 = c}$$

نقطه‌ی (۱, ۴) روی نمودار تابع است:

$$(1, 4) \Rightarrow 4 = a + b + c \Rightarrow a + b = 1 \quad (3)$$

باید  $y'(1) = 0$ :

$$y' = 2ax + b \Rightarrow 2a + b = 0 \quad (4)$$

$$(3) \text{ و } (4) \Rightarrow \boxed{a = -1}, \boxed{b = 2}$$

مثال ۲: در تابع  $y = ax^2 + bx + c$  ضرایب‌های  $a$ ,  $b$  و  $c$  را چنان بیابید که نمودار تغییرات تابع محور عرض‌ها را در نقطه‌ای به عرض ۳ قطع کند و به ازای  $x = 1$  تابع دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی به اندازه‌ی ۴ باشد.

### تمرین ۳-۷

۱- نقاط اکسترم تابع‌های زیر را در بازه‌هایی که مشخص شده تعیین کنید.

الف)  $y = \sin x, \quad x \in [0, \pi]$

ب)  $y = \cos x, \quad x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

پ)  $y = x - 2x^2, \quad x \in \mathbb{R}$

۲- تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = ax^3 + (a-1)x^2 + 4x$  داده شده است. مقدار  $a$  را چنان بیابید که در  $x = -2$  تابع ماکسیمم یا مینیمم نسبی داشته باشد.

۳- اگر  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  ضرایب‌های  $a$ ,  $b$ ,  $c$  و  $d$  را چنان تعیین کنید که برای  $x = -1$  تابع دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی به اندازه‌ی ۸ باشد و نمودار تابع محور  $x$ ها را در نقطه‌ی (۱, ۰) و محور  $y$ ها را در نقطه‌ی (۰, ۵) قطع کند.

## آزمون پایانی (۲)

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی

۱- معادله‌ی خط مماس و خط قائم بر نمودار تابع

$$y = x^2 + 2x + 3 \text{ را در } x = 1 \text{ بنویسید.}$$

۲- معادله‌ی خط قائم بر نمودار تابع  $y = \cos^2 x + 2$  را

$$\text{در } x = \frac{\pi}{4} \text{ بنویسید.}$$

۳- صعودی یا نزولی بودن تابع‌های زیر را به کمک تعیین

علامت مشتق تابع مشخص کنید.

الف)  $y = 2 - x^3, \quad x \in \mathbb{R}$

ب)  $y = x^2 - 1, \quad x \in [0, +\infty)$

۴- تغییرات تابع زیر را معین کنید. سپس نمودار آن را

رسم نمایید.

$$y = x^3 - 3x^2 + 2$$

۵- نقاط اکسترمم تابع زیر را تعیین کنید.

$$y = x^3 + x^2 - x - 1$$

۶- تابع  $f$  با ضابطه‌ی  $f(x) = ax^3 + 2ax^2 + 2x$  داده

شده است. مقدار  $a$  را چنان تعیین کنید که تابع در  $x = -1$

دارای ماکسیمم یا مینیمم نسبی باشد.

## منابع

- 1- Joshi, N. A. , Diwan, M. J. , Joshi, Vigay V. , Vaida, A. S. & Krishnann, S. (2000) Differential Equations and Calculus. Sheth Publishers PVT. LTD.
- 2- Barnett, Raymond A. (1979) College Algebra, Second Edition. McGraw - Hill Book Company.
- 3- Bradley Gerald L. and Smith Karl J. (1995) Single Variable Calculus. Prentice Hall, Inc.
- 4- Marsden Jerrold and Weinstein Alan (1980) Calculus 1, Springer- Verlag.
- ۵- روبرت الیس، دنی گولیک، (۱۳۷۳) حساب دیفرانسیل و انتگرال با هندسه‌ی تحلیلی. ترجمه‌ی دکتر علی اکبر عالم‌زاده، انتشارات پژوهش ۱۳۷۳
- ۶- بابلیان، اسماعیل و همکاران (۱۳۸۰)، ریاضیات ۱ و ریاضیات ۲: نظری (رشته‌های علوم تجربی - ریاضی و فیزیک - فنی و حرفه‌ای). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش
- ۷- رستمی، محمد هاشم و همکاران (۱۳۸۱)، ریاضیات ۳: نظری (رشته‌ی علوم تجربی). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش
- ۸- گویا، زهرا و گویا، مریم (۱۳۸۰)، ریاضی: نظری (رشته‌های ادبیات و علوم انسانی - علوم و معارف اسلامی). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش
- ۹- پاریاب، خلیل و همکاران (۱۳۸۰)، ریاضی ۵: فنی و حرفه‌ای (کلیه‌ی رشته‌های زمینه صنعت و رشته‌های کامپیوتر و ماشین‌های کشاورزی). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، وزارت آموزش و پرورش
- ۱۰- بابلیان، اسماعیل (۱۳۷۷)، ویژگی‌ها و تولید فرکتال‌ها. بیست و نهمین کنفرانس ریاضی کشور، دانشگاه صنعتی امیرکبیر
- ۱۱- بابلیان، اسماعیل (۱۳۷۹)، استفاده از کامپیوتر در اثبات احکام ریاضی. مجله‌ی رشد آموزش ریاضی، شماره‌های ۵۹ و ۶۰
- ۱۲- رستمی، محمد هاشم (۱۳۷۷)، جبر پایه، انتشارات مدرسه

