بخش اول

فصل پنجم

عملیات روی تابع‌ها

هدف کلی

تعیین ضابطه‌ی $f \pm g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g و کاربرد آن‌ها

هدف‌های رفتاری: انتظار می‌رود فراگیر پس از پایان این فصل بتواند :

۱ــ چهار عمل اصلی روی دو تابع را تعریف کند.

۲ــ با داشتن ضابطه‌ی تابع‌های f و g ، ضابطه‌ی تابع‌های $f \pm g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را بنویسد.

۳ــ دامنه‌ی تابع‌های $f \pm g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را تعیین کند.

۴ــ از اعمال بر تابع‌ها در موارد کاربردی استفاده کند.

پیش‌آزمون (۵)

محل پاسخ به سؤالات پیش‌آزمون

۱ــ اگر $f(x)=۲x$ و دامنه‌ی f مجموعه $\{۲,۳,۴,۵,۶\}$ باشد، حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید :

الف) $f(۲)\times f(۳)$

ب) $f(۲)+f(۳)$

پ) آیا تساوی $f(۲)\times f(۳)=f(۶)$ درست است؟

۲ــ اگر $f(x)=x^۲+x-۲$ و $g(x)=۲-۲x$ ، حاصل عبارت‌های زیر را حساب کنید :

الف) $f(۲)+g(۲)$

ب) $f(۲)-g(۲)$

پ) $f(۲)\times g(۲)$

ت) $\frac{f(۲)}{g(۲)}$

۳ــ دو تابع f و g با ضابطه‌های $f(x)=۵-۳x$ و $g(x)=۲x+۶$ داده شده‌اند. مطلوب است محاسبه عبارت‌های زیر :

الف) $f(۴)+g(۴)$

ب) $f(x)+g(x)$

پ) $f(۲)-g(۲)$

ت) $f(x)-g(x)$

ث) $f(\frac{۱}{۲})\times g(\frac{۱}{۲})$

ج) $f(x)\times g(x)$

چ) $\frac{f(۳)}{g(۳)}$

۴ــ اگر $f(x)=۲x^۲-x+۳$ و $g(x)=x^۲+x-۱$ ضابطه و دامنه‌ی تابع‌های زیر را تعیین کنید.

الف) $f+g$

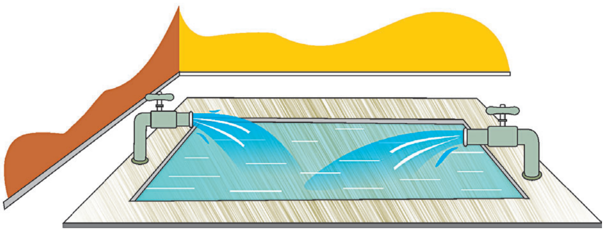
ب) $f-g$

پ) $f\times g$

ت) $\frac{f}{g}$

۵ـ۱ـ عملیات روی تابع‌ها

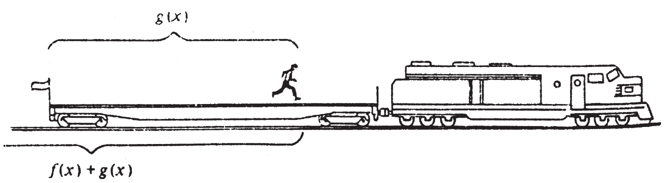
اگر f و g دو تابع حقیقی باشند به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک آنها $f(x)$ و $g(x)$ دو عدد حقیقی هستند. بنابراین، می‌توان روی آنها چهار عمل اصلی را انجام داد.



شکل ۸۷ــ۱

۱) یک استخر دارای دو شیر آب است (شکل۸۷ــ۱). شیر اول در هر ثانیه ۲ لیتر و شیر دوم در هر ثانیه ۳ لیتر آب وارد استخر می‌کند. اگر این دو شیر با هم آب وارد استخر کنند در هر ثانیه چند لیتر آب وارد استخر می‌شود؟

اگر $f(t)$ مقدار آب وارد شده در t ثانیه، از شیر اول (برحسب لیتر) و $g(t)$ مقدار آب وارد شده در t ثانیه، از شیر دوم باشد، پس از t ثانیه $f(t)+g(t)$ لیتر آب وارد استخر می‌شود. بنابر آنچه گفته شد : لیتر $f(t)=۲t$ ، لیتر $g(t)=۳t$ پس، توسط دو شیر، در t ثانیه، لیتر $f(t)+g(t)=۲t+۳t=۵t$ آب وارد استخر می‌شود.



شکل ۸۸ــ۱

۲) شخصی، مطابق شکل ۸۸ ــ۱، روی واگن کفی یک قطار می‌دود و در هر ثانیه به‌طور متوسط ۵/۵ متر طی می‌کند. اگر قطار در هر ساعت به‌طور متوسط ۹۰ کیلومتر (در هر ثانیه ۲۵ متر) طی کند، این شخص در هر ثانیه چند متر از مبدأ حرکت قطار دور می‌شود؟

مطابق شکل۸۸ــ۱، واضح است که $g(x)=۵/۵x$ و $f(x)=۲۵x$. بنابراین، این شخص در هر ثانیه به اندازه‌ی ۳۰/۵ متر از مبدأ حرکت قطار دور می‌شود $(f(۱)+g(۱)=۲۵+۵/۵=۳۰/۵)$.

اگر $h(x)$ فاصله‌ی این شخص تا مبدأ پس از x ثانیه باشد، داریم :

$$h(x)=f(x)+g(x)=۲۵x+۵/۵x=۳۰/۵x$$

تابع h را مجموع دو تابع f و g می‌گویند و می‌نویسند :

$$h=f+g$$

زیرا، برای هر x، $h(x)=f(x)+g(x)$.

تابع $f+g$ به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g، یعنی $D_f \cap D_g$ ، با ضابطه‌ی $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$ تعریف می‌شود.

مثال‌های حل شده در مورد مجموع، تفاضل و ضرب دو تابع.

اگـــر $f(x)=x^2-2x$ و $g(x)=2x+1$

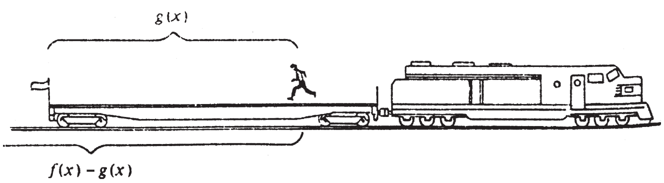
آنگاه، اگر $h=f+g$ داریم :

$$h(x)=f(x)+g(x)=(x^2-2x)+(2x+1)$$
$$=x^2+1$$

اگر این شخص خلاف جهت حرکت قطار بدود، در هر ثانیه چقدر از مبدأ دور می‌شود؟ (شکل ۸۹ــ۱)

$f(1)-g(1)=25-5/5=19/5$ متر

اگر d(x) فاصله این شخص تا مبدأ پس از x ثانیه باشد داریم :



شکل ۸۹ــ۱

$$d(x)=f(x)-g(x)$$

تابع d را با $f-g$ نشان می‌دهند.

تابع $f-g$ به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g، یعنی $D_f \cap D_g$ ، با ضابطه‌ی $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$ تعریف می‌شود.

اگر $f(x)=2x^2+5x-3$ و $g(x)=2x^2-x+2$ ضابطه‌ی تابع $h=f-g$ را بنویسید.

حل: با توجه به تعریف داریم :

$$h(x)=f(x)-g(x)$$
$$=(2x^2+5x-3)-(2x^2-x+2)=6x-5$$

به همین ترتیب می‌توان حاصل‌ضرب دو تابع f و g را نیز تعریف کرد.

تابع $f\times g$ به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g، یعنی $D_f \cap D_g$ ، با ضابطه‌ی $(f\times g)(x)=f(x)\times g(x)$ تعریف می‌شود.

فرض کنید $f(x)=x+1$ اندازه‌ی عرض یک مستطیل و $g(x)=2x+3$ اندازه‌ی طول این مستطیل باشد. اگر مساحت این مستطیل را با s(x) نمایش دهیم، ضابطه‌ی s(x) را بنویسید.

حل: واضح است که

$$s(x)=f(x)\times g(x)=(x+1)(2x+3)$$

بنابراین،

$$s(x)=2x^2+5x+3$$

در حقیقت، $s=f\times g$.

تابع $\frac{f}{g}$ را نیز، برای تمام xهایی که $g(x) \neq ۰$، می‌توان تعریف کرد.

در حقیقت،

$$D_{\frac{f}{g}} = \left(D_f \cap D_g\right) - \{x : g(x) = ۰\}$$

تابع $\frac{f}{g}$ به‌ازای هر x از دامنه‌ی مشترک f و g که $g(x) \neq ۰$، با ضابطه‌ی $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ تعریف می‌شود.

به مثال روبه‌رو توجه کنید.

مثال:

اگر $f(x) = x^۲ + ۱$ و $g(x) = ۳x - ۲$، ضابطه‌ی تابع $\frac{f}{g}$ را بنویسید و $(\frac{f}{g})(\frac{۵}{۳})$ را تعیین کنید.

حل: با توجه به تعریف $\frac{f}{g}$ داریم:

$$(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^۲ + ۱}{۳x - ۲} \quad (x \neq \frac{۲}{۳})$$

$$\frac{f}{g}(\frac{۵}{۳}) = \frac{(\frac{۵}{۳})^۲ + ۱}{۳(\frac{۵}{۳}) - ۲} = \frac{\frac{۲۵}{۹} + ۱}{۵ - ۲} = \frac{۳۴}{۲۷}$$

تمرین ۹ــ۱

۱ــ فرض کنید $f(x) = x^۲ - ۱$ و $g(x) = x + ۱$.

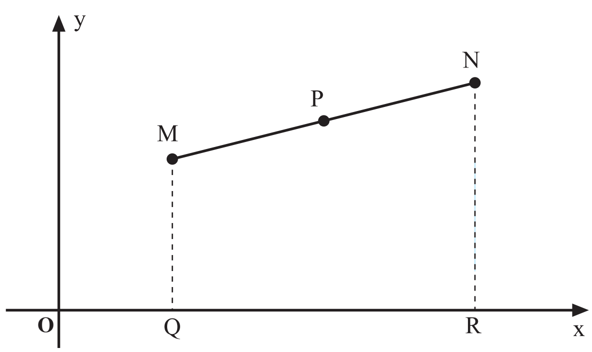
الف) ضابطه و دامنه‌ی تابع‌های $f + g$، $f - g$ و $f \times g$ را بنویسید.

ب) مقدارهای $(f + g)(۰)$، $(f - g)(۱)$، $(f \times g)(۲)$ و $(\frac{f}{g})(۴)$ را حساب کنید.

۲ــ فرض کنید $M\begin{vmatrix} t-۱ \\ t+۱ \end{vmatrix}$ و $N\begin{vmatrix} t+۱ \\ t+۳ \end{vmatrix}$ و نقطه‌ی P وسط پاره‌خط MN باشد.

الف) مطابق شکل ۹۰ــ۱، مختصات نقاط R و Q را بنویسید.

ب) اگر مساحت ذوزنقه MQRN را با s(t) نشان دهیم، ضابطه‌ی تابع s را بنویسید.



شکل ۹۰ــ۱

آزمون پایانی (۵)

۱ــ مقدار آبی که در هر ثانیه، برحسب لیتر، از فواره‌ی A وارد یک استخر می‌شود از دستور $f(t)=۲t$ و مقدار آبی که در هر ثانیه از فواره‌ی B وارد این استخر می‌شود از دستور $g(t)=۵t$ محاسبه می‌شود.

الف) مقدار آبی که در هر ثانیه از هر دو فواره‌ی A و B وارد استخر می‌شود از کدام دستور می‌توان محاسبه کرد؟

ب) در ۵ ثانیه چقدر آب وارد استخر می‌شود؟

پ) اگر حجم استخر ۳۵۰۰۰ لیتر باشد دو فواره‌ی A و B در چه مدت این استخر را پر می‌کنند؟

۲ــ مختصات نقطه‌های متغیر M و N چنین است :

$$M\begin{vmatrix} t-۱ \\ t^{۲}+۱ \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad N\begin{vmatrix} t^{۲}-۱ \\ t+۱ \end{vmatrix}$$

طول پاره‌خط MN را برحسب t به‌دست آورید.

محل پاسخ به سؤالات آزمون پایانی