

تمرین

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید :

$$۱) f(x) = \sqrt{x}$$

$$۲) f(x) = \sqrt{x} + 3$$

$$۳) f(x) = x^3 + 3x^2 + 7x + 3$$

$$۴) f(x) = 2 - 5x + 4x^2$$

$$۵) f(x) = 3x - 4x^3$$

$$۶) f(x) = \frac{4-5x}{3} + x^2$$

$$۷) f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4} + x + 1$$

$$۸) f(x) = (1 + 3x)^2$$

$$۹) f(x) = a_0 + a_1x$$

$$۱۰) f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$۱۱) f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$$

$$۱۲) f(x) = x + (3x + 2)^2$$

$$۱۳) f(x) = (2x + 3)(3x - 7)$$

$$۱۴) f(x) = (x^3 - x)(x - 9)$$

$$۱۵) f(x) = (x + 1)\left(\frac{x^2}{4} + x\right)$$

$$۱۶) f(x) = (5x - 4)\left(1 - \frac{x}{4}\right)$$

$$۱۷) f(x) = x^3(3x - 2)$$

$$۱۸) f(x) = 3x(x^2 + 1)(x + 2)$$

۶- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند و $g(x) \neq 0$ و $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ آن گاه داریم :

$$y' = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{[g(x)]^2}$$

یعنی : مشتق یک تابع کسری برابر است با حاصل ضرب مشتق صورت در مخرج منهای حاصل ضرب مشتق مخرج در صورت، تقسیم بر توان دوم مخرج.

مثال ۱۱: مشتق تابع $y = \frac{3x}{x-2}$ هنگامی که $x \neq 2$ باشد چنین است :

$$y' = \frac{3(x-2) - (1)3x}{(x-2)^2} = \frac{3x - 6 - 3x}{(x-2)^2} = \frac{-6}{(x-2)^2}$$

$$y' = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3}$$

و مشتق $y = \frac{1}{x^2}$ ، $x \neq 0$:

مشتق تابع مرکب

۷- اگر $y = f(u)$ و $u = g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند آن گاه y نسبت به x دارای مشتق

است. اگر مشتق y نسبت به u را با y'_u و مشتق y نسبت به x را با y'_x نشان می دهیم. داریم :

$$y'_x = y'_u \cdot u'(x) = f'(u)g'(x)$$

مثال ۱۲: اگر $y = u^2 + u$ و $u = x^2 - 1$ باشد، داریم:

$$y'_x = y'_u \cdot u'(x) = (2u+1)(2x) = [2(x^2-1)+1](2x) = 4x^3 - 2x$$

مثال ۱۳: می‌خواهیم مشتق $y = (x^4 - 3x^2 + 1)^3$ را حساب کنیم:

فرض می‌کنیم $u = x^4 - 3x^2 + 1$ پس $y = u^3$ و خواهیم داشت:

$$y'_u = 3u^2 \quad \text{و} \quad u'_x = 4x^3 - 6x$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = 3(x^4 - 3x^2 + 1)^2 (4x^3 - 6x) \quad \text{بنابراین:}$$

$$= 6x(2x^2 - 3)(x^4 - 3x^2 + 1)^2$$

نتیجه: اگر $y = u^n$ و u تابعی از x باشد، خواهیم داشت:

$$y'_x = nu' \cdot u^{n-1}$$

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad \text{و} \quad y'_u = nu^{n-1} \quad \text{زیرا داریم:}$$

که چون y'_x و u'_x همان y' و u' هستند، دستور بالا را چنین می‌نویسند:

$$y' = nu' \cdot u^{n-1} \quad \text{مثال ۱۴: اگر } y = (2x^3 + x)^5 \text{ باشد، آن‌گاه:}$$

$$y' = 5(6x^2 + 1)(2x^3 + x)^4$$

۸- اگر $f(x)$ تابعی مشتق‌پذیر و مثبت باشد و $y = \sqrt{f(x)}$ ، آن‌گاه داریم:

$$y' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \quad \text{و} \quad (f(x) > 0)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{مثال ۱۵: مشتق } y = \sqrt{x} \text{ برابر است با:}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{7x+3}} \quad \text{مشتق } y = \sqrt{7x+3} \text{ برابر است با: } (x > -\frac{3}{7})$$

$$y' = \frac{3 \times 2x(1+x^2)^2}{2\sqrt{(1+x^2)^3}} = 3x\sqrt{1+x^2} \quad \text{مشتق } y = \sqrt{(1+x^2)^3} \text{ برابر است با:}$$

$$\text{مشتق } y = \sqrt{\frac{2x+5}{3x-1}} \text{ برابر است با:}$$

$$y' = \frac{2(3x-1) - 3(2x+5)}{(3x-1)^2} = \frac{-17}{2\sqrt{(2x+5)(3x-1)^3}}$$

تمرین

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید و دامنه مشتق‌پذیری هر تابع را مشخص کنید :

$$\begin{array}{lll}
 ۱) f(x) = \frac{x-1}{x+1} & ۲) f(x) = \frac{x}{x^2+1} & ۳) f(x) = \frac{2x-3}{3x+5} \\
 ۴) f(x) = \frac{3(2x+5)^2}{x^3} & ۵) f(x) = \frac{4}{(x-1)^3} & ۶) f(x) = \frac{x+1}{x(x-1)} \\
 ۷) f(x) = \frac{x^3-1}{x^3+1} & ۸) f(x) = \frac{1}{x^2+x-2} & ۹) f(x) = \left(\frac{x-1}{3-x}\right)^2 \\
 ۱۰) f(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{x}} & ۱۱) f(x) = (2x+3)^4 & ۱۲) f(x) = (5x^2-2)^3 \\
 ۱۳) f(x) = \sqrt{3x-2} & ۱۴) f(x) = \sqrt{x^2+4} & ۱۵) f(x) = \sqrt{4-x^2} \\
 ۱۶) f(x) = \sqrt{x(x-2)} & ۱۷) f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}} & ۱۸) f(x) = (1+\sqrt{x})^3 \\
 ۱۹) f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}} & ۲۰) f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+1}} &
 \end{array}$$

مشتق تابع‌های مثلثاتی

۱- مشتق $y = \sin x$: برای به دست آوردن مشتق $\sin x$ همان روش کلی را به کار می‌بریم،

یعنی حد نسبت $\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h}$ را در $h = 0$ حساب می‌کنیم.

بنابر اتحاد مثلثاتی $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ می‌توان آن را چنین نوشت :

$$\sin(x+h) - \sin x = \sin x \cosh + \cos x \sinh - \sin x$$

پس خواهیم داشت :

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{(\cosh-1)\sin x + \cos x \sinh}{h} = \frac{\cosh-1}{h} \sin x + \frac{\sinh}{h} \cos x$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sinh}{h} = 1$$

از طرفی می‌دانیم که : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ پس

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(\cos t - 1)(\cos t + 1)}{t(\cos t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos^2 t - 1}{t(\cos t + 1)}$$

و از طرف دیگر :

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 t}{t(\cos t + 1)} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(-\frac{\sin t}{t} \times \frac{\sin t}{\cos t + 1}\right) = -1 \times \frac{0}{2} = 0$$

$$\begin{aligned}
 y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cosh-1}{h} \sin x + \frac{\sinh}{h} \cos x \right) \quad \text{بنابراین:} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cosh-1}{h} \sin x \right) + \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\sinh}{h} \cos x \right) \\
 &= 0 \times \sin x + 1 \times \cos x = \cos x
 \end{aligned}$$

در نتیجه مشتق $\sin x$ برابر است با $\cos x$ ، یا $y' = \cos x$. پس می‌توان گفت: تابع $\sin x$ برای هر مقدار x از \mathbb{R} مشتق پذیر است و مشتق آن $\cos x$ است.

۲- مشتق $y = \cos x$: مشتق کسینوس را نیز می‌توان به روش مشابه به دست آورد. اما راه ساده‌تر آن این است که آن را به سینوس که مشتق آن را می‌شناسیم تبدیل کنیم، آن‌گاه با به کار بردن قاعده مشتق تابع مرکب، مشتق آن را حساب کنیم:

$$y = \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin u, \quad u = \frac{\pi}{2} - x$$

$$y' = (\cos u)u' = (-1)\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x \quad \text{پس:}$$

بنابراین تابع $\cos x$ برای هر مقدار x مشتق پذیر است و مشتق آن $-\sin x$ است.

۳- مشتق $y = \tan x$: برای محاسبه این مشتق ابتدا می‌نویسیم: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ آن‌گاه

دستور مشتق تابع کسری را در مورد آن به کار می‌بریم، خواهیم داشت:

$$y' = \frac{\cos x \cos x - (-\sin x) \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$$

پس تابع $\tan x$ برای هر مقدار $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ مشتق پذیر است و مشتق آن

$$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \text{ است.}$$

۴- مشتق $y = \cot x$: در این جا نیز روش بالا را به کار می‌بریم:

$$y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$y' = \frac{(-\sin x) \sin x - (\cos x) \cos x}{(\sin x)^2} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{-1}{\sin^2 x} = -(1 + \cot^2 x)$$

پس تابع $\cot x$ برای هر مقدار $x = k\pi$ ، $k \in \mathbb{Z}$ مشتق پذیر است و مشتق آن

$$-(1 + \cot^2 x) = \frac{-1}{\sin^2 x} \text{ است.}$$

مثال ۱۶:

اگر: $y = 2 \sin x + 3 \cos x$ ، آن گاه $y' = 2 \cos x - 3 \sin x$

اگر: $y = \sin 5x$ ، آن گاه $y' = 5 \cos 5x$

اگر: $y = \cos \frac{x}{3}$ ، آن گاه $y' = -\frac{1}{3} \sin \frac{x}{3}$

اگر: $y = \tan(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4})$ ، آن گاه با قرار دادن $u = \frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}$ و $y = \tan u$

خواهیم داشت: $y' = u'(1 + \tan^2 u) = -\frac{1}{4} \left[1 + \tan^2(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}) \right]$

نتیجه: اگر u و v را توابعی از x بگیریم، همهٔ دستورهای محاسبهٔ مشتق را که تاکنون دیده‌ایم

می‌توان در جدولی به صورت زیر خلاصه کرد:

تابع	مشتق	مثال
$y = c$	$y' = 0$	$y = 7 \Rightarrow y' = 0$, $y = -\sqrt{3} \Rightarrow y' = 0$, $y = 1373 \Rightarrow y' = 0$
$y = ax + b$	$y' = a$	$y = 4x - 9 \Rightarrow y' = 4$, $y = -5x + 7 \Rightarrow y' = -5$
x^n	nx^{n-1}	$y = x^6 \Rightarrow y' = 6x^5$
au	au'	$y = -3x^5 \Rightarrow y' = -3(5x^4) = -15x^4$
$u + v$	$u' + v'$	$y = x^3 + 4x \Rightarrow y' = 3x^2 + 4$
$u \cdot v$	$u' \cdot v + v' \cdot u$	$y = (3x^2 - x)(2x - 3) \Rightarrow y' = (6x - 1)(2x - 3) + 2(3x^2 - x)$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$y = \frac{2x - 1}{3x^2 + 5} \Rightarrow y' = \frac{2(3x^2 + 5) - 6x(2x - 1)}{(3x^2 + 5)^2} = \frac{-6x^2 + 6x + 10}{(3x^2 + 5)^2}$
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	$y = \frac{1}{x^3} \Rightarrow y' = -\frac{3x^2}{x^6} = -\frac{3}{x^4}$
$\frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$\frac{-n}{x^{n+1}} = -nx^{-n-1}$	$y = \frac{1}{x^5} \Rightarrow y' = \frac{-5}{x^6} = -5x^{-6}$
$f(u)$	$u'f'(u)$	$y = (3x^2 + 1)^4 \Rightarrow y' = (6x) [4(3x^2 + 1)^3] = 24x(3x^2 + 1)^3$
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$y = \sqrt{x^4 + 1} \Rightarrow y' = \frac{4x^3}{2\sqrt{x^4 + 1}}$, $y = \sqrt{x} \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin u$	$u' \cos u$	$y = \sin(3x - 1)$, $y' = 3 \cos(3x - 1)$
$\cos u$	$-u' \sin u$	$y = \cos(x^2 + 1)$, $y' = -2x \sin(x^2 + 1)$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u)$	$y = \tan(1 - x^2)$, $y' = -2x [1 + \tan^2(1 - x^2)]$
$\cot u$	$-u'(1 + \cot^2 u)$	$y = \cot(-5x)$, $y' = 5 [1 + \cot^2(-5x)]$

تمرین

مشتق تابع‌های زیر را به دست آورید و در شماره‌های زوج مقدار مشتق را در نقطه داده شده حساب کنید.

$$۱) y = \sin x - \cos x \qquad ۲) y = ۳ \cos x \sin ۲x \qquad \text{و} \qquad x = \pi$$

$$۳) y = ۳ \sin^۲ x + ۲ \cos^۳ x \qquad ۴) y = (\sin x + \cos x)^۲ \qquad \text{و} \qquad x = ۳ \frac{\pi}{۴}$$

$$۵) y = \sin\left(-\frac{x}{۴} + \frac{\pi}{۳}\right) + \cos \frac{x}{۴} \qquad ۶) y = \sin x \cos ۳x \qquad \text{و} \qquad x = \frac{\pi}{۳}$$

$$۷) y = \frac{۱}{\cos x + \sin x} \qquad ۸) y = \frac{\sin^۲ x}{۱ + \cos^۲ x} \qquad \text{و} \qquad x = ۰$$

$$۹) y = ۲ \cos^۲\left(\frac{\pi}{۶} - \frac{x}{۴}\right) \qquad ۱۰) y = x + \sin \sqrt{x} \qquad \text{و} \qquad x = \pi^۲$$

$$۱۱) y = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} \qquad ۱۲) y = \sin x \tan x \qquad \text{و} \qquad x = \frac{\pi}{۴}$$

$$۱۳) y = \tan^۲ x - ۲ \cot x \qquad ۱۴) y = \frac{۱ - \tan \frac{x}{۲}}{۱ + \tan \frac{x}{۲}} \qquad \text{و} \qquad x = \frac{\pi}{۲}$$

$$۱۵) y = \sqrt{۱ + \sin x} \qquad ۱۶) y = \frac{\sin x}{۱ + x} \qquad \text{و} \qquad x = ۰$$

$$۱۷) y = \sin^۳ \sqrt{t} \qquad ۱۸) y = \sin \omega t + \cos \omega t \qquad \text{و} \qquad t = \frac{\pi}{۲\omega}$$

سرگرمی ریاضی

پدری ۴۶ ساله، یک پسر ۲۶ ساله و یک دختر دارد. اگر بعد از چند سال، سن پدر برابر با مجموع سن دو فرزندش و سه برابر سن دخترش شود، سن کنونی دختر چقدر است؟



مطمان محترم، صاحب نظران، دانش آموزان عزیز و ادیبانی آمان می‌توانند نظر اصلاحی خود را در باره مطالب

این کتاب از طریق نامه به نشانی تهران - صندوق پستی ۱۵۸۵۵/۳۶۳ - گروه دسی مربوط و یا پیام‌نگار (Email)

talif@talif.sch.ir ارسال نمایند.

دفتر نامه‌ریزی و تأیید کتاب: بی‌جی‌سی