

و برای این که تابع در $x = -1$ پیوسته باشد باید :

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = f(-1) \Rightarrow a + 2 = 3 \Rightarrow a = 1$$

با جایگذاری مقدار a در رابطه (۱) مقدار b تعیین می شود.

$$b = 0$$

تمرین

۱- پیوستگی هریک از تابع های زیر را در نقطه داده شده بررسی کنید.

الف) $f(x) = 2x^2 - 5x + 1, (x = 2)$ ب) $f(x) = \frac{2x^2 + x}{x - 2}, (x = -2)$

پ) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}, (x = -1)$ ت) $f(x) = \frac{x + 2}{2x - 3}, (x = 3)$

ث) $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - x, & x > \frac{3}{2} \\ -2x + 3, & x \leq \frac{3}{2} \end{cases}, (x = -\frac{3}{2})$

ج) $f(x) = \begin{cases} -3x + 5, & x \geq 1 \\ x^2 + 4, & x < 1 \end{cases}, (x = -1)$

چ) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1}, & x < 3 \\ 2, & x = 3 \\ 5x - 13, & x > 3 \end{cases}, (x = 3)$

ح) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{4x^2 + 1}, & x \geq 0 \\ (2x - 1)^2, & x < 0 \end{cases}, (x = 0)$

خ) $f(x) = \begin{cases} \sin 2x, & x > \frac{\pi}{4} \\ \frac{1}{2} + \cos^2 x, & x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}, (x = \frac{\pi}{4})$

د) $f(x) = \begin{cases} \sin x + \cos x, & x \geq \frac{\pi}{2} \\ 2 \sin^2 x - 1, & x < \frac{\pi}{2} \end{cases}, (x = \frac{\pi}{2})$

ر) $f(x) = \sqrt{1-x}$, $x=1$

ز) $f(x) = \sqrt{x^2-4}$, $x=-2$

۲- عددهای a و b را چنان بیابید که تابع
 در نقطه $f(x) = \begin{cases} ax+1 & , x > 2 \\ 13 & , x = -2 \\ 2ax^2 + bx - 1 & , x < 2 \end{cases}$

$x = -2$ پیوسته باشد.

۳- حدود a را طوری تعیین کنید که تابع
 در نقطه $x=1$ پیوسته $f(x) = \begin{cases} -2x+a & , x \geq 1 \\ x^2 + 3x & , x < 1 \end{cases}$

نباشد.

مشتق

بررسی چگونگی تغییرات مقادیر یک تابع، از مسائل مهم ریاضی است. مفهوم مشتق در ارتباط با چگونگی تغییرات یک تابع است. از آنجا که توابع در تمام علوم تجربی به کار گرفته می‌شوند، بررسی رفتار این توابع بسیار اساسی است و مشتق چگونگی رفتار توابع را بیان خواهد کرد.

آهنگ تغییر

بسیاری از مسائل ریاضی به بررسی تغییرات تابع نسبت به تغییرات متغیر مربوط می‌شود. مطالعه آهنگ این تغییرات است که سرانجام به تعریف مشتق می‌انجامد. می‌دانیم که از دو چیز یا دو پدیده که تغییر یکی سبب تغییر دیگری می‌شود، مانند مساحت یک دایره و شعاع آن، حجم یک گاز و دمای آن، افزایش سرمایه و بهره آن، رشد جمعیت و شمار نوزادان، قطر یک درخت و سن آن^۱... یکی را به‌عنوان متغیر (یا متغیر مستقل) و دیگری را به‌عنوان تابع (یا متغیر وابسته) انتخاب و همان‌طور که در بخش تابع دیده شد، متغیر را با x و تابع را با y مشخص می‌کنند و بستگی میان آن‌ها را با f نشان می‌دهند و می‌نویسند:

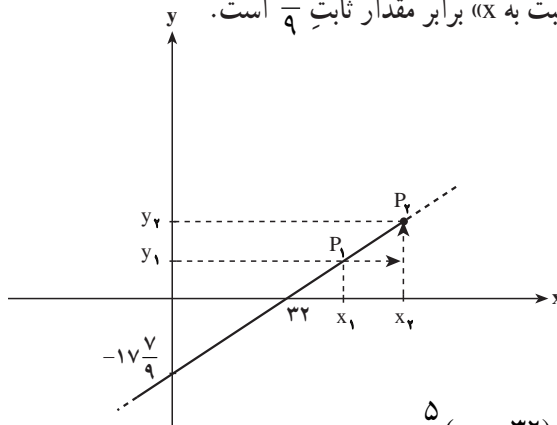
$$y = f(x)$$

عموماً با تغییر x مقدار $f(x)$ نیز تغییر خواهد کرد. ما در اینجا می‌خواهیم آهنگ نسبت این تغییرها را که دارای اهمیت ویژه‌ای است مورد بررسی قرار دهیم.

مثال ۱: تابع یا معادله $y = \frac{5}{9}(x - 32)$ را، که درجه گرما را برحسب سانتی‌گراد به صورت تابعی از درجه گرما برحسب فارنهایت مشخص می‌کند، در نظر می‌گیریم. در ریاضی ۱ خواندیم که رابطه بین x و y خطی است. در ریاضی ۲ این رابطه با عنوان تابع خطی معرفی شد. در آنجا اشاره شد که در چنین حالتی نسبت تغییرات y به تغییرات x همواره عددی ثابت است که به آن شیب خط

۱- در اغلب مثال‌های بالا متغیرهای دیگری نیز دخالت دارد که در اینجا ما آن‌ها را در نظر نگرفته‌ایم. مثلاً افزایش سرمایه به مدت، حجم گاز به فشار، رشد جمعیت به میزان مرگ و میر...

می‌گوییم. در اینجا این عدد ثابت $\frac{5}{9}$ است. به عبارت دیگر هنگامی که x به اندازه ۹ درجه فارنهایت افزایش یابد، y به اندازه ۵ درجه سانتی‌گراد افزایش می‌یابد. بیان ریاضی این مطلب آن است که «آهنگ تغییرات y نسبت به x » برابر مقدار ثابت $\frac{5}{9}$ است.

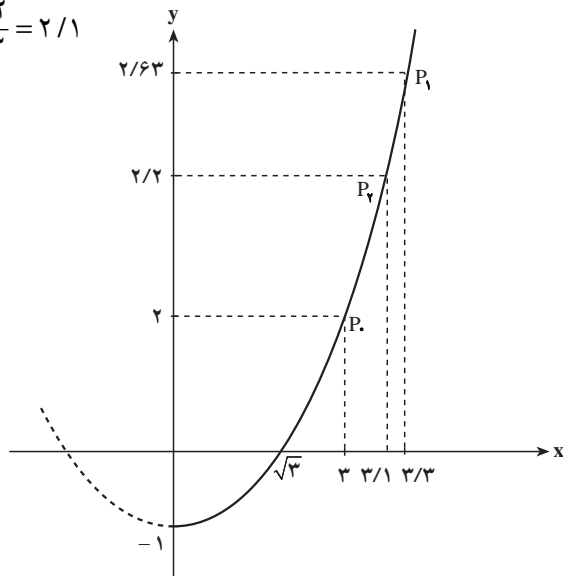


$$\text{آهنگ تغییر } y \text{ نسبت به } x \text{ (شیب خط } P_1P_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{5}{9}(x_2 - 32) - \frac{5}{9}(x_1 - 32)}{x_2 - x_1} = \frac{5}{9}$$

مثال ۲: تابع $y = f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 1$ را در نظر بگیرید. در سال‌های گذشته دیدید که نمودار

این تابع، منحنی (سهمی) و تابع غیرخطی است. در نتیجه نسبت تغییرات y به تغییرات x در فواصل مختلف ثابت نیست. مثلاً وقتی x از $x_0 = 3$ به $x_1 = 3/3$ تغییر کند، y از $f(x_0) = 2$ به $f(x_1) = 2/63$ تغییر خواهد کرد و نسبت تغییرات برابر است با:

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{2/63 - 2}{3/3 - 3} = 2/1$$



اما اگر x از $x_0 = 3$ به $x_1 = 3/1$ تغییر کند خواهیم داشت :

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{f(3/1) - f(3)}{3/1 - 3} = \frac{2/203 - 2}{0/1} = \frac{0/203}{0/1} = 2/03$$

برای این که نسبت تغییرات این تابع را در نزدیکی 3 بهتر ببینیم، جدول زیر را تشکیل می‌دهیم :

x	...	2	...	2/6	2/8	2/9	3	3/1	3/3	...	4	...
$f(x)$...	0/33	...	1/25	1/61	1/80	2	2/20	2/63	...	4/33	...
$x - 3$...	-1	...	-0/4	-0/2	-0/1	0	0/1	0/3	...	1	...
$f(x) - f(3)$...	-1/67	...	-0/75	-0/39	-0/197	0	0/2	0/63	...	2/33	...
$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$...	1/67	...	1/87	1/93	1/97	?	2/03	2/1	...	2/33	...

$$\frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = \frac{\frac{1}{3}x^2 - 1 - 2}{x - 3} = \frac{\frac{1}{3}(x^2 - 9)}{x - 3} = \frac{x + 3}{3}$$

با توجه به این که :

سطر آخر جدول را می‌توان با قرار دادن مقادیر x در عبارت $\frac{x+3}{3}$ به آسانی محاسبه کرد. در واقع اعداد سطر آخر جدول آهنگ متوسط تغییرات تابع را در نقطه $x_0 = 3$ نشان می‌دهند. به طوری که دیده می‌شود این آهنگ علاوه بر تابع f به نقطه $x_0 = 3$ و مقدار $x - x_0$ نیز بستگی دارد، و وقتی که x با مقادیر کوچک تر از 3 یا بزرگ تر از 3 به 3 نزدیک می‌شود این نسبت به 2 نزدیک می‌گردد. بنابراین حد این آهنگ تغییر در نقطه $x_0 = 3$ برابر با 2 می‌باشد یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x + 3}{3} = 2$$

اگر به جای $x_0 = 3$ مثلاً x_0 را برابر با 6 بگیریم آهنگ متوسط تغییر متفاوت خواهد بود و می‌توان دید که در این صورت نسبت مورد نظر به 4 نزدیک خواهد شد.

تمرین: جدولی مشابه جدول بالا برای همان تابع f در نقطه $x_0 = 6$ تشکیل دهید.

هنگامی که متغیر از x_0 به x تغییر می‌کند مقدار $x - x_0$ را نمو متغیر و مقدار $f(x) - f(x_0)$ را نمو تابع در x_0 می‌نامند و نسبت $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ را آهنگ متوسط تغییرات تابع در x_0 با نمو داده شده می‌نامند.

مثال 3: در تابع f با ضابطه $y = f(x) = x^2 - 5x + 6$ می‌خواهیم :

الف - آهنگ متوسط تغییر تابع را در $x_1 = 3$ با نمو ۲ تعیین کنیم.

ب - آهنگ متوسط تغییر تابع را در $x_1 = 5$ با نمو ۲ به دست آوریم.

$$x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(3) = 9 - 15 + 6 = 0 \quad (\text{الف})$$

$$x_2 = 3 + 2 = 5 \Rightarrow y_2 = f(x_2) = f(5) = 25 - 25 + 6 = 6$$

$$y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1) = 6 - 0 = 6$$

آهنگ متوسط تغییر در $x_1 = 3$ با نمو ۲ به صورت زیر تعیین می شود:

$$\frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{6}{2} = 3$$

$$x_1 = 5 \Rightarrow y_1 = f(x_1) = f(5) = 25 - 25 + 6 = 6 \quad (\text{ب})$$

$$x_2 = 5 + 2 = 7 \Rightarrow y_2 = f(x_2) = f(7) = 49 - 35 + 6 = 20$$

$$y_2 - y_1 = 20 - 6 = 14$$

آهنگ متوسط تغییر در $x_1 = 5$ با نمو ۲ به صورت زیر تعیین می شود.

$$\frac{f(7) - f(5)}{7 - 5} = \frac{14}{2} = 7$$

به طور کلی آهنگ متوسط تغییر تابع $y = f(x)$ نسبت به متغیر x ، هنگامی که متغیر روی بازه ای

از x_1 تا x_2 از دامنه تابع تغییر می کند به صورت زیر است:

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

اگر قرار دهیم $x_2 - x_1 = h$ ، داریم $x_2 = x_1 + h$ و مقدار آهنگ متوسط تغییر تابع در x_1 با نمو h

عبارت است از:

$$\frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

مثال ۴: تابع f با ضابطه $y = x^2 + 3$ داده شده است. می خواهیم آهنگ متوسط تغییر این تابع

را به ازای $x_1 = 2$ و $h = 0/3$ به دست آوریم.

$$x_1 = 2, \quad x_1 + h = 2 + 0/3 = 2/3 \quad \text{داریم:}$$

$$f(x_1) = f(2) = 4 + 3 = 7$$

$$f(x_1 + h) = f(2/3) = 5/29 + 3 = 8/29$$

در نتیجه

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} = \frac{8/29-7}{0/3} = \frac{1/29}{3} = 4/3$$

مثال ۵: می‌خواهیم دستور کلی محاسبه آهنگ متوسط تغییر تابع f با ضابطه

$$f(x) = x^2 + 3x + 3$$

را وقتی متغیر از x_1 به اندازه h تغییر کند به دست آوریم.
داریم:

$$\frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}$$

$$f(x_1) = x_1^2 + 3x_1 + 3$$

$$f(x_1+h) = (x_1+h)^2 + 3(x_1+h) + 3$$

$$\begin{aligned} f(x_1+h)-f(x_1) &= (x_1+h)^2 + 3(x_1+h) + 3 - (x_1^2 + 3x_1 + 3) \\ &= 2x_1h + 3h + h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h} &= \frac{2x_1h + 3h + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2x_1 + 3 + h)}{h} = 2x_1 + 3 + h \end{aligned}$$

به عنوان نمونه، آهنگ متوسط تغییر تابع بالا نسبت به متغیر x به ازای $x_1 = 4$ و $h = 0/05$

برابر است با:

$$\frac{f(4+0/05)-f(4)}{0/05} = 2(4) + 3 + 0/05 = 11/05$$

نکته: در دستور بالا می‌توان به جای x_1 ، مقدار x را قرار داد در این صورت خواهیم داشت:

$$\text{آهنگ متوسط تغییر تابع} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

مثال ۶: تابع f با ضابطه $y = f(x) = x^2 + 5x + 4$ داده شده است.

الف - دستور کلی آهنگ متوسط تغییر این تابع را نسبت به متغیر x تعیین کنید.

ب - حد آهنگ متوسط تغییر این تابع را در $h = 0$ ، تعیین کنید.

پ - آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی $x = 3$ و $h = 0/4$ به دست آورید.

ت - حد آهنگ متوسط تغییر این تابع در قسمت پ را در $h = 0$ تعیین کنید.

حل:

(الف)

$$f(x) = x^2 + 5x + 4$$

$$f(x+h) = (x+h)^2 + 5(x+h) + 4$$

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 + 5(x+h) + 4 - (x^2 + 5x + 4)$$

در نتیجه

$$f(x+h) - f(x) = 2xh + 5h + h^2$$

پس

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{2xh + 5h + h^2}{h} = \frac{h(2x + 5 + h)}{h} = 2x + 5 + h$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + 5 + h) = 2x + 5 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2x + 5 + h = 2(3) + 5 + 0 = 11 \quad (\text{پ})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = 2(3) + 5 = 11 \quad (\text{ت})$$

حد به دست آمده در قسمت (ت) مثال بالا را آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه $x = 3$ می‌نامند. به طور کلی تعریف زیر را داریم:

آهنگ لحظه‌ای تغییر یک تابع: در تابع f مقدار $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1+h) - f(x_1)}{h}$ را آهنگ لحظه‌ای

تغییر تابع در نقطه x_1 می‌نامند.

به عنوان مثال آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع $f(x) = x^3 + 2x + 1$ در نقطه $x_1 = -2$ برابر است

با:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-2+h)^3 + 2(-2+h) + 1 - (-8 - 4 + 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{14h - 6h^2 + h^3}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (14 - 6h + h^2) = 14$$

نکته: اگر ضابطه تابع به صورت $x = f(t)$ باشد، دستور بالا به صورت زیر درمی‌آید:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$$

مثال ۱: اندازهٔ مساحت مربعی را که طول ضلع آن x است برابر با y می‌گیریم. بنابراین $y = f(x) = x^2$. آهنگ تغییر y نسبت به x در $x_0 = 5$ برای نمونه‌های $h = 0/1, 0/2, 0/3, 0/4$ در جدول زیر آمده است:

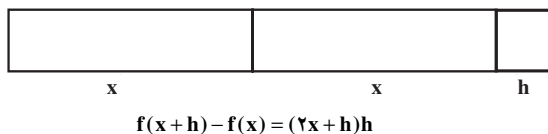
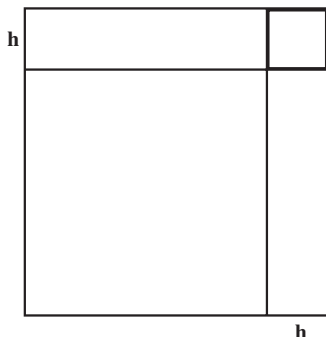
x	۵	۵/۱	۵/۲	۵/۳	۵/۴
$y = x^2$	۲۵	۲۶/۰۱	۲۷/۰۴	۲۸/۰۹	۲۹/۱۶
h	۰	۰/۱	۰/۲	۰/۳	۰/۴
$f(5+h) - f(5)$	۰	۱/۰۱	۲/۰۴	۳/۰۹	۴/۱۶
$\frac{f(5+h) - f(5)}{h}$?	۱۰/۱	۱۰/۲	۱۰/۳	۱۰/۴

به طوری که دیده می‌شود وقتی x به ۵ نزدیک می‌گردد یعنی h کوچک می‌شود،

به $\frac{f(5+h) - f(5)}{h}$ نزدیک می‌شود. در واقع داریم:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 25}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} (x + 5) = 10$$

شکل زیر تعبیر هندسی این مطلب است.



$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(2x+h)h}{h} = 2x+h \quad \text{پس:}$$

یعنی اگر h به اندازه کافی کوچک باشد $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ تقریباً با $2x$ برابر می‌شود، پس:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x+h) = 2x$$

مثال ۲: معادله حرکت یک متحرک روی یک خط مستقیم به صورت $x = f(t) = 2t^2 - 5t + 1$ است.

الف - آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان این متحرک را در نقطه $t_1 = -1$ به دست آورید.

ب - آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع را در نقطه $t_1 = 3$ به دست آورید.

پ - دستور کلی آهنگ لحظه‌ای تغییر مکان این متحرک را تعیین کنید.

حل:

الف) در نقطه $t_1 = -1$ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(-1+h)^2 - 5(-1+h) + 1 - (2+5+1)}{h} \end{aligned}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-9h + 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (-9 + 2h) = -9$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h)-f(3)}{h}$$

ب) در نقطه $t_1 = 3$ داریم:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(3+h)^2 - 5(3+h) + 1 - (18-15+1)}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{7h + 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} (7 + 2h) = 7$$

پ) برای تعیین دستور کلی آهنگ لحظه‌ای تغییر متحرک در نقطه t داریم:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2(t+h)^2 - 5(t+h) + 1 - (2t^2 - 5t + 1)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h^2 + 4th - 5h}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} (2h + 4t - 5) = 4t - 5
\end{aligned}$$

همان طور که در مثال‌های بالا دیده شد، آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع برابر حد آهنگ متوسط تغییر تابع است، وقتی نمو متغیر به صفر نزدیک می‌شود.

تمرین

۱- تابع $f(x) = x^2 + 6x - 7$ داده شده است.

الف- آهنگ متوسط تغییر این تابع را وقتی متغیر از $x_1 = 2$ به $x_2 = 6$ تغییر کند، تعیین کنید.

ب- آهنگ لحظه‌ای تغییر این تابع را در نقطه $x_0 = 4$ به دست آورید.

۲- نقطه $M(x, y)$ را بر نمودار تابع $y = x^2$ انتخاب می‌کنیم و تصاویر M را بر ox و oy به ترتیب A و B می‌نامیم (x_0). اگر S اندازه مساحت مستطیل $OAMB$ باشد S را به صورت تابعی از x مشخص کنید. آهنگ تغییر S نسبت به x و آهنگ لحظه‌ای تغییر را در $x_0 = 4$ به دست آورید.

۳- یک بادکنک کره‌ای شکل را باد کرده‌ایم تا به شکل کره‌ای به شعاع 10 سانتی‌متر درآمده است. اگر به بادکردن آن ادامه دهیم به طوری که در هر ثانیه یک میلی‌متر به شعاع آن افزوده شود، آهنگ متوسط تغییر مساحت این بادکنک را در 20 ثانیه اول به دست آورید. آهنگ لحظه‌ای افزایش مساحت سطح کره را در ثانیه 10 حساب کنید.

۴- اگر $p(t) = 3000 + 100t^2$ نمایش جمعیت یک نوع باکتری در زمان t باشد t بر حسب ساعت، آهنگ متوسط افزایش جمعیت را در 5 ساعت اول پس از زمان $t_0 = 2$ به دست آورید. آهنگ لحظه‌ای افزایش جمعیت را در $t = 3$ حساب کنید.

۵- حجم آب یک استخر در حال تخلیه برحسب لیتر به وسیله برابری $V = 120(2500 - 50t + t^2)$ به زمان t برحسب دقیقه بستگی دارد. آهنگ متوسط تخلیه در 8 دقیقه اول را پیدا کنید. آهنگ لحظه‌ای خالی شدن را در دقیقه دهم از آغاز تخلیه به دست آورید.

تعریف مشتق

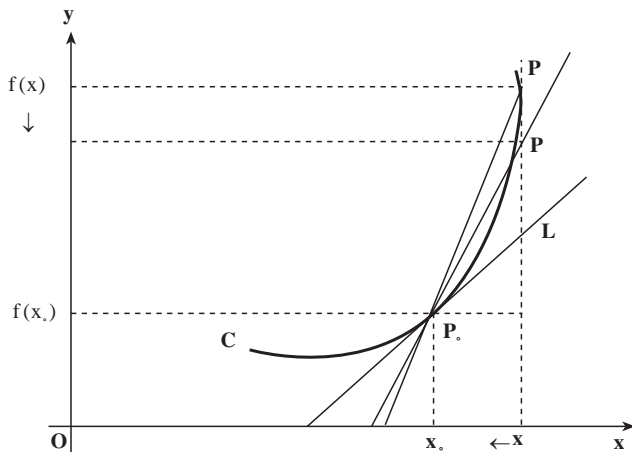
اگر به نمودار تابع خطی ذکر شده در مثال ۱ از بخش قبل توجه کنید، آهنگ متوسط تغییر تابع

در هر بازه‌ای ثابت است. به عبارت دیگر نقطه P_1 و P_2 هر چه که باشند این نسبت تغییر نمی‌کند. بنابراین آهنگ لحظه‌ای تغییر با آهنگ متوسط تغییر همواره مساوی و برابر با شیب خط P_1P_2 می‌باشد. ولی در مثال ۲ نسبت تغییرات y به تغییرات x ثابت نیست. اولین نسبت محاسبه شده (قبل از جدول) شیب خط P_1P_2 و در ادامه شیب خط P_1P_3 می‌باشد. هر یک از نسبت‌های محاسبه شده در جدول نیز شیب خط گذرنده از دو نقطه نمودار تابع مانند دو خط یاد شده می‌باشد.

در آن مثال این سؤال می‌تواند مطرح شود که وقتی نقطه $P(x, f(x))$ بر روی نمودار تابع به نقطه $P_0(3, f(3))$ نزدیک و نزدیک‌تر شود، خط گذرا از دو نقطه P_0 و P_0 به چه خطی نزدیک می‌شود، یعنی $\frac{f(x) - f(3)}{x - 3}$ به شیب چه خطی نزدیک می‌شود.

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

به نمودار زیر توجه کنید. شیب خط P_0P برابر است با:



اما وقتی نقطه P بر روی نمودار تابع به نقطه ثابت P_0 نزدیک شود آنگاه x به x_0 نزدیک می‌شود. از طرفی خط قاطع P_0P به خط مماس بر منحنی (L) نزدیک خواهد شد پس:

حد شیب خط قاطع P_0P = شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه P_0

$$P \rightarrow P_0$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

این همان آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه به طول x_0 می‌باشد.

مثال ۱: می‌خواهیم شیب خط مماس بر نمودار تابعی به معادله $y = x^2 - x$ را در نقطه $P_0(2, 2)$

به دست آوریم.

$$x = 2 = \text{شیب خط مماس در نقطه } x = 2 = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 1)}{x - 2} = 3$$

مثال ۲: تابع $y = \frac{x}{x-1}$ و نقطه P_0 به طول صفر را روی نمودار آن در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم

شیب خط مماس بر نمودار تابع را در P_0 به دست آوریم.

$$x = 0 = \text{شیب خط مماس در نقطه } x = 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{x-1} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x-1} = -1$$

تذکره: شیب نمودار تابع در یک نقطه به معنی شیب خط مماس بر نمودار یا آهنگ لحظه‌ای

تغییر در آن نقطه (در صورت وجود) می‌باشد.

تابع $y = f(x)$ و نقطه x_0 از دامنه این تابع را در نظر می‌گیریم. اگر h نمو متغیر در نقطه x_0

باشد، برای تابع، نمو $f(x_0 + h) - f(x_0)$ را خواهیم داشت. حد نسبت نمو تابع به نمو متغیر را،

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

هنگامی که نمو متغیر به صفر نزدیک می‌شود، یعنی:

را (در صورتی که این حد وجود داشته باشد)، مشتق تابع f در نقطه x_0 می‌نامند و آن را با $f'(x_0)$ یا

$y'(x_0)$ نشان می‌دهند. یعنی:

$$y'(x_0) = f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

با قراردادن $x = x_0 + h$ ، مشتق تابع f در نقطه x_0 را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

از تعریف بالا و مطالب خوانده شده در بخش‌های قبل می‌توان نتیجه گرفت که:

الف) آهنگ لحظه‌ای تغییر تابع در نقطه x_0 برابر است با مشتق تابع در نقطه x_0 .

ب) شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه x_0 برابر است با مشتق تابع در نقطه x_0 .

بدیهی است گزاره‌های فوق وقتی اعتبار دارند که حدهای به کار رفته در تعاریف مفاهیم فوق

وجود داشته باشند.

تابع f در نقطه x_0 مشتق‌پذیر نامیده می‌شود هرگاه $f'(x_0)$ وجود داشته باشد. هم‌چنین تابع f را

در بازه (a, b) مشتق‌پذیر گویند هرگاه f در هر نقطه دلخواه x از آن بازه مشتق‌پذیر باشد. در این

صورت مشتق را با $f'(x)$ یا به طور ساده با y' نمایش می‌دهند (گاهی برای مشتق نمادهای $\frac{df}{dx}$ و $\frac{dy}{dx}$

نیز به کار برده می‌شود).

مثال ۱: محاسبه مشتق $f(x) = 3x^2 - 4x$ در نقطه $x = -1$:

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[3(-1+h)^2 - 4(-1+h)] - [3(-1)^2 - 4(-1)]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6h + 3h^2 - 4h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-10h + 3h^2}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} (-10 + 3h) = -10 \end{aligned}$$

مثال ۲: می‌خواهیم مشتق $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ را در نقطه $x = 2$ به دست آوریم.

$$\begin{aligned} f'(2) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\frac{2x+1}{x-1} - 5}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3x+6}{x-2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-3(x-2)}{(x-1)(x-2)} = -3 \end{aligned}$$

نکته: هنگامی که بخواهیم مشتق یک تابع را در چند نقطه حساب کنیم، بهتر است نخست $f'(a)$ یعنی مشتق را در نقطه دلخواه a حساب کنیم، آن‌گاه به جای a هریک از مقادیر داده شده را بگذاریم.

مثال ۳: مشتق $f(x) = x^2 - x$ را در $x = -1$ و $x = 0$ و $x = \frac{1}{2}$ و $x = 3$ به دست آورید.

ابتدا مشتق تابع را در نقطه a محاسبه می‌کنیم:

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x^2 - x) - (a^2 - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)(x+a-1)}{x-a} = 2a - 1$$

$$f'(-1) = -2 - 1 = -3, \quad f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 = 0 \quad \text{بنابراین:}$$

$$f'(0) = -1, \quad f'(3) = 6 - 1 = 5$$

تمرین: با استفاده از تعریف مشتق، مشتق تابع‌های زیر را در نقطه داده شده به دست آورید:

$$۱) f(x) = 3x - 1, \quad x = 2 \qquad ۲) f(x) = x^3 + 3x^2 - 2, \quad x = 1$$

$$۳) f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad x = -1 \qquad ۴) f(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x = 0$$

$$۵) f(x) = 2\sqrt{1-x}, \quad x = -3 \qquad ۶) f(x) = ax^2 + bx + c, \quad x = -\frac{b}{2a}$$

سرعت یک متحرک: متحرکی روی خط D در حرکت است. با انتخاب یک نقطه O از D به عنوان مبدأ و یک بردار واحد \vec{u} روی آن، خط D را به یک محور تبدیل می‌کنیم، به طوری که در هر لحظه فاصله (جهت‌دار) متحرک از O یک عدد حقیقی می‌باشد. این فاصله را که تابعی است از زمان t با معادله $s = f(t)$ مشخص می‌کنیم. چنانچه در لحظه t_0 متحرک در نقطه M_0 و فاصله آن از $O: s_0 = f(t_0)$ ، و در لحظه t در نقطه M و فاصله آن از $O: s = f(t)$ باشد، متحرک در زمان $t - t_0$ مسافت M_0M را که برابر است با $s - s_0 = f(t) - f(t_0)$ پیموده است. بنابراین سرعت متوسط آن

$$\frac{D}{\begin{array}{c} \text{M} \quad \text{M} \\ \times \quad \times \\ f(t_0) \quad f(t) \end{array}} \quad \vec{u}$$

است. $\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$ در واقع این عبارت همان آهنگ تغییر متوسط تابع $f(t)$ نسبت به تغییر t است. هنگامی که زمان $t - t_0$ بی‌اندازه کوچک باشد، سرعت متوسط به سرعت لحظه‌ای متحرک نزدیک می‌شود. سرعت لحظه‌ای متحرک در لحظه t_0 همان حد سرعت متوسط آن در $t = t_0$ است که آن را با $v(t_0)$ نمایش می‌دهند.

بنابراین:

$$v(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$$

اما حد بالا همان مشتق تابع $f(t)$ در لحظه t_0 است. یعنی $v(t_0) = f'(t_0)$ ، به طور کلی $v(t) = f'(t)$ ، یعنی سرعت متحرک برابر است با مشتق مسافت نسبت به زمان. $f'(t)$ ممکن است منفی نیز باشد. در چنین حالتی برای محاسبه اندازه سرعت قدرمطلق $f'(t)$ را در نظر می‌گیرند. در هر حال علامت $f'(t)$ جهت حرکت متحرک را مشخص می‌کند. برابری بالا را گاهی به صورت $v(t) = \frac{ds}{dt}$ نیز می‌نویسند.

مثال ۴: اگر طول نقطه متحرک M که بر محور $x'Ox$ در حرکت است، در زمان t (ثانیه) برابر با x (سانتی‌متر) باشد به طوری که $x = t^2 - 4t + 3$ ، سرعت متحرک را در ثانیه‌های ۱ و ۳ و ۵ به دست آورید.

حل: برای یافتن سرعت (لحظه‌ای) به محاسبه مشتق می‌پردازیم:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(t+h)^2 - 4(t+h) + 3] - [t^2 - 4t + 3]}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2th - 4h + (h)^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2t - 4 + h) = 2t - 4 \end{aligned}$$

پس $v(t) = f'(t) = 2t - 4$ بنابراین در ثانیه‌های ۱، ۳ و ۵ سرعت به ترتیب برابر است با:

$$v(1) = 2 - 4 = -2 \quad v(3) = 6 - 4 = 2 \quad v(5) = 10 - 4 = 6$$

یعنی در ثانیه‌های ۱ و ۳ مقدار سرعت ۲ سانتی‌متر در ثانیه و در ثانیه ۵، ۶ سانتی‌متر در ثانیه است. به علاوه در $v(1) = -2$ علامت منفی بیانگر این است که متحرک با سرعت ۲ سانتی‌متر در ثانیه از راست به چپ در حرکت است. در لحظه‌ای که جهت حرکت تغییر می‌کند سرعت صفر می‌شود. اما داریم $v(t) = 2t - 4$. پس $v(t)$ در لحظه $t = 2$ صفر می‌شود و در این لحظه $x = -1$. بنابراین هنگامی که متحرک در حرکت خود از راست به چپ به ۱- می‌رسد سرعتش صفر شده و جهت حرکتش تغییر می‌کند و از چپ به راست می‌شود.

مشتق دوم: مشتق $y = f(x)$ یعنی $y' = f'(x)$ را (در صورتی که وجود داشته باشد) مشتق

اول، و مشتق $y' = f'(x)$ را (در صورت وجود) مشتق دوم تابع $y = f(x)$ می‌نامند و با $y'' = f''(x)$ نشان می‌دهند.

مثال ۵: به طوری که در مثال ۴ دیده شد مشتق اول $y = x^2 - x$ عبارت است از $y' = 2x - 1$

و مشتق دوم آن:

$$y'' = 2$$

نکته: گفتیم که اگر معادله حرکت یک متحرک $s = f(t)$ باشد مشتق اول آن یعنی $s' = f'(t)$

را سرعت می‌نامند و با $v(t)$ نمایش می‌دهند. مشتق دوم $f(t)$ ، یا مشتق $v(t)$ را شتاب متحرک می‌گویند

و با $a(t)$ نشان می‌دهند، یعنی $v(t) = f'(t)$ و $a(t) = v'(t) = f''(t)$.

در مثال ۴ دیدیم که اگر $f(t) = t^2 - 4t + 3$ باشد داریم: $v(t) = f'(t) = 2t - 4$

پس: $a(t) = f''(t) = 2$.

تمرین

۱- شیب خط مماس بر نمودار تابع‌های زیر را در نقطه داده شده به دست آورید. (از مشتق این

توابع که در صفحه‌های پیش محاسبه شده است استفاده کنید):

$$1) \quad y = \frac{1}{3}x^2 - 1, \quad x = 3 \qquad 2) \quad y = x^2, \quad x = -1$$

$$3) \quad y = 3x^2 - 4x, \quad x = -1 \qquad 4) \quad y = x^2 - x, \quad x = \frac{1}{2}$$

۲- متحرکی که بر محور x ها در حرکت است دارای معادله $x = t^2 - 2t - 1$ است (t را بر حسب ثانیه و x را سانتی متر بگیرد). سرعت متوسط این متحرک را در فاصله زمانی $t = 1$ و $t = 4$ و سرعت لحظه‌ای آن را در زمان‌های $t = 0$ و $t = 1$ و $t = 3$ به دست آورید.

۳- تویی را با سرعت اولیه 30 متر در ثانیه به طور قائم از زمین به بالا پرتاب می‌کنیم. اگر جهت مثبت فاصله از نقطه پرتاب به طرف بالا باشد، معادله حرکت به شکل $S = -\frac{1}{2}gt^2 + 30t$ است که در آن $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ شتاب گرانش زمین است. بنابراین، $x = f(t) = -4.9t^2 + 30t$. مطلوب است محاسبه:

الف - سرعت لحظه‌ای توپ در پایان یک ثانیه پس از پرتاب.

ب - سرعت لحظه‌ای توپ در پایان ۳ ثانیه پس از پرتاب.

۴- توپ تئوسی را به هوا پرتاب کرده‌ایم. اگر مسافت پیموده شده به وسیله توپ، بر حسب متر، تابعی از زمان t بر حسب ثانیه به صورت $s = 12t - 3t^2$ باشد، سرعت متوسط توپ را در ۲ ثانیه اول به دست آورید. سرعت آن را در لحظه t حساب کنید. در چه زمانی این سرعت صفر می‌شود و در چه ارتفاعی؟ در لحظه $t = 4$ ثانیه پس از پرتاب، وضعیت توپ چگونه است و سرعت آن چقدر است؟

دستورها و قضیه‌های مشتق‌گیری

به طوری که در مثال‌های بالا دیدید در محاسبه مشتق یک تابع، با استفاده از تعریف آن، عملیات نسبتاً زیادی را باید انجام داد. به‌ویژه هرگاه تابع $f(x)$ دارای عبارتی پیچیده باشد این کار بسیار مشکل و خسته‌کننده است. اما خوشبختانه روش دیگری وجود دارد که مبتنی بر چند دستور و قضیه ساده است و محاسبه مشتق را بسیار آسان می‌کند.

به طوری که گفته شد دستورها و قضیه‌هایی وجود دارند که محاسبه مشتق توابع را آسان می‌سازند.

اینک به بیان آن‌ها می‌پردازیم. برخی را اثبات می‌کنیم و برخی دیگر را بدون اثبات می‌پذیریم.

۱- اگر c یک عدد ثابت و $f(x) = c$ ، آنگاه داریم $f'(x) = 0$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0 \quad \text{زیرا:}$$

پس می‌توان گفت: مشتق توابع ثابت برابر با صفر است.

مثال ۶: اگر $y = 8$ باشد، آنگاه $y' = 0$

۲- اگر $y = f(x) = x^n$ ، آنگاه $y' = f'(x) = nx^{n-1}$

مثال ۷: اگر $y = x^6$ آن گاه $y' = 6x^5$

نتیجه: اگر $y = x$ آن گاه $y' = 1$

۳- اگر $f(x)$ تابعی مشتق پذیر و a عددی ثابت و $y = af(x)$ آن گاه:

$$y' = (af(x))' = af'(x)$$

مثال ۸: اگر $y = -5x^7$ آن گاه $y' = -5(7x^6) = -35x^6$

۴- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر و $y = f(x) + g(x)$ آن گاه:

$$y' = f'(x) + g'(x)$$

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} && \text{زیرا:} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x) + g(x+h) - g(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \end{aligned}$$

بنابراین می توان گفت: مشتق مجموع دو تابع برابر است با مجموع مشتق های آن دو تابع. این

مطلب را می توان به بیش از دو تابع تعمیم داد.

نتیجه: اگر $y = ax + b$ آن گاه $y' = a$

مثال ۹: مشتق $y = 3x^5 - 5x^2$ را محاسبه کنید.

حل: اگر قرار دهیم $f(x) = 3x^5$ و $g(x) = -5x^2$ خواهیم داشت:

$$f'(x) = 15x^4 \text{ و } g'(x) = -10x$$

$$y' = f'(x) + g'(x) = 15x^4 - 10x \quad \text{پس:}$$

۵- اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع مشتق پذیر باشند و $y = f(x)g(x)$ آن گاه داریم:

$$y' = f'(x)g(x) + g'(x)f(x)$$

مثال ۱۰: مشتق $y = (3x-2)(x^2+1)$ برابر است با:

$$y' = 3(x^2+1) + 2x(3x-2) = 3x^2 + 3 + 6x^2 - 4x = 9x^2 - 4x + 3$$

اگر ابتدا y را به صورت $y = 3x^3 - 2x^2 + 3x - 2$ به دست آوریم و سپس از آن مشتق

بگیریم باز هم به همان نتیجه بالا می رسیم.