

نتیجه

۱- تابع $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ را در نظر بگیرید. می‌خواهیم حد این تابع را در صفر تعیین کنیم.
حل: داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x}$$

با توجه به این که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \times 1 = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

۲- می‌خواهیم حد تابع $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ را در صفر تعیین کنیم.

تابع $f(x) = \frac{\sin 2x}{x}$ را می‌توان به صورت $f(x) = 2 \times \frac{\sin 2x}{2x}$ نوشت. پس:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 \times \frac{\sin 2x}{2x} \right) = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 2(1) = 2$$

به‌طور کلی ثابت می‌شود که:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan mx}{x} = m \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx}{x} = m$$

مثال ۱: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2}$ را محاسبه کنید.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 \\ &= 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 = 2(1)^2 = 2 \end{aligned}$$

حل: داریم:

مثال ۲: حد $\frac{\tan kx}{\cos kx \sin 2x}$ در $x = 0$ برابر ۲ است. مقدار k را تعیین کنید.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan kx}{\cos kx \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{\cos^2 kx \sin 2x}$$

حل: داریم:

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos^2 kx} \times \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin kx}{x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x}} \\ &= 1 \times \frac{k}{2} = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{k}{2} = 2 \Rightarrow k = 4 \end{aligned}$$

مثال ۳: برای محاسبه $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{6}}$ فرض می‌کنیم $x - \frac{\pi}{6} = t$ ، در این صورت

$$2x - \frac{\pi}{3} = 2(x - \frac{\pi}{6}) = 2t$$

خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\sin(2x - \frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{6}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin 2t}{t} = 2$$

تمرین

۱- هر یک از حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{3x} \sin \frac{3}{2}x$

پ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\sin(3x - \pi)}{x - \frac{\pi}{3}}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{3x}$

ث) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x \tan 3x}{3x^2}$

ج) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin(x-a)}{x^2 - a^2}$

چ) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{4x - \pi}$

ح) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin 2x \sin 3x}{x^3}$

خ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3}$

۲- اگر به ازای هر x داشته باشیم $2 \cos x \leq g(x) \leq 2 - x^2$ ، حد تابع $g(x)$ را در $x = 0$ تعیین

کنید.

۳- فرض کنید به ازای $-1 \leq x \leq 1$ داشته باشیم:

$$\sqrt{5 - 2x^2} \leq f(x) \leq \sqrt{5 - x^2}$$

حد تابع $f(x)$ را در $x = 0$ تعیین کنید.

۴- حد تابع $f(x) = |x|$ را در $x = 0$ تعیین کنید.

نکات زیر در محاسبه برخی از حدها مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۱- بخش پذیری چند جمله‌ای‌ها بر $x - x_0$: اگر چند جمله‌ای $1 + \dots + bx^{n-1} + ax^n$ به

ازای $x = x$ برابر صفر شود (x ریشه چند جمله‌ای باشد)، چند جمله‌ای بر $x - x$ بخش پذیر است (از این خاصیت برای تجزیه چند جمله‌ای می‌توان استفاده کرد).

مثال ۱: چند جمله‌ای $2x^2 + x - 3$ به ازای $x = 1$ برابر با صفر است، پس این چند جمله‌ای بر $x - 1$ بخش پذیر است.

$$x = 1 \xrightarrow{\text{در چند جمله‌ای}} (1)^2 + (1) - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 + x - 3 & x - 1 \\ -2x^2 + 2x & 2x + 3 \\ \hline 3x - 3 & \\ -3x + 3 & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow 2x^2 + x - 3 = (x - 1)(2x + 3)$$

مثال ۲: چند جمله‌ای $x^3 + 7x^2 + 4x - 12$ به ازای $x = -2$ برابر صفر است، پس بر $x + 2$ بخش پذیر می‌باشد.

$$x = -2 \xrightarrow{\text{در چند جمله‌ای}} (-2)^3 + 7(-2)^2 + 4(-2) - 12 = -8 + 28 - 8 - 12 = 0$$

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 7x^2 + 4x - 12 & x + 2 \\ R = 0 & x^2 + 5x - 6 \\ \hline & \Rightarrow x^3 + 7x^2 + 4x - 12 = (x + 2)(x^2 + 5x - 6) \end{array}$$

و چون $x^2 + 5x - 6 = (x + 6)(x - 1)$ ، پس:

$$x^3 + 7x^2 + 4x - 12 = (x + 2)(x + 6)(x - 1)$$

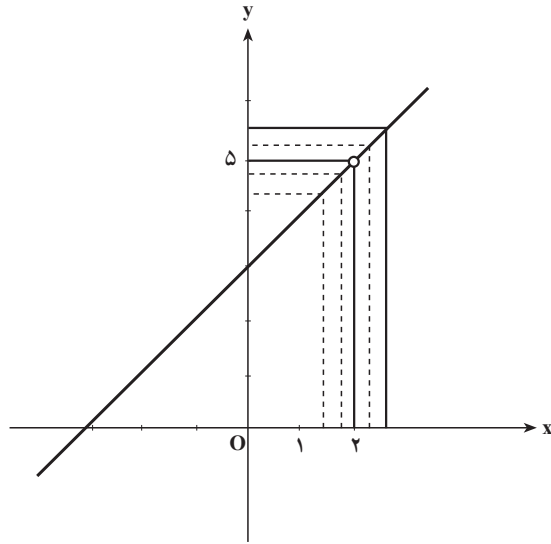
اینک چند نمونه از حدهایی را که به کمک بخش پذیری چند جمله‌ای‌ها بر $x - x$ محاسبه می‌شوند در زیر می‌آوریم:

مثال ۱: حد تابع $q(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2}$ را در $x = 2$ تعیین کنید.

حل: چون صورت و مخرج کسر در $x = 2$ برابر صفرند پس بر $x - 2$ بخش پذیرند، یعنی دارای عامل مشترک $x - 2$ می‌باشند، و چون $x \neq 2$ داریم $x - 2 \neq 0$ و می‌توان این عامل مشترک را از صورت و مخرج حذف نمود؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$q(x) = \frac{(x-2)(x+3)}{x-2} = x + 3 \quad \text{و} \quad x \neq 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 3) = 2 + 3 = 5 \quad \text{و از آنجا:}$$



نمودار تابع $q(x) = x + 3$ ، $x \neq 2$ یا $y = x + 3$ ، $x \neq 2$ نیز نشان می‌دهد که حد تابع

$$q(x) = \frac{x^2 + x - 6}{x - 2} \text{ در } x = 2 \text{ برابر } 5 \text{ است.}$$

مثال ۲: حد تابع $q(x) = \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2 - x - 2}$ را در $x = 1$ به دست آورید.

حل: چون صورت و مخرج کسر در $x = -1$ صفر می‌شوند، پس بر $x + 1$ بخش‌پذیرند و

خواهیم داشت:

$$\frac{2x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2 - x - 2} = \frac{(x+1)(2x^2 - x + 3)}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x^2 - x + 3}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^3 + x^2 + 2x + 3}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x + 3}{x - 2} = \frac{2(-1)^2 - (-1) + 3}{(-1) - 2} = \frac{6}{-3} = -2$$

۲- گویا کردن کسرها: اگر تابع‌های $f(x)$ و $g(x)$ ، یکی یا هر دو، اصم باشند و حد آن‌ها در

$x = x_0$ برابر صفر باشد، آن‌گاه برای محاسبه حد تابع $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ در $x = x_0$ صورت یا مخرج یا هر

دو را گویا می‌کنیم.

به مثال‌های زیر توجه کنید.

مثال ۱: حد تابع $f(x) = \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x}$ در $x = 0$ چگونه به دست می‌آید؟

حل: ابتدا با محاسبه مقدار $f(x)$ برای برخی از مقادیر x که به عدد صفر نزدیک می شوند جدول

زیر را تشکیل می دهیم.

x	...	-1	-0.9	0.5	0.1	0.01	0.001	...	0	...	0.001	0.01	0.1	0.5	0.9	1	...
$f(x)$...	0.2679	0.2659	0.2583	0.2516	0.2502	0.25002	...	0	...	0.2499	0.2498	0.248	0.241	0.237	0.236	...

این جدول نشان می دهد که در $x = 0$ حد تابع $\frac{\sqrt{x+4}-2}{x}$ برابر $\frac{1}{4}$ است.

از طرفی چون حد صورت و مخرج کسر بالا در $x = 0$ برابر صفر است پس برای تعیین حد تابع

از گویا کردن صورت کسر استفاده می کنیم. بدین منظور کسر را در $1 = \frac{\sqrt{x+4}+2}{\sqrt{x+4}+2}$ ضرب می کنیم.

خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \frac{(\sqrt{x+4}-2)(\sqrt{x+4}+2)}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{(x+4)-4}{x(\sqrt{x+4}+2)}$$

$$f(x) = \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x+4}+2}, \quad x \neq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}$$

مثال ۲: حد تابع $q(x) = \frac{x^2-9}{3-\sqrt{x+6}}$ در $x = 3$ به صورت زیر به دست می آید.

حل: چون حد صورت و مخرج کسر در $x = 3$ صفر است پس برای تعیین حد تابع، مخرج کسر

را گویا می کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{x^2-9}{3-\sqrt{x+6}} &= \frac{(x^2-9)(3+\sqrt{x+6})}{(3-\sqrt{x+6})(3+\sqrt{x+6})} = \frac{(x-3)(x+3)(3+\sqrt{x+6})}{3-x} \\ &= -(x+3)(3+\sqrt{x+6}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{3-\sqrt{x+6}} = \lim_{x \rightarrow 3} -(x+3)(3+\sqrt{x+6})$$

$$= -(3+3)(3+\sqrt{9}) = -36$$

مثال ۳: حد تابع $q(x) = \frac{2-\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}-3}$ را در $x = 5$ به دست آورید.

حل: برای تعیین حد، هم صورت کسر و هم مخرج کسر را گویا می‌کنیم.

$$\begin{aligned} \frac{2-\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}-3} &= \frac{(2-\sqrt{x-1})(\sqrt{2x-1}+3)(2+\sqrt{x-1})}{(\sqrt{2x-1}-3)(\sqrt{2x-1}+3)(2+\sqrt{x-1})} = \frac{(4-x+1)(\sqrt{2x-1}+3)}{(2x-1-9)(2+\sqrt{x-1})} \\ &= \frac{-(x-5)(\sqrt{2x-1}+3)}{2(x-5)(2+\sqrt{x-1})} = \frac{-(\sqrt{2x-1}+3)}{2(2+\sqrt{x-1})} \quad (x \neq 5) \\ \lim_{x \rightarrow 5} \frac{2-\sqrt{x-1}}{\sqrt{2x-1}-3} &= \lim_{x \rightarrow 5} -\frac{\sqrt{2x-1}+3}{2(2+\sqrt{x-1})} = -\frac{\sqrt{10-1}+3}{2(2+\sqrt{5-1})} = \frac{-6}{8} = \frac{-3}{4} \end{aligned}$$

تمرین

هریک از حدهای زیر را حساب کنید.

الف) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{x^2-5x+4}$

ب) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1}$

پ) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2-x-2}{x^2-2x-3}$

ت) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-2x+1}{2x^2+x-3}$

ث) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^3+x^2+x+3}{x^2+2x+1}$

ج) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$

چ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2-12}{2-x-x^2}$

ح) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-3x^2+3x-1}{x^2-2x+1}$

خ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4-2x+1}{2x^2-3x+1}$

د) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+\sqrt{x+6}}{x+2}$

ذ) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x}-2}{4-x}$

ر) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x}}$

ز) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x+5}{\sqrt{3x+16}-1}$

ژ) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+\sqrt{x+18}}{\sqrt{3x+7}-1}$

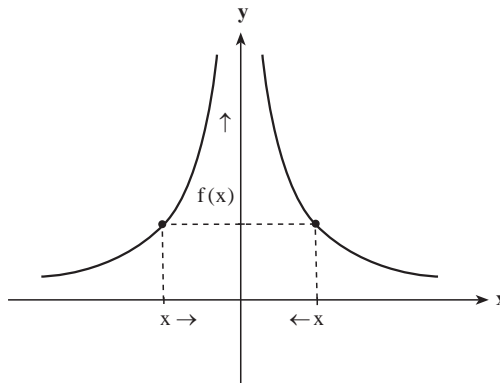
تعمیم حد

می‌دانیم تابع $f(x) = \frac{1}{|x|}$ در صفر تعریف نشده است و برای رسم نمودار آن در حوالی صفر بهتر است رفتار این تابع را در حوالی صفر بررسی کنیم. به ازای مقادیرهای نزدیک صفر برای x روشن است که مقادیرهای $\frac{1}{|x|}$ بسیار بزرگ می‌شوند و هرچه مقادیرهای x را به صفر نزدیک‌تر کنیم

مقدارهای $\frac{1}{|x|}$ بزرگتر خواهند شد. جدول زیر درستی این مطلب را نشان می‌دهد.

$\frac{x}{ x }$	$-\infty/1$	$-\infty/0.1$	$-\infty/0.01$	$\rightarrow \infty \leftarrow \infty/0.01$	$\infty/0.1$	$\infty/1$
$\frac{1}{ x }$	1^0	10^0	1000^0	$\rightarrow \leftarrow 1000^0$	10^0	1^0

از طریق این جدول می‌توان تشخیص داد که نمودار این تابع در حوالی صفر به شکل زیر است.



با نزدیک شدن متغیر x (در دامنه تابع) به صفر مقدارهای $\frac{1}{|x|}$ بزرگ می‌شوند به گونه‌ای که $\frac{1}{|x|}$ می‌تواند از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شود به شرط آن که x به اندازه کافی به صفر نزدیک شده باشد. در این حالت گوییم با نزدیک شدن x به صفر، $\frac{1}{|x|}$ به سمت $+\infty$ می‌رود و حد این تابع در صفر $+\infty$ است و می‌نویسیم:

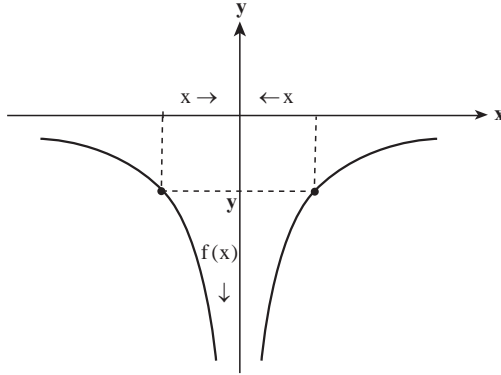
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x|} = +\infty$$

به‌طور کلی برای هر تابع $y = f(x)$ که روی بازه I تعریف شده باشد و نقطه a به گونه‌ای باشد که بتوان از داخل I به a نزدیک شد و با نزدیک شدن متغیر x (در دامنه تابع) به a مقدارهای $f(x)$ بزرگ می‌شوند به گونه‌ای که $f(x)$ بتواند از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شود به شرط آن که x به اندازه کافی به a نزدیک شده باشد. در این حالت می‌گوییم با نزدیک شدن x به a ، $f(x)$ به سمت $+\infty$ می‌رود و حد این تابع در a ، $+\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$$

در برخی موارد با نزدیک شدن متغیر x (در دامنه یک تابع) به نقطه‌ای مانند a مقدارهای تابع

از هر عدد از پیش داده شده‌ای کمتر می‌شوند. مثلاً در مورد تابع $y = -\frac{1}{|x|}$ با نزدیک شدن x به صفر مقادیرهای تابع از هر عدد از پیش داده شده‌ای کمتر می‌شوند. نمودار این تابع به شکل زیر است.



در چنین حالتی می‌گویند با نزدیک شدن x به a ، $f(x)$ به سمت $-\infty$ می‌رود و حد این تابع در a $-\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$$

$$\text{برای مثال } \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{|x|} = -\infty$$

در حالتی که a یک نقطه میانی دامنه تابع باشد و متغیر x فقط با مقادیر بزرگ‌تر از a به a نزدیک شود و مقادیرهای $f(x)$ از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شوند می‌گوییم حد راست تابع در a ، $+\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$

و اگر متغیر x فقط با مقادیر کوچک‌تر از a به a نزدیک شود و مقادیرهای $f(x)$ از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شوند می‌گوییم حد چپ تابع در a ، $+\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

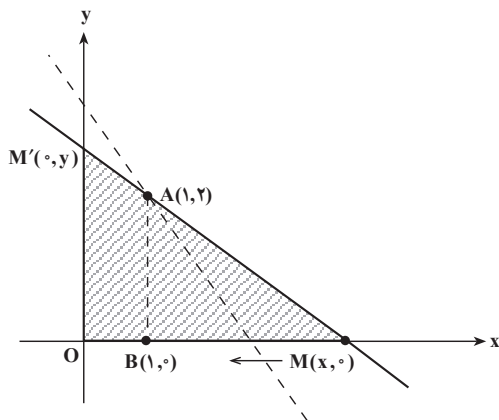
به‌طور مشابه حدهای راست و چپ با مقدار $-\infty$ تعریف می‌شوند.

برای مثال برای تابع $y = \frac{1}{x}$ داریم:

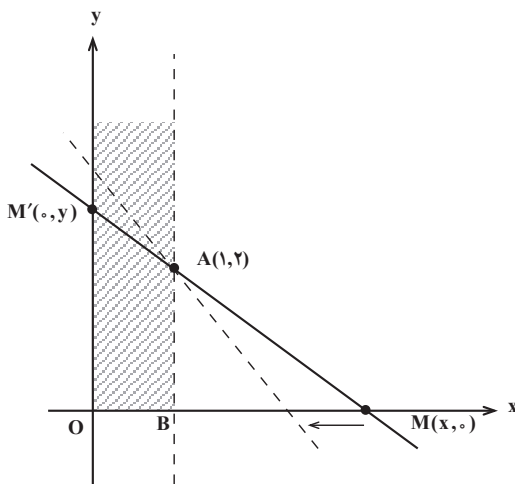
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

مثال ۱: در دستگاه محورهای مختصات xOy ، از نقطه $A = (1, 2)$ خطی رسم می‌کنیم تا

محور x ها را در نقطه $M = (x, 0)$ ، $x > 1$ ؛ و محور y ها را در نقطه $M' = (0, y)$ قطع کند. مساحت مثلث OMM' را به $S_{OMM'}$ نشان می‌دهیم. (شکل زیر)



وقتی خط مذکور حول نقطه A چنان دوران کند که نقطه M به نقطه $B(1, 0)$ نزدیک شود، مساحت مثلث تغییر می‌کند (درواقع x از طرف راست به عدد 1 نزدیک می‌شود ولی همواره $x \neq 1$ است زیرا اگر $x = 1$ باشد، مثلثی وجود نخواهد داشت).



با استفاده از تشابه دو مثلث OMM' و ABM می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{BM}{OM} = \frac{AB}{OM'} \Rightarrow \frac{x-1}{x} = \frac{2}{y} \Rightarrow y = \frac{2x}{x-1}$$

بنابراین مساحت مثلث OMM' برابر است با :

$$S_{OMM'} = \frac{1}{2} OM \cdot OM' = \frac{1}{2} x \cdot y = \frac{1}{2} x \times \frac{2x}{x-1} = \frac{x^2}{x-1}$$

$$S_{OMM'} = f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

حال اگر x (که بزرگ‌تر از ۱ است) از طرف راست به ۱ نزدیک شود، خواهیم داشت :

x	1	← ... ←	1/000001	1/00001	1/0001	1/001	1/01	1/1	1/5	2	...
$f(x)$	+∞	← ... ←	1000002	100002	10002	102	12/1	4/5	4	...	

به طوری که دیده می‌شود، با نزدیک شدن x به عدد ۱ مقدار $f(x)$ افزایش می‌یابد و هرگاه x به قدر کافی به عدد ۱ نزدیک شود، مقدار $f(x)$ از هر عدد مثبت از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر خواهد شد. بنا به تعریف، می‌گوییم $f(x)$ به سمت $+\infty$ می‌رود. یعنی :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} S_{OMM'} = +\infty$$

مثال ۲: تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ($x \neq 0$) را در نظر می‌گیریم و مقدارهای $f(x)$ را برای x هایی که به

صفر نزدیک می‌شوند محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	...	-1	-0/2	-0/1	-0/01	-0/001	-0/0001	...	→	0	...	0/0001	0/001	0/01	0/1	0/2	1	...
$f(x)$...	1	25	100	10000	1000000	100000000	...	→	+∞	...	100000000	1000000	10000	100	25	1	...

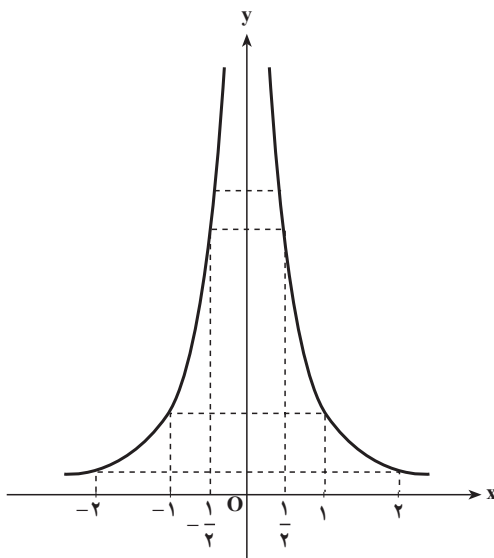
به طوری که دیده می‌شود وقتی x از طرف راست یا چپ به عدد صفر نزدیک می‌شود، مقادیر $f(x)$ به تدریج بزرگ می‌شوند و اگر x به عدد صفر بسیار نزدیک شود، مقدار $f(x)$ نیز بسیار بزرگ خواهد شد. بنابراین تابع $f(x) = \frac{1}{x^2}$ وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، به سمت $+\infty$ می‌رود و می‌نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

اینک با استفاده از نمودار، حد این تابع را در $x = 0$ بررسی می‌کنیم.

x	-2	-1	-1/2	0	1/2	1	2
y	1/4	1	4	تعریف نشده	4	1	1/4

نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که وقتی x به صفر نزدیک می‌شود، $f(x)$ به سمت $+\infty$ می‌رود.



مثال ۳: حد تابع $f(x) = \frac{-5}{(x-2)^2}$ را در $x=2$ تعیین کنید.

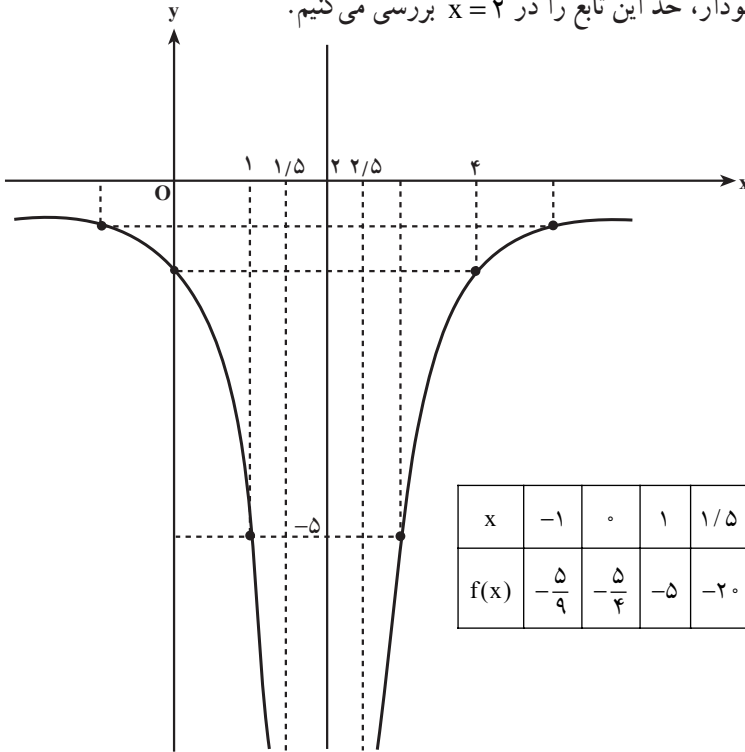
حل: جدول زیر مقدارهای تابع را برای بعضی از مقدارهای x نزدیک عدد ۲ نشان می‌دهد.

x	\dots	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	$\dots \rightarrow$	۲	$\dots \leftarrow$	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۱	۲/۵	۳	\dots
$f(x)$	\dots	-۵	-۲۰	-۵۰۰	-5×10^4	-5×10^6	$\dots \rightarrow$	-∞	$\dots \leftarrow$	5×10^6	-5×10^4	-۵۰۰	-۲۰	-۵	\dots

به طوری که دیده می‌شود وقتی x از طرف راست یا چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود، مقدارهای $f(x)$ به تدریج کم می‌شوند، و وقتی x به قدر کافی به عدد ۲ نزدیک شود، $f(x)$ از هر عدد منفی داده شده‌ای کمتر خواهد شد. بنابراین، بنا به تعریف می‌توان گفت که در تابع بالا وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود، $f(x)$ به سمت $-\infty$ می‌رود و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-5}{(x-2)^2} = -\infty$$

اینک با استفاده از نمودار، حد این تابع را در $x=2$ بررسی می‌کنیم.



x	-1	0	1	1/5	2	2/5	3	4
$f(x)$	$-\frac{5}{9}$	$-\frac{5}{4}$	-5	-20	تعریف نشده	-20	-5	$-\frac{5}{4}$

نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که وقتی x به عدد 2 نزدیک می‌شود، $f(x)$ به سمت $-\infty$ می‌رود.

مثال 4: برای یافتن حد $f(x) = \frac{1}{x-1}$ در $x=1$ جدول زیر را تشکیل می‌دهیم.

x	0	0/5	0/9	0/99	0/999	...	→	1	←	...	1/001	1/01	1/1	1/5	2	...
$f(x)$	-1	-2	-10	-100	-1000	...	→		←	...	1000	100	10	2	1	...

به طوری که دیده می‌شود، هنگامی که x از طرف چپ به عدد 1 نزدیک می‌شود، مقادیر $f(x)$ به تدریج کم می‌شوند و وقتی x به اندازه کافی به عدد 1 نزدیک شود، $f(x)$ از هر عدد منفی داده شده‌ای کمتر خواهد شد. پس $f(x)$ به سمت $-\infty$ می‌رود یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

وقتی x از طرف راست به عدد 1 نزدیک می‌شود، مقادیر $f(x)$ به تدریج بزرگ می‌شوند و هنگامی که x به عدد 1 به اندازه کافی نزدیک شود، مقدار $f(x)$ از هر عدد داده شده‌ای بزرگ‌تر

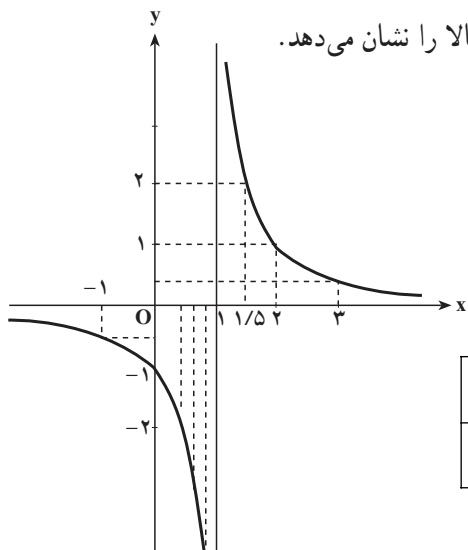
خواهد شد. پس $f(x)$ به سمت $+\infty$ می‌رود. یعنی در این حالت :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

بنابراین در تابع $f(x) = \frac{1}{x-1}$ وقتی x به عدد ۱ نزدیک می‌شود داریم :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(f(x) = \frac{1}{x-1} \right) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(f(x) = \frac{1}{x-1} \right) = +\infty$$

نمودار تغییرات تابع نیز درستی محاسبات بالا را نشان می‌دهد.



x	-۱	۰	$\frac{1}{2}$	۱	$\frac{3}{2}$	۲	۳
f(x)	$-\frac{1}{2}$	-۱	-۲	تعریف نشده	۲	۱	$\frac{1}{2}$

مثال ۵: استوانه‌ای به حجم ثابت V داده شده است. شعاع قاعده استوانه را R و ارتفاع آن را

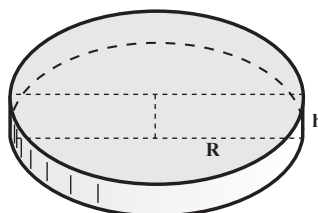
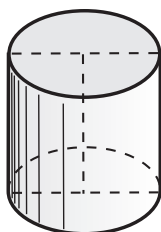
h می‌نامیم. می‌خواهیم تغییرات ارتفاع استوانه را هنگامی که شعاع قاعده استوانه تغییر می‌کند، بررسی کنیم.

می‌دانیم که :

$$\text{ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = \text{حجم استوانه}$$

بنابراین :

$$V = \pi R^2 \times h \Rightarrow h = \frac{V}{\pi R^2}$$



اما دامنه تغییرات R بازه $(0, +\infty)$ است بنابراین :

$$\lim_{R \rightarrow 0^+} h = \lim_{R \rightarrow 0^+} \frac{V}{\pi R^2} = +\infty$$

پس دو کمیت R و h چنان به یکدیگر وابسته اند که هرگاه R به صفر نزدیک شود h به سمت $+\infty$ می رود.

مثال ۶: حد دو تابع $f_1(x) = x - 3$ و $f_2(x) = \frac{1}{x-3}$ را در $x = 3$ با محاسبه مقادیر $f_1(x)$ و $f_2(x)$ متناظر با x های نزدیک ۳ به کمک جدول زیر تعیین می کنیم.

x	$\dots 1 \quad 2 \quad 2/5 \quad 2/9 \quad 2/99 \quad 2/999 \dots \rightarrow$	۳	$\leftarrow \dots 3/001 \quad 3/01 \quad 3/1 \quad 3/5 \quad 4 \dots$
$x-3$	$\dots -1 \quad -0/5 \quad -0/1 \quad -0/01 \quad -0/001 \dots \rightarrow$	۰	$\leftarrow \dots 0/001 \quad 0/01 \quad 0/1 \quad 0/5 \quad 1 \dots$
$\frac{1}{x-3}$	$\dots -1 \quad -2 \quad -10 \quad -100 \quad -1000 \dots \rightarrow$	$-\infty$	$+\infty \leftarrow \dots 1000 \quad 100 \quad 10 \quad 2 \quad 1 \dots$

به طوری که دیده می شود $\lim_{x \rightarrow 3} (x-3) = 0$ اما $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3} = +\infty$ یا $-\infty$ ، بنابراین آن که x از طرف راست یا از طرف چپ به ۳ نزدیک شود.

نکته: می دانیم که $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$. ارتباط این گونه حدها در ماهیت کسرها نهفته است که وقتی مخرج کسر کوچک تر می شود، مقدار کسر بزرگ تر می گردد. بنابراین می توانیم چنین نتیجه بگیریم که :

الف - هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ و همواره $f(x) > 0$ (یعنی $f(x)$ با مقادیر مثبت به صفر نزدیک شود)، آن گاه :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$$

ب - هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ و همواره $f(x) < 0$ ، یعنی $f(x)$ با مقادیر منفی به صفر نزدیک شود، آن گاه :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = -\infty$$

به مثال‌های زیر توجه کنید :

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-2}{x} = -\infty$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2}{x} = +\infty$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{4}{(x+3)^2} = +\infty$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-11}{(x-2)^2} = -\infty$$

$$\text{چ) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{5}{(x-3)^3} = -\infty$$

تمرین

هر یک از حدهای زیر را به دست آورید.

$$\text{الف) } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+3}{x-1}$$

$$\text{ب) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3}{x-2}$$

$$\text{پ) } \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{4x}{(x+2)^2}$$

$$\text{ت) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{-1}{(x+1)^2}$$

$$\text{ث) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x+3}{(x-3)^2}$$

$$\text{ج) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+3}{(x-2)^3}$$

$$\text{چ) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x+5}{x^2-4}$$

$$\text{ح) } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4}{2x-1}$$

$$\text{خ) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^4}$$

$$\text{د) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{(x+1)^4}$$

$$\text{ذ) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x^2-9}$$

$$\text{ر) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-5x^2}{x^2-1}$$

$$\text{ز) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan x$$

$$\text{س) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}^+} \tan^2 x$$

$$\text{ش) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{9}^+} \tan\left(3x - \frac{\pi}{3}\right)$$

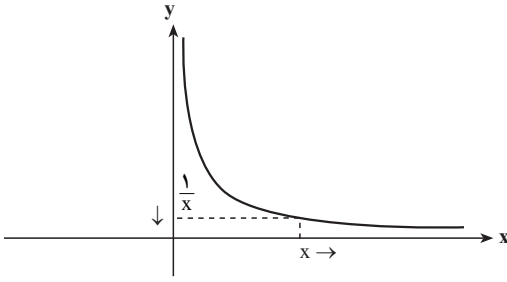
$$\text{ص) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \cot^3 x$$

$$\text{ض) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sin x}$$

$$\text{ط) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{ظ) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{1 - \cos x}$$

$$\text{ع) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\tan x + \sqrt{3}}{\tan x - \sqrt{3}}$$



اگر تابعی مانند $y = f(x)$ در بازه‌ای مانند $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد و بخواهیم چگونگی نمودار آن را برای مقادیر بزرگ x تشخیص دهیم. باید با بزرگ شدن مقادیر x تشخیص دهیم $f(x)$

چگونه تغییر می‌کند. برای مثال برای تابع $y = \frac{1}{x}$ با بزرگ شدن مقادیر x ، مقدارهای $\frac{1}{x}$ کوچک می‌شوند و به صفر نزدیک می‌شوند. نمودار این تابع برای مقادیر بزرگ x به شکل بالا است.

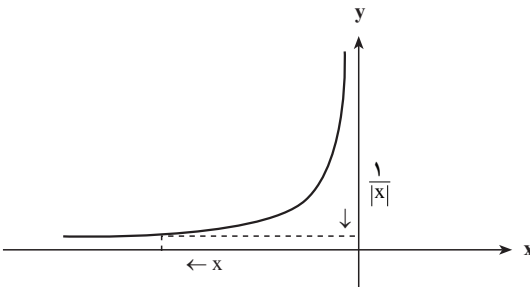
در این مورد می‌گویند با رفتن x به سمت $+\infty$ مقدار تابع $y = \frac{1}{x}$ به صفر نزدیک می‌شود. به طور کلی برای هر تابع $y = f(x)$ که روی بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده باشد و با بزرگ شدن متغیر x مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند به گونه‌ای که $f(x)$ بتواند به هر مقدار که بخواهیم L نزدیک شود به شرط آن که x به اندازه کافی بزرگ شده باشد، در این حالت می‌گوییم با رفتن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ به سمت L نزدیک می‌شود و حد این تابع در $+\infty$ برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{برای مثال}$$

همچنین اگر تابعی مانند $y = f(x)$ در بازه‌ای مانند $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد و بخواهیم چگونگی نمودار آن را برای مقادیر منفی از لحاظ قدر مطلق بزرگ x تشخیص دهیم، باید با کم شدن مقادیر x در اعداد منفی، تشخیص دهیم $f(x)$ چگونه تغییر می‌کند. برای مثال

برای تابع $y = \frac{1}{|x|}$ با کم شدن مقادیر x در اعداد منفی



و بزرگ شدن آن‌ها از لحاظ قدر مطلق، مقدارهای $\frac{1}{|x|}$ کوچک می‌شوند و به صفر نزدیک می‌شوند. نمودار این تابع برای مقادیر بزرگ x به شکل مقابل است. در این مورد می‌گویند با رفتن x به سمت $-\infty$ مقدار تابع $y = \frac{1}{|x|}$ به صفر نزدیک می‌شود.

به طور کلی برای هر تابع $y = f(x)$ که روی بازه $(-\infty, a)$ تعریف شده باشد و با کم شدن

مقادیر x در اعداد منفی، مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی مانند L نزدیک شوند به گونه‌ای که $f(x)$ بتواند به هر مقدار که بخواهیم به L نزدیک شود به شرط آن که x به اندازه کافی در اعداد منفی کم شده باشد، در این حالت می‌گوییم با رفتن x به سمت $-\infty$ ، $f(x)$ به سمت L نزدیک می‌شود و حد این تابع در $-\infty$ برابر L است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{|x|} = 0 \quad \text{برای مثال:}$$

مثال ۱: سیبی را به طور برابر میان دو نفر تقسیم می‌کنیم. به هر یک نصف سیب می‌رسد. اگر ۲ سیب را میان ۳ نفر به تساوی تقسیم کنیم به هر یک $\frac{2}{3}$ سیب می‌رسد و از تقسیم ۳ سیب میان ۴ نفر، سهم هر یک $\frac{3}{4}$ سیب می‌شود. این تقسیم را با افزودن یک سیب در مقابل افزایش یک نفر ادامه می‌دهیم. هنگامی که شماره نفرات به ۱۰۰ می‌رسد تعداد سیب‌ها ۹۹ تاست و سهم هر نفر $\frac{99}{100} = 0.99$ می‌شود و وقتی شماره نفرات ۱۰۰۰ باشد شماره سیب‌ها ۹۹۹ و سهم هر نفر $\frac{999}{1000} = 0.999$ است. آشکار است هر قدر شماره نفرات بیشتر شود سهم هر نفر بیشتر می‌شود. اگر این روند را همچنان ادامه دهیم سرانجام سهم هر نفر چه خواهد شد؟ اگر شماره نفرات را با x و سهم هر نفر را که تابعی از x است با $f(x)$ نشان دهیم خواهیم داشت:

$$f(x) = \frac{x-1}{x}$$

پاسخ نهایی، یافتن حد تابع f در $+\infty$ است، این مطلب را با تشکیل یک جدول بررسی و جواب را پیدا کنید.

مثال ۲: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ را در نظر می‌گیریم و مقادیر $f(x)$ را برای x های به قدر کافی بزرگ محاسبه می‌کنیم و در جدول زیر می‌نویسیم.

x	...	۱۰	۱۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰	...	→	$+\infty$
$f(x) = \frac{1}{x}$...	۰/۱	۰/۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۰۰۱	...	→	۰

این جدول نشان می‌دهد که وقتی x به سمت $+\infty$ می‌رود $\frac{1}{x}$ به صفر نزدیک می‌شود. یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

همچنین مقادیر $f(x)$ برای x های منفی که از لحاظ قدرمطلق بزرگ هستند را محاسبه و در جدول

زیر می‌نویسیم:

x	$-\infty$	\leftarrow	\dots	-1000000	-100000	-10000	-1000	-100	-10	\dots
$f(x)$	0	\leftarrow	\dots	$-0/0000001$	$-0/00001$	$-0/0001$	$-0/01$	$-0/1$	$-0/1$	\dots

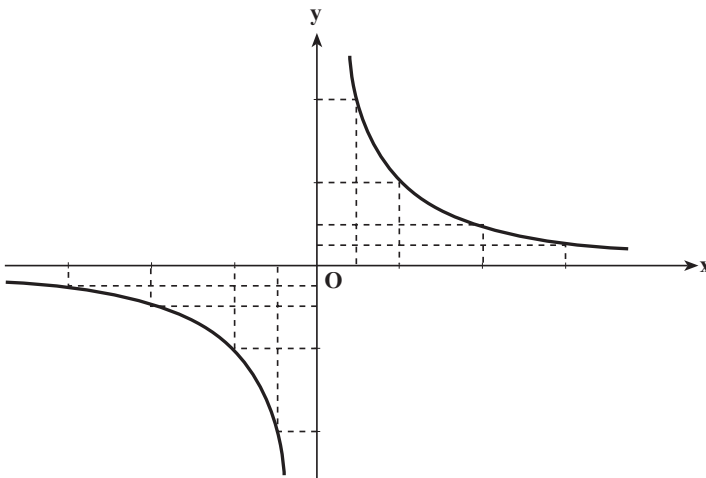
به طوری که دیده می‌شود وقتی x به سمت $-\infty$ می‌رود، $\frac{1}{x}$ به 0 نزدیک می‌شود یعنی

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

بنابراین داریم: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$

نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که در x های مثبت بزرگ و x های منفی از لحاظ قدرمطلق بزرگ،

$f(x)$ به 0 نزدیک می‌شود.



x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
y	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	تعریف نشده	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$

مثال ۳: در تابع $f(x) = \frac{2x-1}{x+2}$ مقادیر تابع را برای مقدارهایی از x که در جدول زیر نوشته ایم محاسبه می‌کنیم و در جای خود می‌نویسیم و از روی آن حد تابع را در $+\infty$ در $-\infty$ مشخص می‌کنیم.

x		$-\infty$	← ...	-1000000	-100000	-10000	-1000	-100	0	100	1000	10000	100000	1000000	... →	$+\infty$
$f(x)$		2	← ...	$2/000005$	$2/00005$	$2/0005$	$2/05$	$-\frac{1}{2}$	$1/951$	$1/995$	$1/9995$	$1/99995$	$1/999995$...	→	2

جدول بالا نشان می‌دهد که:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$$

نکته: دیدیم که $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ است. همچنین $\lim_{t \rightarrow 0} t = 0$ پس اگر $t = \frac{1}{x}$

خواهیم داشت:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} t = 0$$

به این ترتیب با استفاده از این تعویض متغیر می‌توان محاسبه حد در ∞ را به محاسبه حد در صفر ($t \rightarrow 0$) بازگردانید.

اینک با استفاده از مطلب بالا حد $\frac{2x-1}{x+2}$ را در $\pm\infty$ به دست می‌آوریم.

$$\frac{2x-1}{x+2} = \frac{x(2-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \frac{2-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}, \quad x \neq 0$$

$$\frac{1}{x} = t \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x-1}{x+2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{2-t}{1+2t} = \frac{2-0}{1+0} = 2$$

بنابراین حد کسر بالا در $\pm\infty$ برابر با ۲ است.

مثال ۴: حد $\frac{6x-1}{2x+3}$ را در $\pm\infty$ تعیین کنید.

می‌توان نوشت:

$$\frac{6x-1}{2x+3} = \frac{x(6-\frac{1}{x})}{x(2+\frac{3}{x})} = \frac{6-\frac{1}{x}}{2+\frac{3}{x}}, \quad \frac{1}{x} = t$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x-1}{2x+3} = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{6-t}{2+3t} = \frac{6-\infty}{2+\infty} = 3$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{6x-1}{2x+3} = 3$$

مثال ۵: کسر $\frac{-2x^2+x-1}{x^2+7x+2}$ داده شده است. می‌خواهیم حد این کسر را در $\pm\infty$ تعیین کنیم.

$$\frac{-2x^2+x-1}{x^2+7x+2} = \frac{x^2(-2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^2(1+\frac{7}{x}+\frac{2}{x^2})}$$

چون $x \neq 0$ است،

$$\frac{1}{x} = t \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \frac{-2+t-t^2}{1+7t+2t^2} = \frac{-2+0-0}{1+0+0} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^2+x-1}{x^2+7x+2} = -2$$

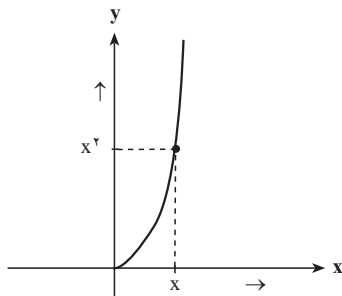
مثال ۶: حد $\frac{3x+1}{x+\sqrt{x+1}}$ را در $+\infty$ ، تعیین می‌کنیم.

$$\frac{3x+1}{x+\sqrt{x+1}} = \frac{x(3+\frac{1}{x})}{x(1+\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}})}, \quad \frac{1}{x} = t, \quad 0 < t$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{3+t}{1+\sqrt{t+t^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

در محاسبه حد توابع در $+\infty$ و $-\infty$ ممکن است با بزرگ شدن مقادیر x ، مقدارهای $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند و مقادیر $f(x)$ نیز بزرگ شوند و از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر شوند. مثلاً در مورد تابع $y = x^2$ وضعیت به همین شکل است و با بزرگ شدن x ، مقدار x^2 نیز بزرگ می‌شود و از هر عدد از پیش داده شده‌ای بزرگ‌تر می‌شود. نمودار تابع نیز این مطلب را نشان

می‌دهد.



این به معنای آن است که با رفتن x به سمت $+\infty$ ، x^2 نیز به سمت $+\infty$ می‌رود. در حالت کلی برای یک تابع f که در یک بازه $(a, +\infty)$ تعریف شده است اگر با رفتن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ نیز به سمت $+\infty$ برود. گوییم حد این تابع در $+\infty$ ، $+\infty$ است و می‌نویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

برای مثال $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

اما اگر با رفتن x به سمت $+\infty$ ، $f(x)$ به سمت $-\infty$ برود. گوییم حد این تابع در $+\infty$ ، $-\infty$ است و می‌نویسیم:

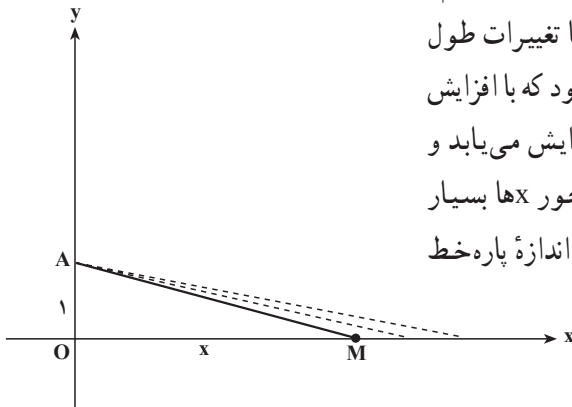
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

برای مثال $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$. به شکل مشابه مفاهیم $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ و

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ تعریف می‌شوند. مثلاً } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^2 = -\infty.$$

مثال ۱: نقطه ثابت A را به عرض ۱ روی محور y ‌ها و نقطه متغیر M را به طول x روی

محور طول‌ها در نظر گرفته از A به M وصل می‌کنیم. آن‌گاه تغییرات طول پاره خط AM را با تغییرات طول پاره خط OM مقایسه می‌کنیم. دیده می‌شود که با افزایش طول OM اندازه پاره خط AM نیز افزایش می‌یابد و هنگامی که نقطه M در جهت مثبت محور x ‌ها بسیار دور شود، یعنی x به سمت $+\infty$ برود، اندازه پاره خط AM نیز به سمت $+\infty$ می‌رود.



اگر طول پاره خط AM را که تابعی از x است $f(x)$ بنامیم، خواهیم داشت:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

زیرا

$$OA = 1, OM = x, \angle AOM = 90^\circ \Rightarrow AM^2 = OM^2 + OA^2 = x^2 + 1$$

در نتیجه

$$AM = \sqrt{x^2 + 1}$$