

# معادله و تابع‌های درجه دوم

معادله درجه دوم به معادلاتی گفته می‌شود که دارای چند جمله‌ای‌های با درجه ۲ باشند.

## تعریف

یک معادله درجه دوم، معادله‌ای به شکل  $ax^2 + bx + c = 0$  است که در آن؛  $a$  و  $b$  و  $c$ ، اعداد حقیقی هستند و  $a$  مخالف صفر است.

در این تعریف،  $ax^2$  جمله درجه ۲،  $bx$  جمله درجه ۱ و  $c$ ، جمله ثابت نامیده می‌شوند.



## مثال

$5x^2 + 3x + 4 = 0$  یک معادله درجه ۲ است که در آن،  $5x^2$  جمله درجه دو،  $3x$  جمله درجه یک و  $4$  جمله ثابت نامیده می شوند.

## تمرین

در معادله های درجه دوم زیر، جمله درجه ۲، جمله درجه ۱ و جمله ثابت را مشخص کنید :

الف)  $3x^2 + 50x - 1 = 0$

ب)  $-\frac{1}{4}x^2 - 3x + 2 = 0$

## مثال

در معادله های درجه دوم زیر، جمله درجه دو، جمله درجه یک و جمله ثابت را مشخص کنید :

الف)  $ax^2 - 4 = 0$

ب)  $\frac{1}{5}x^2 - 3x = 0$

پ)  $x^2 = 0$

**حل:**

الف) در این معادله، جمله درجه ۲ برابر  $ax^2$  و جمله درجه ۱ برابر صفر و جمله ثابت برابر  $-4$  است، زیرا می توانیم معادله را به شکل زیر بنویسیم :

$$ax^2 + 0x + (-4) = 0$$

ب) معادله  $\frac{1}{5}x^2 - 3x = 0$  را به شکل زیر می نویسیم :

$$\frac{1}{5}x^2 + (-3)x + 0 = 0$$

پس جمله درجه ۲ مساوی  $\frac{1}{5}x^2$ ، جمله درجه ۱ برابر  $-3x$  و جمله ثابت برابر صفر است.

پ) معادله  $x^2 = 0$  را به شکل  $x^2 + 0x + 0 = 0$  می نویسیم.

در این معادله، جمله درجه ۲ مساوی  $x^2$ ، جمله درجه ۱ مساوی صفر و جمله ثابت نیز مساوی صفر است.

در معادله‌های زیر؛ جملهٔ درجهٔ ۲، جملهٔ درجهٔ ۱ و جملهٔ ثابت را مشخص کنید:

الف)  $3x^2 - bx = 0$

ب)  $3x^2 - 2 = 0$

پ)  $3x^2 = 0$

ت)  $\frac{1}{3}x^2 - bx + c = 0$

شکل استاندارد معادلهٔ درجهٔ دوم، به صورت  $ax^2 + bx + c = 0$  است.

## ۲-۱- تابع درجهٔ دوم

تابع‌های درجهٔ دوم، به شکل  $f(x) = ax^2 + bx + c$  هستند که در آن،  $a$  و  $b$  و  $c$ ؛ اعداد حقیقی هستند و  $a$  مخالف صفر است.

توجه: به تفاوت بین یک معادلهٔ درجهٔ دوم که می‌توان آن را به شکل  $ax^2 + bx + c = 0$  نوشت و یک تابع درجهٔ دوم که می‌توان آن را به شکل  $f(x) = ax^2 + bx + c$  نوشت، توجه کنید. معادلهٔ درجهٔ دوم، یک مورد خاص  $f(x) = 0$  است و ریشه‌های این معادله، محل تقاطع نمودار  $f(x)$ ، با محور  $x$ ها است.

## ۲-۲- تخمین جواب‌های معادلات درجهٔ دوم

حل معادله‌ای مانند  $x^2 - 2x - 5 = 3$ ، به معنای پیدا کردن مقادیری برای  $x$  است که به ازای

جدول ۱

$x$	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$x^2 - 2x - 5$	۱۰	۳	-۲	-۵	-۶	-۵	-۲	۳	۱۰

آن مقادیر؛  $x^2 - 2x - 5 = 3$  دارای مقدار ۳ باشد. جدول بالا را در نظر بگیرید.

با توجه به جدول، مقدار عبارت  $x^2 - 2x - 5$  به ازای دو مقدار متفاوت  $x$  یعنی ۲ و ۴،

مساوی ۳ می‌شود. یعنی معادلهٔ  $x^2 - 2x - 5 = 3$  دارای دو جواب ۲ و ۴ است.

## تعریف

مقادیری از  $x$  که به ازای آن‌ها، معادله برقرار است؛ جواب معادله نامیده می‌شوند.

همان طور که در جدول می‌بینید، به ازای  $x=1$ ، مقدار عبارت  $x^2 - 2x - 5$  مساوی  $-6$  می‌شود. یعنی معادله  $x^2 - 2x - 5 = -6$  دارای یک جواب است.

## مثال

آیا معادله  $x^2 - 2x - 5 = -10$  جواب دارد؟ توضیح دهید.

حل: با توجه به جدول ۱، دیده می‌شود که کمترین مقدار عبارت  $x^2 - 2x - 5$  برابر  $-6$  است. بنابراین، معادله  $x^2 - 2x - 5 = -10$  جواب ندارد، یعنی  $x$  ای وجود ندارد که به ازای آن، مقدار  $x^2 - 2x - 5$ ، برابر  $-10$  شود.

## مثال

آیا معادله‌های زیر، درجه دوم هستند؟ هر معادله دارای چند جواب است؟

الف)  $(7 - 2x)^2 = (2x - 7)^2$

ب)  $(2x + 1)^2 = (3 + 2x)^2$

حل:

الف) دو طرف معادله را با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله به توان می‌رسانیم:

$$(7 - 2x)^2 = (2x - 7)^2$$

$$49 + 4x^2 - 28x = 4x^2 - 28x + 49$$

$$0 = 0$$

توجه: این معادله دارای ویژگی خاصی است یعنی به ازای تمام مقادیر  $x$ ، معادله درست است. به این نوع معادله، اتحاد گفته می‌شود.<sup>۱</sup>

۱- توجه داشته باشید که در ریاضی سال اول، به تفصیل با اتحادها کار کرده‌اید.

$$(2x+1)^2 = (3+2x)^2 \quad \text{ب)}$$

$$4x^2 + 4x + 1 = 9 + 12x + 4x^2$$

$$4x + 1 - 9 - 12x = 0$$

$$-8x - 8 = 0 \Rightarrow 8x = -8 \Rightarrow x = -1$$

پس این معادله، درجه اول است و تنها یک جواب دارد.

### ۳-۲- حل معادله درجه دوم

اگر بتوان یک عبارت درجه دوم را به صورت حاصل ضرب دو عبارت درجه اول نوشت، اصطلاحاً گفته می شود که عبارت درجه دوم، به حاصل ضرب دو عبارت درجه اول، تجزیه شده است.

به مثال های زیر توجه کنید :

الف)  $x^2 + 4x + 3 = (x+3)(x+1)$  اتحاد جمله مشترک

ب)  $2x^2 + 5x = x(2x+5)$  فاکتورگیری

پ)  $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$  اتحاد مزدوج

ت)  $x^2 + 6x + 9 = (x+3)(x+3) = (x+3)^2$  اتحاد مربع مجموع دو جمله

ث)  $x^2 - 6x + 9 = (x-3)(x-3) = (x-3)^2$  اتحاد مربع تفاضل دو جمله

معادله نظیر هر یک از عبارت های درجه دوم بالا، به شکل زیر است :

الف)  $x^2 + 4x + 3 = 0$

ب)  $2x^2 + 5x = 0$

پ)  $x^2 - 9 = 0$

ت)  $x^2 + 6x + 9 = 0$

ث)  $x^2 - 6x + 9 = 0$

برای حل این معادله ها، می توانیم از یک خاصیت ساده اما مهم اعداد حقیقی استفاده

کنیم :

**خاصیت فاکتور (عامل) صفر:** برای هر دو عدد حقیقی  $a$  و  $b$ ، اگر  $ab = 0$ ، آن گاه  $a = 0$  یا  $b = 0$ .

## حل معادلات نمونه

الف)  $x^2 + 4x + 3 = 0$

با استفاده از اتحاد جمله مشترک، معادله را تجزیه می‌کنیم.

$$(x + 3)(x + 1) = 0$$

با استفاده از خاصیت فاکتور (عامل) صفر

$$x + 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 1 = 0$$

$$\boxed{x = -3} \quad \text{یا} \quad \boxed{x = -1}$$

ب)  $2x^2 + 5x = 0$

با استفاده از فاکتورگیری

$$x(2x + 5) = 0$$

با استفاده از خاصیت فاکتور صفر

$$\boxed{x = 0} \quad \text{یا} \quad 2x + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{5}{2}}$$

پ)  $x^2 - 9 = 0$

$$(x - 3)(x + 3) = 0$$

اتحاد مزدوج

$$x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 3 = 0$$

خاصیت فاکتور صفر

$$\boxed{x = 3} \quad \text{یا} \quad \boxed{x = -3}$$

ت)  $x^2 + 6x + 9 = 0$

$$(x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2 = 0$$

اتحاد مربع مجموع دو جمله

$$x + 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 3 = 0$$

خاصیت فاکتور صفر

$$\boxed{x = -3} \quad \text{یا} \quad \boxed{x = -3}$$

پس معادله، دارای دو جواب مساوی است که به آن، ریشه مضاعف گفته می‌شود.

ث)  $x^2 - 6x + 9 = 0$

$$(x - 3)(x - 3) = (x - 3)^2 = 0$$

اتحاد مربع تفاضل دو جمله

$$x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x - 3 = 0$$

خاصیت فاکتور صفر

$$\boxed{x = 3} \quad \text{یا} \quad \boxed{x = 3}$$

پس معادله، دارای یک جواب است یعنی یک ریشه مضاعف دارد.

ریشهٔ یک معادله، همان جواب معادله است.

همان‌طور که در حل معادلات نمونه دیدید :

برای استفاده از خاصیت فاکتور (عامل) صفر، دو شرط باید وجود داشته باشد :

۱- یک طرف معادله صفر باشد ؛

۲- طرف دیگر معادله، یک حاصل‌ضرب باشد.

## مسایل

در صورت امکان، جواب معادله‌های زیر را به‌دست آورید.

$$5x = x^2 \quad \text{—۱}$$

$$p^2 + 36 = 0 \quad \text{—۲}$$

$$x^2 = 1/21 \quad \text{—۳}$$

$$x - 2 = -\frac{35}{x} \quad \text{—۴}$$

توجه: همان‌طور که در بسیاری حالت‌ها، دو جواب برای معادله‌های درجهٔ دوم به‌دست آوردیم، می‌توانیم با داشتن دو جواب نیز، یک معادلهٔ درجهٔ دوم بنویسیم.

## مثال

معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ۳ و -۷، جواب‌های آن باشند.

حل: ۳ و -۷ جواب معادله هستند، پس

$$\boxed{x = 3} \quad \text{یا} \quad \boxed{x = -7}$$

$$x - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad x + 7 = 0$$

$$(x - 3)(x + 7) = 0$$

$$x^2 + 4x - 21 = 0$$

## تمرین

معادله درجه دومی بنویسید که جواب‌های آن، جفت عددهای زیر باشد :

۲، -۳ (پ)      ۲، ۷ (ب)      ۴، ۴ (الف)

۱-۲-۳ حل معادله درجه دوم با استفاده از خاصیت ریشه زوج: در شکل استاندارد

معادله درجه دوم یعنی  $ax^2 + bx + c = 0$  ،

الف) اگر  $c = 0$  باشد، آن‌گاه  $ax^2 + bx = 0$  می‌شود. در نتیجه، با استفاده از خاصیت فاکتور

صفر، معادله را که همیشه جواب حقیقی دارد، حل می‌کنیم :

$$ax^2 + bx = 0$$

$$x(ax + b) = 0$$

$$\boxed{x = 0} \text{ یا } ax + b = 0 \Rightarrow \boxed{x = -\frac{b}{a}}$$

ب) اگر  $b = 0$  ، آن‌گاه  $ax^2 + c = 0$  . در این حالت برای پیدا کردن جواب معادله، به طریق زیر

عمل می‌کنیم :

$$ax^2 + c = 0$$

دو طرف معادله را بر  $a$  تقسیم می‌کنیم.

$$x^2 + \frac{c}{a} = 0$$

از دو طرف،  $\frac{c}{a}$  را کم می‌کنیم.

$$x^2 = -\frac{c}{a}$$

این معادله، وقتی جواب دارد که  $-\frac{c}{a} \geq 0$  (چرا؟)

در این صورت :

$$\boxed{x = \sqrt{-\frac{c}{a}}} \text{ یا } \boxed{x = -\sqrt{-\frac{c}{a}}}$$

اگر  $-\frac{c}{a} < 0$  ، معادله جواب ندارد (چرا؟).

در حالت کلی :

اگر  $x^2 = k$  و  $k > 0$  ، آن‌گاه  $x = \sqrt{k}$  یا  $x = -\sqrt{k}$  . این طریق پیدا کردن جواب‌های معادله  $x^2 = k$  ، استفاده از خاصیت ریشه زوج است.



## مثال

معادله درجه دوم  $5 - x^2 = 0$  را حل کنید.  
 حل: ابتدا معادله را به شکل  $x^2 = 5$  می‌نویسیم؛  
 با استفاده از خاصیت ریشه زوج:  $x = -\sqrt{5}$  یا  $x = \sqrt{5}$ .

## مثال

با استفاده از خاصیت ریشه زوج، معادله  $(2x+1)^2 = 5$  را حل کنید.  
 از خاصیت ریشه زوج با  $k > 0$  استفاده می‌کنیم:  
 به دو طرف معادله  $(-1)$  را اضافه می‌کنیم:  
 دو طرف را بر ۲ تقسیم می‌کنیم:  

$$2x + 1 = \pm\sqrt{5}$$

$$2x = \pm\sqrt{5} - 1$$

$$x = \frac{\pm\sqrt{5} - 1}{2} \Rightarrow \left| x = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right| \text{ یا } \left| x = \frac{-\sqrt{5} - 1}{2} \right|$$

توجه داشته باشید که نماد  $(\pm)$  نشانگر دو جواب است، یک جواب با علامت مثبت و جواب دیگر با علامت منفی خواهد بود.

## تمرین

معادله‌های زیر را حل کنید:

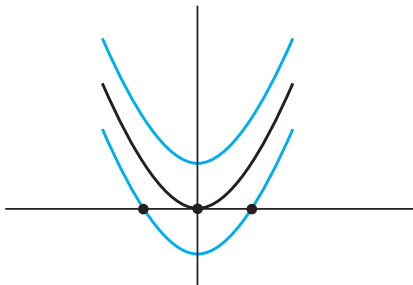
الف)  $(2x+5)^2 = (x-1)^2$

ب)  $x^2 + 7x + 6 = 0$

ت)  $(5x-4)^2 = 9$

پ)  $x^2 = x$

ث)  $(3x-2)^2 = 15$



بررسی تعداد جواب‌های معادله درجه دوم

با توجه به «زنگ تفریح ریاضی» پایان فصل اول،

تابع  $y = f(x) = x^2$  را در نظر می‌گیریم و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

آنگاه، نمودار تابع  $f(x) = x^2 - 1$  را روی همان صفحه مختصات رسم می‌کنیم. سپس، نمودار تابع  $f(x) = x^2 + 1$  را نیز در همان صفحه مختصات رسم می‌کنیم. نتیجه‌ها را بررسی می‌کنیم:

۱- نمودار تابع  $y = f(x) = x^2$  یک ریشه دارد (محل تقاطع نمودار با محور  $x$ ها)، در نتیجه؛ معادله  $y = x^2 = 0$  دارای یک جواب حقیقی یا به عبارت دیگر، دارای یک ریشه مضاعف است.

۲- نمودار تابع  $y = f(x) = x^2 - 1$  دو ریشه دارد (یعنی نمودار تابع؛ محور  $x$ ها را در دو نقطه قطع کرده است). در نتیجه، معادله  $y = x^2 - 1 = 0$  دارای دو جواب حقیقی است.

۳- نمودار تابع  $y = f(x) = x^2 + 1$  هیچ ریشه ندارد (یعنی نمودار تابع، اصلاً محور  $x$ ها را قطع نکرده است). در نتیجه، معادله  $y = x^2 + 1 = 0$  دارای جواب حقیقی نیست.

### تمرین

معادله‌های  $5 - x^2 = 0$  و  $5 + x^2 = 0$ ، خیلی شبیه هستند اما، از نظر تعداد جواب‌ها متفاوت هستند. با استفاده از خاصیت ریشه زوج، توضیح دهید چرا یک معادله دو جواب دارد، اما معادله دیگر، هیچ جواب حقیقی ندارد؟

### ۲-۳-۲- حل معادله درجه دوم به روش مربع کامل کردن

به مثال زیر توجه کنید:

### مثال

جواب‌های معادله  $4x^2 - 4x - 8 = 0$  را پیدا کنید.

حل: معادله را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(4x^2 - 4x) - 8 = 0$$

$$[(2x)^2 - 2(2x) + \square] - 8 - \square = 0 \quad (1)$$

سعی می‌کنیم عبارت داخل پرانتز را به صورت مربع کامل درآوریم: توجه کنید مقداری را که

به داخل کروشه اضافه کرده‌ایم، مجدداً کم می‌کنیم تا تعادل معادله، به هم نخورد!

عبارت داخل کروشه، مربع تفاضل دو جمله است که جمله سوم آن مجهول است. چون

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

جمله وسطی، دو برابر حاصل ضرب جمله اول در دوم است.

پس  $\square$ ،  $2(2x) = 2(2x)$  . می بینید که مقدار  $\square$  باید ۱ باشد تا معادله برقرار باشد، پس در (۱)، مقدار  $\square$  را با ۱ جایگزین می کنیم :

$$[(2x)^2 - 2(2x) + 1^2] - 8 - 1^2 = 0$$

$$(2x - 1)^2 - 9 = 0$$

$$(2x - 1)^2 = 9$$

$$2x - 1 = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

$$2x - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow \underline{x = 2}$$

$$2x - 1 = -3 \Rightarrow 2x = -2 \Rightarrow \underline{x = -1}$$

یا

مربع کامل کردن، یعنی نوشتن معادله درجه دوم به شکل  $(x + h)^2 = k$  که در آن  $h$  و  $k$  اعداد حقیقی هستند.

حل یک معادله درجه دوم با مربع کامل کردن

۱- اگر لازم باشد، دو طرف معادله را بر ضریب  $x^2$  تقسیم کنید تا ضریب آن ۱ شود.

۲- معادله را به شکل  $x^2 + bx = k$  بنویسید.

۳-  $(\frac{b}{2})^2$  را به هر دو طرف تساوی اضافه کنید تا جمله سمت چپ، مربع کامل شود.

۴- سه جمله ای کامل شده را به صورت مربع مجموع یا مربع تفاضل دو جمله بنویسید.

۵- با استفاده از خاصیت ریشه زوج، معادله را حل کنید.

مثال

معادله های درجه دوم زیر را با روش مربع کامل کردن حل کنید.

الف)  $x^2 - 10x - 1 = 0$

حل: به هر دو طرف معادله، ۱ را اضافه کنید.

مربع (مجذور) نصف ضریب  $x$  یعنی  $25 = \left(\frac{-1}{2}\right)^2$  را به هر دو طرف معادله اضافه کنید، تا سه جمله‌ای به صورت مربع کامل درآید.

$$x^2 - 1 \cdot x + 25 = 1 + 25$$

سپس سه جمله‌ای را به صورت مربع تفاضل دو جمله بنویسید.

$$(x - 5)^2 = 26$$

از خاصیت ریشه زوج (مربع) استفاده کنید.

$$x - 5 = \pm \sqrt{26}$$

به دو طرف معادله، ۵ را اضافه کنید.

$$x = 5 \pm \sqrt{26}$$

$$x = 5 + \sqrt{26} \text{ یا } x = 5 - \sqrt{26}$$

توجه: با استفاده از ماشین حساب، مقدار تقریبی  $x$  را حساب کنید.

ب)  $x(2x + 3) = 6$

$$2x^2 + 3x = 6$$

حل: پرانتزها را بردارید.

$$x^2 + \frac{3}{2}x = 3$$

دو طرف را بر ضریب درجه دوم ( $x^2$ ) تقسیم کنید.

به دو طرف، مجذور نصف ضریب  $x$  یعنی  $\frac{9}{16} = \left(\frac{1}{2} \times \frac{3}{2}\right)^2$  را اضافه کنید.

$$x^2 + \frac{3}{2}x + \frac{9}{16} = \frac{3}{1} + \frac{9}{16}$$

$$\left(x + \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{57}{16}$$

طرف چپ مربع کامل است.

$$x + \frac{3}{4} = \pm \sqrt{\frac{57}{16}}$$

از خاصیت ریشه زوج استفاده کنید.

$$x + \frac{3}{4} = \pm \frac{\sqrt{57}}{4}$$

$$x = -\frac{3}{4} \pm \frac{\sqrt{57}}{4}$$

از دو طرف  $\frac{3}{4}$  را کم کنید تا جواب  $x$  به دست آید.

با استفاده از ماشین حساب، مقدار تقریبی  $x$  را حساب کنید.

$$|x \equiv 1/14| \text{ یا } |x \equiv -2/64|$$

پ)  $x^2 + 6x + 8 = 0$

$x^2 + 6x = -8$  از دو طرف ۸ را کم کنید.

مجذور نصف ضریب  $x$  یعنی  $(\frac{6}{2})^2 = 9$  را به دو طرف اضافه کنید تا سه جمله‌ای، مربع کامل

$x^2 + 6x + 9 = -8 + 9$  شود.

$x^2 + 6x + 9 = 1$

$(x + 3)^2 = 1$  سه جمله‌ای را به صورت مربع مجموع دو جمله بنویسید.

$x + 3 = \pm\sqrt{1}$  از خاصیت ریشه زوج استفاده کنید.

$x = -3 \pm 1$  از دو طرف ۳ را کم کنید.

$|x = -2| \text{ یا } |x = -4|$

### تمرین

معادله‌های زیر را از طریق مربع کامل کردن؛ حل کنید:

الف)  $x^2 + 2x = 5$

ب)  $x(2x - 3) = 1$

پ)  $x^2 + 6x + 8 = 0$

### ۳-۲-۲ فرمول حل معادله درجه دوم در حالت کلی

اگر مراحل حل معادله درجه دوم را به روش مربع کامل کردن، برای معادله درجه دوم به شکل استاندارد  $ax^2 + bx + c = 0$  انجام دهیم، می‌توانیم یک فرمول کلی برای پیدا کردن جواب‌های معادله‌های درجه دوم پیدا کنیم. زیرا اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$ ، هر سه مخالف صفر باشند، آن گاه، استفاده از خاصیت فاکتور صفر یا استفاده از خاصیت ریشه زوج، همیشه به سادگی، امکان پذیر نیست. به همین دلیل، به ابزار دیگری برای حل معادله‌های درجه دوم در حالت کلی، نیاز داریم.

## مراحل به دست آوردن فرمول معادله درجه دوم

شکل استاندارد معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

کم کردن c از دو طرف

$$ax^2 + bx = -c$$

تبدیل ضریب جمله درجه دوم به ۱ با تقسیم دو طرف معادله بر a

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

اضافه کردن مجذور نصف ضریب x یعنی  $\left(\frac{1}{2} \times \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$  به دو طرف

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

یکسان کردن مخرج کسرها در سمت راست

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{-4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

ترکیب دو کسر در سمت راست

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

سه جمله ای سمت چپ، مربع کامل است. نوشتن سمت چپ به صورت توانی

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

توجه کنید که تساوی به دست آمده، با توجه به مثبت بودن  $4a^2$  تنها وقتی

معنی دار است که

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

استفاده از خاصیت ریشهٔ زوج

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

کم کردن  $\frac{b}{2a}$  از دو طرف برای پیدا کردن  $x$

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ترکیب دو کسر در سمت راست

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

این فرمول، فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم نامیده می‌شود.

### فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم

برای اعداد حقیقی  $a$ ،  $b$  و  $c$  و با شرط  $a \neq 0$ ، جواب‌های حقیقی معادلهٔ درجهٔ دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  در صورت وجود عبارتند از:

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}, \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$$

توجه: قبل از استفاده از فرمول به دست آمده، معادلهٔ درجهٔ دوم باید به شکل استاندارد نوشته شود.

فکر کنید: چرا در فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم،  $b$  و  $c$  می‌توانند صفر باشند اما  $a$  نمی‌تواند صفر شود؟ چرا این حالت معنی ندارد؟

### مثال

با استفاده از فرمول حل معادلهٔ درجهٔ دوم، معادلهٔ  $3x^2 - 13x = 30$  را حل کنید.

حل: نوشتن معادله به شکل استاندارد  $3x^2 - 13x - 30 = 0$

$a = 3$  ،  $b = -13$  و  $c = -30$  را در فرمول قرار می دهیم :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-13) \pm \sqrt{(-13)^2 - 4(3)(-30)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{169 + 360}}{6}$$

رادیكال را ساده می كنیم :

$$x = \frac{13 \pm \sqrt{529}}{6}$$

۵۲۹ مربع كامل است در نتیجه :

$$x = \frac{13 \pm 23}{6} \begin{cases} = \frac{13+23}{6} = 6 \\ = \frac{13-23}{6} = -\frac{5}{3} \end{cases}$$

**مبین**

در فرمول معادله درجه دوم در حالت کلی یعنی،

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مقدار زیر رادیكال یعنی  $b^2 - 4ac$  مبین نامیده می شود و با علامت  $\Delta$  (بخوانید دلتا) نشان داده می شود. مبین، اطلاعاتی در مورد تعداد جواب های یک معادله درجه دوم با ضرایب حقیقی را، بیان می کند.

**اطلاعات به دست آمده از مبین**

اگر  $a$ ،  $b$  و  $c$  اعداد حقیقی باشند؛ مبین تعداد جواب های یک معادله درجه دوم را به شرح زیر، بیان می کند :

$$1- \text{ اگر } \Delta = b^2 - 4ac > 0 \text{ ، معادله دارای دو جواب متمایز } \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ و } \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ است.}$$



۲- اگر  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ ، معادله یک جواب به صورت  $-\frac{b}{2a}$  دارد (ریشه مضاعف).

۳- اگر  $\Delta = b^2 - 4ac < 0$ ، معادله هیچ جواب حقیقی ندارد (اعداد منفی جذر ندارند).

### مثال

با تشکیل مبین هر معادله، تعداد جواب‌های آن را تعیین کنید.

الف)  $3x^2 + 1 = 2x$

ب)  $x(5x + 1) = 12$

پ)  $25x^2 - 20x + 4 = 0$

حل:

الف)  $3x^2 + 1 = 2x$

$$3x^2 - 2x + 1 = 0$$

نوشتن معادله به شکل استاندارد

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

تشکیل مبین معادله

$$\Delta = (-2)^2 - 4(3)(1) = 4 - 12 = -8$$

چون مبین منفی است، پس معادله جواب حقیقی ندارد.

ب)  $x(5x + 1) = 12$

$$5x^2 + x - 12 = 0$$

نوشتن معادله به شکل استاندارد

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

تشکیل مبین معادله

$$= (1)^2 - 4(5)(-12) = 1 + 240 = 241$$

مبین مثبت است، پس معادله دو جواب متمایز دارد.

پ)  $25x^2 - 20x + 4 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-20)^2 - 4(25)(4) = 400 - 400 = 0$$

مبین صفر است، پس معادله دارای یک جواب حقیقی (ریشه مضاعف) است.

۱- معادله‌های زیر را اول به صورت استاندارد بنویسید و بعد مقادیر  $a$ ،  $b$  و  $c$  را مشخص کنید.

الف)  $x(3x - 2) = 7x + 6$

ب)  $(x - 2)^2 = -4x$

پ)  $1 = 4x(2x - 5)$

۲- معادله‌های زیر را حل کنید.

الف)  $x^2 + 16 = 8x$

ب)  $2x^2 = 7x - 3$

پ)  $x^2 = 5x$

ت)  $2x^2 + 7x = 4$

ث)  $x^2 + 1 = 2x$

۳- با استفاده از مبین، تعداد جواب‌های معادله‌های زیر را تعیین کنید:

الف)  $4x^2 + 12x = 7$

ب)  $3x^2 + 4x - 8 = 0$

پ)  $x^2 + 12 = 8x$

ت)  $1 + 6x - 9x^2 = 0$

۴- چرا معادله  $x^2 + ax - 5 = 0$ ، همیشه جواب‌های حقیقی دارد؟ (بدون توجه به مقدار  $a$ ).

## مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها

### مثال

با استفاده از فرمول معادله درجه دوم، نشان دهید که مجموع ریشه‌های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$

برابر  $-\frac{b}{a}$  است. نتیجه را با حل معادله  $2x^2 - 7x - 15 = 0$  امتحان کنید.

حل: با استفاده از فرمول معادله درجه دوم،

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

پس

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

مخرج مشترک می گیریم.

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} - b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

حال، نتیجه رادر معادله  $2x^2 - 7x - 15 = 0$  امتحان می کنیم:

$$2x^2 - 7x - 15 = 0$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 120}}{4} = \frac{7 \pm \sqrt{169}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm 13}{4}$$

$$x_1 = \frac{7+13}{4} = \frac{20}{4} = 5 \text{ و } x_2 = \frac{7-13}{4} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$$

پس

$$x_1 + x_2 = 5 - \frac{3}{2} = \frac{10}{2} - \frac{3}{2} = \frac{7}{2}$$

از طرفی،

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} = -\frac{(-7)}{2} = \frac{7}{2}$$

یعنی نتیجه به دست آمده در بالا، تأیید شد.

مجموع ریشه های معادله درجه دوم

$$ax^2 + bx + c = 0$$

برابر با  $-\frac{b}{a}$  است.

مثال

الف) با استفاده از فرمول معادله درجه دوم، حاصل ضرب ریشه های معادله  $ax^2 + bx + c = 0$  را

به دست آورید.

حل: برای معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ و } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

حاصل ضرب ریشه‌ها برابر است با :

$$x_1 x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{b^2 - (\sqrt{b^2 - 4ac})^2}{4a^2}$$

با استفاده از اتحاد مزدوج

$$= \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2}$$

$$= \frac{c}{a}$$

ب) با استفاده از نتیجه (الف)، توضیح دهید که چرا  $-4$  و  $5$  نمی‌توانند جواب‌های  $2x^2 - 3x - 20 = 0$  باشند.

حل: در (الف)، دیدیم که حاصل ضرب ریشه‌ها برابر  $\frac{c}{a}$  است. در این معادله،  $a = 2$  و  $c = -20$  است پس :

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-20}{2} = -10$$

اما  $x_1 = -4$  و  $x_2 = 5$  که حاصل ضرب آن‌ها

$$x_1 \cdot x_2 = 5 \cdot (-4) = -20$$

است. پس  $-4$  و  $5$  نمی‌توانند ریشه‌های این معادله باشند.

حاصل ضرب ریشه‌های معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  برابر با  $\frac{c}{a}$  است.

## مسائل

۱- در معادله‌های زیر، مجموع و حاصل ضرب ریشه‌ها را بدون حل معادله،

به دست آورید :

الف)  $3x^2 - 2x - 1 = 0$

ب)  $x^2 + x + 1 = 0$

پ)  $2x^2 - 2x + 1 = 0$

ت)  $x^2 - 4x - 1 = 0$

۲- برای هر دسته از جواب‌های زیر، یک معادله درجه دوم بنویسید :

الف)  $-5 \pm 2\sqrt{5}$

ب)  $-2 \pm 3\sqrt{2}$

۳- با استفاده از فرمول حل معادله درجه دوم، معادله‌های زیر را حل کنید :

الف)  $x^2 + \sqrt{3}x - 1 = 0$

ب)  $\sqrt{2}x^2 + \sqrt{5}x - \sqrt{8} = 0$

## ۲-۴- معادله‌های کسری

گاهی ساده کردن کسرهای گویا، به یک معادله درجه دوم منجر می‌شود.

### مثال

معادله  $\frac{2}{t} - \frac{t}{t-2} = 5$  را حل کنید.

حل: توجه داشته باشید که ۲ و صفر مقادیر غیرقابل قبولی برای  $t$  هستند. (چرا؟)

$$\frac{2}{t} - \frac{t}{t-2} = 5$$

مخرج مشترک می‌گیریم

$$\frac{t(t-2)}{1} \times \frac{2}{t} - \frac{t(t-2)}{1} \times \frac{t}{t-2} = 5t(t-2)$$

ضرب می‌کنیم

$$2(t-2) - t^2 = 5t^2 - 10t$$

ساده می‌کنیم

$$-6t^2 + 12t - 4 = 0$$

معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم

حال از فرمول حل معادله درجه دوم برای پیدا کردن  $t$  استفاده می‌کنیم :

$$\begin{aligned} t &= \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4(-6)(-4)}}{2(-6)} = \frac{-12 \pm \sqrt{144 - 96}}{-12} = \frac{-12 \pm \sqrt{48}}{-12} \\ &= \frac{-12 \pm \sqrt{16} \times \sqrt{3}}{-12} = \frac{-12 \pm 4\sqrt{3}}{-12} = \frac{3 \mp \sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

هر دو جواب معادله قابل قبول هستند.

$$t \cong 1/58 \text{ یا } t \cong 0/42$$

## ۵-۲- حل معادلات رادیکالی

برای حل معادلات رادیکالی، دو طرف معادله را به توان فرجه رادیکال می‌رسانیم. ممکن است که معادله نتیجه شده، درجه دوم باشد که در آن صورت، با یکی از ۴ روش موجود آن‌ها را حل می‌کنیم.

### مثال

معادله  $\sqrt{x+1} = x-2$  را حل کنید.

حل: دو طرف معادله را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$(\sqrt{x+1})^2 = (x-2)^2$$

دوجمله‌ای را به توان می‌رسانیم

$$x+1 = x^2 - 4x + 4$$

معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$x^2 - 5x + 3 = 0$$

حال با استفاده از فرمول حل معادله درجه دوم،  $x$  را به دست می‌آوریم:

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(3)}}{2(1)} = \frac{5 \pm \sqrt{13}}{2} = \begin{cases} \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \cong 4/3^{\circ} \\ \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \cong 0/7^{\circ} \end{cases}$$

با قراردادن این دو جواب ممکن در معادله، می‌بینیم که  $0/7^{\circ}$  یک جواب غیرقابل قبول است

(چرا؟) پس تنها جواب معادله،  $\frac{5 + \sqrt{13}}{2}$  یا تقریباً  $4/3^{\circ}$  است.

تذکر: بهتر است قبل از حل معادلات رادیکالی، ابتدا دامنه جواب را پیدا

کنیم و سپس معادله‌ها را حل کنیم. در مثال بالا، مقدار زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد یعنی

$$x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1$$

چون طرف چپ معادله بزرگتر یا مساوی صفر است (نامنفی است)، طرف راست معادله نیز باید نامنفی باشد یعنی

$$x - 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq 2$$

با توجه به دو شرط  $x \geq -1$  و  $x \geq 2$ ، نتیجه می‌شود که  $x \geq 2$  قابل قبول است.

توجه: اگر معادله‌ای را بتوان به شکل  $au^2 + bu + c = 0$  نوشت که در آن،  $u$  یک عبارت جبری باشد، می‌گوییم معادله به شکل درجه دوم است. برای حل چنین معادله‌ای، جایگزینی انتخاب می‌کنیم تا معادله را بر حسب  $u$  بنویسیم. سپس از روش‌های حل معادله درجه دوم استفاده می‌کنیم.

### مثال

معادله‌های زیر را حل کنید :

الف)  $x^4 - 6x^2 + 8 = 0$

ب)  $16(z-1)^2 - 8(z-1) - 2 = 0$

حل:

الف) اولین جمله یعنی  $x^4$ ، مربع  $x^2$  در جمله دوم است.

$$x^4 - 6x^2 + 8 = 0$$

$x^4$  را بر حسب  $x^2$  می‌نویسیم

$$(x^2)^2 - 6x^2 + 8 = 0$$

$x^2$  را مساوی  $u$  قرار می‌دهیم

$$x^2 = u \Rightarrow (x^2)^2 = u^2$$

سه جمله‌ای را بر حسب  $u$  می‌نویسیم

$$u^2 - 6u + 8 = 0$$

سه جمله‌ای را به عوامل اول تجزیه می‌کنیم

$$(u-2)(u-4) = 0$$

با استفاده از خاصیت فاکتور صفر معادله را حل می‌کنیم

$$u-2=0 \text{ یا } u-4=0$$

$$u=2 \text{ یا } u=4$$

به جای  $u$ ، معادل آن  $x^2$  را قرار می‌دهیم

$$x^2 = 2 \text{ یا } x^2 = 4$$

از خاصیت ریشه زوج استفاده می‌کنیم

$$x = \pm\sqrt{2} \cong \pm 1/41 \text{ یا } x = \pm 2$$

معادله دارای چهار جواب  $\pm\sqrt{2}$  و  $\pm 2$  است.

$$\text{ب) } 16(z-1)^2 - 8(z-1) - 2 = 0$$

$u$  را  $z-1$  انتخاب کنید پس:  $u^2 = (z-1)^2$  و

$$16u^2 - 8u - 2 = 0$$

از حل فرمول معادله درجه دوم برای به دست آوردن  $u$  استفاده کنید:

$$\begin{aligned} u &= \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(16)(-2)}}{2(16)} = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 128}}{32} = \frac{8 \pm \sqrt{192}}{32} \\ &= \frac{8 \pm \sqrt{64} \times \sqrt{3}}{32} = \frac{8 \pm 8\sqrt{3}}{32} = \frac{8(1 \pm \sqrt{3})}{32} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{4} \end{aligned}$$

$$u \cong 0/68 \text{ یا } u \cong -0/18$$

برای محاسبه  $z$ ، مقدار  $u$  را در  $u = z-1$  قرار می‌دهیم:

$$z-1 \cong 0/68 \Rightarrow z \cong 1/68$$

$$z-1 \cong -0/18 \Rightarrow z \cong 0/82$$

یا

## فعالیت ۲-۱

$$\text{الف) معادله } \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{2}{x-2} - 3 = 0 \text{ را در نظر بگیرید.}$$

۱- آیا این معادله درجه دوم است؟

۲- اگر معادله درجه دوم باشد، آیا جایگزینی  $u = x-2$  را انتخاب می‌کنید یا

$$? u = \frac{1}{x-2}$$

۳- آیا هر دو جایگزینی جواب یکسانی برای  $u$  و  $x$  به دست می‌دهد؟



(ب)

۱- معادله  $x + \frac{1}{x-1} - \frac{5-4x}{x-1} = 0$  را در نظر بگیرید؛ نشان دهید که نتیجه

کسرهای ساده شده؛ معادله  $x^2 + 3x - 4 = 0$  است که دارای دو جواب است. آن‌گاه نشان دهید که اگر اول جمع و تفریق را انجام دهیم و بعد نتیجه را ساده کنیم، یک معادله درجه یک با یک جواب به دست می‌آوریم. علت این اختلاف را توضیح دهید.

۲- به جز پیدا کردن اشتباهات جبری، چرا امتحان کردن جواب معادله‌های با عبارت‌های گویا، اساسی است؟ بحث کنید.

## مسائل

۱- معادله‌های زیر را حل کنید:

الف)  $\frac{3}{x} = 2 + \frac{4}{x^2}$

ب)  $\frac{y}{y+1} = \frac{y+1}{3}$

پ)  $\frac{t-3}{t} = \frac{2}{t-3}$

ت)  $x+1 = \frac{2}{2x+3}$

ث)  $\frac{x}{x-3} - \frac{1}{2x-1} = \frac{5x}{2x^2-7x+3}$

۲- معادله  $\sqrt{x^2-5} + 2\sqrt{x} = 0$  را حل کنید. سپس در مورد قابل قبول بودن ریشه‌های آن

بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

۳- به جز پیدا کردن اشتباهات جبری، چرا امتحان کردن جواب‌های معادلاتی با عبارت‌های

رادیکالی اساسی است؟

۴- معادلات رادیکالی زیر را حل کنید:

الف)  $5 = 3\sqrt{x} + \frac{2}{\sqrt{x}}$

ت)  $\sqrt{x} \times \sqrt{x+3} = 1$

ب)  $\sqrt{x+1} - \frac{2}{\sqrt{x+1}} = 1$

ث)  $2y+1 = \sqrt{11y-1}$

پ)  $\sqrt{3x+4} = \sqrt{x-2} - 3$

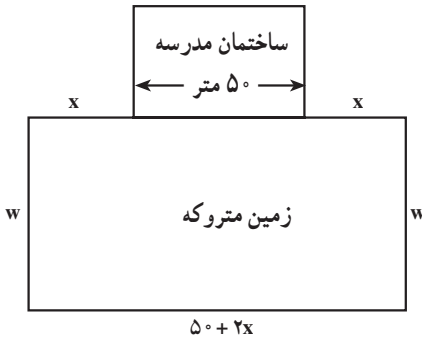
ج)  $\sqrt{2x} \times \sqrt{x-3} = 6$

## ۶-۲ کاربردهای معادلهٔ درجهٔ دوم

یکی از کاربردهای مهم معادلهٔ درجهٔ دوم، مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی توسط آن است. مسألهٔ زیر نمونه‌ای از یک پدیدهٔ واقعی است که به وسیلهٔ یک معادلهٔ درجهٔ دوم، مدل‌سازی شده است.

### مثال

#### محاسبهٔ مساحت زمین بازی



پس از تلاش‌های فراوان، مدیر یک دبیرستان موفق شد قطعه زمین مستطیل شکلی را به مساحت  $2800$  مترمربع که پشت ساختمان مدرسه به صورت مخروبه درآمد بود، خریداری کند و دور آن را نرده بکشد. برای این کار  $170$  متر نرده لازم است. طرز قرارگرفتن زمین مخروبه و ساختمان مدرسه به شکل مقابل است:

ابعاد (طول و عرض) زمین را به دست آورید.

حل: با توجه به شکل، طول زمین مستطیل شکل که با  $L$  نشان می‌دهیم، برابر با  $50 + 2x$  می‌شود. عرض زمین بازی را  $w$  در نظر می‌گیریم. توجه داشته باشید که در قسمت پشت ساختمان نیازی به نرده نیست.

پس کل نرده استفاده شده عبارت خواهد بود از:

$$x + w + (50 + 2x) + w + x = 170$$

$$2w + 4x + 50 = 170 \quad \text{عبارت را ساده می‌کنیم}$$

$$2w = 120 - 4x \quad \text{عبارت را برای } w \text{ حل می‌کنیم}$$

$$w = 60 - 2x$$

مساحت مستطیل از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$A = L \cdot w$$

مقادیر  $A$ ،  $L$  و  $w$  را جایگزین می‌کنیم:

۱-  $A$  اول کلمهٔ Area به معنی مساحت است.

۲-  $L$  اول کلمهٔ Length به معنی طول است.

۳-  $w$  اول کلمهٔ Width به معنی عرض است.

$$2800 = (50 + 2x)(60 - 2x)$$

$$2800 = 3000 + 20x - 4x^2$$

معادله را به شکل استاندارد می نویسیم

$$4x^2 - 20x - 200 = 0$$

دو طرف معادله را بر ۴ تقسیم می کنیم

$$x^2 - 5x - 50 = 0$$

سه جمله ای را تجزیه می کنیم

$$(x - 10)(x + 5) = 0$$

از خاصیت فاکتور صفر استفاده می کنیم

$$x - 10 = 0 \text{ یا } x + 5 = 0$$

$$x = 10 \text{ یا } x = -5$$

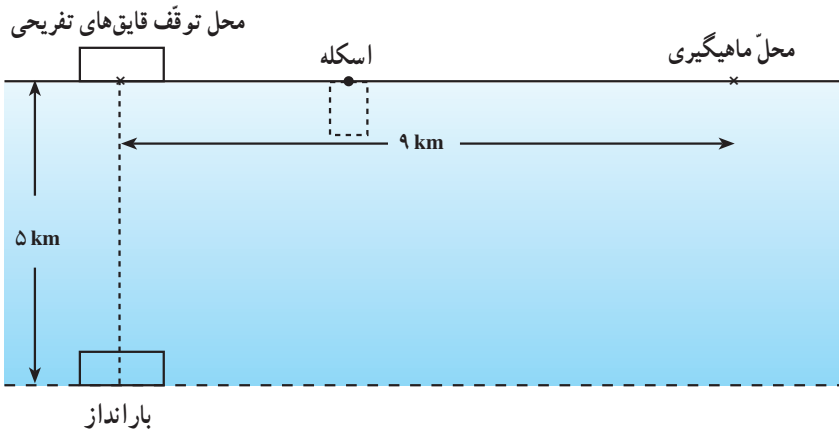
چون فاصله نمی تواند منفی باشد پس  $x = 10$  قابل قبول است در نتیجه :

$$L = 50 + (2 \times 10) = 70 \text{ متر}$$

$$W = 60 - (2 \times 10) = 40 \text{ متر}$$



مثال: یک دریاچه تفریحی را با موقعیت زیر، در نظر بگیرید:

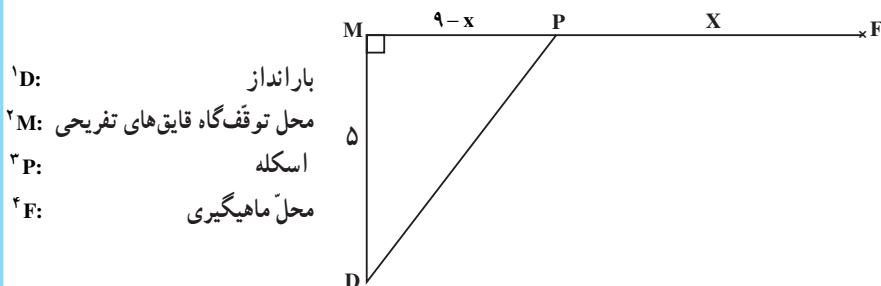


یک ماهیگیر با قایق و با سرعت ۸ کیلومتر در ساعت، از بارانداز به سمت اسکله حرکت کرد. سپس پیاده و با سرعت ۶ کیلومتر در ساعت، از اسکله به سمت محل ماهیگیری حرکت کرد. اگر فاصله محل توقف قایق‌های تفریحی تا محل ماهیگیری ۹ کیلومتر باشد و زمان رفتن از بارانداز تا محل ماهیگیری،  $1\frac{1}{5}$  ساعت طول کشیده باشد، ماهیگیر چند کیلومتر پیاده روی کرده است؟



صید با تور دستی (سالیه) و قایق گردنه (قایق از شاخ و برگ نخل). بندر زیارت

حل: در شکل زیر، مکان ها را با حروف مشخص کرده ایم.



فاصله ای را که ماهیگیر از اسکله تا محل ماهیگیری (یعنی از P تا F) طی می کند، با  $x$  نشان می دهیم. چون فاصله از M تا F ۹ کیلومتر است، در نتیجه فاصله M تا P برابر  $9-x$  می شود. با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث قائم الزاویه DMP، فاصله بارانداز تا اسکله (DP) یعنی مسافتی را که قایق طی کرده است، به دست می آوریم:

$$(DP)^2 = (DM)^2 + (MP)^2$$

$$(DP)^2 = (5)^2 + (9-x)^2 = 25 + (9-x)^2$$

$$DP = \sqrt{25 + (9-x)^2}$$

مدت زمانی که ماهیگیر طی می کند تا از بارانداز به محل ماهیگیری برسد مشخص است. یعنی:

$$(۱) \quad \text{ساعت } ۱/۵ = \text{مدت زمان پیاده روی} + \text{مدت زمان طی شده با قایق}$$

برای یافتن این مدت زمان ها از فرمول سرعت استفاده می کنیم:

$$\frac{\text{فاصله}}{\text{زمان}} = \text{سرعت} \Rightarrow \frac{\text{فاصله}}{\text{سرعت}} = \text{زمان}$$

و با استفاده از جدول (۲)، این زمان ها را پیدا می کنیم.

۱- D اول کلمه Dock به معنی بارانداز است.

۲- M اول کلمه Marina به معنی محل توقف گاه قایق های تفریحی است.

۳- P اول کلمه Pier به معنی اسکله است.

۴- F اول کلمه Fishing spot به معنی محل ماهیگیری است.

## جدول ۲

فاصله به کیلومتر	سرعت (کیلومتر / ساعت)	زمان (ساعت)
قایق $\sqrt{25+(9-x)^2}$ (از بارانداز تا اسکله)	۸	$\frac{\sqrt{25+(9-x)^2}}{8}$
پیاده (از اسکله تا محل ماهیگیری)	۶	$\frac{x}{6}$

این زمان‌ها را در رابطه (۱) جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{\sqrt{25+(9-x)^2}}{8} + \frac{x}{6} = 1/5$$

زمان کل سفر (با قایق و پیاده) ۱/۵ ساعت است.

کسرهارا با ضرب کردن دو طرف در ۶، م، م مخرج که ۲۴ است، ساده می‌کنیم.

$$\frac{24}{1} \cdot \frac{\sqrt{25+(9-x)^2}}{8} + \frac{24}{1} \cdot \frac{x}{6} = 24 \times 1/5$$

$$3\sqrt{25+(9-x)^2} + 4x = 36$$

ساده می‌کنیم

رادیکال را در یک طرف نگه می‌داریم

$$\left[ 3\sqrt{25+(9-x)^2} \right] = 36 - 4x$$

دو طرف را به توان ۲ می‌رسانیم.

$$\left[ 3\sqrt{25+(9-x)^2} \right]^2 = (36 - 4x)^2$$

از خاصیت  $(ab)^2 = a^2b^2$  برای سمت چپ، استفاده می‌کنیم.

$$9[25+(9-x)^2] = (36-4x)^2$$

با استفاده از اتحاد مربع تفاضل دو جمله، دو طرف را به توان می‌رسانیم.

$$9[25+81-18x+x^2] = 1296-288x+16x^2$$

۹ را در پرانتز ضرب می‌کنیم

$$225+729-162x+9x^2 = 1296-288x+16x^2$$

معادله را ساده کرده و به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$-7x^2 + 126x - 342 = 0$$

دو طرف را در  $(-1)$  ضرب می‌کنیم

$$7x^2 - 126x + 342 = 0$$

از فرمول حل معادله درجه دوم استفاده می‌کنیم.

$$x = \frac{126 \pm \sqrt{(126)^2 - 4 \times 7 \times 342}}{2 \times 7}$$

$$= \frac{126 \pm \sqrt{15876 - 9576}}{14}$$

$$= \frac{126 \pm \sqrt{6300}}{14}$$

چون  $\sqrt{6300}$ ، مربع کامل نیست، مقدار تقریبی آن را می‌نویسیم،

$$\cong \frac{126 \pm 79/37}{14}$$

بنابراین

$$x \cong \frac{126 + 79/37}{14} \cong 14/67 \quad \text{یا} \quad x \cong \frac{126 - 79/37}{14} \cong 3/33$$

هر دو جواب  $x$  را امتحان می‌کنیم<sup>۱</sup>:

اگر  $x = 14/67$ ، آنگاه  $x - 14/67 = 9 - 14/67 = 5/67$  که قابل قبول نیست،

زیرا فاصله نمی‌تواند منفی باشد.

اگر  $x = 3/33$ ، آنگاه  $x - 3/33 = 9 - 3/33 = 5/67$  که قابل قبول است.

پس ماهیگیر،  $3/33$  کیلومتر، پیاده‌روی کرده است.

## نسبت و تناسب

از نظر ریاضیدان‌های یونان قدیم، زیباترین مستطیل‌ها، آن‌هایی بودند که اندازه طول و عرض

آنها، متناسب با  $\frac{W}{L} = \frac{L}{W+L}$  بود. این نسبت، به نسبت طلایی<sup>۲</sup> معروف است.

۱- امتحان کردن جواب‌های به‌دست‌آمده در مسأله‌های کاربردی و دنیای واقعی، یک ضرورت است.

۲- Golden Ratio

یک زمین ورزش مستطیل شکل. به گونه‌ای ساخته شده است که اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی است. محیط این زمین ۲۰۰۰ متر است. طول و عرض آن چقدر است؟  
 حل:  $L$  را برابر طول مستطیل،  $W$  را برابر عرض آن و  $P$  را محیط آن که مساوی ۲۰۰۰ متر است در نظر می‌گیریم:

$$2L + 2W = P$$

$$2L + 2W = 2000$$

$$L + W = 1000$$

$$W = 1000 - L$$

$W$  را با  $1000 - L$  در فرمول نسبت طلایی جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{W}{L} = \frac{L}{W + L}$$

$$\frac{1000 - L}{L} = \frac{L}{1000}$$

دو طرف را در  $1000L$  که همان ک.م.م (کوچکترین مضرب مشترک) مخرج‌هاست ضرب

می‌کنیم:

$$\frac{1000L}{1} \times \frac{1000 - L}{L} = \frac{L}{1000} \times \frac{1000L}{1}$$

تساوی را ساده می‌کنیم

$$1000000 - 1000L = L^2$$

معادله را به شکل استاندارد می‌نویسیم

$$L^2 + 1000L - 1000000 = 0$$

با استفاده از فرمول حل معادله درجه دوم، مقدار  $L$  را پیدا می‌کنیم:

$$L = \frac{-1000 \pm \sqrt{(1000)^2 - 4(-1000000)}}{2} = \frac{-1000 \pm \sqrt{1000000 + 4000000}}{2}$$

$$= \frac{-1000 \pm \sqrt{5 \times 10^6}}{2} = \frac{-1000 \pm 1000\sqrt{5}}{2} = -500 \pm 500\sqrt{5}$$



چون طول مثبت است پس

$$L = 500\sqrt{5} - 5000 = 500(\sqrt{5} - 1)$$

قابل قبول است.

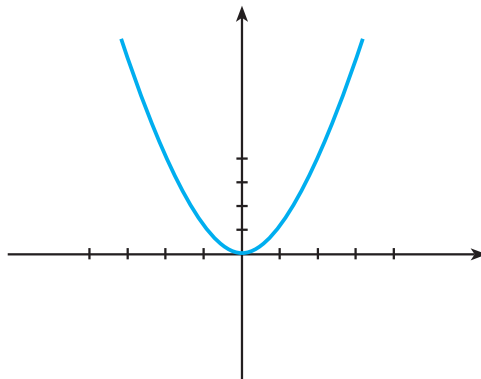
### نکته خواندنی

اگر از یک مستطیل طلایی، یک مربع جدا شود، مستطیل باقی مانده نیز، یک مستطیل طلایی است.

## ۷-۲- رسم نمودارهای تابع درجه دوم

برای رسم نمودار  $y = f(x)$ ، نقاط  $(x, y)$  را که مختصات آنها در ضابطه تابع صدق می کند، در صفحه مختصات تعیین می کنیم. به طور مثال، برای رسم ساده ترین معادله درجه دوم یعنی  $y = x^2$ ، می توانیم با جدول مقادیر تابع شروع کنیم. سپس با استفاده از نقاط به دست آمده و تعیین آنها در صفحه مختصات، نمودار  $y = x^2$  را رسم می کنیم.

$x$	...	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	...
$x^2$	...	۹	۴	۱	۰	۱	۴	۹	...



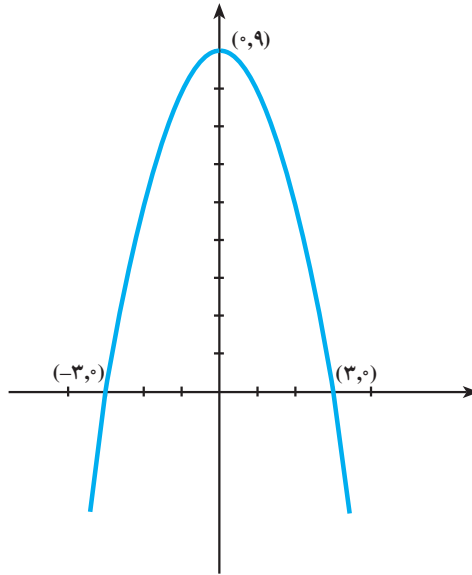
مثال

نمودار  $f(x) = 9 - x^2$  را رسم کنید.

حل: جدول مقادیر تابع  $f(x) = 9 - x^2$  را تشکیل می‌دهیم:

$x$	...	-۴	-۳	-۱	۰	۱	۳	۴	...
$9 - x^2$	...	-۷	۰	۸	۹	۸	۰	-۷	...

سپس با تعیین نقاط به‌دست آمده در صفحه مختصات و اتصال آن‌ها به یکدیگر، نمودار زیر به‌دست می‌آید.

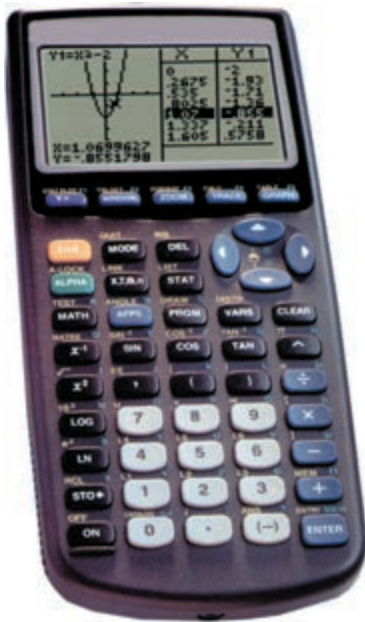


نمودار تابع درجه دوم، سهمی نامیده می‌شود.

سهمی  $y = x^2$  به سمت بالا باز شده است. در این حالت، سهمی دارای کمترین مقدار است. سهمی  $y = 9 - x^2$  وارونه شده است. (به سمت پایین باز شده است) و دارای بیشترین مقدار است. نقطه‌ای که در آن، سهمی دارای بیشترین یا کمترین مقدار است رأس سهمی نامیده می‌شود. سهمی‌های شکل‌های بالا نسبت به خط عمودی که از رأس می‌گذرد متقارن هستند. این خط محور تقارن نامیده می‌شود. اگر نمودارها را روی این محور تا کنیم، دو طرف سهمی بر هم منطبق می‌شوند.

## انواع نمودار $y = x^2$

اغلب نمودارهای تابع درجه دوم را می‌توان با مقایسه آن‌ها با تابع  $y = x^2$  رسم کرد. (به زنگ تفریح ریاضی پایان فصل اول توجه کنید.)



اگر ماشین حساب گرافیکی در اختیار دارید، این فعالیت را با استفاده از آن انجام دهید. در غیر این صورت با استفاده از جدول مقادیر، نمودارهای خواسته شده را با توجه به نمودار  $y = x^2$  و  $y = -x^2$  رسم کنید.

(الف)

۱- نمودار تابع‌های  $y = 2x^2$  و  $y = -2x^2$  را رسم کنید.

۲- نمودار تابع‌های  $y = 3x^2$  و  $y = -3x^2$  را رسم کنید.

۳- نمودار تابع‌های  $y = 5x^2$  و  $y = -5x^2$  را رسم کنید.

۴- در حالت کلی، نمودار تابع  $y = ax^2$  را که  $a$  عدد صحیح باشد، رسم کنید.

۵- فرق این نمودارها با نمودارهای  $y = x^2$  و  $y = -x^2$  چیست؟

۶- اگر ضریب  $x^2$  را یک عدد خیلی بزرگ انتخاب کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟

۷- اگر ضریب  $x^2$  را یک عدد خیلی کوچک انتخاب کنیم، چه اتفاقی می‌افتد؟

(ب)

۱- نمودار تابع‌های  $y = \frac{1}{4}x^2$  و  $y = -\frac{1}{4}x^2$  را رسم کنید.

۲- نمودار تابع‌های  $y = \frac{1}{3}x^2$  و  $y = -\frac{1}{3}x^2$  را رسم کنید.

۳- نمودار تابع‌های  $y = \frac{1}{5}x^2$  و  $y = -\frac{1}{5}x^2$  را رسم کنید.

۴- فرق این نمودارها، با نمودارهای  $y = x^2$  و  $y = -x^2$  چیست؟

۵- اگر در  $y = \frac{1}{a}x^2$  ( $a$  عدد طبیعی است)  $a$  بزرگ و بزرگتر شود، چه اتفاقی

می‌افتد؟

۶- اگر در  $y = -\frac{1}{a}x^2$  (a عدد طبیعی است)، a بزرگ و بزرگتر شود چه اتفاقی می افتد؟

با توجه به نتایجی که به دست آورده اید، یک قانون کلی برای رسم نمودارهای  $y = ax^2$  و  $y = \frac{1}{a}x^2$  (a عدد صحیح و غیر صفر) پیدا کنید.

حال با توجه به قانون به دست آمده و بدون تشکیل جدول مقادیر، سهمی های  $ax^2$  و  $\frac{1}{a}x^2$  را در مقایسه با  $x^2$  رسم کنید.

با توجه به نتایج به دست آمده، جاهای خالی زیر را پر کنید :

♦ اگر  $|a|$  افزایش یابد، سهمی ... و ... می شود.

♦ اگر  $\left|\frac{1}{a}\right|$  کاهش یابد، سهمی ... و ... می شود.

می بینیم که مقدار a، باعث باز و بسته شدن سهمی می شود و علامت a، جهت سهمی را مشخص می کند (رو به بالا یا رو به پایین بودن سهمی).  
توجه: رأس تمام سهمی های  $y = ax^2$ ، مبدأ مختصات است.

## فعالیت ۲-۳

(الف)

- ۱- نمودار  $f(x) = x^2$  را رسم کنید.
- ۲- نمودار  $f(x) = x^2 + 1$  را رسم کنید.
- ۳- نمودار  $f(x) = x^2 - 1$  را رسم کنید.
- ۴- نمودار  $f(x) = x^2 + 5$  را رسم کنید.
- ۵- نمودار  $f(x) = x^2 - 4$  را رسم کنید.
- ۶- نمودار  $f(x) = x^2 - 8$  را رسم کنید.

(ب)

- ۱- این نمودارها با نمودار  $f(x) = x^2$  چه فرقی دارند؟
- ۲- نمودار  $f(x) = x^2 + a$  چه فرقی با نمودار  $f(x) = x^2$  دارد؟ (در حالتی که

$a > 0$  یا  $a < 0$  باشد).

۳- یک قاعده کلی برای رسم نمودارهای  $f(x) = x^2 + a$  در مقایسه با  $f(x) = x^2$  به دست آورید. (بدون آن که به تشکیل جدول مقادیر نیاز داشته باشیم).

## فعالیت ۲-۴

(الف)

۱- نمودار  $f(x) = x^2$  را رسم کنید.

۲- نمودار  $f(x) = (x+2)^2$  را رسم کنید و فرق آن را با نمودار  $f(x) = x^2$  بیان نمایید.

۳- نمودار  $f(x) = (x-2)^2$  را رسم کنید و فرق آن را با نمودار  $f(x) = x^2$  بیان نمایید.

۴- نمودار  $f(x) = (x+6)^2$  را رسم کنید و فرق آن را با نمودار  $f(x) = x^2$  بیان کنید.

۵- نمودار  $f(x) = (x-6)^2$  را رسم کنید و فرق آن را با نمودار  $f(x) = x^2$  بیان نمایید.

(ب)

۱- نمودار  $f(x) = (x+a)^2$  ( $a > 0$  ,  $a < 0$ ) چه فرقی با نمودار  $f(x) = x^2$  دارد؟

۲- یک قاعده کلی برای رسم نمودارهای  $f(x) = (x+a)^2$  در مقایسه با نمودار  $f(x) = x^2$  پیدا کنید. ( $a > 0$  ,  $a < 0$ )

## نتیجه

رأس نمودار تابع های  $f(x) = x^2 + a$  در مقایسه با  $f(x) = x^2$  به اندازه  $a$  واحد روی محور  $y$  ها انتقال می یابد (اگر  $a > 0$  باشد به سمت بالا و اگر  $a < 0$  باشد به اندازه  $|a|$  واحد به سمت پایین می رود) رأس سهمی نیز به اندازه  $a$  واحد بالا یا پایین مبدأ مختصات قرار می گیرد. محور تقارن سهمی همان محور  $y$  ها است که نسبت به محور تقارن  $f(x) = x^2$  ثابت می ماند.

رأس نمودار  $f(x) = (x+a)^2$  به اندازه  $a$  واحد از مبدأ مختصات روی محور  $x$  ها انتقال

می‌یابد. (اگر  $a > 0$ ، سهمی به اندازه  $a$  واحد به سمت چپ منتقل می‌شود و اگر  $a < 0$ ؛ سهمی به اندازه  $|a|$  واحد به سمت راست منتقل می‌شود.)

محور تقارن نمودار  $f(x) = (x+a)^2$  نیز نسبت به نمودار  $f(x) = x^2$  به اندازه  $|a|$  واحد به سمت چپ یا راست محور  $x$  ها انتقال می‌یابد.

نتیجهٔ فعالیت‌های ۲-۳ و ۲-۴ را می‌توان در جدول زیر، خلاصه کرد.

جدول ۳

محور تقارن سهمی	رأس سهمی	سهمی
$x = 0$	$(0, k)$	$f(x) = x^2 + k$
$x = -a$	$(-a, 0)$	$g(x) = (x+a)^2$

### مثال

با استفاده از نمودار  $y = x^2$  به عنوان راهنما، نمودار هریک از تابع‌های زیر را رسم کرده و رأس سهمی و محور تقارن هریک را تعیین کنید.

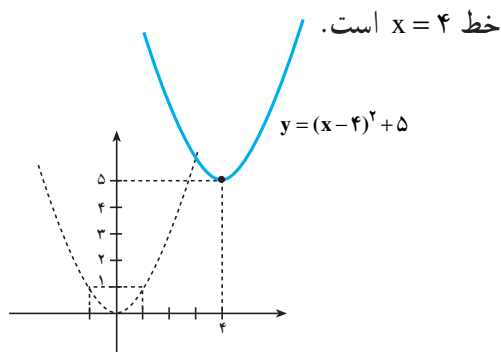
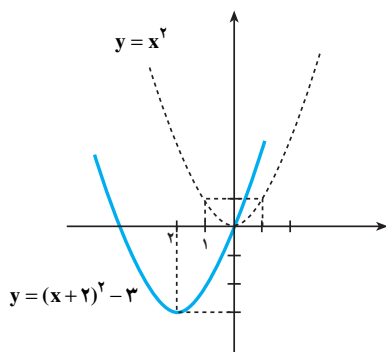
الف)  $f(x) = (x+2)^2 - 3$

ب)  $g(x) = (x-4)^2 + 5$

حل:

الف) نمودار  $f(x) = (x+2)^2 - 3$  همان نمودار  $y = x^2$  است که رأس آن ۲ واحد به سمت چپ و ۳ واحد به سمت پایین انتقال یافته است. مختصات رأس این نمودار  $(-2, -3)$  است و محور تقارن آن خط  $x = -2$  می‌باشد.

ب) نمودار  $g(x) = (x-4)^2 + 5$  همان نمودار  $y = x^2$  است که رأس آن ۴ واحد به سمت راست و ۵ واحد به سمت بالا انتقال یافته است. مختصات رأس این نمودار  $(4, 5)$  و محور تقارن، خط  $x = 4$  است.



نمودار تابع  $f(x) = a(x-h)^2 + k$  همان نمودار تابع  $y = ax^2$  است که رأس آن به نقطه  $(h, k)$  انتقال یافته است.

### ۱-۷-۲- رأس سهمی و نقاط تلاقی سهمی با محورهای مختصات

در رسم نمودار یک تابع درجه دوم، تعیین رأس سهمی مهم است. برای تعیین مختصات رأس، می‌توانیم از روش مربع کامل کردن برای نوشتن تابع به شکل  $f(x) = a(x-h)^2 + k$  استفاده کنیم.

### تعیین رأس سهمی با مربع کامل کردن

#### مثال

رأس نمودار  $f(x) = x^2 - 8x + 10$  را تعیین کنید.

حل: با استفاده از روش مربع کامل کردن، تابع را به شکل  $f(x) = (x-h)^2 + k$  می‌نویسیم.

$$f(x) = x^2 - 8x + 10$$

$$f(x) - 10 = x^2 - 8x \quad \text{کم کردن } 10 \text{ از دو طرف}$$

اضافه کردن مجذور نصف ضریب  $x$  یعنی  $16 = \left(-\frac{8}{2}\right)^2$  به دو طرف

$$f(x) - 10 + 16 = x^2 - 8x + 16$$

$$f(x) + 6 = (x - 4)^2 \quad \text{طرف دوم مربع کامل است. آن را به صورت توانی می‌نویسیم}$$

$$f(x) = (x - 4)^2 - 6 \quad \text{۶- را به دو طرف اضافه می‌کنیم:}$$

در این صورت در تابع درجه دوم  $f(x)$ ،  $h = 4$  و  $k = -6$  پس مختصات رأس سهمی برابر  $(4, -6)$  است.

با این ترتیب برای به دست آوردن رأس سهمی، هر بار باید این فرایند را طی کرد. اگر همین روش را برای شکل عمومی توابع درجه دوم یعنی:  $f(x) = ax^2 + bx + c$  به کار ببریم، آن گاه می‌توانیم فرمولی برای پیدا کردن مختصات رأس  $V(h, k)$  پیدا کنیم.

۱-۷-۲- Vertex به معنی رأس است.

برای پیدا کردن مختصات رأس سهمی در حالت کلی، به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

الف) شکل عمومی تابع های درجه دوم را می‌نویسیم:  $f(x) = ax^2 + bx + c$

ب)  $c$  را از دو طرف کم می‌کنیم:  $f(x) - c = ax^2 + bx$

پ) دو طرف را بر  $a$  تقسیم می‌کنیم:  $\frac{f(x) - c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x$

ت) با استفاده از روش مربع کامل کردن، سمت راست را به صورت مربع یک

دوجمله‌ای می‌نویسیم:  $\frac{f(x)}{a} - \frac{c}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x$

مجذور نصف ضریب  $x$  یعنی:  $\left(\frac{1}{2} \times \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$  را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم.

$$\frac{f(x)}{a} - \frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}$$

کسر را ساده می‌کنیم:  $\frac{f(x)}{a} + \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$

را از دو طرف کم می‌کنیم:  $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$

$$\frac{f(x)}{a} = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

دو طرف را در  $a$  ضرب می‌کنیم تا  $f(x)$  به دست آید:

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$$f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

که در آن  $h = -\frac{b}{2a}$  و  $k = \frac{4ac - b^2}{4a}$  است.

پس مختصات رأس برابر است با:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$



### فرمول مختصات رأس سهمی

مختصات رأس سهمی  $f(x) = ax^2 + bx + c$  برابر است با :

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

توجه: برای تعیین مختصات رأس سهمی، بعد از پیدا کردن مختص اول از رابطه  $-\frac{b}{2a}$ ،

می توانید مختص دوم را از طریق  $f(-\frac{b}{2a})$  تعیین کنید.

### محاسبه رأس به صورت جبری

#### مثال

رأس نمودار  $f(x) = 2x^2 + 12x + 17$  را تعیین کنید.

حل: مختص اول رأس برابر است با :

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{-12}{2(2)} = -3$$

و برای تعیین مختص دوم :

$$f(-3) = 2(-3)^2 + 12(-3) + 17 = -1$$

پس مختصات رأس برابر است با  $V(-3, -1)$ .

در حالت کلی، محل تقاطع نمودار با محور  $y$ ها، نقطه ای است که مختص اول آن برابر صفر

باشد. یعنی، برای یک تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ،  $f(0) = c$  محل تقاطع نمودار تابع با

محور  $y$ ها است. پس یک سهمی همیشه محور  $y$ ها را در نقطه  $(0, c)$  قطع می کند.

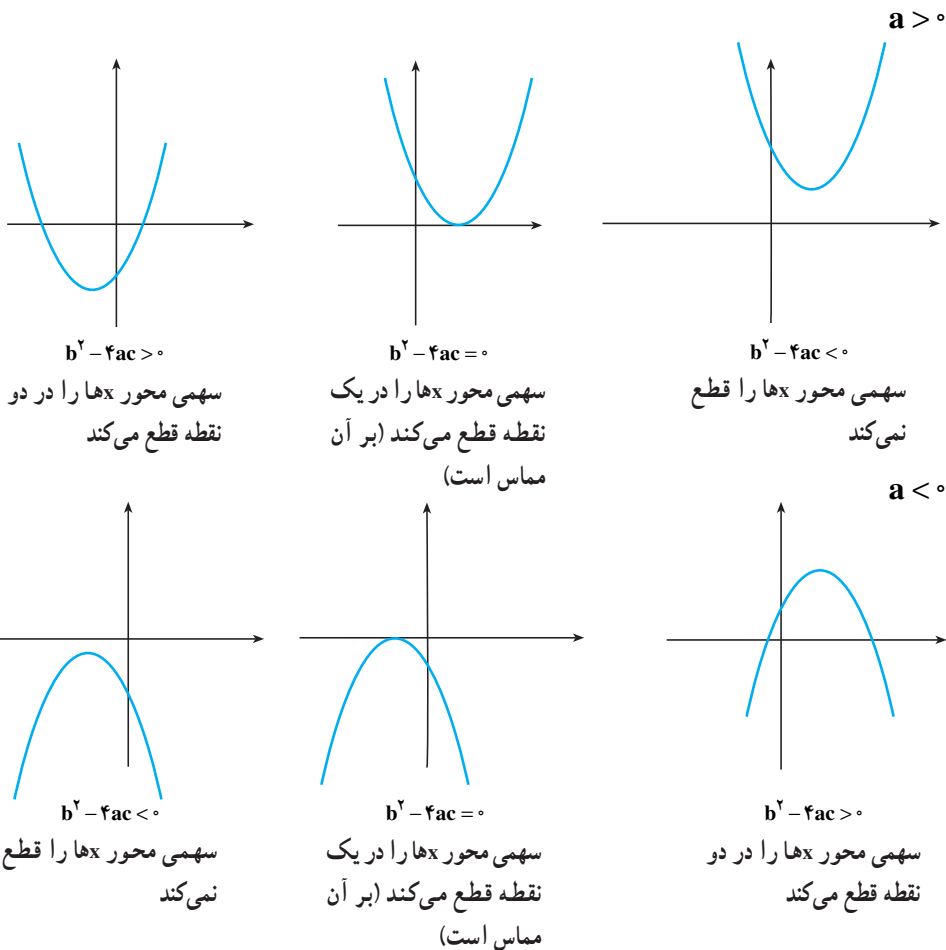
برای تعیین محل تقاطع نمودار با محور  $x$ ها معادله درجه دوم  $ax^2 + bx + c = 0$  را حل

می کنیم. می دانیم که این معادله، می تواند دارای یک یا دو جواب حقیقی باشد یا اصلاً، جواب حقیقی

نداشته باشد. در نتیجه، ممکن است نمودار یک تابع درجه دو، محور  $x$ ها را در یک یا دو نقطه قطع

کند یا اصلاً محور  $x$ ها را قطع نکند.

نتایج به دست آمده را می توان در نمودارهای صفحه بعد خلاصه کرد :



تذکر: بهتر است برای رسم نمودار سهمی ابتدا مختصات رأس و محل های تقاطع با محور  $x$  ها و محور  $y$  ها را تعیین کنید.

**روش رسم تابع درجه دوم  $f(x) = ax^2 + bx + c$**

- ۱- محل تقاطع با محور  $y$  ها  $(0, c)$  را تعیین کنید.
- ۲- محل تقاطع با محور  $x$  ها را از طریق حل  $ax^2 + bx + c = 0$  تعیین کنید.
- ۳- با استفاده از روش مربع کامل کردن یا با استفاده از فرمول رأس، مختصات رأس را پیدا کنید.
- ۴- نقاط به دست آمده در سه مرحله بالا را روی صفحه مختصات مشخص کنید.
- ۵- در صورت لزوم، دو نقطه کمکی در دو طرف رأس سهمی مشخص کرده و آن ها را در

صفحه مختصات معین کنید. نقاط به دست آمده را به هم متصل کرده و ادامه دهید.  
۶- اگر  $a > 0$  سهمی رو به بالا باز می شود و اگر  $a < 0$ ، سهمی به سمت پایین باز می شود.

### مثال

با تعیین رأس و نقاط تلاقی سهمی با محورها، نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف)  $f(x) = 8 - 2x - x^2$

ب)  $h(x) = x^2 - 4x + 1$

پ)  $g(x) = 4x^2 - 12x + 9$

ت)  $s(x) = -2x^2 + 12x - 19$

### حل

الف) در تابع  $f(x) = 8 - 2x - x^2$ ، چون  $a < 0$  ( $a = -1$ )، پس سهمی به سمت پایین باز می شود. محل تقاطع با محور  $y$  ها  $(0, 8)$  است. برای تعیین نقاط تقاطع با محور  $x$  ها، معادله را نسبت به  $x$  حل می کنیم:

$$8 - 2x - x^2 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0$$

$$(x + 4)(x - 2) = 0 \Rightarrow x + 4 = 0 \text{ یا } x - 2 = 0$$

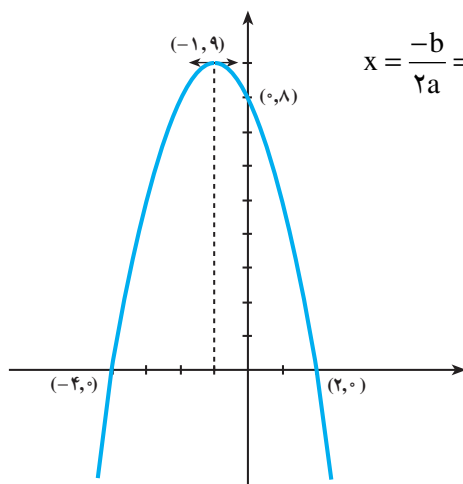
$$\Rightarrow x = -4 \text{ یا } x = 2$$

پس نقاط تلاقی با محور  $x$  ها  $(2, 0)$  و  $(-4, 0)$  هستند.

حال مختصات رأس را حساب می کنیم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{2(-1)} = -1$$

چون  $f(-1) = 9$  پس مختصات رأس برابر است با  $(-1, 9)$ . با قراردادن نقاط تلاقی و رأس روی صفحه مختصات و با اطلاعات قبلی (از جمله اینکه سهمی رو به پایین باز می شود) نمودار را رسم می کنیم:



ب) چون در  $h(x) = x^2 - 4x + 1$ ،  $a$  مثبت است، پس سهمی رو به بالا است. محل تلاقی با محور  $y$ ها  $(0, 1)$  است. برای تعیین نقاط تلاقی با محور  $x$ ها، معادله را نسبت به  $x$ ، حل می‌کنیم:

$$x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(1)}}{2(1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$$

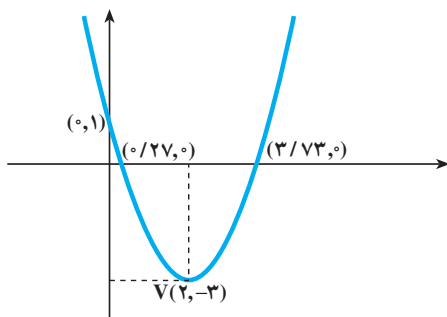
$$x \cong 0/27 \text{ یا } x \cong 3/73$$

نقاط تلاقی تقریبی عبارتند از:  $(3/73, 0)$  و  $(0/27, 0)$ . حال مختصات رأس را به دست می‌آوریم:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2(1)} = 2$$

$$h(2) = -3$$

پس مختصات رأس برابر است با  $V(2, -3)$ ، با این اطلاعات سهمی را رسم می‌کنیم.



پ)

$$g(x) = 4x^2 - 12x + 9$$

چون  $a$  مثبت است ( $a = 4$ )، پس سهمی رو به بالا است. محل تلاقی با محور  $y$ ها  $(0, 9)$  است. برای تعیین محل تلاقی با محور  $x$ ها، معادله را حل می‌کنیم:

$$4x^2 - 12x + 9 = 0$$

$$(2x - 3)^2 = 0$$

$$2x - 3 = 0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

پس محل تلاقی با محور  $x$  ها  $(\frac{3}{2}, 0)$  است. حال مختصات رأس را پیدا می‌کنیم:

$$x = \frac{-b}{2a} = -\frac{-12}{2(4)} = \frac{3}{2}$$

چون  $g(\frac{3}{2}) = 0$  است، پس مختصات رأس  $(\frac{3}{2}, 0)$  می‌باشد (توجه کنید که رأس و نقطه تلاقی

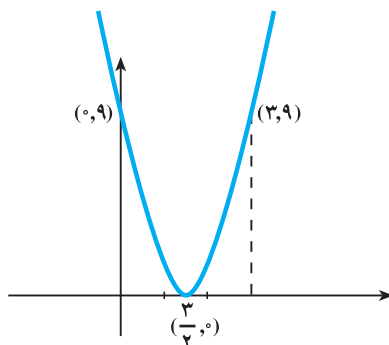
با محور  $x$  ها، یک نقطه مشترک است).

چون تنها دو نقطه برای مشخص کردن در صفحه مختصات پیدا کرده‌ایم، یک نقطه دیگر نیز

پیدا می‌کنیم تا نمودار بهتر رسم شود.

برای مثال، اگر  $x = 3$ ، آن‌گاه،  $g(3) = 9$  پس نقطه  $(3, 9)$  نیز روی نمودار تابع  $g(x)$

قرار دارد.



$$S(x) = -2x^2 + 12x - 19 \quad (ت)$$

چون  $a$  منفی است ( $a = -2$ )، پس سهمی رو به پایین باز می‌شود محل تلاقی با محور  $y$  ها

$(0, -19)$  است. تعداد نقاط تلاقی با محور  $x$  ها را با محاسبهٔ ممیّن معادله پیدا می‌کنیم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4(-2)(-19) = 144 - 152 = -8$$

چون ممیّن منفی است. پس نمودار با محور  $x$  ها نقطه تلاقی ندارد. حالا مختصات رأس را

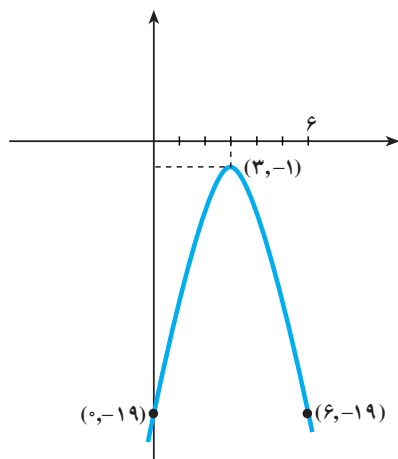
حساب می‌کنیم:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2(-2)} = 3$$

چون  $S(3) = -1$  پس مختصات رأس سهمی برابر است با  $(3, -1)$  از آنجا که تنها مختصات

دو نقطه را داریم. بهتر است نقطه دیگری پیدا کنیم. برای مثال، اگر  $x = 6$ ، آن‌گاه  $S(6) = -19$ . پس

نقطه  $(6, -19)$  نیز روی نمودار تابع  $S(x)$  قرار دارد.



## مسائل

۱- وضعیت نمودار تابع های زیر را در مقایسه با نمودار  $f(x) = x^2$  در صفحه مختصات، توضیح دهید. (توصیه می شود که نمودار  $y = f(x) = x^2$  را با یک رنگ و نمودار جدید را با رنگ دیگر رسم کنید).

الف)  $h(x) = x^2 - 4$

ت)  $h(x) = (x - 3)^2$

ب)  $g(x) = x - 4$

ث)  $g(x) = -\frac{1}{4}x - 2$

پ)  $h(x) = -2x^2$

ج)  $h(x) = -\frac{1}{4}(x + 1)^2 - 2$

در تمرین های این قسمت، موارد زیر را برای هر تابع درجه دوم، به دست آورید :

الف) نقاط تلاقی با محور  $x$  ها و  $y$  ها

ب) رأس و معادله محور تقارن

پ) رسم نمودار هر تابع