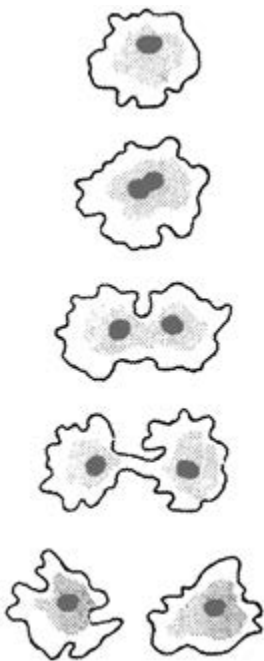


## لگاریتم

اختراع لگاریتم در دنیا، یک شگفتی کامل بود. هیچ یک از کارهای قبلی به اختراع آن کمک نکرده بود و هیچ یک از آن‌ها ورودش را پیش بینی نکرده بودند. لگاریتم به تنهایی افکار انسان را ناگهان متوجه خود کرد بدون آن که از کارهای دیگر اندیشمندان بهره بگیرد و یا آن که مسیرهای شناخته شده‌ی تفکر ریاضی را دنبال کند. لورد مولتون<sup>۱</sup>، ۱۹۱۵

### ۳-۱- پیدایش



روش تکثیر آمیب‌ها بسیار جالب است. زمانی که یک سلول آمیب به اندازه‌ی مشخصی می‌رسد، به دو نیم تقسیم می‌شود، سپس حدوداً یک روز طول می‌کشد تا دو آمیب به وجود آمده به اندازه‌ی رشد کنند که باز تقسیم شوند و تبدیل به چهار آمیب گردند و به همین ترتیب تعداد آن‌ها مرتب افزایش می‌یابد. این نحوه‌ی افزایش از این جهت جالب است که آمیب‌ها با نصف شدن تکثیر می‌شوند! تعداد آمیب‌ها در پایان هفته از جدول (۱) به دست می‌آید که بستگی به زمان دارد. با دقت در این جدول می‌بینیم که سطر دوم (تعداد آمیب‌ها) یک دنباله‌ی توانی است، یعنی یک دنباله‌ی هندسی که هر جمله‌ی آن دو برابر جمله‌ی قبلی است. با این حال، سطر اول (زمان) یک دنباله‌ی حسابی است که در آن هر جمله یکی بیشتر از جمله‌ی قبلی است. نکته‌ی جالبی به وسیله‌ی جان نپر ریاضیدان اسکاتلندی در اوایل قرن هفدهم در

<sup>۱</sup> - Lord Moulton

جدول (۱)

|               |   |   |   |   |    |    |    |     |     |
|---------------|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|
| روز زمان      | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴  | ۵  | ۶  | ۷   | ... |
| تعداد آمیب‌ها | ۱ | ۲ | ۴ | ۸ | ۱۶ | ۳۲ | ۶۴ | ۱۲۸ | ... |

مورد این دو دنباله مطرح شد. اگر دو عدد ۴ و ۱۶ از سطر پایین را در نظر بگیریم، حاصل ضرب آن‌ها جمله‌ی دیگری از دنباله‌ی هندسی سطر دوم خواهد بود، یعنی

$$4 \times 16 = 64$$

که جمله‌های متناظر این اعداد در دنباله‌ی حسابی سطر اول به ترتیب ۲، ۴ و ۶ هستند و این همان نکته‌ی جالب است.

جدول (۲)

|     |      |     |     |     |    |    |    |   |   |   |   |
|-----|------|-----|-----|-----|----|----|----|---|---|---|---|
| ... | ۱۰   | ۹   | ۸   | ۷   | ۶  | ۵  | ۴  | ۳ | ۲ | ۱ | ۰ |
|     | ↓    |     |     | ↑   | ↓  | ↓  | ↑  | ↑ | ↑ |   |   |
| ... | ۱۰۲۴ | ۵۱۲ | ۲۵۶ | ۱۲۸ | ۶۴ | ۳۲ | ۱۶ | ۸ | ۴ | ۲ | ۱ |

یعنی حاصل ضرب اعداد دنباله‌ی هندسی با حاصل جمع اعداد دنباله‌ی حسابی متناظر است. حال حاصل ضرب چند عدد دیگر را در نظر می‌گیریم و نتیجه را مشاهده می‌کنیم.  
مثال ۱: برای پیدا کردن حاصل ضرب  $8 \times 128$ ، اعداد متناظر ۸ و ۱۲۸ را در سطر اول پیدا می‌کنیم. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، ۳ متناظر با ۸ و ۷ متناظر با ۱۲۸ است و

$$8 \times 128 = 1024$$

که ۱۰۲۴ با عدد ۱۰ در دنباله‌ی اولی متناظر است. دقت کنید که ۱۰ همان  $3 + 7$  است. حال نتایج به‌دست آمده را کلی‌تر بیان می‌کنیم.

ضرب در دنباله‌ی دوم با جمع در دنباله‌ی اول متناظر است.

با توجه به آنچه گذشت، می‌بینیم که اگر نخواهیم ضرب کنیم، می‌توانیم به جای آن با استفاده از دنباله‌ی سطر اول جمع کنیم. اعداد دنباله‌ی حسابی ردیف اول، لگاریتم اعداد نظیرشان در دنباله‌ی ردیف دوم هستند.

### جدول (۳)

|            |   |   |   |   |    |    |    |     |     |     |      |     |
|------------|---|---|---|---|----|----|----|-----|-----|-----|------|-----|
| لگاریتم: x | ۰ | ۱ | ۲ | ۳ | ۴  | ۵  | ۶  | ۷   | ۸   | ۹   | ۱۰   | ... |
|            |   | ↑ | ↑ | ↑ | ↑  | ↑  | ↑  | ↑   | ↑   | ↑   | ↑    |     |
| اعداد: y   | ۱ | ۲ | ۴ | ۸ | ۱۶ | ۳۲ | ۶۴ | ۱۲۸ | ۲۵۶ | ۵۱۲ | ۱۰۲۴ | ... |

اعداد دنباله‌ی هندسی را می‌توانیم به صورت توان‌هایی از ۲ بنویسیم:

|            |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                |                 |     |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----------------|-----|
| لگاریتم: x | ۰              | ۱              | ۲              | ۳              | ۴              | ۵              | ۶              | ۷              | ۸              | ۹              | ۱۰              | ... |
| اعداد: y   | ۲ <sup>۰</sup> | ۲ <sup>۱</sup> | ۲ <sup>۲</sup> | ۲ <sup>۳</sup> | ۲ <sup>۴</sup> | ۲ <sup>۵</sup> | ۲ <sup>۶</sup> | ۲ <sup>۷</sup> | ۲ <sup>۸</sup> | ۲ <sup>۹</sup> | ۲ <sup>۱۰</sup> | ... |

در واقع اعداد دنباله‌ی هندسی بالا، برابر با ۲ به توان‌های اعداد دنباله‌ی حسابی فوق هستند،

یعنی

$$y = 2^x \Leftrightarrow x = \log_2 y$$

و یا به بیانی دیگر، جمله‌های دنباله‌ی حسابی، لگاریتم جمله‌های متناظر خود در دنباله‌ی توان‌های دو (هندسی) هستند. یعنی y نماینده‌ی عدد در دنباله‌ی هندسی و x معرف لگاریتم آن در مبنای ۲ است.

مثال ۲:

$$\begin{array}{rclcl}
 \text{اعداد} & 16 & \times & 32 & = & 512 \\
 & \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2} & \times & \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} & = & \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2} \\
 \text{لگاریتم} & 4 & + & 5 & = & 9
 \end{array}$$

### فعالیت ۱-۳

با استفاده از ماشین حساب، جدول لگاریتم در مبنای ۲ را تا ۲<sup>۲۶</sup> ادامه دهید. سپس به

سؤالات زیر پاسخ دهید:

حاصل ضرب‌های زیر را با مراجعه به جدول پیدا کنید. یک رابطه‌ی جمع نشان دهید که

حاصل را بدون ضرب کردن به دست دهد.

(الف) ۱۲۸ × ۲۵۶:

(ب) ۱۰۲۴ × ۲۰۴۸:

(پ)  $32 \times 131072$  :

(ت)  $16 \times 512 \times 4096$  :

از لگاریتم‌ها می‌توان برای به توان رساندن اعداد نیز استفاده کرد.

مثال ۳: باز هم دنباله‌ی توان‌های ۲ را در نظر بگیرید و به نمونه زیر توجه کنید :

اعداد :  $32 \times 32 \times 32 \times 32 = (32)^4 = 1048576$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

لگاریتم :  $5 + 5 + 5 + 5 = 4 \times 5 = 20$

تمرین ۱: با استفاده از روش فوق و جدولی که خود تهیه کرده‌اید، حاصل

عبارت‌های زیر را به دست آورید :

(الف)  $(256)^3$  :

(ب)  $(64)^5$  :

(پ)  $(1024)^\circ$  :

لگاریتم  $y$  در پایه‌ی ۲ عددی است که باید ۲ را به آن توان برسانیم تا  $y$  حاصل شود.  
یعنی تساوی یا معادله‌ی توانی را می‌توان به کمک لگاریتم تغییر شکل داد.

مثال ۴: اگر  $2^x = 32$ ، مقدار  $x$  را با توجه به تعریف لگاریتم پیدا کنید.

حل: با توجه به تعریف لگاریتم،

$$2^x = 32 \Leftrightarrow x = \log_2 32$$

با مراجعه به جدول (۳)، مقدار  $x$  برابر با ۵ است. در واقع،

$$2^x = 2^5$$

و چون پایه‌ها مساوی هستند پس نماها باهم برابرند یعنی  $x = 5$ .

جدول (۳) را می‌توان برای توان‌های هر عدد دیگری تهیه کرد و لگاریتم اعداد را در مبنای

(پایه‌های) مختلف حساب نمود. جدول (۴) لگاریتم اعداد در مبنای ۵ را نشان می‌دهد :

جدول (۴)

|            |   |   |    |     |     |      |     |
|------------|---|---|----|-----|-----|------|-----|
| لگاریتم: x | ۰ | ۱ | ۲  | ۳   | ۴   | ۵    | ... |
| اعداد: y   | ۱ | ۵ | ۲۵ | ۱۲۵ | ۶۲۵ | ۳۱۲۵ | ... |

اعداد دنباله‌ی هندسی را می‌توانیم به صورت توان‌هایی از ۵ بنویسیم:

|            |                |                |                |                |                |                |     |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-----|
| لگاریتم: x | ۰              | ۱              | ۲              | ۳              | ۴              | ۵              | ... |
| اعداد: y   | ۵ <sup>۰</sup> | ۵ <sup>۱</sup> | ۵ <sup>۲</sup> | ۵ <sup>۳</sup> | ۵ <sup>۴</sup> | ۵ <sup>۵</sup> | ... |

که اعداد دنباله‌ی هندسی بالا، برابر با ۵ به توان‌های اعداد دنباله‌ی حسابی فوق هستند یعنی

$$y = 5^x \Leftrightarrow x = \log_5 y$$

مثال ۵: با توجه به جدول (۴)،  $5^3 = 125$  که معادل است با:

$$\log_5 125 = 3$$

به طور کلی، لگاریتم  $y$  در پایه‌ی  $b$ ، عددی است که  $b$  باید به توان آن عدد برسد تا  $y$  حاصل شود:

$$\log_b y = x \Leftrightarrow b^x = y ; \quad y > 0, \quad b > 0, \quad b \neq 1$$

تمرین

۱- تساوی‌های نمایی (توانی) را با استفاده از تعریف لگاریتم تغییر شکل دهید.

(الف)  $11^2 = 121$       (ب)  $2^{10} = 1024$

(پ)  $5^x = 625$       (ت)  $5^y = 0.25$

(ث)  $10^{-3} = 0.001$       (ج)  $a^y = 1000$

(چ)  $p^r = q$       (ح)  $7^3 = 343$

(خ)  $8^x = 4096$

۲- تساوی‌های زیر را به شکل نمایی (توانی) تبدیل کنید.

(الف)  $3 = \log_6 216$       (ب)  $0 = \log_9 1$

(پ)  $-2 = \log_{10} 0.01$       (ت)  $y = \log_2 8$

$$y = \log_b a \quad (\text{ج}) \quad 5 = \log_5 3125 \quad (\text{ث})$$

۳- پایه‌ی (مبنای) لگاریتم‌های زیر را پیدا کنید.

$$\log_{\square} 8 = 3 \quad (\text{الف}) \quad \log_{\square} 36 = 2 \quad (\text{ب})$$

$$\log_{\square} 1 = -1 \quad (\text{پ}) \quad \log_{\square} 25 = -2 \quad (\text{ت})$$

$$\log_{\square} 10 = 1 \quad (\text{ث}) \quad \log_{\square} 1 = 0 \quad (\text{ج})$$

۴- عددی را که لگاریتم آن داده شده است، پیدا کنید.

$$\log_{16} \square = 2 \quad (\text{الف}) \quad \log_4 \square = 4 \quad (\text{ب})$$

$$\log_3 \square = -1 \quad (\text{پ}) \quad \log_{10} \square = 9 \quad (\text{ت})$$

$$\log_{11} \square = 3 \quad (\text{ث}) \quad \log_5 \square = 4 \quad (\text{ج})$$

۵- تساوی نمایی معادله‌های زیر را بنویسید و سپس مقدار  $y$  را تعیین کنید.

$$y = \log_2 64 \quad (\text{الف}) \quad y = \log_{25} 625 \quad (\text{ب})$$

$$y = \log_{10} 10000 \quad (\text{پ}) \quad y = \log_3 81 \quad (\text{ت})$$

۶- هریک از لگاریتم‌های زیر را تعیین کنید.

$$\log_2 256 = \square \quad (\text{الف}) \quad \log_{13} 169 = \square \quad (\text{ب})$$

$$\log_{10} 1 = \square \quad (\text{پ}) \quad \log_9 59049 = \square \quad (\text{ت})$$

$$\log_v 343 = \square \quad (\text{ث}) \quad \log_3 243 = \square \quad (\text{ج})$$

## ۳-۲- لگاریتم اعشاری

با توجه به این که دستگاه شمارش ما دهدهی (اعشاری) است، جدول لگاریتم در مبنای  $10$  بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در نتیجه تکیه این بخش بر لگاریتم اعشاری است.

x لگاریتم:  $\dots 10 \quad 9 \quad 8 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 2 \quad 1 \quad 0$

y اعداد:  $\dots 10^{10} \quad 10^9 \quad 10^8 \quad 10^7 \quad 10^6 \quad 10^5 \quad 10^4 \quad 10^3 \quad 10^2 \quad 10^1 \quad 10^0$

که رابطه‌ی  $y = 10^x$  با توجه به این دو دنباله نوشته می‌شود.

$y$  معرّف یک عدد و  $x$  معرف لگاریتم اعشاری (لگاریتم در مبنای  $10$ ) آن است. بین لگاریتم در مبنای  $10$  و دستگاه شمارش اعشاری ارتباط صریحی وجود دارد. مثلاً لگاریتم  $1,000,000,000$  برابر با  $9$  است زیرا  $10^9 = 1,000,000,000$  در ضمن، می‌دانیم که تعداد صفرهای حاصل ضرب دو

عددی که به صورت توان‌های ده هستند برابر تعداد صفرهای دو عدد است و نیاز به استفاده از لگاریتم‌ها برای محاسبه‌ی چنین حاصل ضرب‌هایی نیست. با این حال ارزش جدول بالا وقتی بارز می‌شود که اعداد، توان‌های صحیح ده نباشند. در این صورت، باید بتوانیم فاصله‌های خالی اعداد از  $۱۰^۰$  تا  $۱۰^۱$  را در ردیف سوم جدول (۵) پر کنیم.

جدول (۵)

|            |        |        |        |        |        |        |        |        |        |        |
|------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| لگاریتم: x | ۰      |        |        |        |        |        |        |        |        | ۱      |
| y اعداد:   | ۱      | ۲      | ۳      | ۴      | ۵      | ۶      | ۷      | ۸      | ۹      | $۱۰^۰$ |
| y اعداد:   | $۱۰^۰$ | $۱۰^?$ | $۱۰^?$ | $۱۰^?$ | $۱۰^?$ | $۱۰^?$ | $۱۰^?$ | $۱۰^?$ | $۱۰^?$ | $۱۰^۱$ |

با توجه به تعریف، لگاریتم‌های توان‌های صحیح  $۱۰^۰$  همان توان‌های صحیح  $۱۰^۰$  هستند. در نتیجه با توجه به روش نوشتن اعداد به صورت نماد علمی یعنی  $a \times 10^n$  با شرط  $1 \leq a < 10$ ، فقط به لگاریتم‌های اعداد بین ۱ و  $۱۰^۰$  نیاز داریم که این اعداد، همان توان‌های کسری  $۱۰^۰$  هستند.

۳-۲-۱- روشی برای رسیدن به لگاریتم اعشاری: یک الگوریتم

۱- یک عدد کوچک مثلاً  $۱'$  را انتخاب می‌کنیم که از یک بزرگ‌تر باشد اما نه خیلی بزرگ‌تر! و لیستی از توان‌های آن تهیه می‌کنیم:

$$۱, ۲, ۳, \dots, ۲۴, ۲۵, \dots$$

اگر بخواهیم دو عدد  $a$  و  $b$  را درهم ضرب کنیم، هر کدام از آن‌ها را با یکی از توان‌های تقریب می‌زنیم. ( $\cong$  نماد تقریباً است)

مثال ۶: اگر  $a \cong ۱۷$  و  $b \cong ۸$ ، آنگاه

$$a.b \cong ۱۷ \times ۸ = \alpha^{۱۷+۸} = \alpha^{۲۵},$$

که می‌توانیم برای پیدا کردن آن، به لیستی که تهیه کرده‌ایم، مراجعه کنیم.

مثال ۷: با توجه به مقادیر  $a$  و  $b$  در مثال ۶  $\frac{a}{b}$  را پیدا می‌کنیم

$$\frac{a}{b} \cong \frac{۱۷}{۸} = \alpha^{۱۷-۸} = \alpha^۹$$

۱- اولین حرف الفبای یونانی که آلفا تلفظ می‌شود.

مثال ۸: با توجه به مقدار  $a$  در مثال ۶،  $a^{۲۰}$  را به دست می آوریم

$$a^{۲۰} \equiv (\alpha^{۱۷})^{۲۰} = \alpha^{۳۴۰}$$

۲- برای هماهنگی این ایده با نماد معمولی اعشار،  $\alpha$  را یک توان کسری از  $۱۰$  انتخاب می کنیم.

مثال ۹:  $\alpha$  را  $۱۰^{\frac{۱}{۳۲}}$  انتخاب می کنیم ( چرا؟). پس فقط به لیستی شامل

$\alpha, \alpha^۲, \alpha^۳, \dots, \alpha^{۳۱}$  نیاز داریم، زیرا  $\alpha^{۳۲} = ۱۰$  و ضرب اعداد در  $۱۰$  و یا تقسیم آن ها بر  $۱۰$  تنها با اضافه یا کم کردن صفر و یا حرکت دادن ممیز اعشاری انجام می گیرد. به عنوان مثال،  
 $۳۰۰ \div ۱۰۰۰ = ۰/۳$  و  $۳۰۰ \div ۱۰ = ۳۰$ ،  $۳۰۰ \times ۱۰ = ۳۰۰۰$

با این کار، می توانیم فاصله ی خالی بین  $۱۰^۰$  و  $۱۰^۱$  را در جدول (۵) پر کنیم.

## فعالیت ۳-۲

$$\alpha^{۳۲} = (۱۰^{\frac{۱}{۳۲}})^{۳۲} = ?$$

و

$$\alpha^{۱۶} = (۱۰^{\frac{۱}{۳۲}})^{۱۶} = ?$$

۳- برای به دست آوردن اعدادی که بین نقاط به دست آمده توسط خودمان قرار می گیرند، یا از ماشین حساب معمولی استفاده می کنیم و یا مقدار تقریبی آن ها را از روی نمودار به دست

می آوریم. عدد  $۱۰$  را در ماشین حساب وارد می کنیم و سپس با پنج بار فشار دادن دکمه ی  $\sqrt{\phantom{x}}$

$۱۰^{\frac{۱}{۳۲}}$  را پیدا می کنیم زیرا

$$\sqrt[۳۲]{۱۰} = ۱۰^{\frac{۱}{۳۲}} = ۳/۱۶۲$$



$$\sqrt{\sqrt{1^\circ}} = \left(1^\circ^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = 1^\circ^{\frac{1}{4}} \quad \text{یا} \quad \sqrt{1^\circ^{\frac{1}{2}}} = 1^\circ^{\frac{1}{4}} = 1/778$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{1^\circ}}} = \left(\left(1^\circ^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = ?$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{1^\circ}}}} = \left(\left(\left(1^\circ^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = ?$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{1^\circ}}}}} = \left(\left(\left(\left(1^\circ^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = ?$$

با این اطلاعات، منحنی را رسم می‌کنیم. سپس با توجه به مقدار توان‌های کسری  $1^\circ$ ، مقادیر

$1^\circ^{\frac{2}{32}}$ ،  $1^\circ^{\frac{3}{32}}$ ، ...،  $1^\circ^{\frac{31}{32}}$ ، یعنی توان‌های  $\alpha^2$  تا  $\alpha^{32}$  را به وسیله‌ی ماشین حساب به دست می‌آوریم. برای خلاصه‌نویسی، توان‌های  $\alpha$  را  $n$  می‌نامیم و برای  $0 \leq n \leq 32$  جدول را تا سه رقم اعشار تکمیل می‌کنیم.

جدول (۶)

| $\log: \frac{n}{32}$   | $n = 1 \cdot \frac{n}{32}$ | $\log: \frac{n}{32}$    | $n = 1 \cdot \frac{n}{32}$ | $\log: \frac{n}{32}$    | $a^n = 1 \cdot \frac{n}{32}$ |
|--|----------------------------|-------------------------|----------------------------|-------------------------|------------------------------|
| $\frac{1}{32} = 0/0312$  | 1/074                      | $\frac{12}{32} = 0/375$ | 2/371                      | $\frac{23}{32} = 0/718$ | 5/224                        |
| $\frac{2}{32} = 0/0625$  | 1/154                      | $\frac{13}{32} = 0/406$ | 2/546                      | $\frac{24}{32} = 0/750$ | { 5/623<br>6                 |
| $\frac{3}{32} = 0/0937$  | 1/240                      | $\frac{14}{32} = 0/437$ | 2/735                      | $\frac{25}{32} = 0/781$ |                              |
| $\frac{4}{32} = 0/125$   | 1/333                      | $\frac{15}{32} = 0/468$ | { 2/937<br>3<br>3/162      | $\frac{26}{32} = 0/812$ | 6/486                        |
| $\frac{5}{32} = 0/156$   | 1/432                      | $\frac{16}{32} = 0/500$ |                            | $\frac{27}{32} = 0/843$ | { 6/966<br>7                 |
| $\frac{6}{32} = 0/187$   | 1/538                      | $\frac{17}{32} = 0/531$ | 3/396                      | $\frac{28}{32} = 0/875$ |                              |
| $\frac{7}{32} = 0/218$   | 1/652                      | $\frac{18}{32} = 0/562$ | 3/656                      | $\frac{29}{32} = 0/906$ | { 8<br>8/053                 |
| $\frac{8}{32} = 0/250$   | 1/778                      | $\frac{19}{32} = 0/593$ | { 3/917<br>4<br>4/217      | $\frac{30}{32} = 0/937$ |                              |
| * { $\frac{9}{32} = 0/281$<br>$0/301$<br>$\frac{10}{32} = 0/312$ | { 1/910<br>2<br>2/051      | $\frac{20}{32} = 0/625$ |                            | $\frac{31}{32} = 0/968$ | $\frac{32}{32} = 1$          |
|  |                            | $\frac{21}{32} = 0/656$ | 4/529                      |                         |                              |
| $\frac{11}{32} = 0/343$  | 2/203                      | $\frac{22}{32} = 0/687$ | { 4/864<br>5               |                         | 10/000                       |
|  |                            |                         |                            |                         |                              |
|  |                            | 0 ≤ n ≤ 32              |                            |                         |                              |

$$\frac{965}{3200} \approx 0/301 *$$

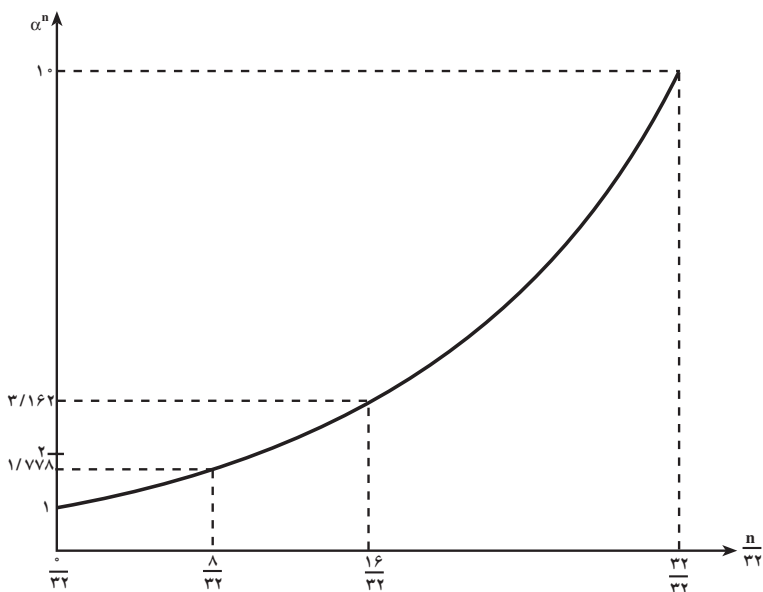
تمرین ۲: با توجه به جدول (۶)، درستی رابطه‌ی زیر را امتحان کنید:

$$\log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3$$

با توجه به مقدارهای موجود در جدول (۶) نمودار زیر را رسم می‌کنیم.

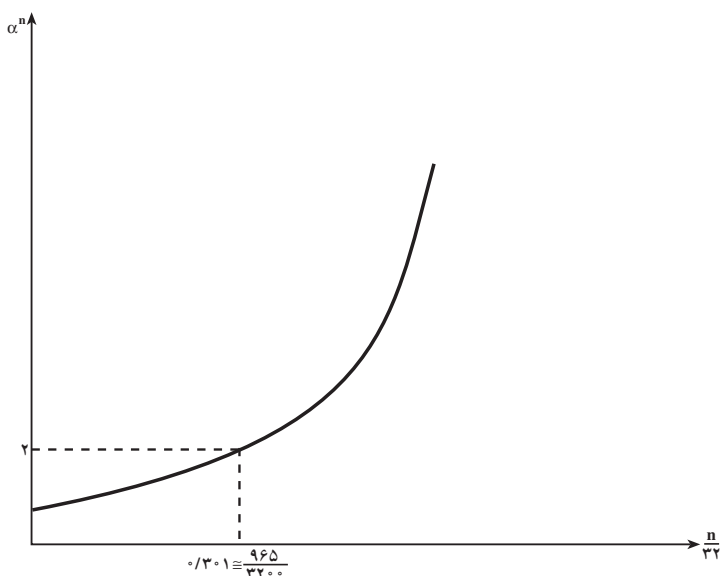
$$n = (1 \cdot \frac{1}{32})^n = 1 \cdot \frac{n}{32}, \quad 0 \leq n \leq 32$$

۱- قرارداد می‌کنیم که مبنا‌ی ۱۰ را بنویسیم.



مثال ۱۰: برای به دست آوردن لگاریتم ۲، مقدار ۲ را روی محور  $\alpha$  ها پیدا می کنیم. آنگاه خطی موازی محور افقی رسم می کنیم تا نمودار را قطع نماید. سپس از نقطه‌ی تلاقی خطی به موازات محور عمودی رسم می کنیم تا محور  $x$  ها یعنی محور لگاریتم ها را در نقطه‌ای قطع کند. نقطه تلاقی با محور  $x$  ها همان لگاریتم ۲ یعنی  $\frac{965}{3200}$  است که برابر  $0.301$  است:

$$\log 2 = 0.301$$



در واقع، در مثال  $10^\circ$  با مراجعه به جدول (۶)، مقدار  $\log 2$  را با تقریب مطلوبی به دست آوردیم. یعنی، مقدار ۲ را در ستون  $\alpha^n$  جستجو کردیم. مقدار ۲ بین  $1/911$  و  $2/53^\circ$  و لگاریتم‌های معادل آن‌ها بین  $9/33$  و  $10/33$  بود. با این حال، چون ۲ نزدیک‌تر به  $2/53^\circ$  بود، در نتیجه مقدار لگاریتم آن نیز به  $9/33$  نزدیک‌تر بود. با چند بار آزمایش کردن، تقریب خوبی برای لگاریتم ۲ که همان  $9/301$  است به دست آوردیم. به همین ترتیب لگاریتم‌های ۳ الی ۹ را نیز به دست می‌آوریم، یعنی اعداد ۲ تا ۹ را برحسب توان‌های کسری  $10^\circ$  می‌نویسیم:

|        |            |                |                |                |                |                |                |                |                |
|--------|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| y      | ۱          | ۲              | ۳              | ۴              | ۵              | ۶              | ۷              | ۸              | ۹              |
| اعداد: |            |                |                |                |                |                |                |                |                |
| y      | $10^\circ$ | $10^\circ/301$ | $10^\circ/477$ | $10^\circ/602$ | $10^\circ/698$ | $10^\circ/778$ | $10^\circ/845$ | $10^\circ/903$ | $10^\circ/954$ |
| اعداد: |            |                |                |                |                |                |                |                |                |
| x      | لگاریتم:   | $0/301$        | $0/477$        | $0/602$        | $0/698$        | $0/778$        | $0/845$        | $0/903$        | $0/954$        |

### ۳-۳- لگاریتم و نماد علمی

برتری لگاریتم اعشاری نسبت به لگاریتم در مبناهای مختلف ارتباط نزدیک آن با شیوهی نوشتن اعداد به شکل نماد علمی است. جدول زیر با توجه به این ارتباط تهیه شده است که در آن ۲ به صورت توان کسری  $10^\circ/301$  یعنی  $10^\circ/301$  نوشته شده است.

جدول (۷)

| لگاریتم تقریبی اعداد | اعداد به صورت توان‌های کسری $10^\circ$ | اعداد به شکل نماد علمی | اعداد به شکل اعشاری |
|----------------------|--|------------------------|---------------------|
| $1/301$              | $10^{1/301}$                           | $2 \times 10^1$        | ۲۰                  |
| $2/301$              | $10^{2/301}$                           | $2 \times 10^2$        | ۲۰۰                 |
| $3/301$              | $10^{3/301}$                           | $2 \times 10^3$        | ۲۰۰۰                |
| $4/301$              | $10^{4/301}$                           | $2 \times 10^4$        | ۲۰۰۰۰               |

در صورت استفاده از ماشین حساب به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

| نمایش‌دهنده | ترتیب عملیات |
|-------------|--------------|
| $4/301$     | $\log$       |
|             | ۲۰۰۰۰        |

## فعالیت ۳-۳

الف - با توجه به صفحه قبل، لگاریتم‌های زیر را به دست آورید.

$$۱- ۲,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰$$

$$۲- ۲ \times ۱۰^{۱۷}$$

جدول (۸)

| لگاریتم اعداد        | اعداد به صورت توان‌های کسری $۱۰$ | اعداد به شکل نماد علمی | اعداد به شکل اعشاری |
|----------------------|----------------------------------|------------------------|---------------------|
| $۴/۶۹۹$              | $۱۰^{۴/۶۹۹}$                     | $۵ \times ۱۰^۴$        | $۵,۰۰۰$             |
| $۵/۶۹۹$              | $۱۰^{۵/۶۹۹}$                     | $۵ \times ۱۰^۵$        | $۵۰۰,۰۰۰$           |
| <input type="text"/> | <input type="text"/>             | <input type="text"/>   | $۵,۰۰۰,۰۰۰$         |
| <input type="text"/> | <input type="text"/>             | <input type="text"/>   | $۵۰,۰۰۰,۰۰۰$        |

ب - با توجه به جدول (۸) به قسمت‌های ۱، ۲ و ۳ پاسخ دهید :

۱- جدول (۸) را کامل کنید :

۲- چه عددی دارای لگاریتم  $۱۷/۶۹۹$  است؟

۳- چه عددی دارای لگاریتم  $۲۸/۶۹۹$  است؟

تمرین ۳: جدول (۹) را با مراجعه به جدول (۶) یا مستقیماً به وسیله ماشین حساب کامل

کنید :

اگر لگاریتم عدد را داشته باشیم و بخواهیم خود عدد را به وسیله ماشین حساب پیدا کنیم،

به ترتیب زیر عمل می‌نماییم :

| نمایش   | ترتیب عملیات  |
|---------|---|
| $۷/۹۹۸$ | $۰/۹۰۳^۱$ <input type="text" value="INV"/> <input type="text" value="log"/> |

۱- Inverse به معنای معکوس تابع است.

در بعضی ماشین حساب‌ها، به جای دکمه‌ی INV از دکمه‌ی 2ndF استفاده می‌کنند.

جدول (۹)

| لگاریتم اعداد        | اعداد به صورت توان‌های کسری $۱۰^{\circ}$ | اعداد به شکل نماد علمی      | اعداد به شکل اعشاری  |
|----------------------|--|-----------------------------|----------------------|
| $۵/۰۸۲$              | $۱۰^{۰.۵/۰.۸۲}$                          | $۱/۲۱ \times ۱۰^۰.۵$        | ۱۲۱,۰۰۰              |
| <input type="text"/> | <input type="text"/>                     | <input type="text"/>        | ۱,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰,۰۰۰    |
| $۱/۵۴۴$              | $۱۰^{۱/۵۴۴}$                             | $۳/۵ \times ۱۰^۰.۱$         | <input type="text"/> |
| <input type="text"/> | $۱۰^{۰.۶۰۲}$                             | $۴ \times ۱۰^{\circ}$       | <input type="text"/> |
| $۲/۹۰۳$              | <input type="text"/>                     | <input type="text"/>        | <input type="text"/> |
| $۲۳/۷۷۸$             | $۱۰^{۰.۲۳/۷۷۸}$                          | $۶/۰۲ \times ۱۰^{\circ.۲۳}$ | <input type="text"/> |

\* این عدد به نام عدد آوگادرو معروف است که در شیمی استفاده‌ی زیادی دارد. عدد آوگادرو تعداد مولکول‌ها در ۱۸ گرم آب یا یک مولکول از هر ماده است.

با توجه به مثال‌ها و تمرین‌های بالا، دیدیم که با وجود نماد علمی و با به‌دست آوردن توان‌های اعشاری  $۱۰^{\circ}$  یعنی با پرکردن فاصله‌ی بین  $۱۰^{\circ}$  تا  $۱۰^۰$  جدول (۶) می‌توانیم لگاریتم تمام اعداد را به‌دست آوریم. قسمت صحیح لگاریتم، توان‌های ده‌اعدادی هستند که به شکل نماد علمی نوشته شده‌اند. قسمت کسری لگاریتم را می‌توان با مراجعه به جدول (که طریق به‌دست آوردن آن را دیدیم) پیدا کنیم. در ضمن چون قسمت غیرتوانی نماد علمی همیشه کمتر از  $۱۰^{\circ}$  است، در نتیجه به جدول لگاریتم برای اعداد بزرگ‌تر از  $۱۰^{\circ}$  نیازی نداریم.

|            |          |          |            |                |
|------------|----------|----------|------------|----------------|
| 以七六〇一四九四   | 二五〇九〇六三八 | 八七五五一四四  | 六一一〇九八七五〇  | 一四四二〇一三〇一六四    |
| 以七六〇二四九四   | 二五一四〇一五八 | 七五五五九四   | 六〇七〇一四八七五〇 | 二四九四二〇一七九六九    |
| 以七六〇三四九四   | 二五一八九七九〇 | 八七五五九四   | 七〇三〇一八八七五〇 | 三四九四二〇二九四二九    |
| 以七六〇四四九四   | 二五二三八六五八 | 七五五五九四   | 七五九九一八七五〇  | 四四九四二〇二九六〇一    |
| 以七六〇五四九四   | 二五三二八九一〇 | 八七五五五九四  | 八〇九五二四八七五〇 | 五四九四二〇三二八六九一   |
| 以七六〇五四九四   | 二五三三八五一〇 | 八七五五五九四  | 八六八七五〇六四九四 | 六四九四二〇三七八七一    |
| 以七六〇五四九四   | 二五三八八〇八七 | 八七五五五九四  | 九〇八七二七八七五〇 | 七四九四二〇四二七九五    |
| 以七六〇八四九四   | 二五四三六六三〇 | 八七五五五九四  | 九五八二九八七五〇  | 八四九四二〇四七七五八    |
| 以七六〇八四九四   | 二五四八六六三〇 | 八七五五五九四  | 一〇〇七九九八七五〇 | 九四九四二〇五二七二一〇   |
| 以七六〇八四九四   | 二五五三六六三〇 | 八七五五五九四  | 一〇五七九九八七五〇 | 一〇四九四二〇五七六八三   |
| 以七六一〇四九四   | 二五五八六六三〇 | 八七五五五九四  | 一〇六七九九八七五〇 | 一一四九四二〇六二六四六   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一〇七七九九八七五〇 | 一二四九四二〇六七五二〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一〇八七九九八七五〇 | 一三四九四二〇七二四七二〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一〇九七九九八七五〇 | 一四四九四二〇七七四二七〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一一〇七九九八七五〇 | 一五四九四二〇八二四九七〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一一一七九九八七五〇 | 一六四九四二〇八七四六六〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一一二七九九八七五〇 | 一七四九四二〇九二四九二〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一一三七九九八七五〇 | 一八四九四二〇九七三三四〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一一四七九九八七五〇 | 一九四九四二一〇二三四七〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一一五七九九八七五〇 | 二〇四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一一六七九九八七五〇 | 二一四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一一七九九八七五〇  | 二二四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一一八七九九八七五〇 | 二三四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一一九七九九八七五〇 | 二四四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一二〇七九九八七五〇 | 二五四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一二一七九九八七五〇 | 二六四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一二二七九九八七五〇 | 二七四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一二三七九九八七五〇 | 二八四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一二四七九九八七五〇 | 二九四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一二五七九九八七五〇 | 三〇四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一二六七九九八七五〇 | 三一四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一二七七九九八七五〇 | 三二四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一二八七九九八七五〇 | 三三四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一二九七九九八七五〇 | 三五四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一三〇七九九八七五〇 | 三六四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一三一七九九八七五〇 | 三七四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一三二七九九八七五〇 | 三八四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一三三七九九八七五〇 | 三九四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一三四七九九八七五〇 | 四〇四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一三五七九九八七五〇 | 四一四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一三六七九九八七五〇 | 四二四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一三七八九九八七五〇 | 四三四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一三九七九九八七五〇 | 四四四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一四〇七九九八七五〇 | 四五四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一四一七九九八七五〇 | 四六四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一四二七九九八七五〇 | 四七四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一四三七九九八七五〇 | 四八四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一四四七九九八七五〇 | 四九四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一四五七九九八七五〇 | 五〇四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一四六七九九八七五〇 | 五一四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一四七七九九八七五〇 | 五二四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一四八七九九八七五〇 | 五三四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一四九七九九八七五〇 | 五五四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一五〇七九九八七五〇 | 五六四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一五一七九九八七五〇 | 五七四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一五二七九九八七五〇 | 五八四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一五三七九九八七五〇 | 五九四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一五四七九九八七五〇 | 六〇四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一五五七九九八七五〇 | 六一四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一五六七九九八七五〇 | 六二四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一五七七九九八七五〇 | 六三四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一五八七九九八七五〇 | 六五四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一五九七九九八七五〇 | 六六四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一六〇七九九八七五〇 | 六七四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一六一七九九八七五〇 | 六八四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一六二七九九八七五〇 | 六九四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一六三七九九八七五〇 | 七〇四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一六四七九九八七五〇 | 七一四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一六五七九九八七五〇 | 七二四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一六六七九九八七五〇 | 七三四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一六七八九九八七五〇 | 七五四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一六九七九九八七五〇 | 七六四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一七〇七九九八七五〇 | 七七四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一七一七九九八七五〇 | 七八四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一七二七九九八七五〇 | 七九四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一七三七九九八七五〇 | 八〇四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一七四七九九八七五〇 | 八一四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一七五七九九八七五〇 | 八二四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一七六七九九八七五〇 | 八三四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一七八七九九八七五〇 | 八五四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一八〇七九九八七五〇 | 八六四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一八一七九九八七五〇 | 八七四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一八二七九九八七五〇 | 八八四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一八三七九九八七五〇 | 八九四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一八四七九九八七五〇 | 九〇四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一八五七九九八七五〇 | 九一四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一八六七九九八七五〇 | 九二四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一八七九九八七五〇  | 九三四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一八八七九九八七五〇 | 九四四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一八九七九九八七五〇 | 九五四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一九〇七九九八七五〇 | 九六四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一九一七九九八七五〇 | 九七四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一九二七九九八七五〇 | 九八四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一九三七九九八七五〇 | 九九四九四二一〇七三三〇   |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一九四七九九八七五〇 | 一〇〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一九五七九九八七五〇 | 一〇一四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一九六七九九八七五〇 | 一〇二四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一九七七九九八七五〇 | 一〇三四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一九八七九九八七五〇 | 一〇四四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 一九九七九九八七五〇 | 一〇五四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二〇〇七九九八七五〇 | 一〇六四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二〇一七九九八七五〇 | 一〇七四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二〇二七九九八七五〇 | 一〇八四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二〇三七九九八七五〇 | 一〇九四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二〇四七九九八七五〇 | 一〇一〇四九四二一〇七三三〇 |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二〇五七九九八七五〇 | 一一〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二〇六七九九八七五〇 | 一二〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二〇七七九九八七五〇 | 一三〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二〇八七九九八七五〇 | 一四〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二〇九七九九八七五〇 | 一五〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二一〇七九九八七五〇 | 一六〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二一一七九九八七五〇 | 一七〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二一二七九九八七五〇 | 一八〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二一三七九九八七五〇 | 一九〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二一四七九九八七五〇 | 二〇〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二一五七九九八七五〇 | 二一〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二一六七九九八七五〇 | 二二〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二一八七九九八七五〇 | 二三〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二一九七九九八七五〇 | 二四〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二二〇七九九八七五〇 | 二五〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二二一七九九八七五〇 | 二六〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二二二七九九八七五〇 | 二七〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二二三七九九八七五〇 | 二八〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二二四七九九八七五〇 | 二九〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二二五七九九八七五〇 | 三〇〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二二六七九九八七五〇 | 三一〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二二七七九九八七五〇 | 三二〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二二八七九九八七五〇 | 三三〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二二九七九九八七五〇 | 三四〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二三〇七九九八七五〇 | 三五〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二三一七九九八七五〇 | 三六〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二三二七九九八七五〇 | 三七〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二三三七九九八七五〇 | 三八〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二三四七九九八七五〇 | 三九〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二三五七九九八七五〇 | 四〇〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二三六七九九八七五〇 | 四一〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二三七七九九八七五〇 | 四二〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二三八七九九八七五〇 | 四三〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二三九七九九八七五〇 | 四四〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二四〇七九九八七五〇 | 四五〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二四一七九九八七五〇 | 四六〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二四二七九九八七五〇 | 四七〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二四三七九九八七五〇 | 四八〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二四四七九九八七五〇 | 四九〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二四五七九九八七五〇 | 五〇〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二四六七九九八七五〇 | 五一〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二四七七九九八七五〇 | 五二〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二四八七九九八七五〇 | 五三〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二四九七九九八七五〇 | 五四〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二五〇七九九八七五〇 | 五五〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二五一七九九八七五〇 | 五六〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二五二七九九八七五〇 | 五七〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二五三七九九八七五〇 | 五八〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二五四七九九八七五〇 | 五九〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二五五七九九八七五〇 | 六〇〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二五六七九九八七五〇 | 六一〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二五七七九九八七五〇 | 六二〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二五八七九九八七五〇 | 六三〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二五九七九九八七五〇 | 六四〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二六〇七九九八七五〇 | 六五〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二六一七九九八七五〇 | 六六〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二六二七九九八七五〇 | 六七〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二六三七九九八七五〇 | 六八〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二六四七九九八七五〇 | 六九〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二六五七九九八七五〇 | 七〇〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四   | 二五六三八五五五 | 八七五五六四九四 | 二六六七九九八七五〇 | 七一〇四九四二一〇七三三〇  |
| 以七六一〇四九四</ |          |          |            |                |

ریاضیدان انگلیسی قرن هفدهم، هنری بریگز<sup>۱</sup> مبنای اعشاری را برای لگاریتم پیشنهاد داد و اولین جدول لگاریتم اعشاری را تهیه کرد. پس از آن، امپراطور چین در سال ۱۷۱۳ دستور داد که کتابی را بر چوب حک کرده، منتشر کنند که در آن کتاب لگاریتم اعداد از ۱ تا ۱۰۰۰۰۰۰ با دست حک شده بود.

\\_ Henry Briggs

[illegible]

| N  | 0    | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | A    | B    | C    | D    |
|----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 00 | 0000 | 0001 | 0002 | 0003 | 0004 | 0005 | 0006 | 0007 | 0008 | 0009 | 000A | 000B | 000C | 000D |
| 01 | 000E | 000F | 0010 | 0011 | 0012 | 0013 | 0014 | 0015 | 0016 | 0017 | 0018 | 0019 | 001A | 001B |
| 02 | 001C | 001D | 001E | 001F | 0020 | 0021 | 0022 | 0023 | 0024 | 0025 | 0026 | 0027 | 0028 | 0029 |
| 03 | 002A | 002B | 002C | 002D | 002E | 002F | 0030 | 0031 | 0032 | 0033 | 0034 | 0035 | 0036 | 0037 |
| 04 | 0038 | 0039 | 003A | 003B | 003C | 003D | 003E | 003F | 0040 | 0041 | 0042 | 0043 | 0044 | 0045 |
| 05 | 0046 | 0047 | 0048 | 0049 | 004A | 004B | 004C | 004D | 004E | 004F | 0050 | 0051 | 0052 | 0053 |
| 06 | 0054 | 0055 | 0056 | 0057 | 0058 | 0059 | 005A | 005B | 005C | 005D | 005E | 005F | 0060 | 0061 |
| 07 | 0062 | 0063 | 0064 | 0065 | 0066 | 0067 | 0068 | 0069 | 006A | 006B | 006C | 006D | 006E | 006F |
| 08 | 0070 | 0071 | 0072 | 0073 | 0074 | 0075 | 0076 | 0077 | 0078 | 0079 | 007A | 007B | 007C | 007D |
| 09 | 007E | 007F | 0080 | 0081 | 0082 | 0083 | 0084 | 0085 | 0086 | 0087 | 0088 | 0089 | 008A | 008B |
| 0A | 008C | 008D | 008E | 008F | 0090 | 0091 | 0092 | 0093 | 0094 | 0095 | 0096 | 0097 | 0098 | 0099 |
| 0B | 009A | 009B | 009C | 009D | 009E | 009F | 00A0 | 00A1 | 00A2 | 00A3 | 00A4 | 00A5 | 00A6 | 00A7 |
| 0C | 00A8 | 00A9 | 00AA | 00AB | 00AC | 00AD | 00AE | 00AF | 00B0 | 00B1 | 00B2 | 00B3 | 00B4 | 00B5 |
| 0D | 00B6 | 00B7 | 00B8 | 00B9 | 00BA | 00BB | 00BC | 00BD | 00BE | 00BF | 00C0 | 00C1 | 00C2 | 00C3 |
| 0E | 00C4 | 00C5 | 00C6 | 00C7 | 00C8 | 00C9 | 00CA | 00CB | 00CC | 00CD | 00CE | 00CF | 00D0 | 00D1 |
| 0F | 00D2 | 00D3 | 00D4 | 00D5 | 00D6 | 00D7 | 00D8 | 00D9 | 00DA | 00DB | 00DC | 00DD | 00DE | 00DF |
| 10 | 00E0 | 00E1 | 00E2 | 00E3 | 00E4 | 00E5 | 00E6 | 00E7 | 00E8 | 00E9 | 00EA | 00EB | 00EC | 00ED |
| 11 | 00EE | 00EF | 00F0 | 00F1 | 00F2 | 00F3 | 00F4 | 00F5 | 00F6 | 00F7 | 00F8 | 00F9 | 00FA | 00FB |
| 12 | 00FC | 00FD | 00FE | 00FF | 0100 | 0101 | 0102 | 0103 | 0104 | 0105 | 0106 | 0107 | 0108 | 0109 |
| 13 | 010A | 010B | 010C | 010D | 010E | 010F | 0110 | 0111 | 0112 | 0113 | 0114 | 0115 | 0116 | 0117 |
| 14 | 0118 | 0119 | 011A | 011B | 011C | 011D | 011E | 011F | 0120 | 0121 | 0122 | 0123 | 0124 | 0125 |
| 15 | 0126 | 0127 | 0128 | 0129 | 012A | 012B | 012C | 012D | 012E | 012F | 0130 | 0131 | 0132 | 0133 |
| 16 | 0134 | 0135 | 0136 | 0137 | 0138 | 0139 | 013A | 013B | 013C | 013D | 013E | 013F | 0140 | 0141 |
| 17 | 0142 | 0143 | 0144 | 0145 | 0146 | 0147 | 0148 | 0149 | 014A | 014B | 014C | 014D | 014E | 014F |
| 18 | 0150 | 0151 | 0152 | 0153 | 0154 | 0155 | 0156 | 0157 | 0158 | 0159 | 015A | 015B | 015C | 015D |
| 19 | 015E | 015F | 0160 | 0161 | 0162 | 0163 | 0164 | 0165 | 0166 | 0167 | 0168 | 0169 | 016A | 016B |
| 1A | 016C | 016D | 016E | 016F | 0170 | 0171 | 0172 | 0173 | 0174 | 0175 | 0176 | 0177 | 0178 | 0179 |
| 1B | 017A | 017B | 017C | 017D | 017E | 017F | 0180 | 0181 | 0182 | 0183 | 0184 | 0185 | 0186 | 0187 |
| 1C | 0188 | 0189 | 018A | 018B | 018C | 018D | 018E | 018F | 0190 | 0191 | 0192 | 0193 | 0194 | 0195 |
| 1D | 0196 | 0197 | 0198 | 0199 | 019A | 019B | 019C | 019D | 019E | 019F | 0190 | 0191 | 0192 | 0193 |
| 1E | 0194 | 0195 | 0196 | 0197 | 0198 | 0199 | 019A | 019B | 019C | 019D | 019E | 019F | 0190 | 0191 |
| 1F | 0192 | 0193 | 0194 | 0195 | 0196 | 0197 | 0198 | 0199 | 019A | 019B | 019C | 019D | 019E | 019F |



### ۳-۵- اثبات روابط لگاریتمی

بنابر تعریف لگاریتم

$$10^x = y \Leftrightarrow x = \log_{10} y$$

اثبات قضیه‌ی حاصل ضرب را قبلاً به طور تجربی در تمرین ۲ و در جدول‌های (۸) و (۹) دیدیم. حال با استفاده از تعریف لگاریتم که درستی آن را پذیرفته‌ایم، به وسیله‌ی استدلال استنتاجی، قضیه‌ی حاصل ضرب را به طور دقیق اثبات می‌کنیم.

**قضیه‌ی ۱:** برای هر دو عدد حقیقی و مثبت  $a$  و  $b$ ,

$$\log_{10} ab = \log_{10} a + \log_{10} b$$

**اثبات:** اگر  $\log_{10} a = x_1$  و  $\log_{10} b = x_2$  آنگاه:

$$a = 10^{x_1} \quad (۱) \quad \text{و} \quad b = 10^{x_2} \quad (۲)$$

از ضرب دو رابطه‌ی (۱) و (۲) به دست می‌آوریم:

$$ab = 10^{x_1} \times 10^{x_2} = 10^{x_1 + x_2}$$

با توجه به تعریف لگاریتم

$$\log_{10} ab = x_1 + x_2$$

از رابطه‌ی (۱) و (۲) مقادیر  $x_1$  و  $x_2$  را جایگزین می‌کنیم

$$\log ab = \log a + \log b$$

و حکم ثابت می‌شود.

**قضیه‌ی ۲:** نشان دهید که برای  $a > 0$ ،  $\log a^n = n \log a$ .

**اثبات:** این قضیه در واقع تعمیم قضیه‌ی ۱ است زیرا:

$$\log a^n = \log \underbrace{a.a.a \dots a}_n = \underbrace{\log a + \log a + \dots + \log a}_n$$

در نتیجه

$$\log a^n = n \log a$$

**تمرین ۴:** با استفاده از استقرای ریاضی، قضیه‌ی ۲ را اثبات کنید.

**تمرین ۵:** ثابت کنید برای هر دو عدد حقیقی و مثبت  $a$  و  $b$ ,

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$$

---

۱- این قضیه برای هر توان حقیقی برقرار است اما در این جا اثبات محدود به توان‌های صحیح مثبت است.

مثال ۱۰: با استفاده از قضیه ی ۱، مقدار  $\log 5 + \log 20$  را محاسبه می کنیم.

حل:  $\log a + \log b = \log ab$

پس  $\log 5 + \log 20 = \log 5 \times 20 = \log 100 = 2$

تمرین ۶: به طور کلی، قضیه های ۱ و ۲ برای لگاریتم در هر مبنایی درست است. دلیل درستی را بررسی کنید.

سه قضیه ی زیر، محاسبات با لگاریتم را آسان می کنند.

قضیه ی ۳:  $\log_c(ab) = \log_c a + \log_c b$

قضیه ی ۴:  $\log_c a^n = n \log_c a$

قضیه ی ۵:  $\log_c\left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$

مثال ۱۱: با استفاده از سه قضیه ی فوق، رابطه ی  $\log\left(\frac{x^2 y}{z}\right)$  را تبدیل کنید.

حل:

طبق قضیه ی ۳ داریم

(۱)  $\log\left(\frac{x^2 y}{z}\right) = \log(x^2 y) - \log z$

طبق قضیه ی ۱

(۲)  $\log(x^2 y) = \log x^2 + \log y$

طبق قضیه ی ۲

(۳)  $\log x^2 = 2 \log x$

با جایگزینی (۳) و (۲) در (۱) نتیجه می شود که

$\log\left(\frac{x^2 y}{z}\right) = 2 \log x + \log y - \log z$

مثال ۱۲: عبارت  $\log(\sqrt[3]{a} \sqrt{b})$  را تبدیل کنید.

حل:

$\log(\sqrt[3]{a} \sqrt{b}) = \log(a^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{2}})$

طبق قضیه ی ۱:  $= \log a^{\frac{1}{3}} + \log b^{\frac{1}{2}}$

طبق قضیه ی ۲:  $= \frac{1}{3} \log a + \frac{1}{2} \log b$

مثال ۱۳: لگاریتم‌های زیر را به یک لگاریتم تبدیل کنید :

$$A = \log \sqrt{P} - \log \sqrt[4]{P} + \log\left(\frac{1}{P}\right)^{\frac{1}{2}} + \log 4$$

$$A = \log\left(\frac{\sqrt{P} \cdot \frac{1}{P^{\frac{1}{2}}} \cdot 4}{\sqrt[4]{P}}\right)$$

حل: طبق قضیه‌ی ۳ :

$$A = \log\left(\frac{P^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{P^{\frac{1}{2}}} \cdot 4}{P^{\frac{1}{4}}}\right)$$

$$A = \log\left(\frac{1}{P} \cdot 4\right)$$

$$A = \log P^{\frac{1}{2}}$$

مثال ۱۴: معادله‌ی زیر را با شرط  $q > 0$  و  $p$  برای  $x$  حل کنید :

$$\log x - \frac{1}{4} \log(pq) = -\frac{1}{4} \log(p/q)$$

$$\log x - \frac{1}{4} \log p - \frac{1}{4} \log q = -\frac{1}{4} \log p + \frac{1}{4} \log q$$

حل:

$$\log x = \frac{1}{4} \log q + \frac{1}{4} \log q = \log q$$

در نتیجه

$$x = q$$

به دلیل راحت‌تر بودن محاسبات با لگاریتم اعشاری (دهدهی) می‌توانیم لگاریتم در مبنای دیگر را تبدیل به لگاریتم اعشاری (لگاریتم در مبنای ۱۰) بکنیم.

$$\text{قضیه‌ی ۶: اگر } x > 0 \text{ آنگاه } \log_a x = \frac{\log x}{\log a}.$$

اثبات:  $\log_a x$  را مساوی  $y$  قرار می‌دهیم

$$\log_a x = y$$

(۴)

$$a^y = x$$

طبق تعریف لگاریتم اگر  $a = b$  آنگاه  $\log a = \log b$  در نتیجه

$$\log(a^y) = \log x$$

$$y \log a = \log x \quad (5)$$

چون به دنبال  $y = \log_a x$  هستیم، پس (5) را بر حسب  $y$  می‌نویسیم

$$y = \frac{\log x}{\log a}$$

و از (4) مقدار  $y$  را جایگزین می‌کنیم

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a}$$

و اثبات کامل می‌شود.

مثال ۱۵:  $\log_3 17 = \frac{\log 17}{\log 3}$  . با استفاده از ماشین حساب، این مقدار را محاسبه می‌کنیم:

|       |                         |
|-------|-------------------------|
| نمایش | ترتیب عملیات            |
| ۲/۵۷۸ | $17 \log \div 3 \log =$ |

## مسائل

۱- با استفاده از سه قضیه ی ۳، ۴ و ۵، عبارات زیر را تبدیل کنید:

$$\log(a^3 b^5) \quad (\text{الف})$$

$$\log[(a+b)(a-b)] \quad (\text{ب})$$

$$\log(mr^{-2}) \quad (\text{پ})$$

$$\log\left(\frac{1}{a^2 b^3 c^4}\right) \quad (\text{ت})$$

$$\log \sqrt[3]{\frac{a^2 b}{c^2}} \quad (\text{ث})$$

$$\log(\sqrt[3]{a}\sqrt[4]{b}\sqrt[5]{c}) \quad \text{ج}$$

$$\log\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt{b}\sqrt[4]{a^3}}\right) \quad \text{ج}$$

$$\log\left(\frac{a^2}{b^2c}\right) \quad \text{ح}$$

۲- به یک لگاریتم تبدیل کنید :

$$5 \log a - 2 \log b + 3 \log c \quad \text{الف)}$$

$$\frac{1}{4} \log(ab) - \frac{3}{5} \log(a^2b) \quad \text{ب)}$$

$$2 \log(x+y) - 3 \log(x-y) \quad \text{پ)}$$

$$\log pq - \log 2q \quad \text{ت)}$$

۳- معادلات لگاریتمی زیر را برای متغیر  $x$  حل کنید :

$$\log 27 = 3 \log x \quad \text{الف)}$$

$$\log x + 2 \log 4 = 2 \log 12 \quad \text{ب)}$$

$$\log(p-q) = \log(p^2 - q^2) - \frac{1}{4} \log x \quad \text{پ)}$$

### ۳-۶ کاربردهای لگاریتم: مقیاس سنجش زلزله و صدا

در سال ۱۳۶۹، زلزله‌ی شدیدی در شهر رودبار ایران به وقوع پیوست که متأسفانه باعث تلفات جانی بسیاری شد. مرکز زلزله‌شناسی دانشگاه تهران، شدت زلزله را بین ۷/۲ تا ۷/۶ ریشتر<sup>۱</sup> اعلام کرد.

اصولاً وقتی که رسانه‌ها خبر وقوع زلزله‌هایی با قدرت بیش از ۵ ریشتر را گزارش می‌کنند،

---

<sup>۱</sup> - Richter

مردم هراسان شده، نگران تلفات احتمالی آن می گردند. این در حالی است که اخبار وقوع زلزله‌هایی با قدرت ۳/۵ الی ۴ ریشتر خیلی نگران کننده نیستند، زیرا قدرت تخریبی آن‌ها پایین است. چرا؟ چگونه اختلاف بین ۳/۵ تا ۷/۲ باعث بالا بردن قدرت تخریب تا این اندازه می شود؟ به طور طبیعی، این سؤال پیش می آید که واحد سنجش شدت زلزله چه ماهیتی دارد که افزایش چند واحد آن این گونه قدرت تخریب را بالا می برد؟

جالب است بدانید که مقیاس ریشتر که برای تعیین شدت زلزله به کار برده می شود، بیانگر این است که با افزایش هر واحد ریشتر، قدرت تخریب ده برابر می شود. به عنوان مثال، زلزله‌ای با قدرت ۶ ریشتر ده بار شدیدتر از زلزله‌ای با قدرت ۵ ریشتر و ۱۰۰ بار شدیدتر از زلزله‌ای با قدرت ۴ ریشتر است.

## فعالیت ۳-۴

الف - اگر برای زلزله‌ای با شدت ۴ ریشتر، شدت نسبی یک واحد را در نظر بگیریم، جدول زیر را کامل کنید :

|                          |                          |                          |                          |    |   |            |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|----|---|------------|
| <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | ۱۰ | ۱ | شدت نسبی   |
| ۹                        | ۸                        | ۷                        | ۶                        | ۵  | ۴ | واحد ریشتر |

۱- چگونه شدت نسبی و واحد ریشتر از لحاظ شدت قابل مقایسه هستند؟

۲- چگونه زلزله‌ای با قدرت ۹ ریشتر با زلزله‌ای با قدرت ۷ ریشتر قابل مقایسه است؟

حتماً متوجه شدید که اعداد مقیاس ریشتر لگاریتمی هستند!

ب - با دانستن اینکه اعداد مقیاس ریشتر لگاریتمی هستند، به سؤال‌های زیر پاسخ دهید :

۱- لگاریتم چه عددی صفر است؟

۲- بعید است که زلزله‌ای با قدرت ۲ ریشتر احساس شود. لگاریتم چه عددی ۲ است؟

۳- زلزله‌ای با قدرت ۷/۲۵ ریشتر اگر در نزدیکی محل پرجمعیتی اتفاق بیفتد فاجعه آمیز

است. لگاریتم چه عددی ۷/۲۵ است؟

به نکته‌ای که در مجله‌ی دانستنی‌ها شماره‌ی ۱۰ سال شانزدهم - اردیبهشت ۱۳۷۴ نوشته

شده است دقت کنید :

زراخانه‌ی نیروهای طبیعی...  
زمین لرزه = ۵۰۰۰۰ بمب اتمی  
زمین لرزه‌ای به قدرت ۱۰  
درجه در مقیاس ریشتر، معادل ۱۰  
میلیارد تن انفجار تی.ان. تی انرژی  
آزاد می‌کند. بمب هیروشیما معادل  
۲۰۰۰۰ تن تی.ان. تی بود. به ناحق  
زمین لرزه‌ها را تخریب‌کننده‌ترین  
پدیده‌های طبیعی به شمار می‌آورند.  
آمار نشان می‌دهند که گردبادها و  
طوفان‌ها و سیل‌ها، خسارات مالی و  
جانی سنگین‌تری به بار می‌آورند.

## تمرین

۱- اولین فیلم انیمیشن در تاریخ سینما، فیلم سفیدبرفی و هفت کوتوله بود. مدت زمان فیلم ۸۲ دقیقه بود و همچنان که در مورد فیلم‌های انیمیشن مدرن صحبت دارد، در هر ثانیه، ۲۴ تصویر و مجموع تعداد تصویرهایی که بر پرده ظاهر شد،  $۸۲ \times ۶۰ \times ۲۴$  بود. با استفاده از لگاریتم، تعداد تقریبی تصویرهایی را که در فیلم سفیدبرفی و هفت کوتوله به کار برده شده بود پیدا کنید.

۲-<sup>۲</sup> در یک سال، تقریباً  $۴/۲ \times ۱۰^۵$  کیلوگرم گیاه در زیر هر کیلومترمربع از سطح اقیانوس می‌روید. همچنان که حدود  $۳/۶ \times ۱۰^۸$  کیلومترمربع زمین نیز به وسیله‌ی اقیانوس پوشیده شده است. با استفاده از لگاریتم، وزن تقریبی گیاههایی را که در اقیانوس‌های سطح کره‌ی زمین در یک سال می‌رویند مشخص کنید و مراحل کار خود را یادداشت کنید.

۳- ۶- ۱- مقیاس ریشتر: مقدار انرژی آزاد شده برحسب ژول که توسط مهیب‌ترین زلزله‌های دنیا تا به حال ثبت شده است، حدود ۱۰۰ میلیارد برابر انرژی آزاد شده توسط زلزله‌ی خفیفی است که به سختی قابل احساس است. در طی ۱۵۰ سال گذشته، افراد از کشورهای

۱ و ۲- این دو مسأله از کتاب ژاکوب، ۱۹۸۲ صفحه ۲۱۶ گرفته شده است.

مختلف، مقیاس‌های متفاوتی برای اندازه‌گیری و مقایسه‌ی قدرت زلزله تهیه کرده‌اند. در سال ۱۹۳۵، چارلز ریشر، زلزله‌شناس آمریکایی، یک مقیاس لگاریتمی برای سنجش قدرت زلزله تهیه کرد که هنوز مورد استفاده است و به دلیل اهمیت، به نام خود او معروف گشته است. زلزله‌ای با قدرت کمتر از  $4/4^{\circ}$  ریشر قابل احساس نیست. انرژی آزاد شده توسط زلزله‌ای با قدرت بسیار کم به عنوان مبنای استاندارد مقایسه برای سنجش قدرت زلزله‌ها در نظر گرفته شده است که برابر است با

$${}^1 E_0 = 10^{4/4}$$

آنگاه قدرت زلزله از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید :

$${}^2 M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$$

جدول (۱۱)

| قدرت زلزله در مقیاس ریشر | قدرت تخریب |
|--------------------------|------------|
| $M < 4/5$                | ضعیف       |
| $4/5 < M < 5/5$          | متوسط      |
| $5/5 < M < 6/5$          | زیاد       |
| $6/5 < M < 7/5$          | بسیار زیاد |
| $M > 7/5$                | بزرگ‌ترین  |

که در آن  $E$  انرژی آزاد شده به وسیله‌ی زلزله، برحسب ژول است. جدول (۱۱) قدرت تخریب زلزله‌های مختلف را در مقیاس ریشر نشان می‌دهد :

مثال ۱۶: زلزله‌ی سال ۱۹۰۶ سانفرانسیسکو در حدود  $5/96 \times 10^{16}$  ژول انرژی آزاد کرد. زلزله آن چنان شدید بود که حتی خیابان‌های شهر را نابود کرد، طوری که عملاً، شهر سانفرانسیسکو از نو ساخته شد. قدرت زلزله در مقیاس ریشر چقدر بود؟

حل: از رابطه‌ی  $M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0}$  استفاده می‌کنیم و  $M$  را حساب می‌کنیم

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{5/96 \times 10^{16}}{10^{4/4}}$$



$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3} \log(5/96 \times 10^{11/6}) \\
 &= \frac{2}{3} (\log 5/96 + \log 10^{11/6}) \\
 &= \frac{2}{3} (0.775 + 11/6)
 \end{aligned}$$

$M = 8/25$

مثال ۱۷: شدت زلزله‌ی سال ۱۳۶۹ رودبار ۷/۲ الی ۷/۶ ریشتر گزارش شد. مقدار تقریبی انرژی آزاد شده بر حسب ژول را پیدا کنید.

$$M = \frac{2}{3} \log \frac{E}{E_0} \quad \text{حل:}$$

که در آن  $M = 7/2$ ،  $E_0 = 10^{4/4}$  و  $E$  مجهول است. بنابراین

$$\begin{aligned}
 7/2 &= \frac{2}{3} \log \frac{E}{10^{4/4}} \\
 &= \frac{2}{3} (\log E - \log 10^{4/4}) \\
 &= \frac{2}{3} (\log E - 4/40) \\
 &= \frac{2}{3} \log E - \frac{2}{3} \times 4/40 \\
 7/2 &= \frac{2}{3} \log E - 2/933 \quad \text{و}
 \end{aligned}$$

یا

$$\frac{2}{3} \log E = 7/2 + 2/933 = 10/13,$$

و در نتیجه

$$\log E = \frac{10/13}{\frac{2}{3}} = 15/2,$$

برای محاسبه‌ی  $E$  یا از دکمه‌ی  $y^x$  ماشین حساب استفاده کنید که چون

$$E = 10^{15/2}$$

در نتیجه

$$E = 1/584 \times 10^{15}$$

یا از تابع عکس لگاریتم استفاده کنید :

| نشان دهنده             | ترتیب عملیات                                 |
|------------------------|--|
| $1/584 \times 10^{15}$ | $\boxed{1/584} \boxed{\div} \boxed{10^{15}}$ |

مقدار E را می‌توانیم با مراجعه به جدول لگاریتم به دست آوریم

$$E = 10^{15/2} = 10^{15} \times 10^{0.2}$$

و در جدول به دنبال عددی می‌گردیم که لگاریتم آن  $0.2$  است که مقدار تقریبی آن عدد  $1/584$  است، یعنی

$$E = 1/584 \times 10^{15}$$

تمرین ۷: همین مثال را با فرض اینکه شدت زلزله‌ی رودبار  $7/6$  ریشتر باشد، انجام دهید.

**۳-۶-۲- شدت صدا:** گوش انسان قادر به شنیدن صداهایی با شدت‌های غیر قابل تصور است. بلندترین صدایی که گوش یک انسان سالم (بدون صدمه رسیدن به پرده‌ی گوش) قادر به شنیدن آن است، شدتی معادل یک تریلیون ( $10^{12}$ ) برابر شدت کوتاه‌ترین صدایی که همان انسان می‌تواند بشنود دارد. مقیاس دسی بل<sup>۲</sup> نیز یک مقیاس لگاریتمی برای سنجش شدت صدا است که به احترام الکساندر گراهام بل، مخترع تلفن (۱۹۲۲-۱۸۴۷)، به نام او نامگذاری شده است. مقیاس دسی بل چنین تعریف می‌شود

$$D = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

که در آن D برابر سطح دسی بل صدا، I نشان دهنده‌ی شدت صدا بر حسب وات در هر مترمربع  $(\frac{W}{m^2})$  و  $I_0$  شدت کمترین صدای قابل شنیدن توسط یک انسان نسبتاً سالم و جوان است. مقدار استاندارد شده‌ی  $I_0$  برابر  $10^{-12}$  وات در هر مترمربع است. جدول (۱۲) شدت بعضی از صداهای آشنا را نشان می‌دهد.

۱- در بعضی ماشین حساب‌ها به جای دکمه‌ی INV از دکمه‌ی 2ndF استفاده می‌شود.

جدول (۱۲)

| شدت صدا $\frac{W}{m^2}$ | منبع صدا                  |
|-------------------------|---------------------------|
| $1/0 \times 10^{-12}$   | در آستانه‌ی شنیدن         |
| $5/2 \times 10^{-10}$   | نجوا                      |
| $3/2 \times 10^{-6}$    | مکالمه‌ی معمولی           |
| $8/5 \times 10^{-4}$    | ترافیک سنگین              |
| $3/2 \times 10^{-3}$    | مته‌ی سوراخ کردن سنگ      |
| $10 \times 10^0$        | در آستانه‌ی درد           |
| $8/3 \times 10^2$       | هواپیمای جت با موتور سوخت |

مثال ۱۸: تعداد واحدهای دسی بل را که از صدای نجوا ماندنی با شدت  $5/2 \times 10^{-10}$  وات در هر مترمربع ایجاد می‌شود پیدا کنید.

حل:  $D$  را از فرمول  $D = 10 \log \frac{I}{I_0}$  حساب می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
 D &= 10 \log \frac{5/2 \times 10^{-10}}{10^{-12}} \\
 &= 10 \log (5/2 \times 10^2) \\
 &= 10 (\log 5/2 + \log 10^2) \\
 &= 10 (0.716 + 2)
 \end{aligned}$$

$$D = 27/16 \quad \text{دسی بل}$$

### مقیاس لگاریتمی

چون لگاریتم هر عدد در مبنای به غیر از یک – افزایشی بسیار کندتر از خود آن عدد دارد، از لگاریتم‌ها برای ایجاد مقیاس‌های راحت‌تری برای مقایسه استفاده می‌شود.