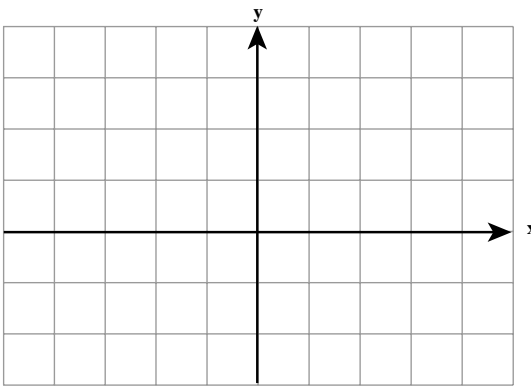


توابع و معادلات

توابع درجه دوم



در ریاضی ۲ با رسم نمودار برخی

از توابع درجه دوم به کمک انتقال تابع

$f(x) = x^2$ آشنا شدیم. با انجام تمرین زیر،

آماده یادگیری مطالبی دیگر می شویم :

تمرین : به روش یاد شده نمودار

توابع زیر را رسم کنید.

الف) $g(x) = -x^2$

ب) $h(x) = (x+2)^2$

ج) $s(x) = (x-1)^2 + 2$

د) $t(x) = -x^2 - 3$

به منحنی نمایش تابع درجه دوم سهمی گفته می شود. در نمودار $y = x^2$ نقطه $O(0,0)$ رأس سهمی است.

در نمودارهای درجه دوم دیگر از جمله نمودارهایی که در تمرین بالا رسم نموده اید چنین نقطه ای را مشاهده می کنید. در انتقال نمودار $y = x^2$ به نمودار $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ رأس سهمی نیز به نقطه (x_0, y_0) انتقال می یابد. مثلاً رأس سهمی $y = 2(x-1)^2 + 3$ نقطه $(1,3)$ و رأس سهمی $y = -x^2 - 2$ نقطه $(0, -2)$ می باشد.

همچنین مشاهده کردید که در برخی نمودارها رأس سهمی پایین ترین نقطه (می نیم) سهمی و

در برخی بالاترین نقطه (ماکزیم) سهمی می باشد. به عبارت دیگر در این نقطه، تابع درجه دوم کمترین

مقدار یا بیشترین مقدار را داراست.

ضابطه یک تابع درجه دوم در حالت کلی $y = ax^2 + bx + c$ است که در آن a, b, c اعداد ثابتی

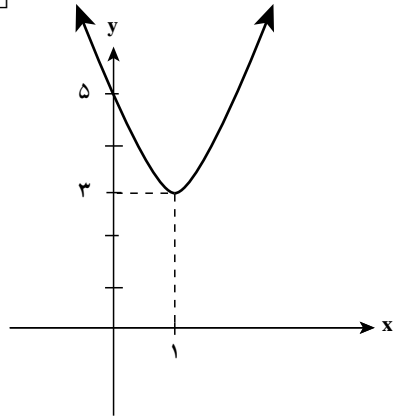
هستند و $a \neq 0$ دامنه این تابع IR و برد آن زیرمجموعه ای از IR می باشد. چنین ضابطه ای را می توان

به صورت $y = a(x - x_0)^2 + y_0$ نیز نوشت :

مثال : تابع درجه دوم با ضابطه $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$ را می توان به صورت زیر نوشت :

$$f(x) = 2(x^2 - 2x + \frac{5}{2}) = 2 \left[(x-1)^2 - 1 + \frac{5}{2} \right]$$

$$= 2(x-1)^2 + 3$$



به ازای $x=1$ مقدار تابع $f(1)=3$ است اما به ازای سایر مقادیر چون $2(x-1)^2$ مثبت است،

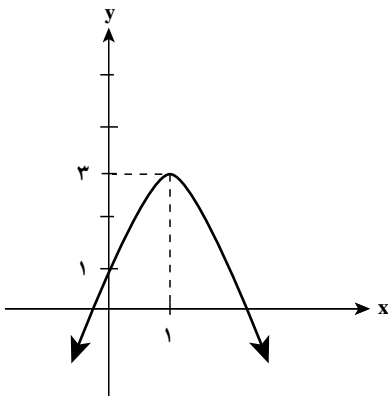
$f(x) = 2(x-1)^2 + 3$ بزرگتر از 3 بوده و رأس سهمی یعنی نقطه $\left[\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right]$ نقطه می نیم است.

حال تابع $g(x) = -2(x-1)^2 + 3$ را در نظر بگیرید

که ضریب x^2 عددی منفی است ($a < 0$). به ازای $x=1$ مقدار تابع $f(1)=3$ است اما به ازای سایر مقادیر چون

$-2(x-1)^2$ منفی است، $g(x) = -2(x-1)^2 + 3$ کوچکتر

از 3 بوده و رأس سهمی یعنی نقطه $\left[\begin{matrix} 1 \\ 3 \end{matrix} \right]$ نقطه ماکزیم می باشد.



مثال : حاصل جمع دو عدد برابر 11° است.

این دو عدد را چنان بیابید که حاصل ضرب آن ها ماکزیم شود.

حل : دو عدد را x و y می نامیم. داریم $x+y=11^\circ$ قرار می دهیم $P=xy$. پس

$$P = x(11^\circ - x) = -x^2 + 11^\circ \cdot x = -(x - 5.5)^2 + 5.5^2$$

عبارت اخیر وقتی ماکزیمم است که جمله اول آن برابر صفر شود.

$$x - 55 = 0, \quad x = 55$$

پس $x = y = 55$ جواب مسئله است.

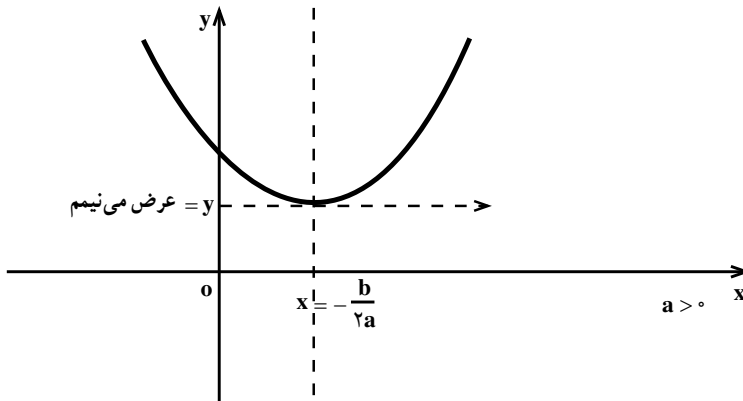
به طور کلی در مورد تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ می توان نوشت :

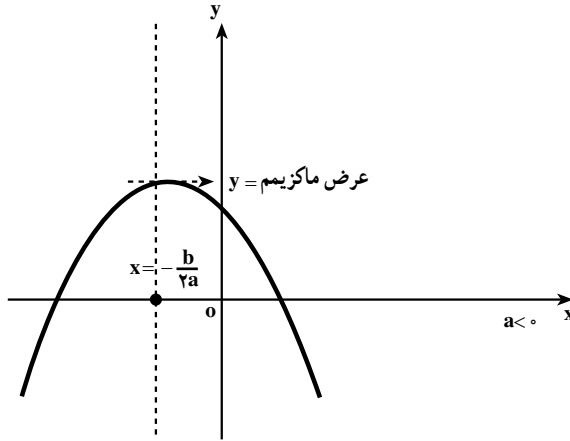
$$f(x) = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ ، مقدار تابع $\frac{4ac - b^2}{4a}$ است. اما به ازای سایر مقادیر :

الف) اگر $a > 0$ ، $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ مثبت و در نتیجه $f(x) > f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ و نقطه به طول $-\frac{b}{2a}$ نقطه می نیمم است.

ب) اگر $a < 0$ ، $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ منفی و در نتیجه $f(x) < f\left(-\frac{b}{2a}\right)$ و نقطه به طول $-\frac{b}{2a}$ نقطه ماکزیمم است.





به طور خلاصه می توان گفت: تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به ازای $x = -\frac{b}{2a}$ ، اگر $a > 0$ باشد کمترین مقدار و اگر $a < 0$ باشد بیشترین مقدار را دارد.

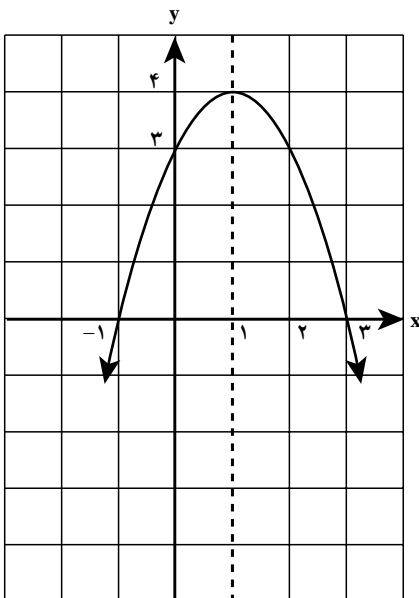
مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ را به صورت زیر تعیین می کنیم:

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{4} \Rightarrow f\left(\frac{3}{4}\right) = 2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{4}\right) + 4 = \frac{23}{8}$$

برای رسم نمودار تابع درجه دوم، معمولاً علاوه بر رأس سهمی، مختصات دو نقطه دیگر در طرفین رأس و به فاصله مساوی از آن را تعیین می کنیم. برای رسم دقیق تر، مختصات نقاط تلاقی نمودار با محورهای مختصات را نیز به دست می آوریم.

مثال: نمودار تابع $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ را رسم

می کنیم.



رأس سهمی نقطه $x = -\frac{b}{2a} = 1$ و دو نقطه $y = 4$

با فاصله مساوی در طرفین آن $x = 2$ و $y = 3$ و $x = 0$ و $y = 3$

می باشد. به علاوه:

نقطه تلاقی منحنی با محور y ها همان نقطه

$x = 0$ و نقطه تلاقی منحنی با محور x ها با جایگذاری $y = 3$

$y = 0$ دو تابع و حل معادله نظیر به دست می آید:

$$y=0 \rightarrow -x^2+2x+3=0 \xrightarrow{\text{حل معادله درجه دوم}} \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases} \text{ و } \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$$

خط قائمی که از رأس سهمی می‌گذرد (در نمودار قبل خط $x=1$) محور تقارن سهمی است

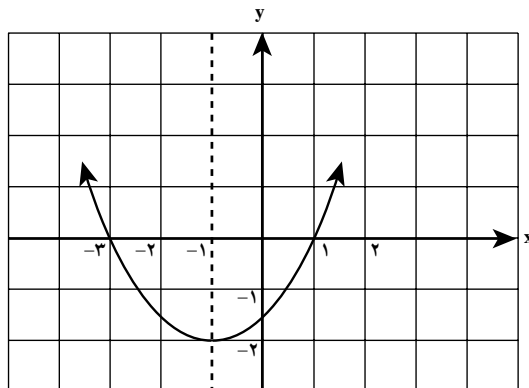
(چرا؟) به طور کلی خط به معادله $x = \frac{-b}{2a}$ محور تقارن سهمی است.

مثال: سهمی به معادله $y = \frac{1}{4}(x-1)(x+3)$ را رسم می‌کنیم.

نقاط $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ و $\begin{cases} x=-3 \\ y=0 \end{cases}$ نقاط برخورد سهمی با محور طول هاست.

به علاوه از دو نقطه فوق نتیجه می‌شود، نقطه $\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}$ رأس سهمی است (چطور؟)

نیز نقطه برخورد سهمی با محور عرض هاست. $\begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{3}{4} \end{cases}$



مسائل

۱- نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y=3x^2+6x$

ب) $y=-2x^2+2x-1$

ج) $y=9x^2+6x+1$

د) $y=(2-x)(4+x)$

ه) $y=2x^2+3$

و) $y=2x^2-3x+4$

۲- شخصی که در لبه فوقانی ساختمانی به ارتفاع ۸۰ متر ایستاده است توپی را با سرعت

اولیه ۲۰ متر بر ثانیه به سوی بالا پرتاب می‌کند. بعد از t ثانیه ارتفاع توپ از سطح زمین برابر است

با $h = -5t^2 + 20t + 80$. نمودار این تابع را رسم کنید. با استفاده از این نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) توپ پس از چند ثانیه به زمین می‌خورد؟

ب) ماکزیمم ارتفاع توپ چقدر است؟ بعد از چند ثانیه به ماکزیمم ارتفاع می‌رسد؟

ج) بعد از چند ثانیه پس از پرتاب توپ به سطح بالای ساختمان برمی‌گردد؟

د) دامنه این تابع را تعیین کنید.

۳- محیط مستطیلی 100 متر است. طول و عرض آن را چنان تعیین کنید که مساحت مستطیل

ماکزیمم شود.

۴- کمترین مقدار تابع $f(x) = x + \frac{4}{x}$ را به ازای مقادیر مثبت x تعیین کنید.

روابط بین ضرایب و جواب‌های معادله درجه دوم

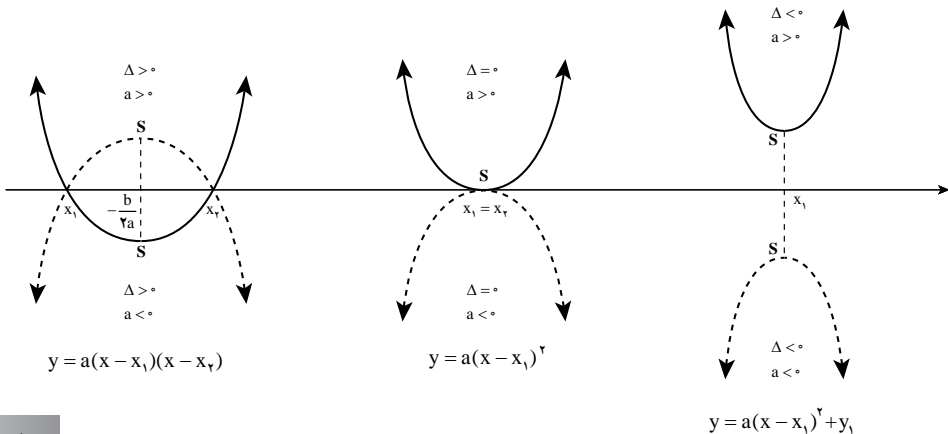
در ریاضی ۲ دیدیم که جواب‌های معادله درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ ، طول نقاط برخورد نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ با محور x هاست. اگر $b^2 - 4ac < 0$ باشد معادله فوق جواب ندارد و سهمی فوق محور x ها را قطع نمی‌کند. اگر $b^2 - 4ac = 0$ ، سهمی با محور x ها در یک نقطه تماس دارد و اگر $b^2 - 4ac > 0$ معادله دو جواب دارد و سهمی محور x ها را در دو نقطه قطع می‌کند.

هم چنین دیدیم که اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله فوق باشند آنگاه:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

و در نتیجه:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a(x - x_1)(x - x_2)$$



مثال: معادله‌ای درجه دوم با ضرایب صحیح بنویسید که جواب‌های آن $\frac{1}{2}$ و -3 باشد.

$$x = -3, x = \frac{1}{2} \Rightarrow (x+3)(x-\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow x^2 + \frac{5}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow 2x^2 + 5x - 3 = 0$$

مثال: معادله سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در $3+$ و $1+$ و محور عرض‌ها را در $6+$

قطع کند.

$$y = a(x-1)(x-3) \Rightarrow y = a(x^2 - 4x + 3)$$

$$6 = 3a \Rightarrow a = 2 \quad \text{و چون از نقطه } \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ می‌گذرد:}$$

پس معادله سهمی $y = 2x^2 - 8x + 6$ می‌باشد.

مثال: مقدار m را چنان بیابید که مجموع جواب‌های معادله $2x^2 - (m+1)x - 3m = 0$ برابر

3 باشد.

$$-\frac{b}{a} = 3 \Rightarrow 3 = \frac{m+1}{2} \Rightarrow m = 5$$

مثال: معادله درجه دومی بنویسید که جواب‌های آن معکوس جواب‌های $3x^2 + 2x + 1 = 0$ باشد.

اگر جواب‌های معادله داده شده α و β باشد جواب‌های معادله خواسته شده $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ است، پس:

$$(x - \frac{1}{\alpha}) \cdot (x - \frac{1}{\beta}) = 0 \Rightarrow x^2 - (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0 \Rightarrow x^2 - \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta}x + \frac{1}{\alpha\beta} = 0$$

$$x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

به‌طور کلی می‌توان نشان داد جواب‌های معادله‌های درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ و $cx^2 + bx + a = 0$

معکوس یکدیگرند.

مسائل

۱- معادله‌ای درجه دوم بنویسید که جواب‌های آن دو عدد زیر باشند.

الف) $3-$ و 4 ب) $\frac{2}{3}$ و $\frac{3}{4}$ ج) $2 + \sqrt{2}$ و $2 - \sqrt{2}$

۲- مقدار m را چنان تعیین کنید که حاصل ضرب جواب‌های معادله $-mx^2 + 3x + m - 1 = 0$

برابر -2 شود.

۳- مقدار a را چنان تعیین کنید که جواب‌های معادله $2x^2 - 5x + a = 0$ معکوس یکدیگر باشند.

سپس جواب‌های این معادله را بیابید.

۴- معادلهٔ سهمی را بنویسید که محور طول‌ها را در $2+$ و $2-$ و محور عرض‌ها را در $2+$ قطع کند.

۵- معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که جواب‌های آن معکوس جواب‌های $x^2 + 3x - 5 = 0$ باشد.

تابع قدرمطلق

در ریاضی ۱ با مفهوم قدرمطلق یک عدد حقیقی و در ریاضی ۲ با تابع‌های قدرمطلق آشنا

شدید.

تمرین : ۱- عبارت‌های زیر را بدون نماد قدرمطلق بنویسید.

$$\text{الف) } |2 - \sqrt{2}| \quad \text{ب) } |1 - \sqrt{3}| \quad \text{ج) } |a^2 + 1| \quad \text{د) } |-(x-1)^2 - 3|$$

۲- اگر $1 < x < 3$ حاصل عبارت $|x-1| + |x-3|$ را به دست آورید.

۳- در یک صفحهٔ مختصات نمودار تابع $f(x) = |x|$ را رسم کرده و با استفاده از آن نمودار

توابع زیر را در همان صفحه رسم کنید.

$$\text{الف) } g(x) = |x+2| \quad \text{ب) } h(x) = -|x| \quad \text{ج) } k(x) = |x-3| + 1$$

$$\text{د) } s(x) = 2 - |x+3| \quad \text{هـ) } t(x) = |2x| \quad \text{و) } p(x) = |2x-3|$$

با توجه به این که $|x| = \sqrt{x^2}$ می‌توانیم نتیجه بگیریم $|xy| = |x||y|$ و $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

هم چنین $|x| = |-x|$ و $|x|^2 = x^2$. برخی دیگر از ویژگی‌های قدرمطلق به قرار زیر است :

۱) اگر $|x| = a$, $a \geq 0$ ، آنگاه $x = a$ یا $x = -a$.

۲) اگر $|x| \leq a$ آنگاه $-a < x < a$ و برعکس.

$$|x| \leq a \Rightarrow |x|^2 \leq a^2 \Rightarrow x^2 \leq a^2 \Rightarrow x^2 - a^2 \leq 0 \Rightarrow (x+a)(x-a) \leq 0$$

$$0 \leq x+a \text{ و } x-a \leq 0 \Rightarrow -a \leq x, x \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$$

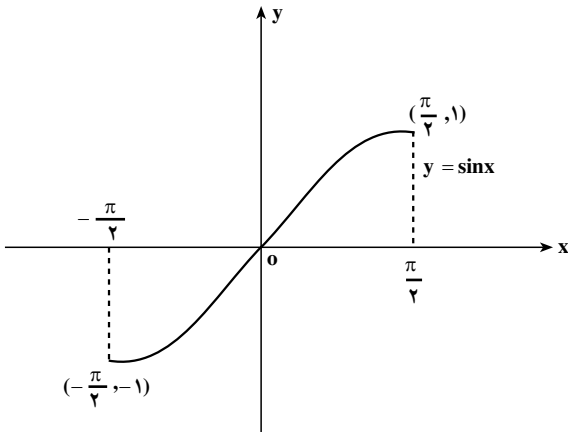
همین استدلال را برعکس نیز می‌توان ارائه کرد و از $-a < x < a$ نتیجه می‌شود $|x| < a$

مثال : جواب نامعادلهٔ $|3-5x| < 8$ را به دست می‌آوریم.

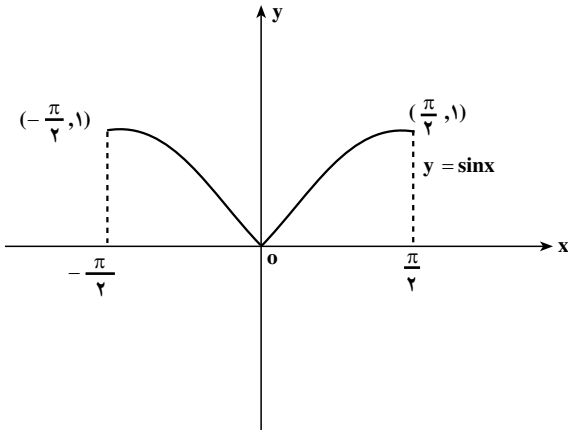
$$-8 < 3-5x < 8 \Rightarrow -11 < -5x < 5 \Rightarrow -1 < x < \frac{11}{5}$$

با استفاده از نمودار $y=f(x)$ می‌توان نمودار $y=|f(x)|$ را رسم کرد.

به عنوان مثال، منحنی نمایش تابع
 $y = \sin x$ $(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ به شکل
 مقابل است:



بنابراین، منحنی نمایش تابع $y = |\sin x|$ به
 شکل مقابل است.



به طور کلی در این روش ابتدا نمودار $y=f(x)$ را رسم می کنیم، قسمتی از نمودار که بالای محور x ها است باقی می ماند ولی قسمتی که زیر محور x ها است را حذف و قرینه آن نسبت به محور x ها را رسم می کنیم به این ترتیب نمودار $y=|f(x)|$ به دست می آید. آیا می توانید علت درستی این روش را توضیح دهید؟

مسائل

- ۱- با استفاده از ویژگی ۲ نشان دهید برای هر عدد حقیقی x داریم: $-|x| \leq x \leq |x|$
- ۲- اگر $|x| > a$ و $a > 0$ نشان دهید $x < a$ یا $x > -a$ و برعکس.

۳- با استفاده از مسأله ۱ برای هر دو عدد حقیقی x و y نشان دهید

$$-|x| - |y| \leq x + y \leq |x| + |y|$$

و نتیجه بگیرید: $|x + y| \leq |x| + |y|$ (رابطه نامساوی مثلثی)

۴- می‌توان نشان داد رابطه نامساوی مثلثی برای هر تعداد عدد حقیقی برقرار است. برای سه

$$\text{عدد حقیقی } x_1 \text{ و } x_2 \text{ و } x_3 \text{ نشان دهید } |x_1 + x_2 + x_3| \leq |x_1| + |x_2| + |x_3|$$

۵- معادله‌ها و نامعادله‌های زیر را حل کنید:

الف) $|2x - 1| = 3$ ب) $\frac{1}{|x + 5|} = 2$

ج) $\left|x + \frac{2}{3}\right| \leq 1$ د) $\frac{3}{|x|} < 1$ هـ) $|2x + 1| = |x - 2|$

۶- نمودار هریک از توابع زیر را رسم کنید:

الف) $y = |3 - 2x|$ ب) $y = |1 - x^2|$ ج) $y = |x^3|$

د) $y = |\cos x|, 0 \leq x \leq \pi$

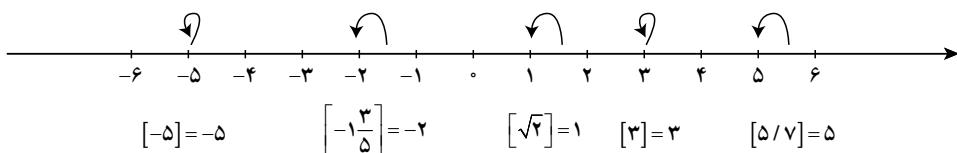
۷- هریک از توابع زیر را به صورت یک تابع چند ضابطه‌ای (بدون نماد قدرمطلق) بنویسید.

سپس نمودار هریک را رسم کنید:

الف) $y = 3 - |x + 1|$ ب) $y = x|x|$ ج) $y = |x - 1| + |x + 1|$

تابع جزء صحیح: اگر x یک عدد حقیقی باشد، جزء صحیح x که با نماد $[x]$ نشان می‌دهیم

بزرگترین عدد صحیحی است که کوچکتر یا مساوی x است. برای مثال:



برای هر عدد حقیقی x ، عدد صحیح n وجود دارد به طوری که $n \leq x < n + 1$ در نتیجه $[x] = n$.

مثلاً چون $2 \leq \sqrt{8} < 3$ در نتیجه $[\sqrt{8}] = 2$ و $-6 \leq -\frac{17}{3} < -5$ در نتیجه $[-\frac{17}{3}] = -6$

با توجه به این تعریف می‌توان گفت $x = [x] + \alpha$ که در اینجا α جزء کسری x نامیده می‌شود و

$$\text{چون } 0 \leq \alpha < 1, [x] \leq x < [x] + 1$$

در زیر به دو مورد از خواص تابع جزء صحیح اشاره می‌کنیم:

الف) $[x+k] = [x] + k ; k \in \mathbb{Z}$

ب) $[x] + [-x] = \begin{cases} 0 & ; x \in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$

دلیل درستی احکام فوق را می‌نویسیم:

الف) گفتیم برای هر عدد حقیقی x ، عدد صحیح n وجود دارد به طوری که $n \leq x < n+1$. در نتیجه $[x+k] = [x] + k$ و بنابراین $n+k \leq x+k < n+k+1$ و چون $n = [x]$ در نتیجه: $[x+k] = [x] + k$

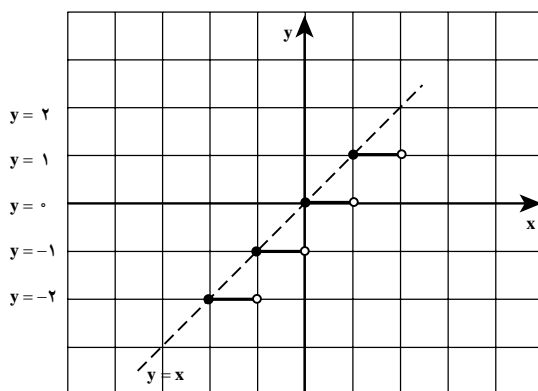
ب) اگر $x \in \mathbb{Z}$ آنگاه $-x \in \mathbb{Z}$ و در نتیجه $[x] + [-x] = x + (-x) = 0$. اگر $x \notin \mathbb{Z}$ آنگاه $n < x < n+1$ و $-n-1 < -x < -n$. به ترتیب طبق تعریف نتیجه می‌شود

$[x] = n$ و $[-x] = -n-1$ در نتیجه $[x] + [-x] = n + (-n-1) = -1$

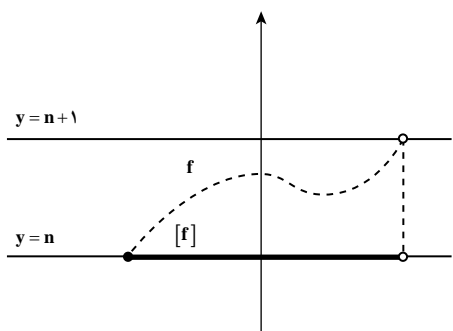
تابعی که به هر عدد حقیقی x ، جزء صحیح x را نسبت دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود: $f(x) = [x]$

چون جزء صحیح برای هر عدد حقیقی تعریف شده است پس دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی (\mathbb{R}) ولی برد آن مجموعه اعداد صحیح (\mathbb{Z}) می‌باشد. در زیر نمودار این تابع در بازه $[-2, 2]$ رسم شده است:

x	$y = [x]$
$-2 \leq x < -1$	-2
$-1 \leq x < 0$	-1
$0 \leq x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	1



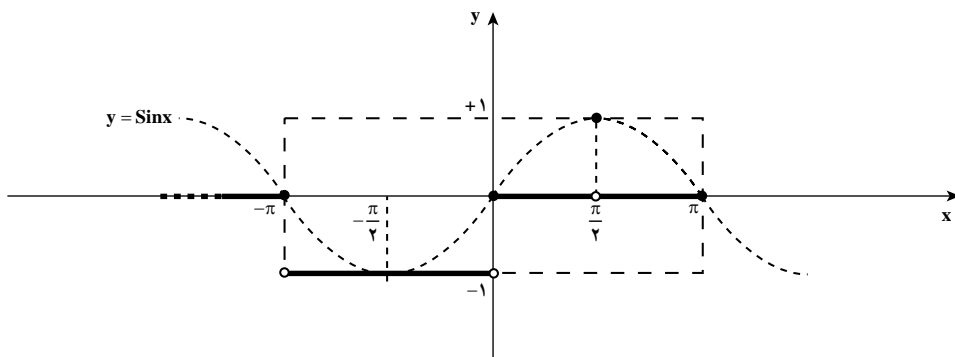
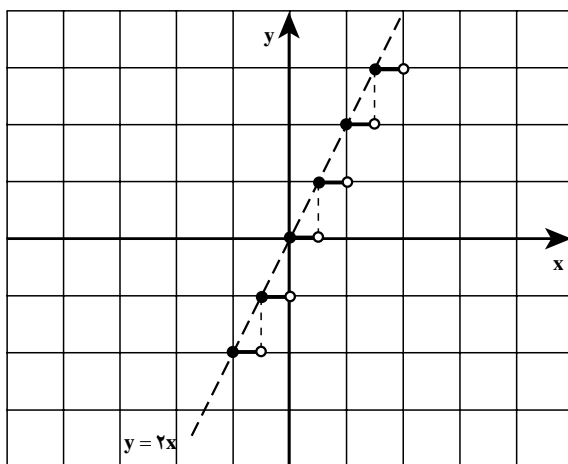
با استفاده از نمودار $y = x$ نیز می‌توان نمودار $y = [x]$ را رسم کرد. آیا می‌توانید در نمودار بالا، رابطه بین نمودارهای این دو تابع را بیابید؟



به طور کلی برای رسم نمودار
 $y = [f(x)]$ می‌توانیم از نمودار $y = f(x)$
 استفاده نماییم. می‌دانیم که اگر $n \leq f(x) < n+1$
 آنگاه $[f(x)] = n$ ($n \in \mathbb{N}$).

بنابراین برای رسم نمودار $y = [f(x)]$
 هر قسمتی از نمودار $y = f(x)$ که بُرد آن در بازه
 $[n, n+1)$ قرار می‌گیرد را حذف و به جای آن
 قطعه خط $y = n$ را رسم می‌کنیم.

مثال: در زیر نمودارهای دو تابع $y = [\sin x]$ و $y = [2x]$ با استفاده از نمودارهای
 $y = \sin x$ و $y = 2x$ رسم شده است:



۱- نمودارهای توابع زیر را رسم کنید.

الف) $y = 2[x] + 1$

ب) $y = \left[\frac{x}{2} \right]$

ج) $y = [\cos x] ; -\pi \leq x \leq \pi$

د) $y = [x^2] ; -2 \leq x \leq 2$

۲- نمودار تابع $y = x - [x]$ را رسم کنید (راهنمایی: ابتدا نشان دهید $0 \leq x - [x] < 1$)

۳- اگر $f(x) = [x + 2] + [-x]$ و $x \notin \mathbb{Z}$ نشان دهید $f(x) = 1$

۴- با استفاده از نامساوی‌های $4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + 4n + 1 < 4n^2 + 4n + 1$ نشان دهید:

$$n \in \mathbb{N}! : \left[\sqrt{4n^2 + 4n + 1} \right] = 2n$$

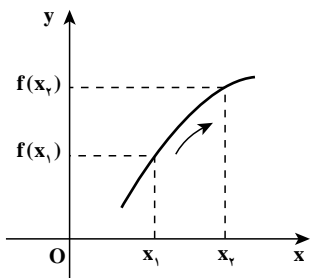
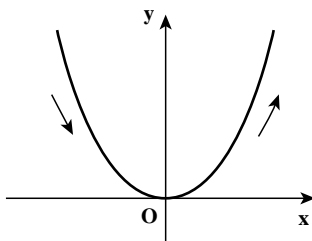
۵- معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $[x - 3] = 4$ ب) $[1 - 2x] = -5$

۶- فرض کنیم x و y دو عدد حقیقی باشند ثابت کنید:

$$[x + y] = [x] + [y] + 1 \quad \text{یا} \quad [x + y] = [x] + [y]$$

توابع صعودی و نزولی

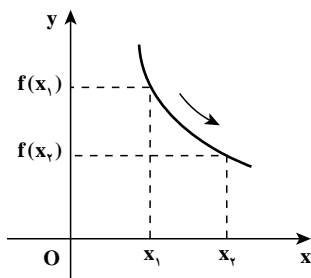


اگر به نمودار تابع $f(x) = x^2$ توجه کنید دیده می‌شود که روی بازه $[0, +\infty)$ با افزایش مقادیر x مقادیر $f(x)$ نیز افزایش می‌یابند. در این حالت گوییم تابع در حال صعود است. اما اگر این تابع را روی بازه $(-\infty, 0]$ نگاه کنیم، دیده می‌شود که با افزایش مقادیر x مقدار $f(x)$ کاهش می‌یابد. در این حالت گوییم تابع در حال نزول است.

به‌طور کلی، اگر D بازه‌ای در دامنه تابع f باشد گوییم، f در

بازه D صعودی است هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in D$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$



و گوئیم f در بازه D نزولی است هرگاه برای هر $x_1, x_2 \in D$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$

برای مثال، توابع ثابت هم صعودی محسوب می‌شوند هم نزولی. توابع یک به یک و صعودی را توابع اکیداً صعودی می‌نامند. یک تابع f روی بازه اکیداً صعودی است اگر و فقط اگر برای هر

$$x_1, x_2 \in D$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

توابع ثابت جزو توابع اکیداً صعودی نیستند. توابع یک به یک و نزولی را نیز توابع اکیداً نزولی

می‌نامند. یک تابع f روی بازه D اکیداً نزولی است اگر و فقط اگر برای هر $x_1, x_2 \in D$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$

مثال: با رسم نمودار تابع $y = x^2$ دیده می‌شود که این تابع روی بازه $(-\infty, 0]$ اکیداً نزولی و

روی بازه $[0, \infty)$ اکیداً صعودی است.

مثال: نمودار تابع $y = \frac{1}{x}$ نشان می‌دهد که این تابع روی بازه‌های $(-\infty, 0)$ و $(0, \infty)$ اکیداً

نزولی است، اما روی $\mathbb{R} - \{0\}$ نه صعودی است و نه نزولی.

مثال: نمودار تابع $y = \sin x$ نشان می‌دهد که این تابع روی بازه $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ اکیداً صعودی و

روی بازه $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ اکیداً نزولی است.

مسائل

۱- تعیین کنید تابع $y = |x|$ روی چه بازه‌هایی صعودی و روی چه بازه‌هایی نزولی است.

۲- تعیین کنید تابع $y = |\sin x|$ روی چه بازه‌هایی صعودی و روی چه بازه‌هایی نزولی است.

۳- روی بازه $[0, 2]$ نمودار یک تابع را رسم کنید که روی بازه $[0, 1]$ صعودی و روی بازه

$[1, 2]$ نزولی باشد.

۴- روی بازه $[-1, 1]$ نمودار تابعی را رسم کنید که روی بازه $(0, 1]$ و $[-1, 0)$ صعودی

باشد ولی روی بازه $[-1, 1]$ صعودی نباشد.

ترکیب توابع

اگر بادکنکی کروی را به گونه‌ای باد کنیم که شعاع آن در هر ثانیه ۲ سانتی متر افزایش یابد، حجم آن در هر لحظه چقدر است؟

اگر شعاع بادکنک باشد، r بر حسب زمان t به صورت $r=2t$ است که t را بر حسب ثانیه و r را بر حسب سانتی متر اندازه گیری کرده ایم. حجم کره به شعاع r برابر $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ است. r تابعی از t است و $r(t)=2t$ و v تابعی از r است و $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. اما حجم بادکنک تابعی از زمان t است و در هر لحظه t حجم بادکنک برابر $\frac{4}{3}\pi(2t)^3$ خواهد بود. این مقدار به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$V(r(t)) = \frac{4}{3}\pi(r(t))^3 = \frac{4}{3}\pi(2t)^3 = \frac{32}{3}\pi t^3$$

این تابع جدید را ترکیب دو تابع $V(r)$ و $r(t)$ می‌نامند.

به طور کلی، اگر f و g دو تابع به گونه‌ای باشند که برای هر x در دامنه f مقدار $f(x)$ در دامنه g قرار بگیرد، می‌توانیم مقدار $g(f(x))$ را محاسبه کنیم و تابع جدیدی بسازیم که آن را به $g \circ f$ نشان می‌دهند. دامنه $g \circ f$ همان دامنه f است و برای هر x در دامنه f خواهیم داشت.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

مثال: برای دو تابع $f(x)=2x$ و $g(x)=x^3$ چون دامنه هر دو تابع تمام اعداد حقیقی است

می‌توانیم هر دو ترکیب $g \circ f$ و $f \circ g$ را انجام دهیم و داریم

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x) = (2x)^3 = 8x^3$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^3) = 2x^3$$

در همین مثال دیده می‌شود، دو ترکیب $f \circ g$ و $g \circ f$ لزوماً با هم مساوی نیستند.

مثال: برای دو تابع $f(x)=x-1$ و $g(x)=\sqrt{x}$ ، دامنه f تمام اعداد حقیقی است و ترکیب $f \circ g$

قابل انجام است و داریم

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x} - 1 \quad x \in [0, \infty)$$

اما ترکیب $g \circ f$ قابل انجام نیست زیرا f تمام \mathbb{R} است در حالی که دامنه g فقط بازه $[0, \infty)$ است.

برای آن که ترکیب قابل انجام باشد، می‌توان دامنه f را به بازه $[1, \infty)$ محدود کرد تا بُرد آن در $[0, \infty)$ قرار گیرد، در این حالت داریم

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x-1) = \sqrt{x-1} \quad x \in [1, \infty)$$

مثال: برای تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ ، ترکیب $f \circ f$ قابل انجام است و

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x \quad x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

مثال: برای دو تابع $f(x) = |x|$ و $g(x) = \sin x$ ، هر دو ترکیب $f \circ g$ و $g \circ f$ قابل انجام است و

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = |\sin x|$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(|x|) = \sin|x|$$

تابع وارون

اگر طول ضلع یک مربع را به x و مساحت آن را با s نشان دهیم، s تابعی از x است و داریم $s(x) = x^2$. اما x نیز تابعی از s است و از طریق معادله $s = x^2$ می‌توانیم x را برحسب s حساب کنیم و داریم $x = \sqrt{s}$. اگر طول ضلع مربع را با l و مساحت مربع را با x نشان دهیم این تابع به صورت $l(x) = \sqrt{x}$ در می‌آید. در اینجا با دو تابع $s(x)$ و $l(x)$ روبه‌رو هستیم که هر کدام عکس عمل دیگری را انجام می‌دهد، یعنی

$$y = l(x) \Leftrightarrow s(y) = x$$

این گونه توابع را وارون یکدیگر می‌نامند.

این طور نیست که هر تابعی دارای تابع وارون باشد، شرط وجود تابع وارون برای یک تابع f آن است که برای هر y در بُرد f معادله $y = f(x)$ دارای جواب منحصر به فردی مانند x در دامنه f باشد. این به معنای یک به یک بودن f است.

مثال: تابع $y = x^2$ وارون پذیر نیست زیرا یک به یک نیست. اما اگر دامنه این تابع را به بازه $[-\infty, 0]$ محدود کنیم تابعی یک به یک می‌شود و وارون پذیر خواهد بود. برای محاسبه تابع وارون آن، در معادله $y = x^2$ ، x را بر حسب y محاسبه می‌کنیم و در محاسبه توجه داریم که $x \in (-\infty, 0]$.

$$y = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{y} \Rightarrow x = -\sqrt{y}$$

با تبدیل y به x و تبدیل x به y تابع $y = -\sqrt{x}$ به دست می‌آید که تابع وارون $y = x^2$ با دامنه $[-\infty, 0]$ است.

مثال: تابع $y = \frac{1}{x^3}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ یک به یک است و وارون پذیر است. برای محاسبه تابع وارون، x را بر حسب y محاسبه می کنیم.

$$y = \frac{1}{x^3} \Rightarrow x^3 = \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt[3]{y}}$$

با تبدیل y به x و تبدیل x به y تابع $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ به دست می آید که تابع وارون $y = \frac{1}{x^3}$ است.

مثال: تابع $y = \frac{2x+1}{x-1}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{1\}$ یک به یک است زیرا

$$\frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow (2x_1+1)(x_2-1) = (2x_2+1)(x_1-1)$$

$$\Rightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 1$$

$$\Rightarrow -3x_1 + 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$$

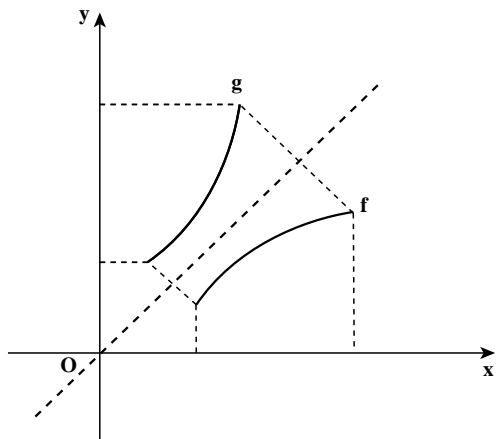
پس این تابع وارون پذیر است و برای محاسبه تابع وارون در معادله $y = \frac{2x+1}{x-1}$ ، x را بر حسب y حساب می کنیم.

$$y = \frac{2x+1}{x-1} \Rightarrow y(x-1) = 2x+1 \Rightarrow x(y-2) = 1+y$$

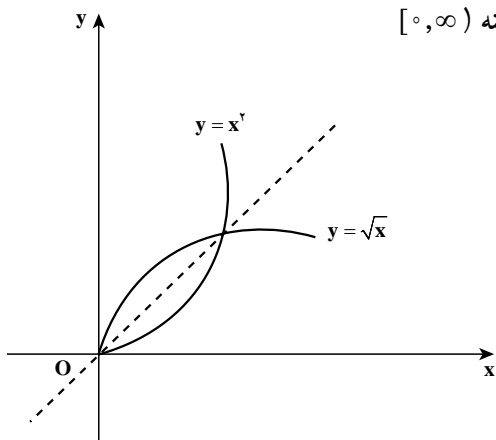
$$\Rightarrow x = \frac{1+y}{y-2}$$

با تبدیل y به x و تبدیل x به y تابع $y = \frac{x+1}{x-2}$ به دست می آید که تابع وارون تابع $y = \frac{2x+1}{x-1}$ است.

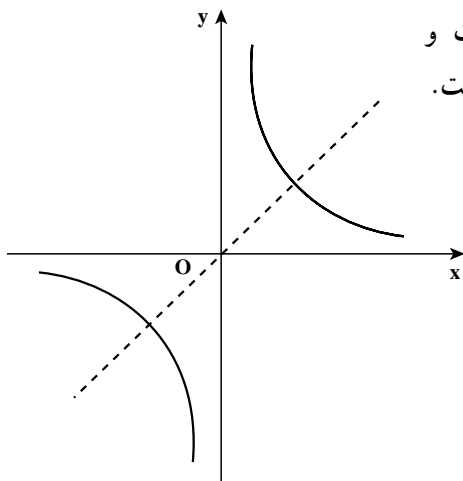
اگر g تابع وارون تابع f باشد، f نیز تابع وارون تابع g است و دامنه f برابر برد g و دامنه g برابر برد f است و نمودار این دو تابع نسبت به نیمساز ربع اول و سوم قرینه یکدیگرند.



مثال: دو تابع $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ با دامنه $[0, \infty)$ وارون یکدیگرند.



مثال: تابع $y = \frac{1}{x}$ وارون خودش است و نمودارش نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن است.



با توجه به تعریف تابع وارون، مشخص است که اگر تابع f با دامنه D_1 و تابع g با دامنه D_2 وارون یکدیگر باشند داریم

$$g(f(x))=x \quad x \in D_1$$

$$f(g(x))=x \quad x \in D_2$$

بر عکس، اگر این تساوی‌ها برقرار گردند، می‌توان نتیجه گرفت f و g وارون یکدیگرند.

مثال: تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ وارون خود است زیرا $(f \circ f)(x) = x$.

مثال: تابع $f(x) = \frac{1}{x+1}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{-1\}$ وارون تابع $g(x) = \frac{1-x}{x}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{0\}$ است زیرا

$$f(g(x)) = f\left(\frac{1-x}{x}\right) = \frac{1}{\frac{1-x}{x} + 1} = \frac{1}{\frac{1-x+x}{x}} = x$$

$$g(f(x)) = g\left(\frac{1}{x+1}\right) = \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = \frac{\frac{x+1-1}{x+1}}{\frac{1}{x+1}} = x$$

مثال: برای هر عدد مثبت a که $a \neq 1$ تابع $f(x) = a^x$ با دامنه \mathbb{R} وارون تابع $g(x) = \log_a x$ با دامنه $(0, \infty)$ است و

$$f(g(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x \quad x \in (0, \infty)$$

$$g(f(x)) = g(a^x) = \log_a a^x = x \quad x \in \mathbb{R}$$

۱- برای توابع $f(x)=x^2+1$ و $g(x)=\frac{1}{x}$ و $k(x)=2^x$ ترکیب توابع زیر را حساب کنید.

fog , gof , fok , kof , fof ok

۲- دامنه تابع $f(x)=3x+1$ را به گونه‌ای محدود کنید که برای تابع $g(x)=\sqrt{1-x}$ ترکیب gof قابل انجام باشد و gof را حساب کنید.

۳- برای تابع $f(x)=1-\sqrt{x}$ آیا ترکیب fok قابل انجام است؟ دامنه f را به گونه‌ای محدود کنید که fok قابل انجام باشد.

۴- در تابع $y=\frac{ax+1}{x-c}$ آیا می‌توان a و c را به گونه‌ای تعیین کرد که این تابع وارون خود باشد؟

۵- دامنه تابع $y=x^2+2x$ را به گونه‌ای محدود کنید که وارون پذیر باشد و وارون آن را به دست آورید.

۶- آیا تابع زیر وارون پذیر است؟ وارون آن را به دست آورید.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 0 \\ -x^2 & 0 < x \end{cases}$$

۷- ثابت کنید تابع $f(x) = \frac{2^x - 1}{2^x + 1}$ وارون پذیر است و وارون آن را به دست آورید.

دنباله‌ها

در ریاضی ۲ با مفهوم کلی دنباله‌های عددی و به‌طور خاص با دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدیم. در آنجا گفته شد «هر تعدادی از اعداد که آن‌ها را پشت سرهم نوشته باشیم یک دنباله از اعداد تشکیل می‌دهند».

در واقع هر موقع مجموعه‌ای از اعداد را شماره‌گذاری می‌کنیم دنباله‌ای در دست داریم و هر عدد از دنباله را جمله دنباله می‌نامیم. در دنباله با نام u ، جمله اول، جمله دوم، ...، جمله n ام، ...، آن را به ترتیب با $u_1, u_2, \dots, u_n, \dots$ نشان دادیم. u_n را جمله عمومی دنباله نیز می‌نامیم.

مثال: جمله عمومی دنباله‌ای $u_n = n^2 - 4n$ است. شش جمله ابتدای این دنباله چنین است:

$$-3, -4, -3, 0, 5, 12, \dots$$

هم چنین می‌توان دنباله نامتناهی را تابعی در نظر گرفت که دامنه آن مجموعه اعداد طبیعی (\mathbb{N}) و مقادیر آن اعداد حقیقی است. دنباله مثال قبل را می‌توان در جدولی به صورت زیر که نوعی از نمایش تابع است نشان داد:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	...
u_n	-۳	-۴	-۳	۰	۵	۱۲	...

دنباله می‌تواند متناهی نیز باشد. در این صورت دامنه آن بخشی از \mathbb{N} است. مانند دنباله عددهای طبیعی اول یک رقمی: ۲، ۳، ۵، ۷.

تمرین: پنج جمله ابتدای هر یک از دنباله‌های زیر را بنویسید. (در صورت لزوم می‌توانید از ماشین حساب استفاده کنید.)

$$\begin{array}{llll} \text{الف)} a_n = 1 - 3n & \text{ب)} b_n = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n & \text{ج)} c_n = (-1)^{n+1} & \text{د)} d_n = \frac{1}{n+1} \\ \text{ه)} e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & \text{و)} f_n = \frac{n(n+1)}{2} & \text{ز)} g_n = \frac{7}{9}(1 - 0.1^n) & \text{ح)} h_n = \frac{2n}{n+3} \end{array}$$

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

برای به دست آوردن مجموع جملات دنباله 15° و ... و $10^\circ 2$ و $10^\circ 1$ می‌توان روش زیر را

به کار برد:

$$101 + 102 + \dots + 150$$

$$+ 150 + 149 + \dots + 101$$

$$251 + 251 + \dots + 251 = 50 \times 251 \Rightarrow \text{مجموع جملات} = \frac{50}{2} \times (101 + 150)$$

و اگر مجموع اعداد فرد آن دنباله یعنی مجموع جملات دنباله ۱۴۹ و ... و ۱۰۳ و ۱۰۱ مورد نظر باشد به طریق مشابه:

$$101 + 103 + \dots + 149$$

$$+ 149 + 147 + \dots + 101$$

$$250 + 250 + \dots + 250 = 25 \times 250 \Rightarrow \text{مجموع جملات} = \frac{25}{2} \times (101 + 149)$$

در دو مثال فوق اولی دنباله‌ای حسابی است با جمله اول ۱۰۱ و جمله آخر ۱۵۰ و تعداد جمله ۵۰ و دومی دنباله‌ای حسابی با جمله اول ۱۰۱ و جمله آخر ۱۴۹ و تعداد جمله ۲۵ است. در حالت کلی در دنباله حسابی با جمله اول a و جمله آخر a_n و تعداد جمله n نیز می‌توان نوشت:

$$a + a_2 + \dots + a_n$$

$$+ a_n + a_{n-1} + \dots + a$$

$$(a + a_n) + (a + a_n) + \dots + (a + a_n) = n(a + a_n) \Rightarrow \text{مجموع جملات} = \frac{n}{2} (a + a_n)$$

بنابراین اگر مجموع n جمله ابتدای دنباله را با s_n نشان دهیم: $s_n = \frac{n}{2} (a + a_n)$

مثال: مجموع اعداد طبیعی مضرب ۳ کوچکتر از ۱۰۰ برابر است با $\frac{33}{2} (3 + 99) = 1683$ زیرا در دنباله حسابی 3×33 و ... و 3×2 و 3×1 جمله اول ۳ و جمله آخر ۹۹ و تعداد جمله‌ها ۳۳ است.

از طرفی می‌دانیم در دنباله‌ای حسابی با جمله اول a و قدر نسبت d ، جمله n ام از دستور $a_n = a + (n-1)d$ به دست می‌آید. در نتیجه:

$$s_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

مثال: محصول تولید لوله‌های فولادی کارخانه‌ای، در آغاز سال ۱۳۹۰ برابر ۱۵ میلیون تن می‌باشد. قرار است تولید این لوله‌ها هر سال نسبت به سال قبل ۴ میلیون تن افزایش یابد. مجموع تولید لوله‌ها در دهه ۹۰ را پیش‌بینی کنید.

پاسخ: مقدار تولید لوله‌ها در سال اول یعنی سال 1390 برابر است با $a_1 = 19$ تن. قدر نسبت این دنباله حسابی $d=4$ و تعداد سال‌های یک دهه $n=10$ است، پس

$$s_{10} = \frac{1}{2} [2(19) + (10-1)(4)] = 370 \text{ تن}$$

دنباله $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, \dots, 2^{63}$ را در نظر بگیرید. این دنباله، دنباله‌ای است هندسی با جمله عمومی 2^{n-1} .

برای به دست آوردن مجموع 64 جمله ابتدای آن می‌نویسیم:

$$S_{64} = 2^0 + 2^1 + 2^2 + \dots + 2^{63}$$

طرفین تساوی اخیر را در 2 ضرب می‌کنیم:

$$2 \times S_{64} = 2^1 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{64}$$

سپس طرفین دو تساوی اخیر را از هم کم می‌کنیم نتیجه می‌شود:

$$S_{64} = 2^{64} - 1$$

به عنوان مثالی دیگر می‌خواهیم مجموع n جمله ابتدای دنباله هندسی $l, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}$ که

جمله عمومی آن $(\frac{1}{3})^n$ است را به دست آوریم:

$$s_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + l + \frac{1}{3^n}$$

طرفین این تساوی را در $\frac{1}{3}$ ضرب می‌کنیم:

$$\frac{1}{3} \times s_n = \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} + l + \frac{1}{3^{n+1}}$$

طرفین دو تساوی اخیر را از هم کم می‌کنیم. نتیجه می‌شود:

$$(1 - \frac{1}{3})s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3^{n+1}}$$

$$s_n = \frac{\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3^n})}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^n})$$

از ایده‌ای که در دو مثال قبل به کار رفت می‌توان استفاده نمود و مجموع n جمله دنباله هندسی

با جمله اول a و قدر نسبت q را به دست آورد :

$$s_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1}$$

$$q \times s_n = aq + aq^2 + aq^3 + \dots + aq^n$$

طرفین دو تساوی اخیر را از هم کم می کنیم :

$$(1-q)s_n = a - aq^n$$

و در نتیجه :

$$s_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}, \quad q \neq 1$$

از این دستور می توان برای محاسبه مجموع هر تعداد جمله یک دنباله هندسی استفاده نمود.

مثال : مجموع ده جمله ابتدای دنباله $a_n = \frac{3}{4}(-2)^n$ را به دست می آوریم. این دنباله، دنباله ای

است هندسی با جمله اول -3 و قدر نسبت -2 .

$$s_{10} = \frac{-3(1-(-2)^{10})}{1-(-2)} = -(1-1024) = 1023$$

حد مجموع جملات دنباله هندسی نزولی

گفتیم برای محاسبه مجموع n جمله ابتدای دنباله هندسی از دستور زیر استفاده می کنیم:

$$s_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q}$$

اگر $|q| < 1$ آنگاه با بزرگتر شدن n مقدار $|q^n|$ کوچکتر می شود. به عبارت دیگر هر گاه n بی نهایت بزرگ شود مقدار $|q^n|$ بی نهایت کوچک می شود. به عبارت دیگر حد q^n در بی نهایت صفر می شود و در نتیجه حد عبارت فوق برابر با $\frac{a}{1-q}$ می شود.

مثال: مجموع تمام جملات دنباله زیر (حد مجموع جملات دنباله) را حساب می کنیم.

$$3, -1, \frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$$

$$s = \frac{3}{1 - (-\frac{1}{3})} = \frac{3}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4} = 2.25$$

مسائل

- ۱- مجموع همه عددهای طبیعی مضرب ۷ و کوچکتر از ۱۰۰۰ را به دست آورید.
- ۲- در یک دنباله حسابی جمله پنجم ۱۹- و جمله دهم ۳۱ است. مجموع بیست جمله ابتدای این دنباله را به دست آورید.
- ۳- دنباله ای حسابی مشخص کنید که جمله اول آن ۲- بوده و مجموع پنج جمله اول آن، یک سوم مجموع پنج جمله بعدی باشد.
- ۴- نشان دهید $1+3+5+\dots+(2n-1)=n^2$.
- ۵- مجموع شش جمله ابتدای یک دنباله هندسی ۹ برابر مجموع سه جمله ابتدای آن دنباله است. قدر نسبت این دنباله را بیابید.
- ۶- احمد می خواهد پول های خود را پس انداز کند. او روز اول ۱۰۰۰ تومان در صندوق خود قرار می دهد و قرار می گذارد هر روز ۹۹٪ پول واریزی روز قبل را به صندوق اضافه کند. پس از ۲۰

روز او چقدر پول در صندوق خواهد داشت؟ نشان دهید پول صندوق او هیچگاه از ۱۰۰,۰۰۰ تومان بیشتر نخواهد شد.

۷- برای محافظت از تابش‌های مضر مواد رادیواکتیو لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش‌ها پس از عبور از آن‌ها نصف می‌شود. حداقل از چند لایه باید استفاده کنیم تا شدت تابش ۹۷ درصد کاهش یابد؟

۸- با استفاده از دستور محاسبهٔ مجموع جملات دنبالهٔ هندسی، درستی اتحادهای زیر را نشان دهید.

$$\text{الف) } x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x + 1)$$

$$\text{ب) } x^n + 1 = (x+1)(x^{n-1} - x^{n-2} + \dots - x + 1)$$

۹- با استفاده از اتحاد (الف) در مسئله قبل درستی اتحاد زیر را نشان دهید.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2} \cdot b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

حد دنباله‌ها: مفهوم حد دنباله‌ها مشابه مفهوم حد تابع در $+\infty$ است که قبلاً (در ریاضی ۳) بیان گردید.

مثال: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ زیرا با بزرگ شدن عدد طبیعی n عدد $\frac{1}{n+1}$ به صفر نزدیک و نزدیکتر

می‌شود. به عبارتی دیگر هر چقدر بخواهیم می‌توانیم $\frac{1}{n+1}$ را به 0 نزدیک کنیم به شرط آن که n را به قدر کافی بزرگ کرده باشیم.

تعریف: هر دنباله که دارای حد بوده و حد آن عددی حقیقی باشد یک دنباله همگرا نامیده می‌شود.

به عنوان مثال هر یک از دنباله‌های $a_n = \frac{2n}{n+3}$ و $b_n = \frac{n^2+2}{n^2+1}$ همگرا می‌باشد زیرا به ترتیب

دارای حدی برابر ۲ و ۱ هستند. اصطلاحاً گوئیم این دنباله‌ها به ترتیب به ۲ و ۱ همگرا هستند.

اما دنباله $c_n = (-1)^{n+1}$ همگرا نیست زیرا $c_n = \begin{cases} 1 & n \text{ فرد} \\ -1 & n \text{ زوج} \end{cases}$ و با بزرگ شدن n به عدد خاصی

نزدیک نمی‌شود. هم‌چنین دنبالهٔ $f_n = \frac{n(n+1)}{2}$ همگرا نیست زیرا حد آن $+\infty$ است و عددی حقیقی نیست.

بعضی دنباله‌های خاص: دنباله‌های صفحهٔ بعد را در نظر بگیرید:

$$a_n = \frac{1}{2^n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ell$$

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} : 1, \frac{-1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ell$$

$$c_n = n^2 : 1, 4, 9, 16, 25, \dots$$

دنباله a چنان است که با افزایش شماره جمله، مقدار جمله کاهش می‌یابد. a نمونه‌ای از یک دنباله نزولی است. دنباله c چنان است که با افزایش شماره جمله، مقدار جمله افزایش می‌یابد. c مثالی از یک دنباله صعودی است. دنباله b نه صعودی است و نه نزولی. زیرا برای برخی از افزایش شماره‌ها مقدار جمله کاهش و برای برخی از افزایش شماره‌ها، مقدار جمله افزایش می‌یابد. در دنباله نزولی a داریم: $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ و در دنباله صعودی b داریم: $b_1 < b_2 < b_3 < \dots$

تعریف: هرگاه دنباله u_n چنان باشد که همواره $u_n \leq u_{n+1}$ آنگاه این دنباله را یک دنباله صعودی می‌نامیم. اگر همواره $u_n < u_{n+1}$ آنگاه دنباله را اکیداً صعودی می‌نامیم.

تعریف: هرگاه دنباله v_n چنان باشد که همواره $v_n \geq v_{n+1}$ آنگاه این دنباله را یک دنباله نزولی نامیم و اگر $v_n > v_{n+1}$ آنگاه این دنباله را اکیداً نزولی نامیم.

در هر دو حالت صعودی یا نزولی، دنباله را یکنوا می‌نامند.

این بخش را با مفهوم دیگری در باب دنباله‌ها به پایان می‌رسانیم. دنباله $a_n = \frac{1}{n}$ را در نظر

بگیرید. همواره $a_n < 2$. عدد ۲ یک کران بالا برای این دنباله است. یا برای دنباله $b_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$ عدد ۳ یک کران بالاست. زیرا همواره $b_n < 3$.

تعریف: فرض کنیم α عدد حقیقی ثابتی باشد به قسمی که همواره $u_n < \alpha$. در این صورت α را یک کران بالا برای دنباله u_n گوئیم و دنباله u_n را که دارای حداقل یک کران بالا باشد یک دنباله از بالا کراندار می‌نامیم.

برای دنباله $a_n = \frac{n^3}{1+n^2}$ ، همواره $a_n > 0$. عدد ۰ یک کران پایین برای این دنباله است. هر یک

از دنباله‌های $b_n = \frac{2n^2 + 3}{n^2 + 1}$ و $c_n = (-1)^n$ نیز دارای کران پایین هستند.

تعریف: هرگاه عدد حقیقی ثابتی مانند β یافت شود به قسمی که همواره $v_n > \beta$ دنباله v_n را یک دنباله از پایین کراندار نامیده و β را یک کران پایین دنباله v_n گوئیم.

تعریف: دنباله‌ای که هم از بالا و هم از پایین کراندار باشد دنباله کراندار گوئیم.

دنباله‌های $\frac{1}{n}$ و $\frac{2n^2+3}{n^2+1}$ و $(-1)^n$ کراندارند ولی دنباله‌های $\frac{n^3}{1+n^2}$ و $2n+3$ و $(-1)^n$ کراندار نیستند.

مسائل

۱- بررسی کنید از دنباله‌های زیر کدام صعودی، کدام نزولی و کدام نه صعودی‌اند و نه نزولی‌اند.

الف) $u_n = (-1)^{n+1}$ ب) $u_n = 3^{n-1}$ ج) $u_n = \frac{1}{n^2+1}$

د) $u_n = \frac{n^2}{2^n}$ ه) $u_n = \frac{3^n}{n^3}$ و) $u_n = \frac{n(n+1)}{2}$

۲- دنباله‌ای مثال بزنید که هم صعودی باشد و هم نزولی.

۳- دو دنباله مثال بزنید که از بالا کراندار بوده ولی از پایین کراندار نباشند.

۴- دو دنباله مثال بزنید که از پایین کراندار بوده ولی از بالا کراندار نباشند.

۵- دو دنباله کراندار مثال بزنید.

۶- دو دنباله مثال بزنید که نه از بالا کراندار باشد و نه از پایین.

۷- با استفاده از ماشین حساب ده جمله نخست دنباله $e_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ را محاسبه کنید. آیا این

دنباله کراندار است؟ (حدس بزنید)

۸- پنج جمله نخست دنباله‌ای که جمله عمومی آن $u_n = (1 - \frac{1}{n})^n$ است را محاسبه کنید. آیا

این دنباله کراندار است؟

کاربرد تابع نمایی (رشد و زوال)

معرفی عدد e : یکی از اعدادی که در ساختمان طبیعت فراوان به کار رفته است عددی است گنگ

که با حرف e نمایش داده و بسط اعشاری آن تا چند رقم اعشار برابر است با $e=2.718281\dots$ این که این عدد چیست و از کجا پیدا شده، بحث مفصلی دارد و ما در این بخش تنها به ماهیت ریاضی این عدد می پردازیم. در مسأله ۷ انتهای فصل قبل، ده جمله نخست دنباله $(1+\frac{1}{n})^n$ را به طور تقریبی و با دقت چند رقم اعشار نوشتیم. یکبار دیگر آن جملات را می نویسیم:

n	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	...
$(1+\frac{1}{n})^n$	۲	۲/۲۵	۲/۳۷	۲/۴۴۴	۲/۴۸۸۳	۲/۵۲۱۶	۲/۵۴۶۴	۲/۵۶۵۷	۲/۵۸۱۱	۲/۵۹۳۷	...

مشاهده می کنیم که حاصل $(1+\frac{1}{n})^n$ بزرگ و بزرگتر می شود (دنباله صعودی است) ولی می توان ثابت کرد همیشه کوچکتر از ۳ باقی می ماند. در ریاضیاتی عالیتر ثابت می شود که هر دنباله صعودی و از بالا کراندار همگراست و دنباله فوق نیز به عددی حقیقی همگراست که آن را عدد e می نامیم.

تعریف: حد دنباله $(1+\frac{1}{n})^n$ را که عددی است حقیقی و گنگ با e نشان می دهیم.

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n$$

امروزه با استفاده از کامپیوترهای پیشرفته، تقریب اعشاری e را تا بیش از یک میلیون رقم بعد از ممیز محاسبه کرده اند.

یادداشت تاریخی: e را به افتخار جان نپر (John Napier) ریاضیدان اسکاتلندی عدد نپر نامیده اند. نپر نویسنده اسکاتلندی (تولد ۱۵۵۰ و وفات ۱۶۱۷ میلادی) بود که مطالعاتی در ریاضیات و الهیات داشته است. نپر در واقع مخترع لگاریتم است که این مفهوم را برای ساده تر کردن محاسبات وضع کرده است.

e در پدیده های طبیعی

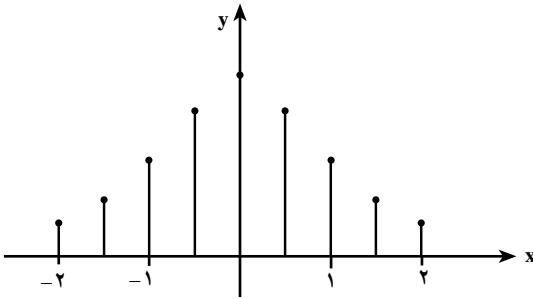
وقتی تعداد معینی باکتری را در یک آزمایشگاه کشت می دهیم، جمعیت آن ها با گذشت زمان به شدت افزایش می یابد. هرگاه $f(t)$ تعداد باکتری ها پس از t دقیقه از شروع کشت باشد آنگاه $f(t)$ از مدل زیر پیروی می کند.

$$f(t) = Be^{0.4t}$$

که در آن B عددی است ثابت.

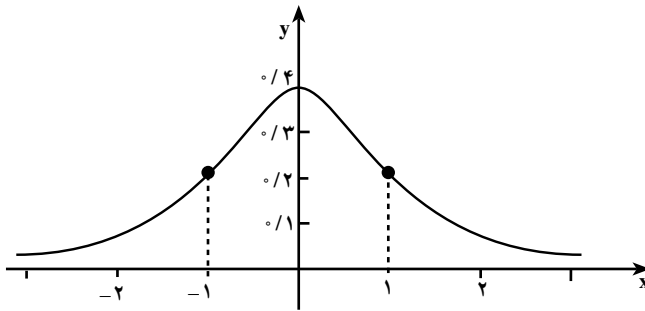
قیمت یک محصول صنعتی (مثلاً خودرو) با گذشت زمان و استفاده از خودرو کاهش می‌یابد. هرگاه $V(t)$ قیمت یک محصول صنعتی بعد از t سال از خرید آن باشد، $V(t)$ تابعی به صورت زیر است:

$$V(t) = Be^{-0.2t} \quad (B \text{ مقدار ثابت})$$



می‌دانیم تابع توزیع کمیت‌هایی مانند قد، وزن، خطای اندازه‌گیری قطر لوله‌های تولید شده در یک کارخانه، در یک جامعه نمونه‌ای هنجار دارای یک نمودار میله‌ای به شکل روبه‌رو است.

اگر تعداد نمونه‌ها (تعداد میله‌ها) را افزایش دهیم و نقاط انتهایی میله‌ها را به هم وصل کنیم یک منحنی به دست می‌آید که نمودار آن به شکل زیر است:



این نمودار را نمودار زنگوله‌ای یا نمودار توزیع طبیعی (چگالی طبیعی) می‌نامیم. معادله این نمودار به صورت زیر است:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

جهان مملوّ از پدیده‌ها است. در هر پدیده کمیت یا کمیت‌هایی بر حسب کمیت‌های دیگر (مثلاً زمان) تغییر می‌کنند. این تغییر ممکن است به صورت افزایشی باشد که در این صورت پدیده رشد را خواهیم داشت و یا آن که به صورت کاهشی باشد که آن را زوال می‌نامیم. افزایش جمعیت باکتری‌ها نمونه‌ای از رشد

است در حالی که کاهش قیمت مصنوعات صنعتی نمونه‌ای از زوال می‌باشد. تبدیل مواد رادیواکتیویته سنگین به عناصر سبک‌تر مستلزم کاهش مقدار اولیه مواد رادیواکتیو می‌باشد و این پدیده نیز نمونه بارزی از زوال می‌باشد.

بعضی از تغییرات توابع، همچون تابع توزیع طبیعی، منحصرأً رشد یا زوال نیستند بلکه ترکیبی پیچیده‌تر دارند.

وقتی تصور کنیم که در جهان پدیده‌های متنوع و بسیاری وجود دارد که مدل تغییرات آن‌ها متضمن عدد e (عدد نپر) می‌باشد، به اهمیت e بیشتری می‌بریم.

بی سبب نیست که لگاریتم در پایه e را لگاریتم طبیعی می‌نامند.

در مسائل اجتماعی و اقتصادی نیز ما به عدد e نیازمندیم. وقتی P ریال را به صورت مشارکت در سرمایه‌گذاری با نرخ i درصد پیوسته در یک مؤسسه اعتباری (بانک یا شرکت تولیدی) سرمایه‌گذاری می‌کنیم، سرمایه‌ای که پس از t سال حاصل می‌شود از مدل زیر پیروی می‌کند.

$$A = Pe^{it}$$

تابع نمایی طبیعی – تابع لگاریتم طبیعی

در ریاضی ۲ با تابع نمایی و تابع لگاریتم و برخی ویژگی‌های آن‌ها آشنا شدید. با انجام تمرین زیر مطالب گذشته را یادآوری نموده، سپس به نوع خاصی از این توابع و کاربرد آن‌ها می‌پردازیم.

تمرین :

۱- با استفاده از نماد لگاریتم، رابطه‌های داده شده را به صورت دیگر بنویسید.

الف) $3^4 = 81$	ب) $10^{-3} = 0.001$	ج) $5^{-2} = \frac{1}{25}$	د) $2^0 = 1$
هـ) $8^{\frac{2}{3}} = 4$	و) $625^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{125}$	ز) $e^0 = 1$	ح) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$

۲- رابطه‌های داده شده را به صورت نمایی بنویسید.

الف) $\log_{10} 1 = 0$	ب) $\log_8 64 = 2$	ج) $\log_{10} 1000 = 3$	د) $\log_8 2 = \frac{1}{3}$
هـ) $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$	و) $\log_{16} \frac{1}{8} = -\frac{3}{4}$	ز) $\log_{\frac{1}{2}} 64 = -6$	ح) $\log_{32} 2 = \frac{1}{5}$

۳- مقدار لگاریتم‌های داده شده را به دست آورید.

الف) $\log_{10} 100$	ب) $\log_2 \frac{1}{8}$	ج) $\log_{27} 9$	د) $\log_6 6$
----------------------	-------------------------	------------------	---------------

ح) $\log_e \sqrt{e}$ ز) $\log_e 1$ و) $\log_{\frac{1}{4}} \frac{1}{32}$ هـ) $\log_{27} \frac{1}{81}$
 ۴- معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\log_{\frac{1}{3}} x = -4$ ب) $\log_7(x-1) = 3$ ج) $\log_{\frac{1}{9}} x = \frac{5}{2}$ د) $\log(3x+1) = 2$

هـ) $\log(2x-1) + \log(x-7) = \log 7$ و) $2 \log x - \log(x+1) = 1$

ز) $(2^x - 1)(2^x - 3) = 0$ ح) $10^{\log(x+1)} = 3$

۵- از روابط زیر کدام درست و کدام نادرست است؟ c, b, a اعداد حقیقی مثبت و c مخالف صفر است.

الف) $\log_c a + \log_c b = \log_c(a+b)$

ب) $\log_c a + \log_c b = \log_c(ab)$

ج) $\log_c a - \log_c b = \log_c\left(\frac{a}{b}\right)$

د) $\log_c a - \log_c b = \log_c(a-b)$

هـ) $\log_c a^n = (\log_c a)^n$

و) $\log_c a^n = n \log_c a$

ز) $\log_{c^m} a^n = \frac{n}{m} \log_c a$

ح) $\log_{c^m} a^n = m^n \log_c a$

۶- ابتدا جدول را کامل کنید. سپس نمودارهای توابع زیر را در یک صفحه مختصات رسم کنید.
 $y = \log_2 x$, $y = 2^x$

$y = \log_{\frac{1}{2}} x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x							
$\log_2 x$							
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$							
$\log_{\frac{1}{2}} x$							

۷- جدول زیر را در نظر بگیرید:

لگاریتم عدد	0	0/301	0/477	...	0/699	...	0/845	1
عدد	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

هر عدد در ردیف دوم برابر است با 10° به توان عدد نظیر از ردیف اول. برای مثال $10^{845} = 10^{\circ}$. جدول را کامل کنید و مقدار عددی هریک از عبارتهای زیر را به دست آورید. (در جدول، لگاریتم اعداد با دقت تا سه رقم اعشار آمده است.)

الف) $\log(2 \times 10^7) =$ ب) $\log 32 =$ ج) $\log 56 =$

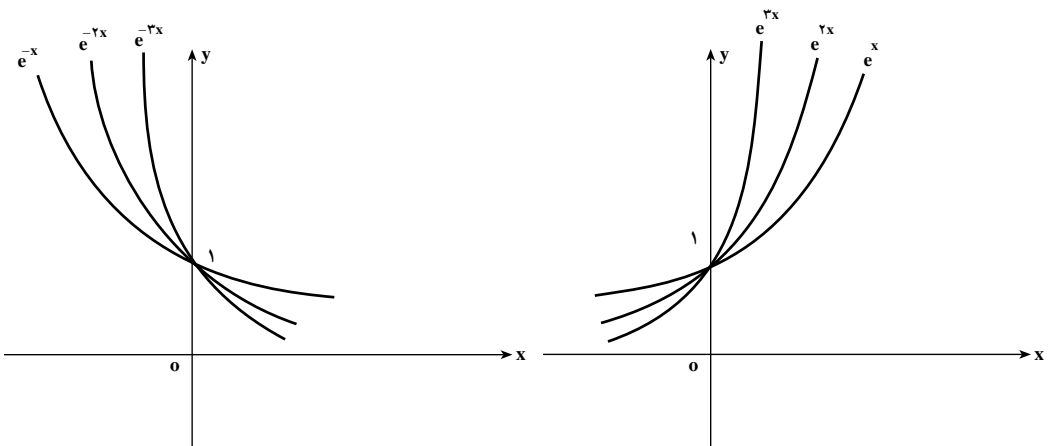
د) $\log 3000000 =$ هـ) $\log \sqrt{6} =$ و) $\log 392 =$

تابع نمایی طبیعی : وقتی پایه تابع نمایی عدد e باشد تابع نمایی حاصله را تابع نمایی طبیعی می نامیم؛ به عبارت دیگر تابع نمایی طبیعی تابع با ضابطه $f(x) = e^x$ ($x \in \mathbb{R}$) می باشد که در آن e عدد نیر است.

دامنه تابع نمایی طبیعی مجموعه اعداد حقیقی \mathbb{R} و برد آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت است. اکنون بخشی از نمودار تابع نمایی طبیعی را رسم می کنیم. ابتدا مقادیر تابع نمایی طبیعی را که متناظر بعضی از مقادیر x هستند در یک جدول درج می کنیم. این مقادیر را با استفاده از ماشین حساب نیز می توان به دست آورد.

x	-2	-1	-0/5	0	0/5	1	1/5	2	2/5
e^x	0/1	0/4	0/6	1	1/5	2/7	4/5	7/4	12/2

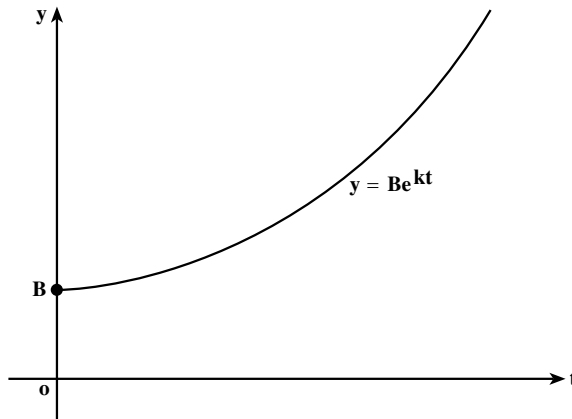
سپس نقاطی از صفحه مختصات را که مختصاتشان در جدول آمده مشخص کرده و این نقاط را با یک منحنی هموار به هم وصل می کنیم تا بخشی از نمودار تابع نمایی طبیعی به دست آید.



در بسیاری از شاخه‌های علمی با مدل‌های ریاضی که شامل توان‌های e است سروکار داریم (یک مدل ریاضی رابطه یا معادله‌ای است که بین متغیرهای یک پدیده یا مشتقات آن‌ها برقرار است). بعضی از این مدل‌ها همان‌هایی هستند که رشد یا زوال نمایی نامیده می‌شوند. معادله (مدلی) به فرم

$$f(t) = Be^{kt} \quad (t \geq 0) \quad (*)$$

که در آن B و k ثابت و مثبت‌اند، تابعی با رشد نمایی را تعریف می‌کند. در فصل بعد خواهیم دید که هرگاه آهنگ رشد تابعی متناسب با اندازه آن باشد. این تابع رشد نمایی دارد. برای رسم بخشی از نمودار (*) باید توجه کنیم که $f(0) = B$ و نیز این‌که $f(t)$ همواره عددی مثبت است که با افزایش t افزایش می‌یابد. نمودار توابعی که با رشد نمایی تعریف می‌شوند، به نام توابع رشد موسوم‌اند و به شکل زیر می‌باشند. ($k > 0$)



معمولاً متغیر t در این‌گونه توابع متغیر زمان می‌باشد.

مثال: در یک کشت نمونه‌ای از باکتری‌ها، تعداد باکتری‌ها در زمان t از مدل $V(t) = Be^{rt}$

پیروی می‌کند، که در آن B مقدار ثابت مثبتی است. هرگاه در لحظه $t = 0$ (شروع آزمایش) 1000 باکتری کشت داده شده باشند، پس از 2 ثانیه از شروع چند باکتری وجود دارد؟

حل: داریم

$$1000 = V(0) = Be^{r \cdot 0} = B$$

بنابراین $B = 1000$. پس معادله تعداد باکتری‌ها به صورت

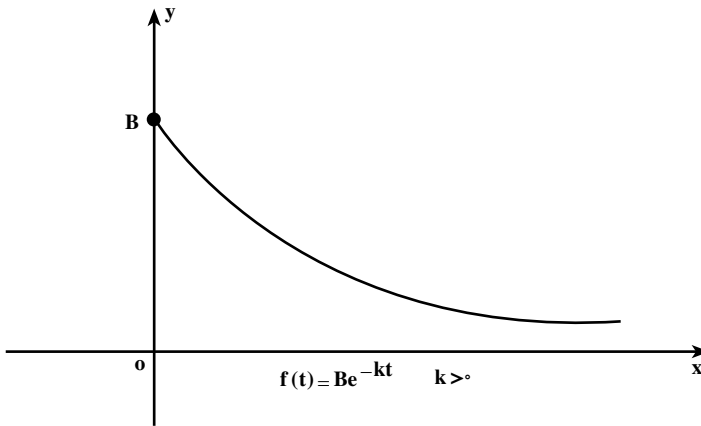
$$V(t) = 1000e^{rt}$$

درمی آید. اکنون با قرار دادن $t=2$,

$$V(2) = 10000e^{2 \times 2} = 10000 \times e^4 \approx 540000$$

یعنی پس از ۲ ثانیه از شروع کشت ۵۴۰۰۰۰ باکتری وجود دارد (مقدار تقریبی).

هرگاه معادله تابع به شکل $f(t) = Be^{-kt}$ باشد که در آن B و k مثبت اند، گوییم این تابع از مدل نزول نمایی پیروی می کند، یا اصطلاحاً تابع را یک تابع زوال می نامیم، با توجه به این که $f(0) = B$ و $f(t)$ همواره عددی مثبت است که با افزایش t نقصان می یابد. نمودار چنین تابعی به شکل زیر است.



مثال زیر یک پدیده را که مدل ریاضی آن از تابع نزول نمایی پیروی می نماید ارائه می کند.
 مثال: قیمت یک محصول صنعتی با استفاده از آن و گذشت زمان کاهش می یابد. فرض کنیم $V(t)$ قیمت یک محصول (ابزار یا خودرو) بعد از t سال از خرید آن باشد. هرگاه بدانیم که

$$V(t) = Be^{-0.2t}$$

که در آن B مقدار ثابتی است، چنانچه این محصول به قیمت ۱۰۰۰۰۰۰ تومان (وقتی که نو باشد) خریداری شده باشد، قیمت آن بعد از ۲ سال چقدر است؟

حل: داریم $V(0) = 1000000$ (لحظه خرید کالا را وقتی که نو باشد لحظه صفر اختیار کرده ایم). لذا بنابر

$$V(0) = Be^{-0.2 \times 0}$$

$$1000000 = Be^0$$

پس $B=1000000$. پس با قرار دادن این مقدار در معادله قبل به دست می آوریم

$$V(t) = 1000000 e^{-0.02t}$$

و قیمت این محصول پس از ۲ سال همان $V(2)$ است؛ پس

$$\begin{aligned} V(2) &= 1000000 e^{-0.02 \times 2} \\ &= 1000000 e^{-0.04} \\ &= 1000000 (0.960789) \\ &= 960789 \end{aligned}$$

یعنی قیمت این محصول پس از ۲ سال برابر 960789 تومان است.

تابع لگاریتم طبیعی: تابع لگاریتم در پایه e را، تابع لگاریتم طبیعی می نامیم. در نتیجه

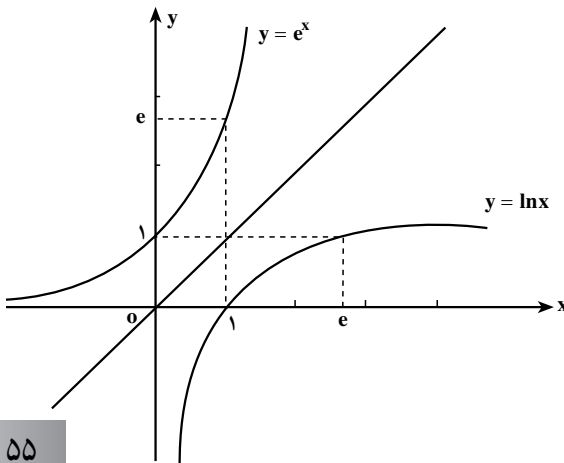
تابع لگاریتم طبیعی تابع معکوس تابع نمایی طبیعی است.

قرارداد: تابع لگاریتم طبیعی را می توانیم همانند حالت کلی با نماد $\log_e x$ نشان دهیم. ولی برای سادگی نام کوتاه تری برای این تابع انتخاب شده است و آن را با نماد \ln نشان می دهند (1 برای حرف اول لگاریتم و n برای حرف اول *نیر* می باشد).

مقادیر تابع \ln را با $\ln x$ نشان می دهیم و آن را «لگاریتم طبیعی x » یا «لگاریتم *نیری* x » می خوانیم.

چون \ln و تابع نمایی طبیعی توابع معکوس یکدیگرند، داریم

$$y = \ln x \text{ اگر و فقط اگر } x = e^y$$



بخشی از نمودار تابع لگاریتم طبیعی در شکل روبه رو رسم شده است.

مقادیر تابع لگاریتم طبیعی معمولاً در جدول‌هایی به نام جدول لگاریتم درج می‌شود. از ماشین حساب علمی با دکمه \ln نیز می‌توان این مقادیر را به دست آورد.

از دیدگاه علمی می‌توانیم بگوییم که لگاریتم برای حل معادلاتی که مجهول در نما ظاهر می‌شود اختراع شده است. برای روشن‌تر شدن این مطلب به حل چند مثال کاربردی می‌پردازیم:

مثال: فرض کنیم تعداد باکتری‌ها در یک نوع کشت در دقیقه t از معادله

$$f(t) = 1500 e^{0.4t}$$

به دست آید. تعیین کنید بعد از چند دقیقه تعداد باکتری‌ها برابر 30000 می‌شود.

حل: فرض کنیم T دقیقه‌ای باشد که پس از آن 30000 باکتری به دست آید. پس داریم

$$f(T) = 1500 e^{0.4T}$$

چون $f(T) = 30000$ ، داریم

$$30000 = 1500 e^{0.4T}$$

یا

$$20 = e^{0.4T}$$

ولی این معادله هم‌ارز است با معادله

$$0.4T = \ln 20$$

یا

$$0.4T = 2/9957$$

$$T = \frac{2/9957}{0.4} = 74/9$$

پس یک ساعت و 14 دقیقه و 54 ثانیه باید بگذرد تا تعداد باکتری‌ها به 30000 برسد.

مثال: شخصی مبلغ 25000000 ریال را در یک حساب پس‌انداز با نرخ سود مشارکت

10% درصد مرکب پیوسته سرمایه‌گذاری کرده است. پس از چه مدت پول اولیه این شخص دو برابر

می‌شود؟ هرگاه P ریال سرمایه اولیه را با نرخ سود مشارکت $10\% i$ درصد مرکب پیوسته سرمایه‌گذاری

کنیم سود و سرمایه پس از t سال از معادله $A = Pe^{it}$ به دست می‌آید.

حل: داریم $10\% i = 10\%$ ، یعنی $i = 0/1$.

$$A = Pe^{it}$$

پس

$$5000000 = 25000000 e^{-\lambda t}$$

در نتیجه

$$2 = e^{\lambda t}$$

$$\lambda t = \ln 2$$

و این هم ارز است با

$$t = \frac{\ln 2}{\lambda} \approx 6/93$$

یعنی تقریباً پس از ۷ سال (۶ سال و ۱۱ ماه و ۵ روز) سرمایه اولیه شخص دو برابر می شود.

مسائل

۱- معادله های زیر را حل کنید.

(الف) $\ln(x-3) = 2$

(ب) $(e^x - 5)(2e^x - 7) = 0$

(ج) $(e^x + 3)^2 - 25 = 0$

(د) $\ln(4x-5) = \ln(2-x)$

(ه) $|e^x - 1| = |3 - 2e^x|$

(و) $\ln(2x-1) + \ln(x-7) = \ln 7$

۲- اعداد حقیقی x و y را چنان تعیین کنید که :

(الف)
$$\begin{cases} \ln(2x+1) + \ln(3y-2) = \ln 3x + \ln(y+3) \\ \ln(x+1) - \ln(y+4) = -\ln 3 \end{cases}$$

(ب)
$$\begin{cases} \ln x + \ln 2y = \ln(xy+2) \\ \ln(1-x) + \ln(y+1) = \ln(y-x-1) \end{cases}$$

۳- جمعیت شهری ۱۰۰۰۰ نفر است و با آهنگی متناسب با تعداد جمعیت افزایش می یابد. اگر این آهنگ ۶ درصد و جمعیت بعد از t سال $P(t)$ باشد، آنگاه $P(t) = 10000 e^{0.06t}$. تا کی انتظار می رود جمعیت به ۴۵۰۰۰ نفر برسد؟

۴- در یک نوع کشت ۲۰۰۰ باکتری موجود است، و بعد از t دقیقه $f(t)$ باکتری ظاهر می شود که $f(t) = 2000 e^{-0.25t}$. چه وقت ۱۰۰۰۰ باکتری در کشت وجود خواهد داشت؟

۵- کارایی کارگر عادی در کارخانه‌ای با تابع $f(t) = 100 - 60e^{-0.7t}$ داده می‌شود که کارگر بعد از t ماه اشتغال می‌تواند روزانه $f(t)$ واحد کار را کامل کند. بعد از چند ماه تجربه کاری، انتظار می‌رود که کارگر روزانه ۷۰ واحد را کامل کند؟

۶- قیمت فروش ابزاری، t سال پس از خرید، $f(t)$ دلار است، که $f(t) = 1200 + 8000e^{-0.25t}$. چند سال پس از خرید، قیمت فروش این ابزار ۲۰۰۰ دلار می‌شود؟ در مسایل ۷-۹ به فرمول زیر نیاز داریم:

$$A = Pe^{it}$$

در این فرمول P سرمایه اولیه است که با نرخ سود مشارکت i درصد به مدت t سال در مؤسسه‌ای (بانک یا شرکت تولیدی) سرمایه‌گذاری می‌شود و A مقدار سرمایه پس از t سال است.

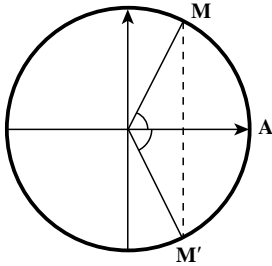
۷- چقدر طول می‌کشد تا ۵۰۰۰۰۰ ریال پس‌انداز با نرخ ۹ درصد مرکب پیوسته ۹۰۰۰۰۰۰ ریال شود؟

۸- مسأله ۷ را وقتی که نرخ سود شرکت در سرمایه‌گذاری ۱۲ درصد مرکب پیوسته باشد، حل کنید.

۹- چقدر طول می‌کشد تا یک سرمایه‌گذاری دو برابر شود هرگاه نرخ سود مشارکت در سرمایه‌گذاری ۸ درصد مرکب پیوسته باشد؟

معادله مثلثاتی

چگونه می‌توانیم تمام زوایایی را مشخص کنیم که یکی از نسبت‌های مثلثاتی آن داده شده باشد؟ به‌عنوان مثال کلیه زوایایی را می‌خواهیم که کسینوس‌شان برابر $\frac{1}{3}$ باشد. همان‌طور که در شکل زیر مشخص است در دو نقطه روی دایره مثلثاتی این اتفاق می‌افتد کلیه کمان‌هایی که انتهای آن‌ها در یکی



از نقاط M یا M' باشند جواب مسئله هستند از آنجا که $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ و $\cos(\frac{-\pi}{3}) = \frac{1}{2}$ و همه جواب‌های مورد نظر به صورت $2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ هستند. در حقیقت اگر k دور بزیم و در یکی از نقاط M یا M' متوقف شویم مقدار کسینوس تغییر نمی‌کند. به‌طور کلی کلیه زوایای x که جواب معادله $\cos x = \cos \alpha$ می‌باشند عبارت‌اند از: $x = 2k\pi \pm \alpha$. با روش مشابه می‌توان کلیه زوایایی مانند x که جواب معادله

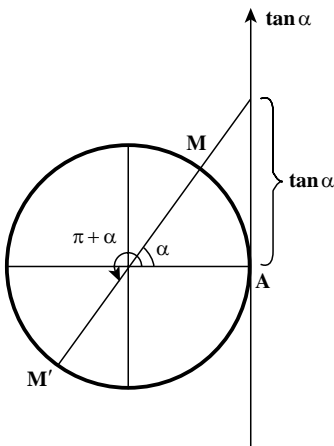
$\sin x = \sin \alpha$ می‌باشند را به صورت $x = 2k\pi + \alpha$ و $x = 2k\pi + \pi - \alpha = (2k+1)\pi - \alpha$ به دست آورد.

حال می‌خواهیم کلیه زوایایی مانند x را بیابیم که جواب معادله $\tan x = \tan \alpha$ باشند.

با توجه به آن که $\tan(\pi + x) = \tan x$ بنابراین هر مضربی از π که به α بیفزاییم تانژانت آن

برابر $\tan \alpha$ خواهد شد و کلیه جواب‌های معادله به صورت

$$x = k\pi + \alpha \text{ خواهد بود.}$$



معادله مثلثاتی: معادلاتی که برحسب نسبت‌های

مثلثاتی یک زاویه مجهول نوشته می‌شوند را معادله مثلثاتی می‌نامیم به‌عنوان مثال، $\sin^2 x + \cos x = 0$

$2 \cos x = 1$ معادله‌هایی مثلثاتی هستند.

جواب معادله: مقدارهایی از زاویه مجهول که به‌ازای آنها معادله برقرار شود، جواب معادله

می‌نامند. مقصود از حل معادله مثلثاتی پیدا کردن کلیه جواب‌های آن معادله است. به‌عنوان مثال کلیه

$$\text{جواب‌های معادله } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ برابر است: } x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ و } x = 2k\pi + \frac{2\pi}{3}$$

حل معادله‌های مثلثاتی

برای حل یک معادله مثلثاتی به کمک رابطه‌های مثلثاتی و دستورهای جبری آن را به معادله ساده‌تری تبدیل می‌کنیم تا به یکی از صورت‌های $\sin x = a$ یا $\cos x = a$ یا $\tan x = b$ تبدیل شود.

در صورتی که $-1 \leq a \leq 1$ می‌توان نوشت: $\sin \alpha = a$ پس $\sin x = \sin \alpha$

$$\text{و از آن جا } x = 2k\pi + \alpha \text{ و } x = 2k\pi + \pi - \alpha$$

اگر $a > 1$ یا $a < -1$ باشد معادله $\sin x = a$ ، یا $\cos x = a$ جواب ندارد.

برای حل $\tan x = b$ زاویه β را چنان می‌یابیم که $\tan \beta = b$ پس $\tan x = \tan \beta$ و از آن جا

$$x = k\pi + \beta$$

به جواب‌هایی که به صورت بالا نوشته شده باشند جواب‌های کلی معادله می‌گویند. ممکن است در معادله جواب‌هایی که در فاصله مشخص قرار دارند مورد نظر باشند. در این صورت به k عددهای صحیح مختلف می‌دهیم تا جواب‌های مورد نظر به دست آید.

معادلات ساده مثلثاتی

معادلات مثلثاتی دارای انواع مختلفی هستند که در این جا برخی از انواع ساده آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد که دو نوع از آن‌ها را بررسی خواهیم کرد.

الف) معادله شامل یکی از مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه مجهول می‌باشد.

ابتدا این نوع معادلات را برحسب نسبت مثلثاتی که در معادله موجود است، حل کرده و پس از تعیین مقدار نسبت مثلثاتی، زوایایی را که جواب معادله هستند به دست می‌آوریم.

مثال: معادله $2 \sin x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل: از حل معادله برحسب $\sin x$ داریم. $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و از آن جا که $\sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ پس

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{3} \text{ و از آن جا } x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \text{ و } x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{3}$$

مثال: معادله $4 \cos^2 x - 9 \cos x + 5 = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بیابید.

حل:

این معادله به یک معادله درجه دوم شبیه است با فرض $\cos x = t$ داریم: $4t^2 - 9t + 5 = 0$ از حل

$$\text{این معادله درجه دوم داریم } t = 1 \text{ و } t = \frac{5}{4}$$

$$t = 1 \Rightarrow \cos x = 1 \Rightarrow \cos x = \cos 0 \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$t = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos x = \frac{5}{4}$$

این معادله جواب ندارد.

مثال: معادله $\tan^2 x - 3 = 0$ را حل کنید و جواب‌های در بازه $[0, 2\pi]$ را به دست آورید.

حل: می‌توان نوشت $\tan^2 x = 3$ و از آن جا $\tan x = \pm\sqrt{3}$ دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم.

$$\tan x = \sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\tan x = -\sqrt{3} \Rightarrow \tan x = \tan\left(\frac{-\pi}{3}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{3}$$

برای یافتن جواب‌های مورد نظر در بازه $[0, 2\pi]$ به k اعداد صحیح ± 1 و ± 2 و ... می‌دهیم

تا کلیه جواب‌ها به دست آید.

k	x
0	$\frac{\pi}{3}$
1	$\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$
2	$\frac{5\pi}{3}$

همانطور که در جدول مقابل مشخص است، معادله در این بازه 4 جواب

دارد.

(ب) معادله مثلثاتی شامل مقادیر چند نسبت مثلثاتی زاویه مجهول می‌باشد.

مثلاً معادلاتی نظیر $\cos^2 x - \sin x = 1$ ، $\tan x + 2 \cot x = 3$ ، $\sin x \cos x + \sin x = 0$ چند نسبت

مثلثاتی از x را در بر دارند.

برای حل این گونه معادلات ممکن است با نقل تمام جملات در یک طرف تساوی و تبدیل

نسبت‌ها به یک نسبت، یا تجزیه به عامل‌ها بتوان معادله را به معادلات ساده‌تر تبدیل کرده و بعد

جواب‌های معادله را به دست آوریم.

مثال: معادله $2 \cos^2 x = \sin x - 1$ را حل کنید.

حل: می‌توان همه نسبت‌ها را به سینوس تبدیل کرد. داریم:

$$2(1 - \sin^2 x) = \sin x - 1$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (\text{بدون جواب})$$

$$\sin x = 1 \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} = 2k\pi + \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

حالات خاص: هرچند که روابط گفته شده برای حل معادلات مثلثاتی همواره برقرار است اما

در چند حالات خاص زیر می‌توان سریع‌تر جواب معادله را به دست آورد.

$$\begin{cases} \sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi \\ \sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi \\ \cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2} \\ \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{cases}$$

مثال: معادله $2\sin^2 x - \sin x = 0$ را حل کنید.

حل:

$$\sin x (2\sin^2 x - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \\ 2\sin^2 x - 1 = 0 \Rightarrow \sin^2 x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

سه حالت در نظر می‌گیریم و در هر حالت معادله به دست آمده را حل می‌کنیم.

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi - \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

مثال : معادله $\tan x - 2 \cot x = 1$ را حل کنید .

حل : برای حل این معادله کافی است قرار دهیم $\cot x = \frac{1}{\tan x}$ بنابراین :

$$\tan x - 2 \times \frac{1}{\tan x} = 1$$

چون $\tan x \neq 0$ پس طرفین معادله را در $\tan x$ ضرب می کنیم داریم :

$$\tan^2 x - 2 = \tan x$$

$$\tan^2 x - \tan x - 2 = 0$$

$$\tan x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \tan x = 2 \\ \tan x = -1 \end{cases}$$

در حالت $\tan x = -1$ می توان نوشت :

$$\tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}$$

برای حل $\tan x = 2$ فرض کنیم α زاویه ای باشد که تانژانت آن برابر 2 باشد .

می توان نوشت $x = k\pi + \alpha$ که در آن $\tan \alpha = 2$.

مثال : معادله های مثلثاتی $\sin x + \cos x + \sin x \cos x + 1 = 0$ را حل کنید .

حل : معادله را به صورت زیر می نویسیم .

$$\sin x(1 + \cos x) + (1 + \cos x) = 0$$

$$(1 + \cos x)(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 1 + \cos x = 0 \Rightarrow \cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \\ 1 + \sin x = 0 \Rightarrow \sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

مثال : معادله $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ را حل کنید .

حل : می توان $\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ را به $\cos x$ تبدیل کرد و به معادله $\cos 2x = \cos x$ رسید علاوه بر آن

که می توان عبارت را به صورت $\cos 2x - 1 = \cos x$ نوشت و از طریق یک معادله درجه دوم مقدار x را یافت . همچنین می توان مستقیماً عمل کرد .

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm x \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

مثال : معادله $\sin^4 x + \sin^3 x = 0$ را حل کنید و جواب‌های در بازه $[0, \pi]$ را بیابید.
حل :

$$\sin^4 x = -\sin^3 x \Rightarrow \sin^4 x = \sin(-3x)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4x = 2k\pi + (-3x) \Rightarrow x = \frac{2}{7}k\pi \\ 4x = 2k\pi + \pi - (-3x) \Rightarrow x = 2k\pi + \pi \end{array} \right.$$

حال با دادن اعداد صحیح $0, \pm 1$ و ± 2 و ...

k	0	1	2	3
x	$0, \pi$	$\frac{2\pi}{7}$	$\frac{4\pi}{7}$	$\frac{6\pi}{7}$

مسائل

معادلات زیر را حل کرده و جواب‌های کلی آن‌ها را بیابید.

۱) $2\sin^2 x - 1 = 0$

۲) $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

۳) $\sin^2 x + \sin x = 0$

۴) $\tan x = 3\cot x$

۵) $2\sin^2 2x - \sin^2 x - 1 = 0$

۶) $\sin 2x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

۷) $\sin^2 x \cos x - \cos^2 x \sin x = 1$

۸) $\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0$

۹) $\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

۱۰) $\cos x - \cos^2 x = 0$