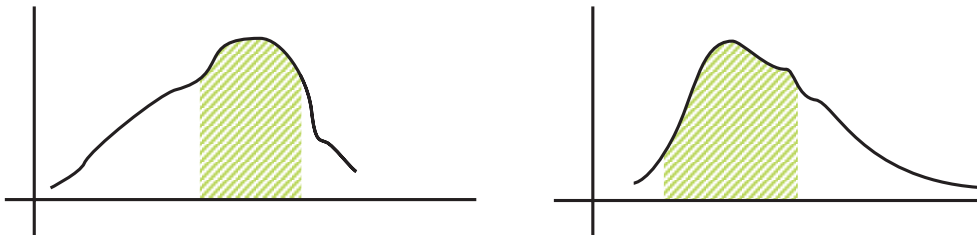


آفرینش را آغاز کرد و آفریدگان را به  
یکبار پدید آورد، بی آنکه اندیشه‌ای  
به کار برد، یا از آزمایشی سود برد یا  
جنبشی پدید آرد یا کسی را به خدمت  
گمارد. از هر چیز بهنگام پرداخت، و  
اجزای مخالف را با هم سازوار ساخت، و  
هر طبیعت را اثری بداد و آن اثر را در  
ذات آن نهاد. از آن پیش که بیافریند به  
آفریدگان دانا بود. بر آغاز و انجامشان  
بینا، و با سرشت و چگونگی آنان آشنا.

## شاخص‌های مرکزی

در فصل‌های قبل اشاره کردیم که یک اظهارنظر را وقتی می‌توان علمی تلقی کرد که همراه با عدد و رقم باشد. تا به حال ما به‌جز دامنه تغییرات، کمیتی که بتواند جامعه را معرفی کند ارائه نکرده‌ایم، آن‌چه که تا به حال مطرح شده است، درباره کم کردن گوناگونی (از طریق دسته‌بندی آن‌ها) و یا نمایش هندسی داده‌هاست. در این فصل سعی می‌کنیم کمیت‌هایی را معرفی کنیم که بتوانند به‌صورت کمی، جامعه را معرفی نمایند. در رسم نمودارهای چندبر فراوانی و یا مستطیلی توجه کرده‌اید که معمولاً فراوانی داده‌ها در نقطه‌ای بیش‌تر از سایر نقاط است. به نمودارهای زیر توجه کنید:



در نمودارهای بالا در فاصله‌های هاشوردار فراوانی از سایر قسمت‌ها بیش‌تر است. در واقع به‌نظر می‌رسد که داده‌ها بیش‌تر در این قسمت متمرکز شده‌اند. ما می‌خواهیم شاخصی را معرفی کنیم که محل تمرکز داده‌ها را معرفی کند. از این‌رو این شاخص‌ها را شاخص‌های مرکزی می‌گوییم. البته تاکنون از این قبیل شاخص‌ها بدون آن‌که معرفی شده باشند استفاده می‌کردیم، مثلاً:

— اگر بخواهند وضعیت تحصیلی شما را بدانند، اولین اطلاعی که از شما می‌خواهند، معدل نمرات شماست.

— اگر بخواهند میزان علاقه شما را درباره زمینه‌های مختلف علمی بدانند از شما درباره تعداد کتاب‌هایی که در زمینه‌های مختلف مطالعه کرده‌اید، سؤال می‌شود. مثلاً می‌پرسند در چه زمینه‌ای بیش‌ترین تعداد کتاب را مطالعه کرده‌اید؟

– وضعیت تحصیلی شما در کلاس چگونه است؟ چه تعدادی از دانش‌آموزان کلاس را از نظر تحصیلی بهتر از خود ارزیابی می‌کنید. از چند نفر از دانش‌آموزان کلاس خود از نظر تحصیلی بهتر هستید؟ کدام یک از این دو عدد بزرگ‌تر است؟ مایلید کدام عدد بزرگ‌تر باشد؟

ملاحظه می‌کنید که این سؤال‌ها هر کدام به نوعی وضع تحصیلی شما را معرفی می‌کنند. ما در زیر به معرفی شاخص‌های نهفته در این سؤال‌ها می‌پردازیم.

مهم‌ترین شاخص‌های مرکزی عبارتند از: مد، میانه و میانگین، که به معرفی آن‌ها می‌پردازیم.



## خسروا گوی فلک در خم چوگان تو باد ...

مد

یک کارخانه اتومبیل‌سازی می‌خواهد برای کشوری اتومبیل‌های سواری تولید کند. مدیر کارخانه می‌خواهد بداند کدام نوع اتومبیل مشتری‌های بیش‌تری دارد.

اتومبیل‌های با ظرفیت ۲ نفر

اتومبیل‌های با ظرفیت ۴ نفر

اتومبیل‌های با ظرفیت ۶ نفر

مدیر این کارخانه برای آن‌که بتواند تصمیم بگیرد چاره‌ای جز نمونه‌گیری ندارد. برای این منظور در یک نمونه‌گیری، از ۱۱۴ اتومبیل در حال حرکت مشاهده شده است که:

۴۸ دستگاه دارای ۱ یا ۲ سرنشین بوده‌اند.

۳۸ دستگاه دارای ۳ یا ۴ سرنشین بوده‌اند.

۲۸ دستگاه دارای ۵ یا ۶ سرنشین بوده‌اند.

این اعداد و ارقام نشان می‌دهد که بیش‌تر اتومبیل‌ها کم سرنشین بوده‌اند. پس اتومبیل‌های با ظرفیت ۶ نفره در این کشور استفاده کم‌تری دارد. در این مثال اگر ماکزیمم تعداد سرنشین‌ها حساب شود، شاخصی به دست می‌آید که از نظر اقتصادی ممکن است به صرفه نباشد زیرا به علت وجود تعدادی



اتومبیل‌های با سرنشین‌های ۵ یا ۶ نفر ماکزیمم ۶ به‌دست می‌آید و لذا مدیر کارخانه تصمیم به تولید اتومبیل‌های بزرگ می‌گیرد که در این صورت هم از نظر قیمت و هم از نظر مصرف و هم از نظر تولید آلودگی، کاری زیان‌بار انجام شده است. ما برای مطالعات خود باید شاخص‌های مناسب را انتخاب کنیم.

مد، داده‌ای است که بیش‌ترین فراوانی را دارد.

در مثال بالا، نوع سرنشین کم، بیش‌ترین فراوانی (۴۸) را دارد پس مد مثال بالا اتومبیل کوچک است.

فروشنندگان پوشاک از شاخص مد بسیار استفاده می‌کنند. آن‌ها با بررسی‌های خود درمی‌یابند که چه نوع پوشاکی مورد پسند مصرف‌کنندگان است. از همان پوشاک برای فروش سفارش می‌دهند، چون در شهریور ماه خرید لوازم التحریر خواهان بیش‌تری دارد، از این نوع اجناس بیش‌تر تولید و عرضه می‌کنند. در اعیاد بیش‌تر به تولید شیرینی و پوشاک و سایر ملزومات می‌پردازند. در نزدیکی عید، فروشنده نگران مشتری‌هایی که ممکن است احتیاج به کالایی داشته باشند که در این روزها مصرف‌چندانی ندارد، نیست.

مد ممکن است منحصر به فرد نباشد. مثلاً داده‌های

۱، ۱، ۲، ۳، ۴، ۱، ۲، ۵، ۷، ۵، ۵

دارای دو مد ۵ و ۱ است. این قبیل جامعه‌ها را ۲ مدی می‌گویند. جامعه ممکن است چندمدی هم باشد. مد در این قبیل جامعه‌ها شاخص معتبری نیست. زیرا وجود چندین مد، نشان‌دهنده این واقعیت است که جامعه ما یک‌دست نیست (یادآوری می‌کنیم ما جامعه‌های یک‌دست را بررسی می‌کنیم) و لذا اگر مطالعات را دقیق‌تر کنیم، شاید بتوانیم جامعه را به دو بخش یک‌دست تفکیک کنیم. مثلاً ممکن است در بررسی قد افراد به ۲ مد برخورد کنیم که ممکن است نشان‌دهنده این حقیقت باشد که ما در نمونه‌گیری بزرگسالان و خردسالان را تفکیک نکرده‌ایم و لذا جامعه‌ای یک‌دست نداریم.

در رأی‌گیری‌ها، اساس تصمیم‌گیری مد است چون موضوعی که بیش‌ترین فراوانی را داشته باشد، انتخاب می‌شود. در انتخاب رئیس‌جمهور، نامزدی انتخاب می‌شود که بیش‌ترین فراوانی (رأی) را داشته باشد.

برای محاسبه مد فقط کافی است فراوانی داده‌ها را با هم مقایسه کنیم و داده با بیش‌ترین فراوانی مد است.



## میانه

قضاوت شما درباره کلاسی که نصف دانش‌آموزان نمره بالای ۱۷ دارند چیست؟ اگر نمره نصف دانش‌آموزان بالای ۱۳ باشد قضاوت شما چگونه خواهد بود؟ در حالت اول خواهید گفت کلاس، کلاس خوبی است و دانش‌آموزان و دبیران در آن خوب کار کرده‌اند. حتی نصف دیگر کلاس که نمره کم‌تر از ۱۷ دارند ممکن است تعدادی از نمره‌ها ۱۶، ۱۵ و غیره باشند که باز هم نشان‌دهنده وضع خوب کلاس است. اما در حالت دوم نصف دانش‌آموزان نمره زیر ۱۳ دارند که این نشانه ضعف در کلاس است و لذا باید درباره آن چاره‌اندیشی کرد. نمره ۱۷ در حالت اول و نمره ۱۳ در حالت دوم را میانه می‌گوییم. میانه یکی از شاخص‌های مرکزی است که می‌توان درباره وضعیت جامعه از آن استفاده کرد.

پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با  
تعداد داده‌های قبل از آن برابر است، میانه می‌نامیم.

آیا لزوماً داده‌ها باید به صورت صعودی مرتب شوند؟ آیا می‌توان داده‌ها را به صورت نزولی نیز  
مرتب کرد؟

تعداد روزهایی که ۵ خانواده در تعطیلات عید به مسافرت رفته‌اند در زیر آمده است.

۳      ۴      ۶      ۷      ۱

می‌خواهیم میانه این داده‌ها را محاسبه کنیم. پس باید داده‌ها را مقایسه کنیم و لازم است آن‌ها  
را مرتب کنیم.

۷      ۶      ۴      ۳      ۱

حال ملاحظه می‌شود که عدد ۴ در بالا دارای ویژگی زیر است:

تعداد داده‌های بعد از ۴ تا ۲

تعداد داده‌های قبل از ۴ تا ۲

این دو تعداد با هم برابرند لذا، میانه داده‌های بالا برابر ۴ است. می‌بینید که در این مثال نصف  
تعداد داده‌ها که ۲/۵ است معنی ندارد.

آیا میانه همواره عضوی از مجموعه داده‌ها است؟ آیا می‌توانید مثالی بزنید که میانه عضوی از  
مجموعه داده‌ها نباشد؟ در زیر ساعات مطالعه آزاد دانش‌آموزان در طول هفته آمده است.  
مثال: میانه داده‌های زیر را تعیین کنید.

۱۰      ۴      ۳      ۹      ۶      ۲



برای محاسبهٔ میانه ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

۱۰      ۹      ۶      ۴      ۳      ۲

می‌بینیم که هیچ یک از داده‌ها ویژگی میانه را ندارد ولی اگر شما عددی بین ۴ و ۶ مثلاً  $4/3$  را در نظر بگیرید، این عدد در تعریف میانه صدق می‌کند زیرا تعداد داده‌های بعد از  $4/3$  برابر ۳ و تعداد داده‌های قبل از  $4/3$  برابر با ۳ است. از این جا نتیجه می‌شود که شما هر عددی را بین ۴ و ۶ در نظر بگیرید در تعریف میانه صدق می‌کند. لکن برای آن که یکسان عمل نماییم در این حالت میانه را به صورت زیر به دست می‌آوریم :

$$\frac{4+6}{2} = 5$$

### روش پیدا کردن میانه

۱- داده‌ها را مرتب کنیم.

۲- اگر تعداد داده‌ها فرد باشد، داده‌ای که در وسط قرار می‌گیرد برابر میانه است.

۳- اگر تعداد داده‌ها زوج باشد، نصف مجموع دو داده‌ای که در وسط قرار گرفته‌اند برابر میانه است.

دو دسته داده‌های زیر را در نظر بگیرید

۱، ۲، ۳

۰، ۲، ۱۰۰

هر دو دسته داده دارای میانه ۲ هستند ولی ملاحظه می‌کنید که تفاوت‌های اساسی بین آن‌ها وجود دارد. میانه فقط به این نکته توجه دارد که تعداد داده‌های بعد از آن برابر تعداد داده‌های قبل از آن باشد و به بزرگی و یا کوچکی داده‌ها کاری ندارد. به عبارت دیگر، میانه نسبت به اندازهٔ داده‌ها حساسیت نشان نمی‌دهد.

اگر میانه از مد کوچک‌تر باشد چگونه داده‌ها را تحلیل می‌کنید؟

اگر میانه از مد بزرگ‌تر باشد چه اطلاعاتی در مورد داده‌ها می‌دهد؟

آیا مد نسبت به اندازهٔ داده‌ها حساسیت نشان می‌دهد؟





## تمرین

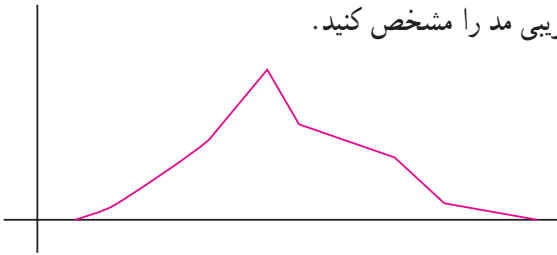


۱- میانه و مد را در داده‌های زیر حساب کنید.

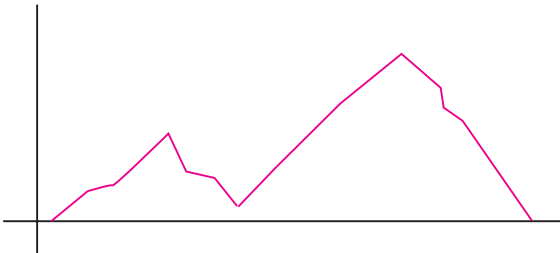
۵, ۱۵, ۴, ۰, ۱۲, ۱۵, ۵, ۶, ۵, ۰

۲- اگر داده‌ها را دو برابر کنیم چه تأثیری در مقدار میانه و مد حاصل می‌شود؟

۳- در نمودار زیر محل تقریبی مد را مشخص کنید.



۴- اگر در مطالعه قد، نمودار به شکل زیر باشد چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟





## نمودار جعبه‌ای

نمودارهایی که تاکنون شناخته‌ایم هر کدام به طریقی داده‌ها را نمایش می‌دادند. فکر می‌کنید کدام نمودار بهتر از بقیه پراکندگی داده‌ها را نشان می‌دهد؟ موارد استفاده هر یک از انواع نمودارها را بیان کنید. همان‌طور که می‌بینید این نمودارها برای مقایسه داده‌ها بسیار مفیدند ولی هیچ‌کدام به سؤالاتی از قبیل: آیا داده‌ها به هم نزدیک هستند؟ آیا داده‌ها بیش‌تر در اطراف میانگین متمرکزند یا بیش‌تر اطراف کم‌ترین داده یا بیش‌ترین داده متمرکزند؟ پاسخ نمی‌دهند.

### فعالیت ۱

تعداد تصادفات اتومبیل در شهری در ۱۵ روز اول تابستان عبارتند از:

۱۶، ۲۷، ۱۴، ۲۳، ۱۵، ۱۰، ۱۲

۱۹، ۳۱، ۲۵، ۱۸، ۳۲، ۴۳، ۴۱، ۳۴

— میانه را پیدا کنید.

— اعدادی را که در نیمه قبل از میانه قرار دارند بنویسید.

— برای این اعداد، میانه را پیدا کنید.

— اعدادی را که در نیمه بعد از میانه قرار دارند بنویسید.

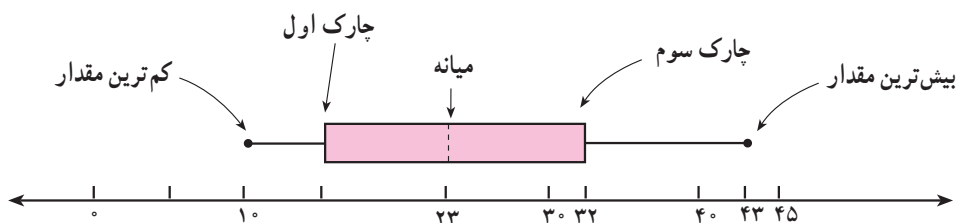
— برای این اعداد میانه را پیدا کنید.

میانه نیمه اول داده‌ها را چارک اول  $Q_1$  و میانه نیمه دوم داده‌ها را چارک سوم  $Q_3$  می‌نامند.

— چارک دوم یا  $Q_2$  چه نام دارد؟

نمودار جعبه‌ای نموداری تصویری است که داده‌ها را براساس پنج مقدار نمایش می‌دهد. این مقادیر عبارتند از:

- |                   |                   |          |
|-------------------|-------------------|----------|
| ۱- کوچک‌ترین داده | ۲- چارک اول       | ۳- میانه |
| ۴- چارک سوم       | ۵- بزرگ‌ترین داده |          |

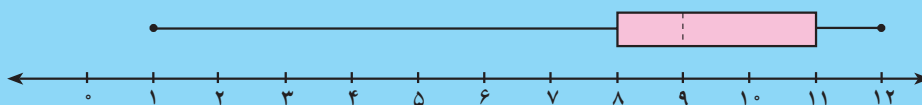


نمودار فوق نمودار جعبه‌ای داده‌های موجود در فعالیت ۱ می‌باشد.

– چند درصد از داده‌ها در داخل جعبه قرار دارد؟

– چند درصد از داده‌ها در هر یک از دنباله‌ها قرار دارند؟

## فعالیت ۲



– در نمودار بالا میانه چند است؟

– چارک اول در این داده‌ها ۸ است، این عدد نشان‌دهنده چیست؟

– چارک سوم چند است؟ این عدد نشان‌دهنده چیست؟

– وجود میانه در سمت چپ جعبه نشان‌دهنده چیست؟

– بلندتر بودن دنباله سمت چپ نسبت به دنباله سمت راست نشان‌دهنده چیست؟

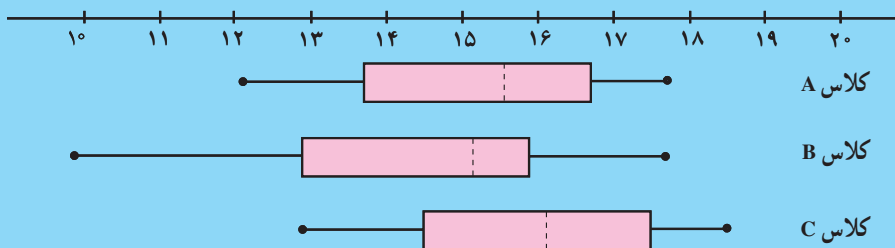




## ای آفتاب آیینہ دار جمال تو ...

### فعالیت ۳

نمودار زیر عمل کرد سه کلاس A ، B و C را در امتحان ریاضی نشان می دهد.  
با توجه به نمودار به سوالات زیر پاسخ دهید.



- کدام کلاس بیشترین دامنه تغییرات را دارد؟
- میانه نمرات کدام کلاس از همه بیش تر است؟ میانه نمرات کدام کلاس از همه کم تر است؟
- پراکندگی نمرات کدام کلاس بیش تر از همه است؟
- این سه کلاس را با توجه به عمل کردشان در امتحان، از ضعیف ترین به قوی ترین مرتب کنید.



## فعالیت ۴

آمار در پزشکی و بیمه کاربردهای بسیاری دارد. به طور مثال یک شرکت بیمه می‌خواهد از آماری که حاوی اطلاعاتی در مورد طول مدت بستری شدن پس از سکته قلبی در بیمارستان است استفاده کند و روش‌ها و برنامه‌های خود را برای بیمه نمودن بیماران مورد بررسی قرار دهد. داده‌ها به شرح زیر می‌باشند:

تعداد بیماران زن	تعداد بیماران مرد	طول مدت بستری شدن پس از سکته قلبی (روز)
۴	۶	۰
۲	۱۵	۱
۳	۴	۲
۴	۲	۳
۲	۵	۴
۱	۸	۵
۴	۱۶	۶
۲	۱۲	۷
۵	۹	۸
۵	۱۱	۹
۰	۱۰	۱۰
۰	۱۸	۱۱
۲	۷	۱۲
۳	۲	۱۳
۲	۵	۱۴
۰	۷	۱۵
۲	۱	۱۶
۰	۳	۱۷
۱	۱	۱۸
۰	۱	۱۹
۰	۱	۲۱
۱	۲	۲۲
۱	۰	۲۳
۱	۱	۲۴
۰	۱	۲۶
۱	۱	۲۸
۲	۰	۲۹
۰	۲	۳۷
۰	۱	۴۱
۱	۰	۴۵
۱	۰	۷۲

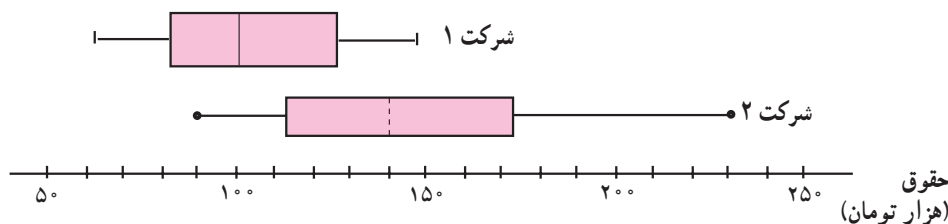
— نمودار جعبه‌ای را برای مدت بستری شدن زنان و مردان به طور جداگانه و برای کل بیماران رسم کنید. این نمودارها را مقایسه کنید و در کلاس به بحث بگذارید.

۱- جهت تعیین مقاومت یک حیوان آزمایشگاهی در مقابل بیماری سل (باسیل توپرکلوسیس)، به ۷۳ حیوان این باسیل تزریق شد، پس از ۴۳ روز اولین حیوان مُرد. قوی‌ترین آن‌ها پس از ۵۹۸ روز مُرد. جدول زیر طول مقاومت این حیوان را در مقابل این باسیل نشان می‌دهد:

۴۳، ۴۵، ۵۳، ۵۶، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۶۶، ۶۷، ۷۳  
 ۷۴، ۷۹، ۸۰، ۸۰، ۸۱، ۸۱، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۳  
 ۸۴، ۸۸، ۹۱، ۹۱، ۹۱، ۹۲، ۹۲، ۹۷، ۹۹، ۹۹، ۱۰۰  
 ۱۰۰، ۱۰۲، ۱۰۲، ۱۰۲، ۱۰۲، ۱۰۳، ۱۰۴، ۱۰۷  
 ۱۰۸، ۱۰۹، ۱۱۳، ۱۱۸، ۱۱۸، ۱۲۱، ۱۲۳، ۱۲۶  
 ۱۲۸، ۱۳۷، ۱۳۸، ۱۳۹، ۱۴۴، ۱۴۷، ۱۴۷، ۱۵۶  
 ۱۶۲، ۱۷۴، ۱۷۸، ۱۷۹، ۱۸۴، ۱۹۱، ۱۹۸، ۲۱۴، ۲۱۴  
 ۲۴۳، ۲۴۹، ۲۴۹، ۳۲۹، ۳۸۰، ۴۰۳، ۵۱۱، ۵۲۲، ۵۹۸

آیا نمودار ساقه و برگ برای توصیف این داده‌ها، نمودار مناسبی است؟ چرا؟ نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم کنید.

۲- نمودار زیر نشان‌دهندهٔ پرداخت حقوق کارمندان در دو شرکت می‌باشد.



«حقوق تقریباً ۵۰٪ کارمندان شرکت ۲ بیش‌تر از ماکزیمم حقوق کارمندان شرکت ۱ است.»

«حقوق تمام کارمندان شرکت ۲ بیش‌تر از حقوق ۵۰٪ از کارمندان شرکت ۱ است.»

— آیا ادعاهای فوق با نمودار مطابقت دارند؟

— از چنین نموداری چه استفاده‌هایی می‌توان کرد؟

## دل سرپردهٔ محبت اوست ...

### میانگین

شما تاکنون معدل خود را بارها حساب کرده‌اید، برای این کار نمرات را جمع کرده‌اید و بر تعداد آن‌ها تقسیم کرده‌اید. در واقع میانگین یعنی معدل داده‌ها. به‌طور صریح فرض کنید داده‌های ما به‌صورت:

$$X_1, X_1, \dots, X_n$$

باشد، در این صورت میانگین آن‌ها که با نماد  $\bar{x}$  نشان می‌دهیم عبارت است از:

$$\bar{x} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$$

فرض کنید میانگین نمرات ۷ درس شما ۱۵ شده باشد و میانگین نمرات همان ۷ درس برای یکی از همکلاسی‌های شما برابر ۱۴ باشد. پس مجموع نمرات شما در این هفت درس برابر  $105 = 15 \times 7$  و مجموع نمرات همکلاسی شما برابر  $98 = 14 \times 7$  است. یعنی اگر برای هر درسی





## اسرار ازل را نه تو دانی و نه من ...

امتیازی بین  $0^\circ$  تا  $20^\circ$  (که همان نمره درس است) بدهند شما از این ۷ درس ۱۰۵ امتیاز و همکلاسی شما ۹۸ امتیاز آورده است. این دو امتیاز نشان می‌دهند که وضع تحصیلی شما از وضع تحصیلی همکلاسی شما بهتر است. اگر تعداد درس‌ها زیاد باشد، جمع امتیازها عدد بزرگی خواهد شد و مقایسه و تحلیل آن‌ها به راحتی در ذهن انجام نمی‌شود.

— اگر تعداد درس‌ها برابر نباشند، مثلاً شما ۱۱۰ امتیاز در ۸ درس و همکلاسی شما ۹۰ امتیاز در ۶ درس آورده باشند، کدام یک از شما دو نفر بهتر از دیگری عمل کرده‌اید؟

ظاهراً امتیاز شما بیش‌تر است ولی این دلیل بهتر بودن شما نیست، مسلماً اگر تعداد درس‌ها را بیش‌تر کنیم، امتیاز بالاتر خواهد رفت. برای آن‌که بتوانیم این مقایسه را انجام دهیم، باید ببینیم که اگر قرار باشد در تمام درس‌ها امتیازات برابر آورده باشید به قسمتی که جمع امتیاز ثابت باشد، آن امتیاز کدام است. مثلاً اگر برای هر یک از ۸ درس شما امتیاز  $a$  فرض کرده باشیم، جمع امتیازهای شما برابر  $a + a + \dots + a = 8a$  خواهد بود که این مقدار باید برابر  $110^\circ$  شود. پس امتیاز مشترک درس‌های شما برابر  $\frac{110^\circ}{8} = 13\frac{7}{8}$  که همان میانگین نمرات شماست به دست می‌آید. امتیاز مشترک درس‌های همکلاسی شما برابر  $\frac{90^\circ}{6} = 15$  است. این اعداد و ارقام نشان می‌دهند عموماً همکلاسی شما در درس‌های خود بهتر از شما عمل کرده است. نمرات شما بیش‌تر در اطراف  $13\frac{7}{8}$  متمرکز شده‌اند و حال آن‌که نمرات همکلاسی شما در اطراف ۱۵ متمرکز شده‌اند. پس سطح نمرات همکلاسی شما بالاتر است.

جایی در توضیحات بالا گفتیم که نمرات شما در اطراف  $13\frac{7}{8}$  متمرکز شده است، میانگین در مرکز داده قرار دارد، یعنی همان مقداری که داده‌ها از میانگین اضافی دارند، همان مقدار هم از میانگین کم دارند. این موضوع در قضیه صفحه بعد بیان شده است.

قضیه: اگر  $\bar{x}$ ، میانگین  $x_1, \dots, x_n$  باشد آن گاه مجموع اختلافات داده‌ها از میانگین برابر است با صفر.

اثبات:

$$(x_1 - \bar{x}) + (x_2 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) \\ = x_1 + x_2 + \dots + x_n - \underbrace{\bar{x} - \bar{x} - \dots - \bar{x}}_{\text{تا } n} = x_1 + x_2 + \dots + x_n - \underbrace{(\bar{x} + \bar{x} + \dots + \bar{x})}_{\text{تا } n} = 0$$

زیرا می‌دانیم مجموع مقادیر برابر حاصل ضرب میانگین در تعداد آن‌ها است یعنی:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = n\bar{x} \quad \square$$

## فعالیت

جدول زیر قد ۳۰ دانش‌آموز را برحسب سانتی‌متر نشان می‌دهد:

۱۷۷، ۱۷۵، ۱۳۷، ۱۵۵، ۱۵۰، ۱۶۰

۱۳۲، ۱۴۶، ۱۷۹، ۱۴۰، ۱۶۹، ۱۷۷

۱۴۱، ۱۴۸، ۱۳۰، ۱۷۶، ۱۳۵، ۱۳۰

۱۵۷، ۱۷۲، ۱۷۸، ۱۴۳، ۱۴۳، ۱۳۶

۱۳۲، ۱۶۶، ۱۳۰، ۱۵۱، ۱۴۵، ۱۷۸

— میانگین قد این دانش‌آموزان را حساب کنید.

— اگر به تمام این داده‌ها ۵ تا اضافه شود، چه تغییری در میانگین حاصل

می‌شود؟

— اگر از تمام این داده‌ها ۱۲ تا کم شود، چه تغییری در میانگین حاصل می‌شود؟

— با اضافه کردن  $a$  چه تغییری در میانگین حاصل می‌شود؟

— اگر تمام داده‌ها در ۲ ضرب شوند، چه تغییری در میانگین حاصل می‌شود؟

— اگر تمام داده‌ها در  $\frac{1}{2}$  ضرب شوند، چه تغییری در میانگین حاصل می‌شود؟

— اگر تمام داده‌ها در  $a > 0$  ضرب شوند چه تغییری در میانگین حاصل می‌شود؟

— اگر تمام داده‌ها در  $a < 0$  ضرب شوند، چه تغییری در میانگین حاصل می‌شود؟

— با توجه به نتایج به‌دست آمده در بالا، میانگین داده‌های زیر را به‌دست آورید.

الف — ۱۳۲۸، ۱۳۱۷، ۱۳۰۷، ۱۳۴۲، ۱۳۰۰، ۱۴۱۲

ب — ۲۰۳۸، ۱۰۳۸، ۴۰۳۸، ۳۰۳۸، ۱۰۰۳۸، ۸۰۳۸

در برخی از محاسبات ممکن است اعداد بسیار بزرگ باشند، جمع کردن این اعداد و تقسیم آن‌ها همراه با خطاهایی خواهد بود. شاید بگویید در عصر رایانه‌ها، بزرگی اعداد مشکلی نخواهد بود. ولی به هر حال این اعداد را باید به طریقی وارد کنیم که در این مرحله بزرگی آن‌ها، اشکالاتی را ایجاد خواهد کرد. اگر بتوانیم تدبیری بیندیشیم تا از اعداد کوچک‌تر استفاده کنیم، این مشکل را دور زده‌ایم. قضیه زیر راه حل مناسب این مسئله را ارائه می‌کند.

**قضیه:** اگر  $\bar{x}$  میانگین داده‌های  $x_1, \dots, x_n$  باشد آنگاه میانگین داده‌های  $ax_1 + b, \dots, ax_n + b$  که با نماد  $\overline{ax + b}$  نشان می‌دهیم عبارت است از:

$$\overline{ax + b} = a\bar{x} + b$$

**اثبات:**

$$\begin{aligned}\overline{ax + b} &= \frac{(ax_1 + b) + \dots + (ax_n + b)}{n} \\ &= \frac{a(x_1 + \dots + x_n) + (b + \dots + b)}{n} \\ &= a \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} + \frac{nb}{n} \\ &= a\bar{x} + b\end{aligned}$$

**مثال:** میانگین داده‌های زیر را حساب کنید.

$$۱۷۵۰, ۱۷۶۰, ۱۷۶۶, ۱۷۵۵, ۱۷۸۰$$

**حل:** ملاحظه می‌کنیم که اعداد بالا به صورت زیر هستند.

$$۱۷۰۰ + ۱۰ \times ۵, ۱۷۰۰ + ۱۰ \times ۶, ۱۷۰۰ + ۱۰ \times ۶/۶, ۱۷۰۰ + ۱۰ \times ۵/۵, ۱۷۰۰ + ۱۰ \times ۸$$

پس  $a = ۱۰$  و  $b = ۱۷۰۰$  کافی است میانگین داده‌ها

$$۵, ۶, ۶/۶, ۵/۵, ۸$$

را حساب کنیم. میانگین این اعداد عبارت است از:

$$\frac{۵ + ۶ + ۶/۶ + ۵/۵ + ۸}{۵} = \frac{۳۱/۱}{۵} = ۶/۲۲$$

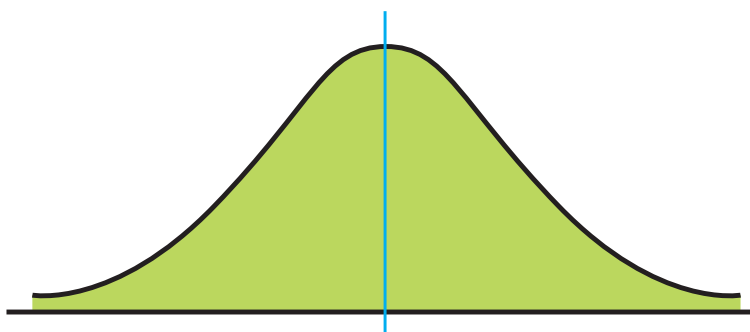
پس میانگین داده‌های اصلی عبارت است از:

$$۱۷۰۰ + ۱۰ \times ۶/۲۲ = ۱۷۰۰ + ۶۲/۲ = ۱۷۶۲/۲$$

**مقایسه میانگین و میانه:** میانگین شاخص خوبی برای نشان دادن مرکزیت داده‌هاست. در بعضی از مسائل این شاخص نمی‌تواند مؤثر باشد. مثلاً انتظار می‌رود در یک کلاس تمامی دانش‌آموزان نمره خوبی بگیرند. اگر نمرات خوب باشد مسلماً میانگین هم بالا خواهد بود ولی آیا بالا بودن میانگین



نمرات نشان دهنده وضع خوب کلاس است. ممکن است تعداد کمی نمره  $20^\circ$  گرفته باشند و تعداد زیادی نمره  $10^\circ$  یا  $12^\circ$ . وضع این کلاس رضایت بخش نخواهد بود برای آن که وضع کلاس را بتوانیم خوب ارزیابی کنیم حداقل نصف کلاس باید نمره خوبی آورده باشند. آن چه نمره ای است که نمره نصف دانش آموزان کلاس از آن بیش تر است؟  
– اگر میانه خیلی از میانگین کوچک تر باشد تعبیر آن چیست؟  
– اگر میانه خیلی بزرگ تر از میانگین باشد تعبیر آن چیست؟  
در فصل نمودارها به منحنی نرمال اشاره کردیم و گفتیم که این یک منحنی متقارن زنگی شکل به صورت زیر است.



از تقارن آن نتیجه می شود که میانه و میانگین آن برابرند و چون نقطه ماکزیمم هم دارند مد آن نیز برابر میانگین است.



## میانگین وزن دار

شما قطعاً شنیده‌اید که برخی از نمرات شما ضریب دارند، مثلاً اگر چهار بار از شما آزمون گرفته باشند، نمره آخرین آزمون را ممکن است در ۳ ضرب کنند، یعنی به آن ضریب ۳ بدهند. پس اگر نمرات شما به صورت زیر باشد :

آزمون اول	آزمون دوم	آزمون سوم	آزمون چهارم
۱۶	۱۵	۱۸	۱۷

نمره‌ای که برای این درس برای شما در کارنامه خواهد آمد میانگین ۶ عدد زیر است :

۱۶	۱۵	۱۸	۱۷	۱۷	۱۷
----	----	----	----	----	----

یعنی نمره درس مذکور عبارت است از :

$$\frac{۱۶+۱۵+۱۸+۱۷+۱۷+۱۷}{۶} = \frac{۱۰۰}{۶} \approx ۱۶/۶۶$$

ابتدا ببینیم این ضریب چه اثری در نمره شما می‌گذارد. نمره بدون احتساب ضریب عبارت است از :

$$\frac{۱۶+۱۵+۱۸+۱۷}{۴} = ۱۶/۵$$

اگر ضریب را بیش‌تر کنیم مثلاً نمره آخر را با ضریب ۵ در نظر بگیریم خواهیم داشت :

$$\frac{۱۶+۱۵+۱۸+۱۷ \times ۵}{۸} = ۱۶/۷۵$$

ملاحظه می‌شود که هر چه قدر ضریب نمره آزمون چهارم بالاتر رود نمره درس شما بیش‌تر

خواهد شد. حال ببینیم آیا همیشه این‌طور است. فرض کنید نمرات شما به صورت زیر باشد :

۱۶	۱۵	۱۸	۱۶
----	----	----	----

در این صورت نمره درس شما بدون احتساب ضریب عبارت است از :

$$\frac{۱۶+۱۵+۱۸+۱۶}{۴} = ۱۶/۲۵$$

حال اگر به نمره آزمون چهارم ضریب ۳ بدهیم، خواهیم داشت :

$$\frac{۱۶+۱۵+۱۸+۱۶+۱۶+۱۶}{۶} \approx ۱۶/۱۶$$

اگر ضریب آزمون چهارم ۵ باشد نمره درس شما عبارت است از :

$$\frac{۱۶+۱۵+۱۸+۵ \times ۱۶}{۸} = ۱۶/۱۲۵$$

این بار ملاحظه می‌کنید که هر چه قدر ضریب بالاتر می‌رود نمره شما کم‌تر می‌شود. می‌توانید

علت آن را توضیح دهید؟

## در ازل پرتو حسنت ز تجلی دم زد ...

چگونه است که در مثال قبل با افزایش ضریب، نمره بالاتر می‌رفت ولی در این مثال با افزایش ضریب نمره کاهش می‌یابد؟

شاید دقت کرده باشید که در مثال اول نمرهٔ آزمون چهارم بیش از میانگین نمرات (بدون ضریب) شماسست. میانگین نمرات بدون ضریب برابر  $۱۶/۵$  بود ولی نمرهٔ آزمون چهارم شما  $۱۷$  بود. اما در مثال دوم میانگین نمرات بدون ضریب برابر  $۱۶/۲۵$  و نمرهٔ آزمون چهارم شما  $۱۶$  بود. هر چه قدر این نمره از میانگین فاصلهٔ بیش‌تری داشته باشد تأثیر ضریب آن محسوس‌تر است. این مطالب را در جدول زیر به وضوح می‌بینید.

نمره چهارم با ضریب ۴	نمره چهارم با ضریب ۲	میانگین بدون ضریب	نمرات
۱۶/۱۴	۱۵/۸	۱۵/۵	۱۵،۱۶،۱۴،۱۷
۱۷/۲۸	۱۶/۶	۱۶	۱۵،۱۶،۱۴،۱۹
۱۳/۲۸	۱۳/۸	۱۴/۲۵	۱۵،۱۶،۱۴،۱۲

ملاحظه می‌کنید اگر نمره زیر میانگین باشد و ضریب آن بالاتر رود نمره درس کاهش می‌یابد برعکس اگر نمره بالاتر از میانگین باشد و ضریب آن بالاتر رود نمره درس افزایش می‌یابد. معمولاً

نمراتی که اهمیت بیش‌تری دارند باید بتوانند جایگاه خود را در بین نمرات نشان دهند. سه نمرهٔ اول چون از بخش‌های کوچک کتاب امتحان گرفته شده است، انتظار می‌رود نمرات خوبی باشند ولی نمرهٔ آزمون چهارم چون از تمام کتاب بوده و از سؤال‌های ترکیبی (سؤالاتی که چند مفهوم را در هم ادغام کرده باشند) استفاده شده است، اهمیت آن بیش‌تر است این اهمیت از طریق ضریب اعمال می‌شود. حال به حالت کلی برمی‌گردیم، فرض کنیم برحسب ضروریاتی به هر آزمونی ضریب اختصاص داده شده باشد، مثلاً فرض کنید در چهار آزمون برگزار شده به ترتیب ضریب‌های ۱، ۲، ۳، ۳ اختصاص داده شده باشد و نمرات شما به ترتیب از آزمون اول تا چهارم برابر ۱۴، ۱۶، ۱۷، ۱۵ باشد، نمره این درس شما چه قدر خواهد بود؟ در واقع می‌خواهیم میانگین مقادیر زیر را حساب کنیم.

$$۱۴، ۱۷، ۱۷، ۱۶، ۱۶، ۱۶، ۱۵، ۱۵، ۱۵$$

پس نمره درس عبارت است از :

$$\frac{۱۴+(۱۷+۱۷)+(۱۶+۱۶+۱۶)+(۱۵+۱۵+۱۵)}{۱+۲+۳+۳}$$

$$= \frac{۱۴۱}{۹} \approx ۱۵/۶۶$$

این قبیل میانگین‌ها را میانگین‌های وزن‌دار (وزنی) می‌گویند.

در حالت کلی فرض کنید داده‌های  $x_1, \dots, x_n$  به ترتیب دارای ضریب‌های  $w_1, \dots, w_n$  باشد. این اطلاعات را برای سادگی می‌توانیم در جدول زیر خلاصه کنیم :

داده‌ها	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$
ضریب (وزن)	$w_1$	$w_2$	$\dots$	$w_n$

در این صورت میانگین داده‌های بالا با احتساب ضرایب مربوطه به صورت زیر محاسبه می‌شود :

$$\text{میانگین وزنی} = \frac{w_1 x_1 + w_2 x_2 + \dots + w_n x_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

مثال: میانگین وزن‌دار را در جدول زیر حساب کنید.

داده	۱۲	۱۴/۵	۱۵	۹
وزن	۱	۳	۱	۳

حل:

$$\text{میانگین وزنی} = \frac{۱ \times ۱۲ + ۳ \times ۱۴/۵ + ۱ \times ۱۵ + ۳ \times ۹}{۱ + ۳ + ۱ + ۳}$$

$$= \frac{۹۷/۵}{۸} \approx ۱۲/۱۸$$

میانگین وزن‌دار را هم با همان نماد  $\bar{x}$  نشان می‌دهند و اگر بخواهند تمایز بین میانگین معمولی و میانگین وزن‌دار قائل شوند، میانگین وزن‌دار را با نماد  $\bar{x}_w$  نشان می‌دهند.

در مواردی که ما با میانگین وزن دار مواجه می‌شویم محاسبه میانگین در یک جدول فراوانی است. دیدیم که در یک جدول فراوانی قرار شد تمام افرادی که در یک دسته قرار دارند برابر مرکز دسته فرض کنیم. پس مرکز دسته به اندازهٔ فراوانی آن دسته تکرار می‌شود، و این مانند آن است که ما به مرکز دسته وزنی برابر فراوانی آن دسته داده باشیم، پس اگر بخواهیم میانگین را حساب کنیم باید مرکز دسته‌ها را در فراوانی‌های نظیر، ضرب و با هم جمع کرده و پس از آن بر مجموع فراوانی‌ها (که همان تعداد داده‌هاست) تقسیم کنیم.

$$\bar{x} = \frac{f_1x_1 + \dots + f_kx_k}{f_1 + \dots + f_k}$$

میانگین در جدول فراوانی

این مفهوم میانگین برای محاسبات از روی جدول فراوانی مناسب‌تر است. داده‌های زیر را که ضریب هوشی ۳۴ دانش‌آموز پسر در سال اول دبیرستان را نشان می‌دهد در نظر بگیرید.

۸۸	۱۰۸	۱۰۸	۱۱۱	۱۱۱	۱۰۳	۱۰۸	۱۰۱	۸۸
۹۱	۱۰۳	۱۰۵	۱۰۵	۱۱۲	۹۶	۱۱۱	۱۰۷	۹۶
۹۲	۱۰۰	۱۱۲	۱۱۲	۹۲	۸۹	۹۵	۹۰	۱۰۵
۱۱۱	۹۵	۱۰۸	۷۷	۱۰۶	۹۰	۷۷		

ابتدا مستقیماً میانگین این داده‌ها را حساب کنید. سپس با تشکیل یک جدول فراوانی مناسب میانگین را به دست آورده و جواب‌ها را مقایسه کنید.  
حل: میانگین داده‌های بالا عبارت است از:

$$\frac{\text{مجموع داده‌ها}}{۳۴} = \frac{۳۴۰۳}{۳۴} \approx ۱۰۰/۹$$

حال داده‌ها را در دسته‌هایی، دسته‌بندی می‌کنیم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$a = ۷۷, b = ۱۱۲$$

پس  $R = b - a = ۳۵$ . این ۳۵ داده را در ۵ دسته، دسته‌بندی می‌کنیم.

$$C = \frac{۳۵}{۵} = ۷$$

طول دسته‌ها

فراوانی‌ها	مرکز دسته‌ها	دسته‌ها
۲	۸۰/۵	۷۷-۸۴
۵	۸۷/۵	۸۴-۹۱
۷	۹۴/۵	۹۱-۹۸
۴	۱۰۱/۵	۹۸-۱۰۵
۱۶	۱۰۸/۵	۱۰۵-۱۱۲
۳۴	جمع	

۱۳۳



$$\bar{x}_w = \frac{2 \times 80/5 + 5 \times 87/5 + 7 \times 94/5 + 4 \times 101/5 + 16 \times 107/5}{34}$$

$$= \frac{3386}{34} \approx 99/58$$

ملاحظه می کنید آن چه که از روی جدول فراوانی به دست آمد با آن چه که مستقیماً از روی داده ها به دست آمد به اندازه  $0/51 = 99/58 - 100/09$  اختلاف دارد. این اختلاف در مقایسه با میانگین داده ها که حدوداً برابر  $100$  است ناچیز است. قبلاً هم گفتیم در جدول بندی و یکسان سازی داده ها مقداری از اطلاعات از دست می رود ولی سهولت ها و تعبیهایی که این روش برای ما ایجاد خواهد کرد به مراتب با ارزش تر از حفظ مقدار ناچیزی از اطلاعات است.

توجه ۱: اگر بخواهیم برابری  $(x_1 - \bar{x}) + \dots + (x_n - \bar{x}) = 0$  را در جدول فراوانی بررسی کنیم باید فراوانی ها را نیز در نظر بگیریم. یعنی در جدول فراوانی داریم:

$$f_1(x_1 - \bar{x}) + f_2(x_2 - \bar{x}) + \dots + f_n(x_n - \bar{x}) = 0$$

در مثال بالا داریم:

$$2(80/5 - 100/1) + 5(87/5 - 100/1) +$$

$$7(94/5 - 100/1) + 4(101/5 - 100/1) +$$

$$16(108/5 - 100/1)$$

$$= 39/2 - 63 - 39/2 + 5/6 + 134/4 = 1/4$$

— البته این مقدار صفر نیست ولی به صفر بسیار نزدیک است آیا می توانید توضیح دهید که چرا

دقیقاً برابر صفر به دست نیامد؟

روشی سریع برای محاسبه میانگین: سعید نمرات زیر را در پایان نیمسال اول اتخاذ کرده

است. او برای محاسبه سریع معدل نمرات خود، ابتدا معدل خود را حدس می زند مثلاً فرض می کند معدل او ۱۸ است. سپس از نمره اول شروع می کند و با معدل حدسی خود مقایسه می کند.

لیست نمرات	۱۵	۱۷	۱۵	۱۹	۲۰	۱۹	۱۳	۱۶	۱۸	۱۹
تفاضل از معدل تخمینی ۱۸	-۳	-۱	-۳	+۱	+۲	+۱	-۵	-۲	۰	+۱
جمع مقادیر مقایسه شده	-۳	-۳+(-۱) -۴	-۴+(-۳) -۷	-۷+۱= -۶	-۴	-۳	-۸	-۱۰	-۱۰	-۹

نمره اول ۱۵ است که نسبت به معدل تخمینی ۳،۱۸ نمره کم دارد، این تفاوت را با ۳- نشان می‌دهیم. حال نمره دوم را در نظر می‌گیرد. نسبت به معدل ۱۸ نمره دوم ۱ نمره کم است. او تاکنون ۴ نمره از معدل حدسی خود کم آورده است. همین روش را ادامه می‌دهد و در پایان او ۹ نمره از معدل کم آورده است. ۹ را بر تعداد نمرات تقسیم می‌کند و مقدار آن را از میانگین حدسی کم می‌کند، تا میانگین واقعی به دست آید.

$$\begin{aligned}\bar{x} &= 18 - \frac{9}{1} = 18 - 0/9 \\ &= 18 - 0/9 = 17/1\end{aligned}$$

در حالت کلی فرض کنید  $x_1, \dots, x_n$  داده‌ها باشند و  $y$  میانگین تخمینی باشد.

$$\begin{aligned}A &= \frac{(x_1 - y) + \dots + (x_n - y)}{n} \\ &= \frac{x_1 + \dots + x_n - ny}{n} \\ &= \bar{x} - y\end{aligned}$$

پس :

$$\bar{x} = y + A$$

در مثال مقدار  $A$  را برابر  $\frac{-9}{1}$  حساب کردیم و از رابطه  $A = \bar{x} - y$  با داشتن  $A$  و  $y$  میانگین

واقعی  $\bar{x}$  را به دست آوردیم

فردی را شکنجه می‌دادند. شکنجه این فرد به این صورت بود که یکی از دست‌های او را در کوره‌ای با دمای  $100^\circ$  درجه سانتی‌گراد بالای صفر قرار دادند و دست دیگر او را در داخل مبردی با سرمای  $100^\circ$  - درجه سانتی‌گراد قرار دادند. در این حال از او پرسیدند، در چه حالی هستی؟ او در پاسخ گفت: به طور متوسط احساس راحتی می‌کنم.

۱- بهزاد در آزمایشگاه فیزیک، پس از انجام یک آزمایش به داده‌های زیر دست پیدا کرد:

۲۰۲۰، ۲۰۹۶، ۲۲۰۲، ۲۰۱۶، ۲۰۷۳، ۲۰۳۹

– میانگین و میانه و مد را برای داده‌های به‌دست آمده به‌دست آورید.

– پس از بررسی مجدد داده‌ها، بهزاد متوجه شد که به‌جای ۲۲۰۲ باید ۲۰۲۲ ثبت می‌شد.

او این تغییر را در لیست خود اعمال نمود.

– میانگین، میانه و مد را برای لیست جدید داده‌ها به‌دست آورید.

– کدام یک از شاخص‌های فوق با این تغییر، بیش‌تر از همه تغییر یافت؟

– عموماً کدام شاخص در اثر تغییرات، بیش‌تر از همه تغییرپذیر است؟ توضیح دهید.

۲- در یک امتحان ریاضی ۱۵ نفر نمرات زیر را کسب نمودند:

۰، ۱، ۳، ۱۴، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۶، ۱۷، ۱۷، ۱۸، ۱۸، ۱۸، ۱۹، ۲۰

– میانگین، میانه و مد را به‌دست آورید.

– کدام شاخص نمایان‌گر بهتری از وضع دانش‌آموزان این کلاس می‌باشد؟

۳- میزان پرداخت حقوق در یک شرکت خصوصی در جدول زیر آمده است:

حقوق هر نفر (تومان)	بسمت
۳۰۰,۰۰۰	مدیر شرکت
۲۰۰,۰۰۰	معاون
۸۵,۰۰۰	حسابدار
۶۰,۰۰۰	بازاریاب
۴۰,۰۰۰	منشی
۶۰,۰۰۰	۲ نفر فروشنده
۳۵,۰۰۰	مستخدم

مدیر شرکت در آگهی دعوت به همکاری در روزنامه اعلام می‌دارد که میانگین پرداخت حقوق

در این شرکت بیش‌تر از ۱۰۰,۰۰۰ تومان است. آیا این رقم می‌تواند دلیلی برای پرداخت حقوق بالا

در این شرکت باشد؟ چرا؟ کدام یک از شاخص‌ها برای نشان دادن وضع پرداختی کارکنان این شرکت

بهتر می‌باشد چرا؟

۴- میانگین ۱۰ عدد ۳، ۸، ۵، ۹، ۳، ۷، ۸، a، ۳، ۴ برابر ۵/۵ است.

الف - a را پیدا کنید.

ب - میانه را به دست آورید.

۵- مجموع هفت عدد متوالی برابر ۱۴۷ است. اگر میانگین این اعداد از میانه کم شود چه

اتفاقی می افتد؟ (بدون محاسبه)

۶- نمرات درس فیزیک دانش آموزی در طول سال برابر است با :

۱۷، ۱۹، ۱۸، ۷، ۱۸/۵، ۱۹

الف - میانه و میانگین، مد را برای نمرات این دانش آموز حساب کنید.

ب - کدام یک از شاخص های فوق، بیان گر بهتری از وضع این دانش آموز در درس فیزیک است؟

ج - اگر معلم درس فیزیک این دانش آموز، برای جبران نمره ۷، امکان امتحان مجدد را به او

بدهد، برای این که میانگین وی در این درس ۱۸/۵ شود، او در این امتحان چه نمره ای باید کسب

کند؟

۷- اگر در مجموعه اعداد  $\{7\%, 11\%, 8\%, 6\%, x\}$  میانگین برابر میانه و مد باشد، x را پیدا کنید.

۸- یک کارخانه تولید مواد غذایی می خواهد محصولی را بسته بندی کند. در یک تحقیق،

مسئولین متوجه شدند که از ۲۲ نفر، پنج نفر ترجیح می دهند محصول در بسته بندی یکی ای ارائه

شود، پنج نفر ترجیح دادند محصول در بسته بندی دوتایی و سه نفر در بسته بندی سه تایی و شش نفر در

بسته بندی چهارتایی و سه نفر در بسته بندی شش تایی ارائه شود.

- میانگین، مد، میانه را برای تعداد محصول در هر بسته به دست آورید.

- به نظر شما این کارخانه باید از کدام شاخص در تصمیم گیری خود استفاده کند؟ چرا؟

۹- در بسیاری از دانشگاه ها، نمرات برحسب A, B, C, D, F اعلام می شوند. در این سیستم

نمره گذاری A دارای وزن یا ارزش ۴، B دارای وزن یا ارزش ۳ و C دارای وزن یا ارزش ۲ و D

دارای وزن یا ارزش ۱ و F وزن یا ارزش صفر دارد.

جدول زیر دروس و تعداد واحدها و نمرات اکتساب شده توسط مریم را در دانشگاه نشان

می دهد :

– معدل مریم را در این ترم حساب کنید.

نمره	تعداد واحد	درس
B	۳	ریاضیات
A	۳	فیزیک
C	۲	ورزش
B	۲	تاریخ
C	۳	ادبیات
A	۱	آزمایشگاه

۱۰– یک باغبان می خواهد تعداد علف های هرز یک زمین بازی را تخمین بزند. او به طور

تصادفی ۱۰۰ ناحیه از این زمین را هر یک به مساحت  $100\text{ cm}^2$  انتخاب نمود و تعداد علف های هرز

هر ناحیه را شمرد. جدول زیر نتیجه این شمارش است.

تعداد علف های هرز	فراوانی نواحی
۰–۴	۱۸
۵–۹	۲۵
۱۰–۱۴	۳۲
۱۵–۱۹	۱۴
۲۰–۲۴	۷
۲۵–۲۹	۴

– فراوانی تجمعی نواحی را به دست آورید.

– نمودار میله ای را برای فراوانی تجمعی نواحی رسم کنید.

– میانگین تعداد علف های هرز را برای هر قسمت (هر ۱۰۰ سانتی متر مربع) تخمین بزنید.

– اگر مساحت زمین  $8000\text{ m}^2$  باشد، تعداد کل علف های هرز این زمین را تخمین بزنید.



۱۱- سن بازیکنان تیم ملی فوتبال یک کشور به شرح زیر است :

۲۷, ۲۴, ۲۶, ۲۶, ۲۹, ۱۹, ۳۱, ۱۸, ۲۳, ۲۲

۲۵, ۲۶, ۲۷, ۲۳, ۲۹, ۲۵, ۲۵, ۳۳

۳۱, ۲۱, ۲۶, ۲۵

— میانگین، مد و میانه سن بازیکنان این تیم را به دست آورید.

— تعداد بازیکنانی که سن آنها بالاتر از میانگین است، بیش تر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانگین کم تر است؟

— تعداد بازیکنانی که سن آنها بالاتر از میانه است بیش تر است یا تعداد بازیکنانی که سن آنها از میانه کم تر است؟

— میانه و میانگین را در این بررسی مقایسه کنید. چه نتیجه ای می گیرید؟

۱۲- یک کارخانه سازنده اتومبیل های شخصی در نظر دارد اتومبیل های جدیدی را طراحی

کند. برای این منظور اتومبیل هایی را که از یک چهارراه عبور می کردند، مورد بررسی قرار داد.

اطلاعات به دست آمده به شرح زیر است :

۱۲ اتومبیل با ۱ سر نشین

۶ اتومبیل با ۲ سر نشین

۴ اتومبیل با ۳ سر نشین

۲ اتومبیل با ۴ سر نشین

۱ اتومبیل با ۶ سر نشین

— به طور متوسط هر اتومبیل چند سر نشین دارد؟

در این بررسی مد چند است؟

۱۳- داده های زیر مصرف برق ۵۰ خانوار ساکن تهران را نشان می دهد. (بر حسب کیلووات ساعت)

۲۵, ۵, ۱۵, ۱۰, ۱۲, ۲۵, ۱۷, ۱۹, ۱۵, ۳۰

۲۵, ۳۵, ۴۷, ۵۵, ۶۶, ۶۸, ۹۸, ۸۸, ۶۸, ۷۵

۹۵, ۸۵, ۱۰۱, ۱۱۰, ۱۲۰, ۹۸, ۷۸, ۷۷, ۷۵, ۱۱۵

۶۶, ۴۵, ۶۸, ۷۵, ۹۳, ۸۸, ۱۲۰, ۱۴۰, ۱۳۵, ۱۵۰

۱۶۰, ۱۸۰, ۱۷۵, ۱۶۵, ۱۹۵, ۲۰۰, ۱۷۷, ۱۸۰, ۱۹۰, ۱۳۵

الف - آیا نمودار ساقه و برگ برای این داده‌ها مناسب است؟  
 ب - آیا میانگین معیار خوبی برای نشان دادن مصرف خانوارهای تهرانی هست یا خیر؟ توضیح دهید.

ج - نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم کنید.  
 د - تراکم مصرف بیش‌تر روی چه میزان از مصرف متمرکز شده است؟

۱۴- مدیر یک فروشگاه در نظر دارد برای حسابداران پای صندوق فروشگاهی برنامه‌ریزی کند. او می‌خواهد بداند در چه ساعاتی چند حسابدار برای رسیدگی به مشتریانش لازم دارد. برای این منظور او باید بداند به‌طور متوسط طول صف در ساعات مختلف روز چه قدر است. فرض کنید در ساعت ۱۰ صبح به‌طور متوسط هر ۱۰ دقیقه ۶ مشتری به صندوق مراجعه می‌کنند و فرض کنید رسیدگی به هر یک از آن‌ها به‌طور متوسط ۲ دقیقه طول می‌کشد. مثلاً اگر ترتیب رسیدن مشتری‌های A , B , C , D , E , F مطابق جدول زیر باشد :

زمان	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
مشتری	A	B	C, D			E				F

برای پیدا کردن میانگین طول صف در هر دقیقه باید نمودار طول صف بر حسب نفر در هر دقیقه را رسم کنیم.



اما این شش نفر ممکن است با چندین الگوی زمانی متفاوت به صندوق‌ها برسند و رسم جدول بالا برای تمام الگوهای ممکن کاری بسیار دشوار و وقت گیر است. با توجه به الگوی بالا شما چه پیشنهادی برای کمک به مدیر فروشگاه می‌توانید بکنید؟

از ماشین حساب چگونه استفاده کنیم

پیدا کردن میانگین با استفاده از ماشین حساب: در یک بررسی از رانندگان در مورد تعداد تصادفاتی که در سال گذشته داشتند سؤال شد. اطلاعات به دست آمده در جدول زیر آمده است:

تعداد تصادفات	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تعداد رانندگان	۱۷	۱۳	۲۱	۴	۲	۲	۱

– چند راننده در این بررسی شرکت داشتند؟

◦

$$۱۷ \quad \boxed{+} \quad ۱۳ = \boxed{M+}$$

$$۲۱ \quad \boxed{M+}$$

$$۴ \quad \boxed{M+}$$

$$۲ \quad \boxed{M+}$$

$$۲ \quad \boxed{M+}$$

$$۱ \quad \boxed{M+} \rightarrow \boxed{MR}$$

میانگین تعداد تصادفات برای هر راننده را به دست آورید:

◦

$$◦ \quad \boxed{\times} \quad ۱۷ = \boxed{M+}$$

$$۱ \quad \boxed{\times} \quad ۱۳ = \boxed{M+}$$

$$۲ \quad \boxed{\times} \quad ۲۱ = \boxed{M+}$$

$$۳ \quad \boxed{\times} \quad ۴ = \boxed{M+}$$

$$۵ \quad \boxed{\times} \quad ۲ = \boxed{M+}$$

$$۶ \quad \boxed{\times} \quad ۱ = \boxed{M+} \rightarrow \boxed{MR} \quad \boxed{\div} \quad ۶۰ \approx ۱/۳۸$$