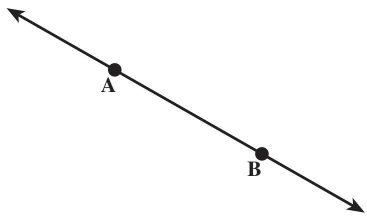
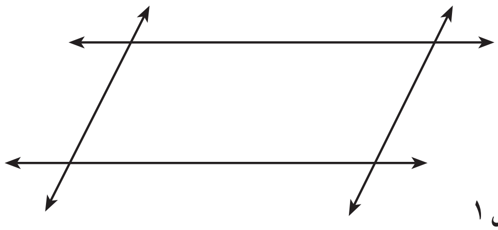
۴ـ۱ـ خط و صفحه در فضا

کلاس درس نمودی از فضای سه‌بُعدی است. سقف[1] و کف کلاس و هرکدام از دیوارهای آن نشان‌دهنده‌ی یک **صفحه** هستند. محل‌های تلاقی دیوارهای کلاس و کف آن یک **خط** در فضا تشکیل می‌دهند. صفحه‌ی کتاب یا دفترچه‌ای که روی آن می نویسید نیز نشان‌دهنده‌ی یک صفحه در فضا است و لبه‌های کتاب، خط‌هایی در صفحه هستند. همان‌طور که خط در فضا از دو طرف نامحدود است، صفحه نیز از همه طرف در فضا نامحدود است.



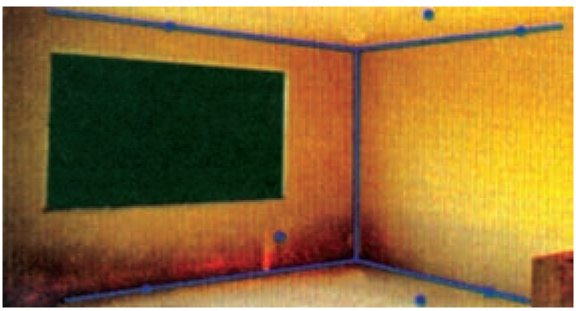


شکل ۱

دیوارهای کلاس یا صفحه‌ی کتاب بخش‌هایی از صفحه در فضا هستند. معمولاً یک صفحه را با متوازی‌الاضلاع نشان می‌دهیم.

دو خط در یک صفحه موازی نامیده می‌شوند اگر هیچ نقطه‌ی اشتراکی نداشته باشند یا بر هم منطبق باشند.

بار دیگر به کلاس درس خود نگاه کنید. لبه‌ی بالایی تخته سیاه یک خط در فضا است. اگر این خط را ادامه دهیم، سقف کلاس را قطع نمی‌کند. در این وضعیت می‌گوییم لبه‌ی بالایی تخته سیاه با سقف کلاس **موازی** است.

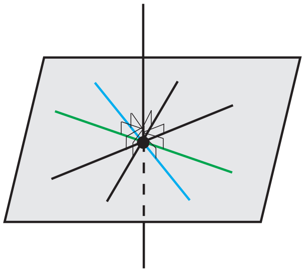


شکل۲

۱ــ سقف کلاس‌ها در همه‌ی مناطق ایران نشان‌دهنده‌ی یک صفحه نمی‌باشند. به عنوان مثال، سقف‌های گنبدی شکل مناطق کویری و سقف‌های بعضی مناطق شمال ایران به‌صورت یک صفحه نیستند.

یک خط و یک صفحه را که فقط یک نقطه‌ی اشتراک داشته باشند متقاطع گوییم. در غیر این صورت خط و صفحه موازیند.

حالا به خط قائم گوشه‌ی کلاس نگاه کنید. این خط برکف کلاس عمود است. خطی که یک صفحه را قطع می‌کند با خط‌هایی که درون صفحه قرار دارند و از نقطه‌ی تلاقی آن خط با صفحه می‌گذرند، زاویه تشکیل می‌دهد.

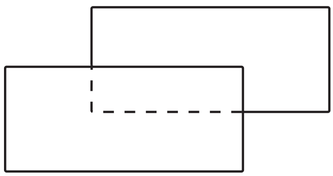


شکل۳

یک خط را بر یک صفحه عمود گوییم، اگر صفحه را قطع کند و با هر خطی در صفحه که از نقطه‌ی تلاقی می‌گذرد زاویه‌ی قائمه تشکیل دهد.

نکته: می‌توان نشان داد که در تعریف فوق عمودبودن خط بر حداقل دو خط متقاطع در صفحه کافی است.

دو دیوار روبه‌روی هم در کلاس، یکدیگر را قطع نمی‌کنند، یعنی بخش‌هایی از دو صفحه‌ی موازی هستند (شکل ۴).



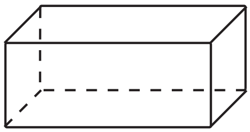
شکل۴

دو صفحه را موازی گویند، اگر یکدیگر را قطع نکنند یا بر هم منطبق باشند.

از طرف دیگر هریک از دیوارهای کلاس درس برکف کلاس عمود است.

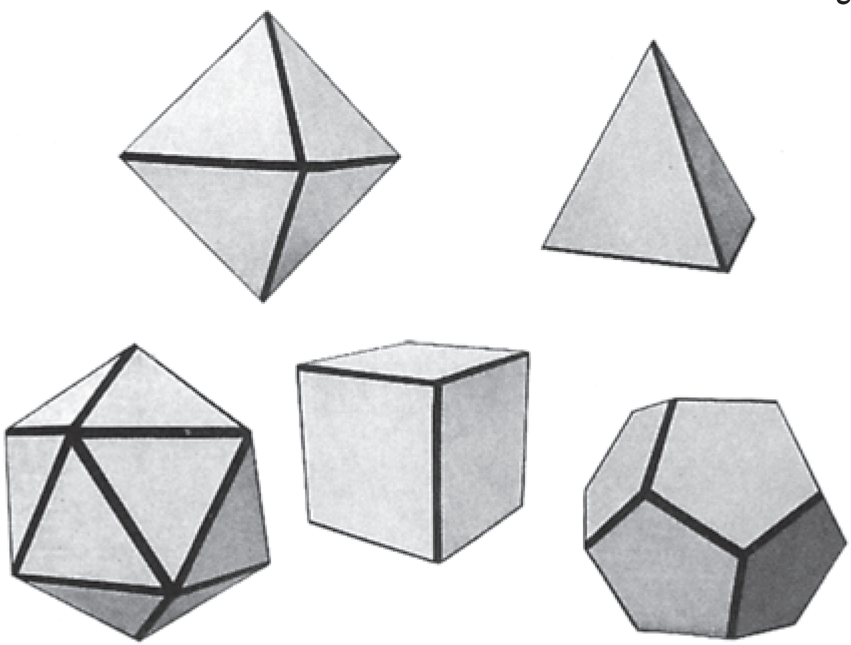
دو صفحه را عمود بر هم می‌نامند، هرگاه خطی در یکی از دو صفحه وجود داشته باشد که بر صفحه‌ی دیگر عمود باشد.

۴ـ۲ـ مکعب مستطیل



شکل۵

به شکل ۵ نگاه کنید. این شکلِ یک مکعب مستطیل است. در زندگی روزانه با اشیای بسیاری سروکار داریم که به شکل مکعب مستطیل هستند. جعبه‌ی خمیردندان، جعبه‌ی دستمال کاغذی، قوطی کبریت و بعضی از مدادپاکن‌ها نمونه‌هایی از مکعب مستطیل هستند. مکعب مستطیل شکل خاصی از **چندوجهی** است (شکل ۶).

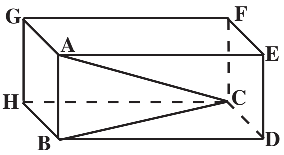


شکل ۶

بخشی از فضا که از همه طرف به صفحه محدود است شکلی پدید می‌آورد که به آن **چندوجهی** می‌گویند.

بخش هایی از صفحه‌ها که چندوجهی را پدید می‌آورند سطح‌هایی با محیط چندضلعی ایجاد می‌کنند. هرکدام از این چندضلعی‌ها[1] یک **وجه**، ضلع‌های این وجه‌ها، **یال‌ها** و رأس‌های این وجه‌ها، **رأس‌های** چندوجهی نامیده می‌شوند.

مکعب مستطیل یک شش وجهی است که همه‌ی وجه‌های آن مستطیل شکل هستند.



شکل ۷

وجه‌های روبه‌رو در مکعب مستطیل موازی و همنهشت هستند. وجه‌های مجاور یک مکعب مستطیل صفحه‌های عمود بر هم و یال‌های آن بر وجه‌ها عمود هستند (شکل ۷). مکعب مستطیل، ۸ رأس و ۱۲ یال دارد.

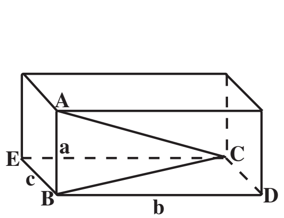
در مکعب مستطیل به دو رأس مانند A و C در شکل ۷ که در یک وجه قرار ندارند، **رأس‌های متقابل** گفته می‌شود.

الف) در شکل ۷، B،A و C سه رأس مکعب مستطیل هستند. رأس‌های دیگر را نام ببرید.

ب) AB و CD دو یال این مکعب مستطیل هستند. یال‌های دیگر را نام ببرید.

پ) پاره‌خط AC، دو رأس متقابل A و C را به هم وصل کرده است. رأس‌های متقابل دیگر را نام ببرید.

در هر مکعب مستطیل، پاره‌خطی که دو رأس متقابل را به هم وصل می‌کند، **قطر** مکعب مستطیل نامیده می‌شود.



شکل ۸

فرض کنید طول یال‌های BD ،AB و BE به‌ترتیب a، b و c باشد (شکل ۸). می‌خواهیم طول قطر AC را پیدا کنیم. چون یال AB بر وجه پایینی مکعب مستطیل عمود است، بنابراین مثلث ABC قائم‌الزاویه و AC وتر آن است. پس با محاسبه‌ی طول وتر در مثلث قائم‌الزاویه ABC، طول AC یعنی قطر مکعب مستطیل به‌دست می‌آید.

۱ــ در این‌جا منظور از چندضلعی، سطح چندضلعی است.

طول ضلع AB از مثلث ABC برابر a است ولی طول ضلع دیگر یعنی BC داده نشده است. اما چون مکعب مستطیل از وجه‌های مستطیل‌شکل تشکیل یافته است، پس $BE = CD = c$. مثلث BCD نیز قائم الزاویه است و BC وتر آن است. پس می‌توانیم از رابطه‌ی فیثاغورس طول BC را بیابیم :

$$BC^۲ = b^۲ + c^۲$$

بنابراین :

$$\begin{aligned} AC^۲ &= AB^۲ + BC^۲ \\ &= a^۲ + (b^۲ + c^۲) \\ &= a^۲ + b^۲ + c^۲ \end{aligned}$$

درنتیجه :

$$AC = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲} \qquad (۱)$$

مثال ۱: طول یال‌های AB، BD و BE در مکعب مستطیل شکل ۸، به‌ترتیب ۱، ۲ و ۳ سانتی‌متر است. طول قطر AC را محاسبه کنید.

حل: با قراردادن $a = ۱$، $b = ۲$ و $c = ۳$ در رابطه‌ی (۱) طول AC را به‌دست می‌آوریم

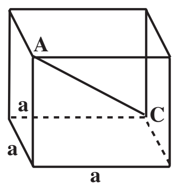
$$AC = \sqrt{۱ + ۴ + ۹} = \sqrt{۱۴}$$

مکعب مستطیلی که طول یال‌های آن با هم برابر باشند، **مکعب** نامیده می‌شود.

مثال ۲: اگر طول یال‌های مکعبی برابر a باشد، طول قطر آن را پیدا کنید.

حل: چون طول یال‌ها برابر a است، پس در رابطه‌ی (۱) به‌جای a،b و c مقدار a را قرار می‌دهیم.

$$AC = \sqrt{a^۲ + a^۲ + a^۲} = \sqrt{۳a^۲} = a\sqrt{۳}$$



شکل ۹

مثال ۳: اگر طول یال مکعب را دو برابر کنیم، طول قطر آن چه تغییری می کند؟

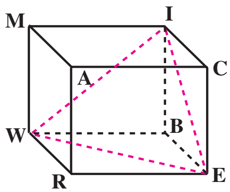
حل: اگر طول یال‌های مکعب شکل ۹ را دو برابر کنیم، آنگاه طول یال مکعب جدید، $۲\times a=۲a$ خواهد بود. اگر قطر مکعب جدید را $A'C'$ بنامیم، به کمک رابطه‌ی (۱) طول آن‌را به‌دست می‌آوریم.

$$A'C'=\sqrt{(۲a)^۲+(۲a)^۲+(۲a)^۲}$$
$$=\sqrt{۳\times ۴a^۲}$$
$$=۲a\sqrt{۳}$$
$$=۲AC$$

درنتیجه، **اگر طول یال مکعب را دوبرابر کنیم، طول قطر آن نیز دوبرابر می‌شود.**

فعالیت ۴ـــ۱

الف) به مکعب شکل ۱۰ نگاه کنید. این شکل را در دفتر خود رسم کنید.



شکل ۱۰

۱. در این مکعب رأس متقابلِ رأس I را نام ببرید.

۲. کدام‌یک از یال‌های این مکعب با یال MA موازی هستند؟

۳. این مکعب چند قطر دارد؟ آن‌ها را رسم کنید و نام ببرید.

ب) حال پاره‌خط‌های IE، WI و WE را نیز به شکلی که در دفتر خود رسم کرده‌اید اضافه کنید.

۴. اندازه‌ی زاویه‌های IWB و BWE را به‌دست آورید.

۵. اندازه‌ی زاویه IWE را به‌دست آورید.

۶. آیا رابطه‌ی $I\hat{W}E=I\hat{W}B+B\hat{W}E$ برقرار است؟ چرا؟

۷. اگر طول یال این مکعب ۸ سانتی‌متر باشد، طول پاره‌خط WI را حساب کنید.

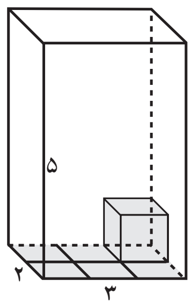
در شکل ۱۰، WI، **قطر وجه** نامیده می‌شود.

آیا هنگام نوشیدن آب داخل یک لیوان، از خود پرسیده‌اید مقدار آبی که درون لیوان جای می‌گیرد چقدر است؟ یا هنگامی که بادکنکی را باد می‌کنید از خود پرسیده‌اید چه اندازه هوا داخل بادکنک جای می‌گیرد؟ یا گنجایش مخزن سوخت اتومبیل چقدر است؟

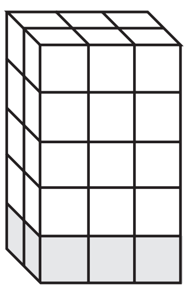
برای اندازه‌گیری طول یک پاره خط واحد طولی مثل سانتی‌متر، یا میلی‌متر انتخاب کردیم و با انتخاب آن واحدی نیز برای اندازه‌گیری مساحت مثل سانتی‌مترمربع یا میلی‌مترمربع به‌دست آوردیم. برای محاسبه‌ی حجم یک شکل فضایی نیز محتاج یک واحد هستیم. این واحد، حجم مکعبی با طول یال واحد است که برابر یک سانتی‌متر مکعب یا یک میلی‌مترمکعب (برحسب واحدی که برای اندازه‌گیری طول یال آن انتخاب می‌کنیم) در نظر گرفته می‌شود. همان‌طورکه برای محاسبه‌ی مساحت مستطیل آن‌را با مربعهای واحد پوشاندیم، برای محاسبه‌ی حجم یک مکعب مستطیل آن‌را با **مکعب‌های واحد** (مکعب‌هایی با طول یال واحد) پر می‌کنیم و با شمارش تعداد آن‌ها یا کسری از آن‌ها، حجم مکعب مستطیل را می‌یابیم. مکعب مستطیل شکل ۱۱ــ الف دارای یال‌هایی به طول‌های ۳ سانتی‌متر، ۲ سانتی‌متر و ۵ سانتی‌متر است، که آن‌ها را طول، عرض و **ارتفاع** آن می‌نامند. این مکعب مستطیل را مانند شکل ۱۱ــ ب با مکعب‌های واحد پُر می‌کنیم. چون ارتفاع مکعب مستطیل ۵ است، ۵ ردیف از مکعب‌های واحد آن‌را پر می‌کنند. در هر ردیف نیز ۶ مکعب وجود دارد زیرا وجه پایینی این مکعب مستطیل، مستطیلی با طول ۳ سانتی‌متر و عرض ۲ سانتی‌متر است و مساحت مستطیل $۶ = ۳ \times ۲$ سانتی‌مترمربع است، بنابراین در هر ردیف ۶ مکعب واحد لازم خواهد بود. درنتیجه:

$$۲ \times ۳ \times ۵ = ۶ \times ۵ = ۳۰$$

الف



ب



شکل ۱۱

مکعب واحد برای پرکردن کل فضای داخل مکعب مستطیل لازم است. از این رو حجم این مکعب مستطیل ۳۰ سانتی‌مترمکعب است.

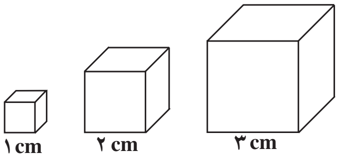
ارتفاع × عرض × طول = حجم مکعب مستطیل

طول و عرض مکعب مستطیل در واقع طول و عرض مستطیل وجه پایینی آن هستند که **قاعده‌ی مکعب مستطیل** نامیده می‌شود. چون مساحت مستطیل برابر با حاصل‌ضرب طول و عرض است، درنتیجه :

ارتفاع × مساحت قاعده = حجم مکعب مستطیل

فعالیت ۴ـ۲

سه مکعب به طول یال‌های ۱، ۲ و ۳ سانتی‌متر مطابق شکل ۱۲ در نظر بگیرید.



شکل ۱۲

۱. مجموع مساحت‌های همه‌ی وجه‌های مکعب را به‌دست آورید و آن را مساحت کل بنامید.

۲. اگر طول یال یک مکعب را دو برابر کنیم، مساحت کل آن چه تغییری می‌کند؟

۳. اگر طول یال مکعبی را سه برابر کنیم، مساحت کل آن چه تغییری می‌کند؟

۴. حجم هرکدام از این مکعب‌ها را حساب کنید.

۵. اگر طول یال مکعبی دو برابر یا سه برابر شود، حجم آن چه تغییری می‌کند؟

مثال ۴: حجم مکعبی به طول یال a را پیدا کنید.

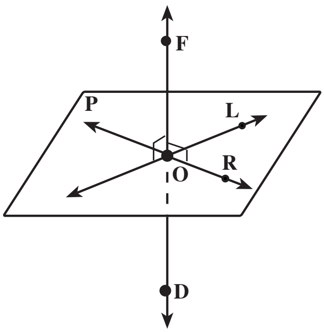
حل: چون طول و عرض و ارتفاع مکعب با هم برابرند، درنتیجه :

$a^{۳}$ = ۳(طول یال) = حجم مکعب

مسائل

۱. نمایی از خط‌ها و صفحه‌هایی که در کلاس درس یا اتاق منزل خود می‌بینید در دفترچه خود رسم و خط‌های عمود بر صفحه‌ها را نام‌گذاری کنید. آنگاه، همه‌ی زاویه‌های قائمه‌ای را که تشکیل می‌شوند نام ببرید.

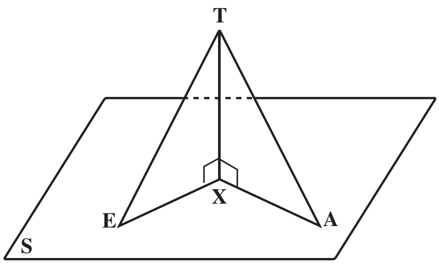
۲. در شکل زیر خط FD بر صفحه‌ی P عمود است و خط‌های OL و OR درون صفحه هستند:



الف) از عمود بودن خط بر صفحه، چه نتیجه‌ای به‌دست می‌آورید؟

ب) زاویه‌هایی را که قائمه هستند نام ببرید.

۳. در شکل زیر، پاره‌خط TX بر صفحه‌ی S عمود است و $TE = TA$. چرا زاویه‌ی TEX با زاویه‌ی TAX مساوی است؟

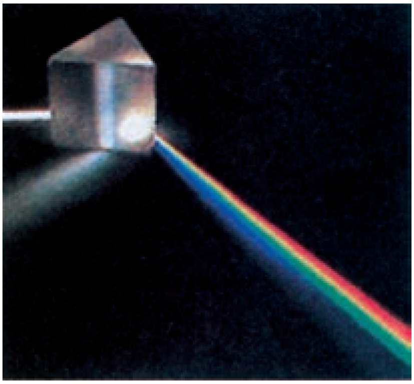


۴. حجم مکعب مستطیلی را که طول، عرض و ارتفاع آن $\sqrt{۲}$ ، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ سانتی‌متر است به‌دست آورید.

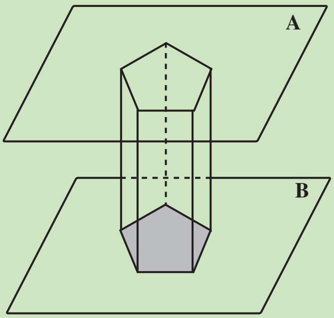
۵. اگر طول قطر مکعبی $\sqrt{۶}$ باشد، مساحت کل آن‌را حساب کنید.

۴ــ۳ــ منشور و استوانه

به تصویر زیر نگاه کنید. این تصویر، نمونه‌هایی از یک **منشور** است.

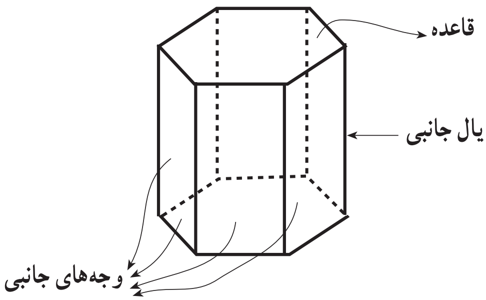


منشور یک چند وجهی است که دو وجه آن همنهشت بوده و در دو صفحه‌ی موازی قرار گیرند و وجه‌های دیگر آن متوازی‌الاضلاع باشند.



شکل ۱۳

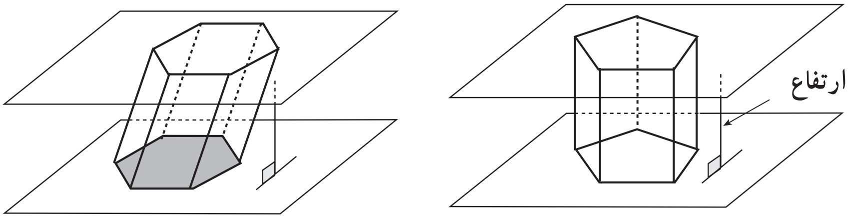
دو وجه همنهشت منشور که در دو صفحه‌ی موازی قرار می‌گیرند، **قاعده‌های منشور** نام دارند. وجه‌های دیگر که متوازی الاضلاع هستند، **وجه‌های جانبی** و یال‌هایی از منشور که محل تلاقی وجه‌های جانبی منشور هستند، **یال‌های‌جانبی** نامیده می‌شوند که همگی با هم



شکل ۱۴

موازیند. (شکل ۱۴) **ارتفاع منشور** پاره‌خطی است که صفحه‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند و بر هر دو قاعده عمود است.

اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌های منشور عمود باشند، آن‌را یک **منشور قائم** و اگر یال‌های جانبی بر قاعده‌ها عمود نباشند آن‌را **منشور مایل** می‌نامند (شکل ۱۵).

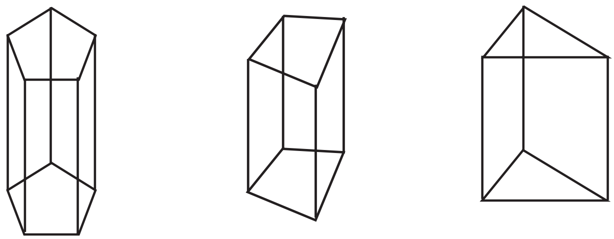


منشور مایل

منشور قائم

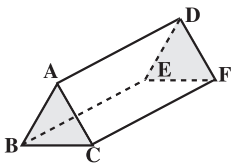
شکل ۱۵

منشور را بر اساس شکل چندضلعی قاعده‌های آن نامگذاری می‌کنند. مثلاً اگر قاعده‌ی یک منشور مثلث باشد، آن را **منشور مثلثی** می‌نامند. به این ترتیب، مکعب مستطیل یک منشور **چهارضلعی قائم** است. (چرا؟)



منشور پنج‌ضلعی — منشور چهارضلعی — منشور مثلثی

شکل ۱۶



شکل ۱۷

فیزیکدان‌ها معمولاً به قطعه‌ی شیشه‌ای مثلث شکلی که می‌تواند نور را به طیف‌های آن تجزیه کند، **منشور** می‌گویند. این قطعه شیشه یک منشور مثلثی قائم است (شکل ۱۷).

تمرین ۱: شکل ۱۷ یک منشور مثلثی است.

الف) قاعده‌های این منشور را نام ببرید.

ب) این منشور چند وجه جانبی دارد؟ وجه‌های جانبی آن چه شکلی دارند؟

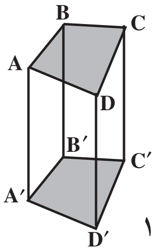
پ) یال‌های جانبی آن‌را نام ببرید.

تمرین ۲: در شکل ۱۸ یک منشور چهارضلعی قائم می‌بینید.

الف) این منشور چند وجه دارد؟

ب) وجه‌های آن چه شکلی دارند؟

پ) یال‌هایی از این منشور را که موازیند، نام ببرید.



شکل ۱۸

می‌توان مجموع مساحت وجه‌ها را برای هر منشور دلخواه نیز مانند مساحت کل مکعب مستطیل به‌دست آورد.

مجموع مساحت‌های وجه‌های جانبی یک منشور را **مساحت جانبی** و مجموع مساحت جانبی و مساحت دو قاعده‌ی منشور، **مساحت کل** آن نامیده می‌شود.

فعالیت ۴ــ۳

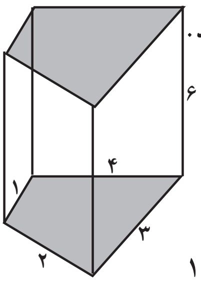
طول ضلع‌های قاعده‌ی منشور شکل ۱۹، به ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ واحد و طول یال‌های جانبی آن ۶ واحد است.

۱. مساحت هریک از وجه‌های جانبی این منشور را به‌دست آورید.

۲. مساحت جانبی منشور چقدر است؟

۳. محیط قاعده را به‌دست آورید و آن‌را در طول یال جانبی ضرب کنید.

۴. از مقایسه‌ی پاسخ سؤال‌های ۲ و ۳ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟



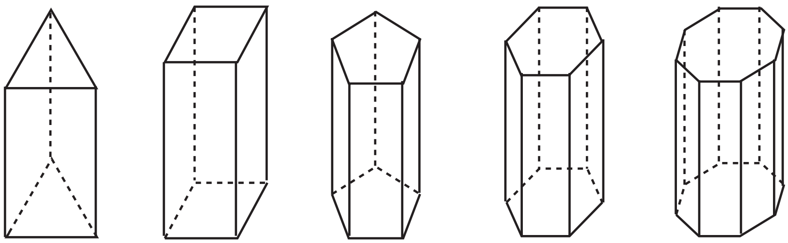
شکل ۱۹

۵. اگر طول یال جانبی یک منشور قائم h و محیط قاعده‌ی آن p[1] باشد برای محاسبه مساحت جانبی منشور چه فرمولی پیشنهاد می‌کنید؟

۶. اگر طول، عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل یعنی یک منشور چهارضلعی قائم a، b و c باشند، به کمک نتیجه‌ی سؤال ۵، فرمولی برای پیدا کردن مساحت جانبی مکعب مستطیل به‌دست آورید.

۷. مساحت کل مکعب مستطیل سؤال ۶، برحسب a، b و c چقدر است؟

یک دسته از منشورهای جالب آن‌هایی هستند که قاعده‌ی آن‌ها چندضلعی منتظم است (شکل ۲۰).



شکل ۲۰

هرچه تعداد ضلع‌های چند ضلعی منتظم بیشتر می‌شود، قاعده‌ی منشور به دایره نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد. اگر تعداد ضلع‌های چند ضلعی خیلی زیاد شود، هرکدام از وجه‌ها باریک و باریک‌تر می‌گردند تا تقریباً شبیه به یک خط می‌شوند و قاعده‌های منشور بیشتر و بیشتر شبیه دایره می‌شوند. درنتیجه منشور حاصل به یک شکل فضایی که قاعده‌ی آن دایره است تبدیل می‌شود. این شکل فضایی را **استوانه** می‌نامند.

شکل ۲۱

۱ــ Premeter محیط

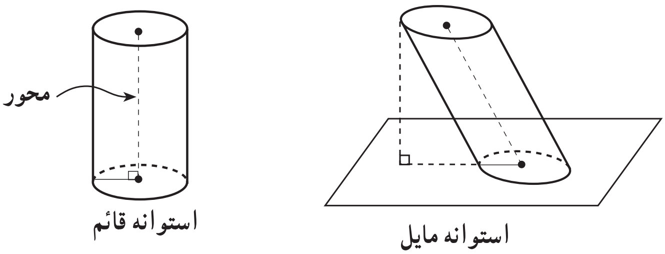
بسیاری از وسایلی که در زندگی روزانه با آن‌ها سر و کار داریم، استوانه‌ای‌شکل هستند. بعضی از لیوان‌های آب‌خوری، پیستون موتور اتومبیل‌ها و لوله‌های آب همگی استوانه‌اند.

شکل ۲۲

آیا شما نیز می‌توانید چند شیء استوانه‌ای شکل را نام ببرید؟

استوانه[۱] شکلی فضایی شبیه منشور است که قاعده‌های آن به جای چند ضلعی، دو دایره‌ی همنهشت هستند.

اگر **محور استوانه** یعنی، پاره‌خطی که مرکزهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند، بر قاعده عمود باشد، استوانه را قائم و در غیر این صورت آن‌را مایل می‌نامند (شکل ۲۳).



شکل ۲۳

توجه: در استوانه قائم، محور استوانه همان ارتفاع استوانه است.

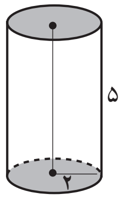
همانند منشور، مساحت رویه‌ای (سطحی[۲]) که اطراف استوانه را تشکیل می‌دهد، مساحت جانبی و مجموع مساحت جانبی و مساحت‌های دو قاعده مساحت کل نامیده می‌شود.

۱ــ عمداً از آوردن تعریف دقیق ریاضی پرهیز کرده‌ایم.

۲ــ Surface (سطح ــ رویه)

فعالیت ۴ــ۴

طول محور یعنی طول ارتفاع استوانه قائم شکل ۲۴ برابر ۵ سانتی‌متر و شعاع قاعده‌ی آن ۲ سانتی‌متر است. قاعده‌های این استوانه را بردارید و از کنار، آن‌را به موازات محور برش داده و باز کنید، یک مستطیل به‌دست می‌آید.

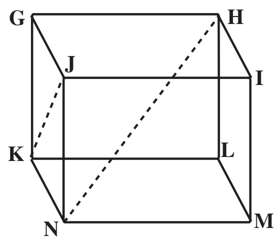


شکل ۲۴

۱. طول و عرض مستطیل حاصل چقدر است؟
۲. مساحت مستطیل را به‌دست آورید.
۳. مساحت این مستطیل چه رابطه‌ای با مساحت جانبی استوانه دارد؟
۴. با توجه به پاسخ سؤال ۳، مساحت جانبی استوانه چیست؟
۵. به همین روش، مساحت جانبی یک استوانه با ارتفاع h و شعاع قاعده‌ی r را به‌دست آورید.
۶. مساحت هریک از دایره‌های استوانه‌ی شکل ۲۴ چقدر است؟
۷. مساحت کل استوانه را حساب کنید.
۸. به کمک پاسخ سؤال‌های ۶ و ۷، مساحت کل استوانه‌ی سؤال ۵ را محاسبه کنید.

مسائل

۱. طول هر یال مکعب شکل زیر ۶ سانتی‌متر است.



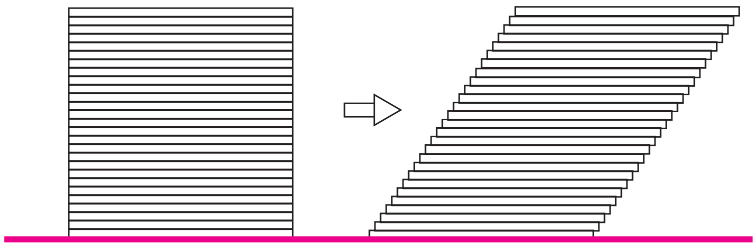
الف) طول JK یعنی قطر وجه GJNK چقدر است؟
ب) طول قطر HN چقدر است؟
۲. طول قطر وجه یک مکعب ۱۰ سانتی‌متر است. مساحت کل آن‌را حساب کنید.
۳. اگر قاعده‌ی یک منشور قائم، مثلث متساوی الاضلاعی به‌طول ضلع ۸ سانتی‌متر و ارتفاع منشور ۱۲ سانتی‌متر باشد، مساحت جانبی و مساحت کل این منشور را پیدا کنید.

۴. طول ضلع قاعده‌ی یک منشور قائم شش‌ضلعی منتظم ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع منشور ۱۸ سانتی‌متر است. مساحت جانبی و مساحت کل آن‌را پیدا کنید.

۵. چرا ارتفاع یک منشور مایل کوتاهتر از طول یال جانبی آن است؟

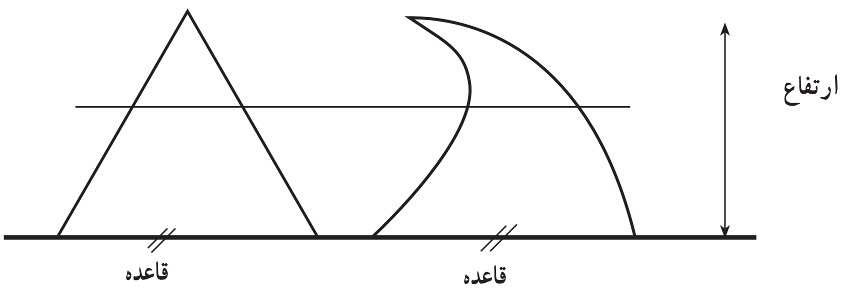
۴ــ ۴ــ اصل کاوالیری، حجم منشور و استوانه

یک دسته کارت هم‌اندازه را روی یکدیگر قرار دهید و از پهلو به آن نگاه کنید. یک سطح مستطیل شکل ایجاد شده است. اگر این دسته کارت را به‌آرامی فشار دهید و مجدداً از پهلو به آن نگاه کنید، یک متوازی‌الاضلاع دیده می‌شود. این متوازی‌الاضلاع و مستطیل دارای قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر هستند درنتیجه مساحت آن‌ها مساوی است. قاعده‌های متوازی‌الاضلاع و مستطیل شکل ۲۵ بر روی یک خط قرار دارند. هر خطی که به موازات قاعده این دو شکل را قطع کند، در آن‌ها طول‌های مساوی ایجاد می‌کند.



شکل ۲۵

دو شکل زیر دارای قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر هستند و هر خطی موازی با قاعده‌ها، در دو شکل قطعه‌هایی با طول‌های مساوی به وجود می‌آورد.



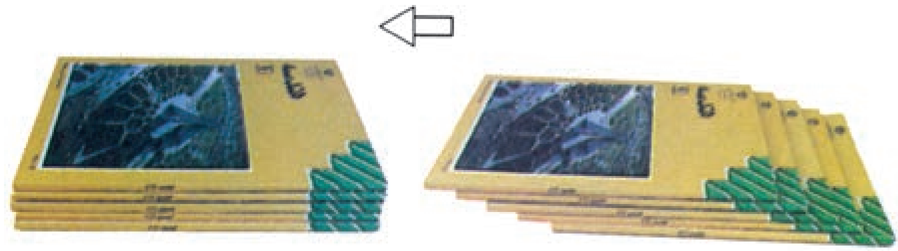
شکل ۲۶

طبق اصل کاوالیری[1]، چنین دو شکلی دارای مساحت‌های برابر هستند.

اصل کاوالیری درباره‌ی مساحت‌ها

فرض کنید قاعده‌های دو شکل بر روی یک خط قرار گرفته باشند. اگر هر خطی موازی قاعده‌های دو شکل در آن‌ها قطعه‌هایی با طول‌های مساوی ایجاد کند، مساحت‌های آن دو شکل برابر است.

کتاب‌های هندسه‌ی خود و دوستانتان را طوری روی هم قرار دهید که مانند شکل ۲۷ یک منشور مستطیلی مایل ایجاد شود. کتاب‌ها را از کنار به‌آرامی با دست فشار دهید تا به‌صورت قائم روی یکدیگر قرار گیرند. با این کار، مساحت کتاب‌ها و ارتفاع منشور تغییر نمی‌کند ولی یک منشور مستطیلی قائم به‌دست می‌آید.



شکل ۲۷

اگر حجم منشور مایل را برابر مجموع حجم‌های این کتابهای هم‌اندازه بگیریم، نباید با فشاردادن کتاب‌ها و تبدیل منشور مایل به قائم، حجم آن تغییر کند. همچنین مساحت هرکدام از کتاب‌های فوق یعنی S[2] و ارتفاع منشور یعنی h نیز با فشاردادن تغییر نمی‌کنند. بنابراین،

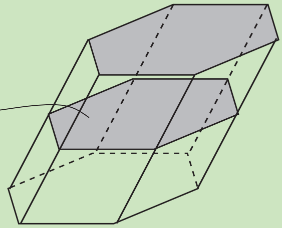
$$\text{حجم منشور مستطیلی مایل} = S\times h$$

$$V = S\times h$$ [3]

از تساوی حجم دو منشور قائم و مایل، به بیان اصل کاوالیری برای حجم‌های شکل‌های فضایی مانند آنچه برای مساحت‌های دو شکل مسطّح بیان کردیم می‌پردازیم. امّا قبل از آن، نیازمند تعریف زیر هستیم:

۱ـ Cavalieri   ۲ـ Surface   ۳ـ Volume

سطح مقطع یک شکل فضایی، شکلی است که از برخورد آن با یک صفحه حاصل می‌شود.



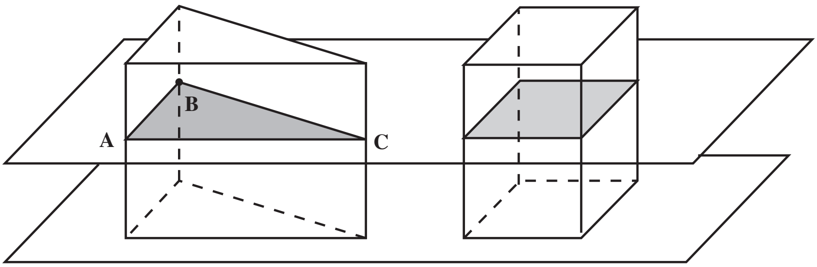
اگر قاعده‌های دو منشور در یک صفحه قرار گرفته و مساحت سطح مقطع‌هایی که از برخورد هر صفحه‌ای موازی با این صفحه حاصل می‌شوند برابر باشند، آنگاه نتیجه می‌گیریم که حجم‌های این دو منشور برابر هستند. این مطلب را نخستین بار، کاوالیری، ریاضیدان ایتالیایی قرن هفدهم، به‌صورت کلی‌تری بیان کرد.

اصل کاوالیری درباره‌ی حجم‌ها

دو شکل فضایی و صفحه‌ای که قاعده‌های دو شکل در آن قرار گرفته باشند را در نظر بگیرید. اگر هر صفحه‌ای موازی با این صفحه که یکی از این دو شکل را قطع می‌کند، دیگری را نیز قطع کند و سطح مقطع‌های حاصل دارای مساحت‌های برابر باشند، آنگاه حجم‌های این دو شکل فضایی برابر هستند.

طبق اصل کاوالیری، اگر مساحت قاعده‌های دو منشورِ هم ارتفاع برابر باشند، حجم‌های آن‌ها برابر خواهند بود.

حجم منشور برابر با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است.

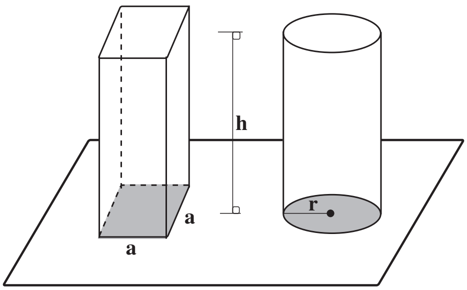


مثال ۵: در شکل صفحه‌ی قبل مساحت‌های مربع و مثلث که قاعده‌های دو منشور را تشکیل می‌دهند، همچنین ارتفاع دو منشور برابر هستند. هر صفحه‌ای موازی با صفحه‌ی P یک منشور را در مربع و منشور دیگر را در یک مثلث قطع می‌کند که باز دارای مساحت‌های برابر هستند. پس بنابر اصل کاوالیری، حجم‌های این دو منشور برابرند. یکی از این منشورها یک مکعب مستطیل است و حجم آن برابر با حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع است. پس حجم منشور دیگر نیز برابر با حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن می‌باشد. درنتیجه، اگر **h** ارتفاع و **S** مساحت قاعده‌ی هر منشوری باشد، حجم آن از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید :

$$V = S \times h$$

فعالیت ۴ــ۵

در شکل ۲۸ استوانه‌ی قائمی که شعاع دایره‌ی قاعده‌ی آن r و ارتفاع آن h است و یک منشور چهارضلعی قائم به همان ارتفاع رسم شده است .



شکل ۲۸

۱. اگر مساحت قاعده‌های استوانه و منشور شکل ۲۸ برابر باشند، اندازه‌ی طول ضلع مربع یعنی a را بر حسب r به‌دست آورید.

۲. با مقداری که برای a در قسمت ۱ به‌دست آورده‌اید، حجم منشور را حساب کنید.

۳. با توجّه به اصل کاوالیری، حجم استوانه‌ی قائم را به‌دست آورید.

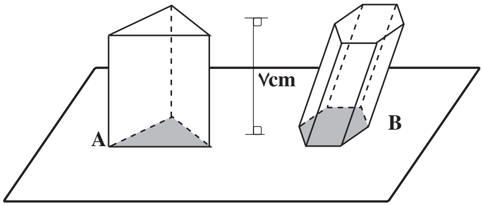
۴. آیا حجم استوانه‌ی مایل نیز مانند حجم استوانه‌ی قائم به‌دست می‌آید؟ توضیح دهید.

مسائل

۱. با استفاده از اصل کاوالیری نشان دهید دو مثلث با قاعده‌ها و ارتفاع‌های برابر، مساحت برابر دارند (از قانون مساحت مثلث استفاده نکنید).

(**راهنمایی:** از تشابه مثلث‌ها استفاده کنید.)

۲. در شکل زیر، قاعده‌های یک منشور سه‌ضلعی قائم (A) و یک منشور شش‌ضلعی مایل (B) در یک صفحه قرار گرفته‌اند. ارتفاع هر دو منشور ۷ سانتی‌متر است.

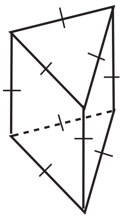


الف) اگر مساحت قاعده‌ی منشور A، ۱۰ سانتی‌متر مربع باشد، حجم آن چقدر است؟

فرض کنید هر صفحه‌ای موازی با قاعده‌های این دو منشور، سطح مقطع‌هایی با مساحت برابر ایجاد کند:

ب) حجم منشور B را به‌دست آورید.

۳. طول هر یال منشور قائم شکل روبه‌رو ۴ سانتی‌متر است.



الف) مساحت هرکدام از وجه‌ها و قاعده‌ها را حساب کنید.

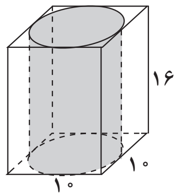
ب) ارتفاع منشور چقدر است؟

پ) حجم منشور را به‌دست آورید.

۴. دو استوانه‌ی قائم یکی به شعاع قاعده‌ی ۲ سانتی‌متر و ارتفاع ۱ سانتی‌متر و دیگری به شعاع قاعده‌ی ۱ سانتی‌متر و ارتفاع ۲ سانتی‌متر در نظر بگیرید.

الف) مساحت‌های جانبی این دو استوانه را محاسبه و با هم مقایسه کنید.

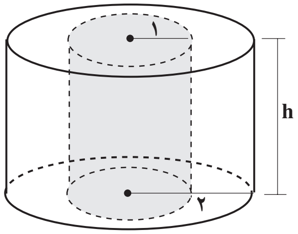
ب) حجم‌های این دو استوانه را پیدا کرده با هم مقایسه کنید.



۵. در شکل روبه‌رو طول ضلع مکعب مستطیل ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع آن ۱۶ سانتی‌متر است.

الف) مساحت کل و حجم استوانه را به‌دست آورید.

ب) حجم ناحیه‌ی بین استوانه و مکعب مستطیل چقدر است؟

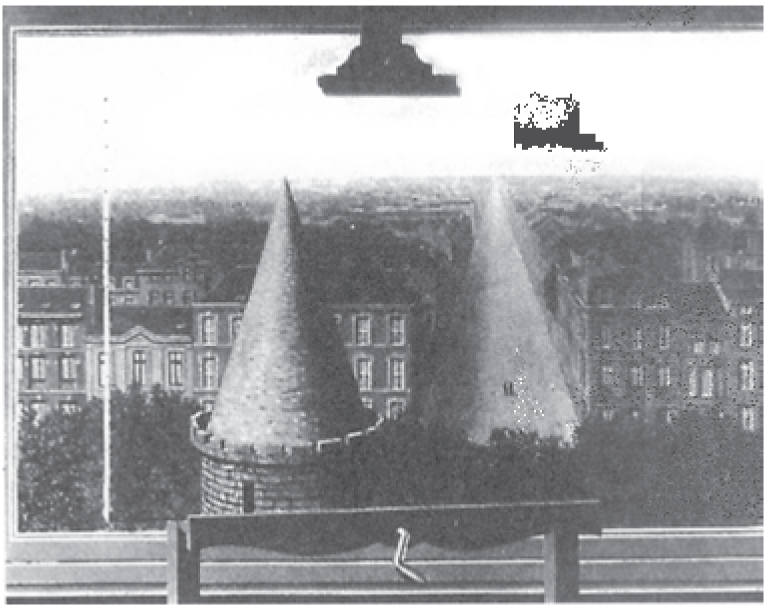


۶. دو استوانه‌ی قائم که مرکز قاعده‌های آن‌ها یکی است، را در نظر بگیرید. با توجه به اندازه‌های روی شکل :

الف) نسبت مساحت جانبی استوانه‌ی بزرگتر به مساحت‌جانبی استوانه‌ی کوچکتر را بیابید.

ب) نسبت حجم استوانه‌ی بزرگتر به حجم استوانه‌ی کوچکتر چقدر است؟

پ) حجم فضای بین این دو استوانه را پیدا کنید.

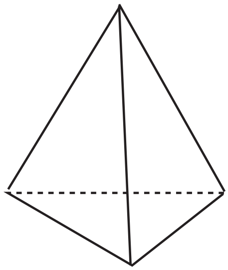


درباره‌ی اثر معروف رنه ماگریت با عنوان گردش‌گاه اقلیدوسی فکر کنید، در آن چه می‌بینید؟

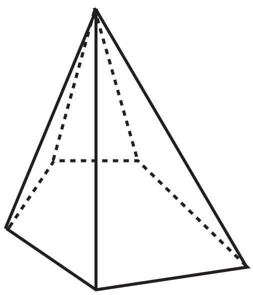
۴ــ۵ ــ هرم و مخروط

یکی از بزرگترین شکل‌های فضایی ساخت دست بشر، اهرام مصر است که بیش از چهارهزار سال از عُمر آن می‌گذرد و تنها مورد از «عجایب هفتگانه» است که هنوز پا برجا می‌باشد. هرکدام از این هرمِ‌ها، ارتفاعی به اندازه‌ی یک ساختمان چهل طبقه دارد و بر روی هم با بیش از دو میلیون قطعه سنگ که وزن هرکدام بین ۲ تا ۱۵۰ تُن است ساخته شده‌اند.

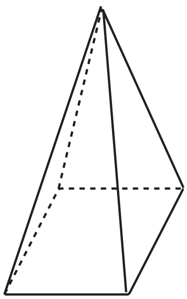
اگرچه مصریان باستان هرم‌هایی ساختند که قاعده‌ی آن‌ها به شکل مربع بود، ولی چندضلعی‌های دیگر نیز می‌توانند قاعده‌ی یک هرم باشند.



هرم مثلثی

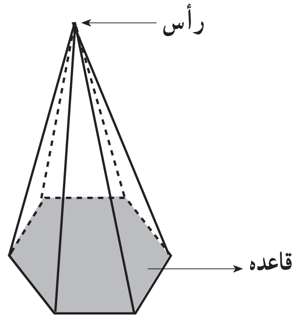


هرم پنج‌ضلعی



هرم مربعی

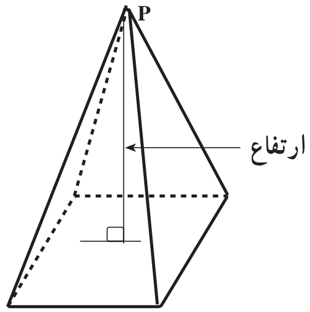
هرم یک چندوجهی است که همه‌ی وجه‌های آن به جز یکی در یک رأس مشترک‌اند.



شکل ۲۹

وجهی از هرم که رأس هرم در آن قرار ندارد قاعده‌ی هرم و وجه‌های دیگر وجه‌های جانبی نامیده می‌شوند. وجه‌های جانبی همواره به شکل مثلث هستند. (چرا؟)

ارتفاع هرم پاره‌خطی است که از **رأس** هرم بر قاعده‌ی آن عمود می‌شود.



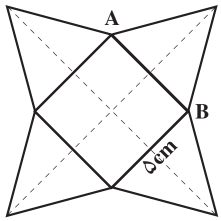
قاعده‌های هرم‌های معروف مصر، چهارضلعی‌های منتظم (مربعی شکل) هستند.

اگر قاعده‌ی یک هرم، چند ضلعی منتظم بوده و پای ارتفاع آن بر مرکز قاعده منطبق باشد، هرم را **منتظم** می‌نامیم.

توجه: مرکز چند ضلعی منتظم، مرکز دایره‌ای است که از رأس‌های این چند ضلعی می‌گذرد.

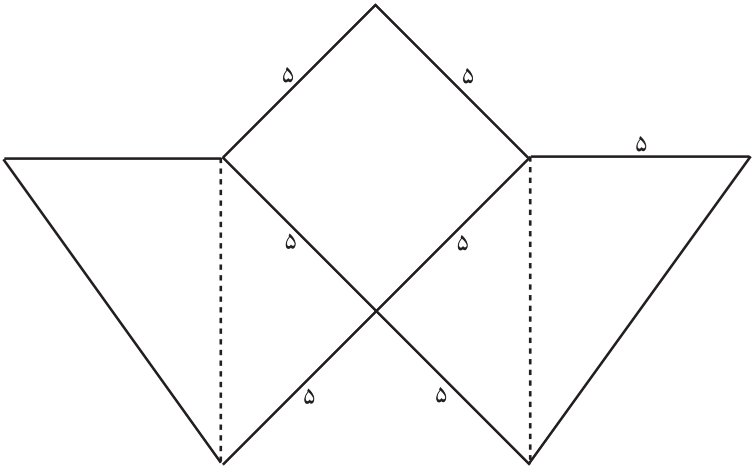
فعالیت ۴ــ۶

۱. ارتفاع مثلث‌ها در شکل ۳۰ چقدر باشد تا هرِم به‌دست آمده ارتفاعی برابر ۲/۵ سانتی‌متر داشته باشد؟

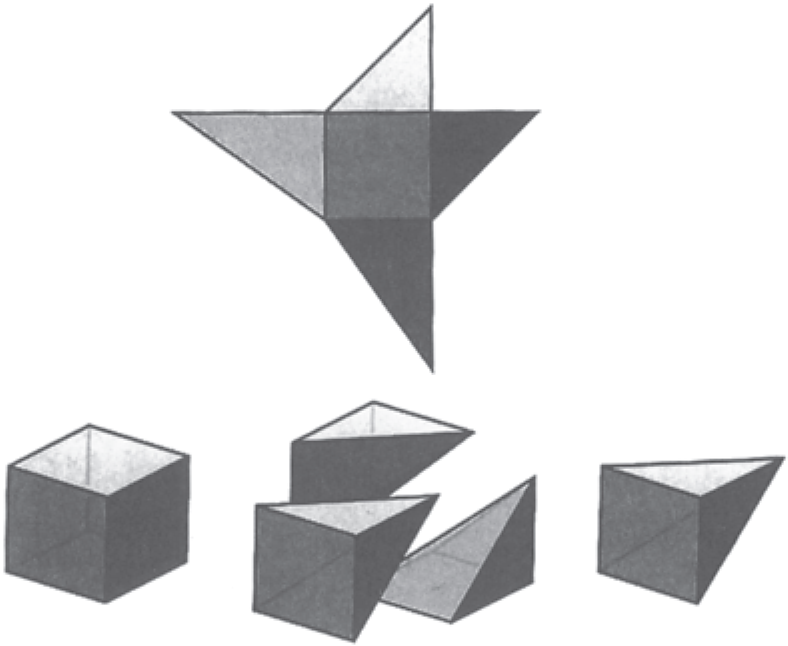


شکل ۳۰

۲. طول بزرگترین ضلع در الگوی زیر چند واحد است؟

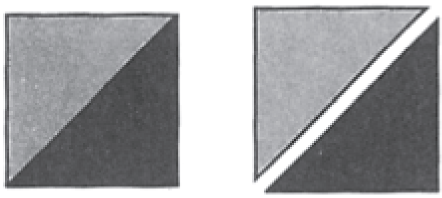


سه قطعه مقوا مطابق الگوی فوق برش دهید و سه هرم بسازید. هرم‌ها را طوری کنار هم قرار دهید تا یک مکعب به‌دست آید. چه نتیجه‌ای درباره‌ی حجم مکعب و هرم‌ها می‌گیرید؟ حجم هرم، برحسب حجم مکعب چقدر است؟



شکل ۳۱

در فعالیت فوق، سه هرم را کنار هم گذاشتید و یک مکعب که خود یک منشور است ساختید. این کار مانند آن است که یک مکعب را به سه هرم با حجم‌های مساوی تجزیه[1] کنیم. قبلاً نیز برای محاسبه‌ی مساحت مثلث، یک متوازی‌الاضلاع یا مستطیل را به دو مثلث هم مساحت تجزیه کردیم.



شکل ۳۲

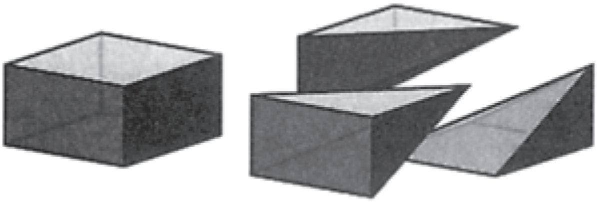
با استفاده از ایده‌ی تجزیه‌ی شکل‌ها، می‌توان حجم هرم را در حالت کلی محاسبه کرد. با پذیرفتن این موضوع که دو هرم با سطح قاعده‌ها و ارتفاع‌های مساوی دارای حجم‌های یکسان هستند[2]، کافی است که حجم یک هرم با قاعده‌ی مربع را پیدا کنیم زیرا برای هر هرم دیگری می‌توان هرمی با قاعده‌ی مربع ساخت که مساحت قاعده و ارتفاع آن با مساحت قاعده و ارتفاع آن هرم برابر باشد[3]. برای این منظور مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌ی آن همان قاعده‌ی هرم فوق و ارتفاع آن

۱ــ Decomposition

۲ــ در این کتاب، این مطلب را بدون اثبات می‌پذیریم.

۳ــ اگر مساحت قاعده‌ی هرم اولیه S باشد کافی است هرمی با قاعده‌ی مربع به طول ضلع $\sqrt{S}$ بسازیم.

نیز با ارتفاع هرم برابر باشد. این مکعب مستطیل را به سه هرم تجزیه می‌کنیم (شکل ۳۳).



شکل ۳۳

این سه هرم همنهشت نیستند ولی دارای حجم‌های مساوی هستند.[۱] چون حجم مکعب مستطیل مساوی مجموع حجم این سه هرم است. بنابراین،

$$\text{حجم هرم} = \frac{۱}{۳}\,(\text{حجم مکعب مستطیل})$$

$$= \frac{۱}{۳}(S \times h)$$

که S مساحت قاعده‌ی هرم و h ارتفاع آن است.

حجم هرمی به مساحت قاعده‌ی S و ارتفاع h برابر است با

$$V = \frac{۱}{۳} S \times h$$

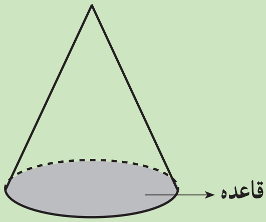
همان‌طور که با زیاد کردن تعداد ضلع‌های قاعده‌ی یک منشور که چندضلعی منتظم بود شکل قاعده به دایره نزدیک و نزدیک‌تر شد و به این ترتیب استوانه را به‌دست آوردیم، با انجام همین عمل در مورد هرمهای منتظم نیز یک شکل فضایی به نام **مخروط** به‌دست می‌آید. اگر نگاهی به اطراف خود بیندازید، اشیای مخروطی شکل بسیاری می‌بینید.

کلاه مخروطی

بستنی قیفی

۱ــ اثبات این مطلب خارج از برنامه‌ی این درس است.

مخروط[1] شکلی فضایی شبیه هرم است که قاعده‌ی آن به جای چند ضلعی، دایره است.



رأس، قاعده و ارتفاع یک مخروط مانند هرم تعریف می‌شوند. پاره‌خطی که رأس مخروط را به مرکز دایره‌ی قاعده وصل می‌کند، محور مخروط نام دارد. اگر محور بر قاعده عمود باشد، مخروط، **قائم** و در غیر این صورت **مایل** نامیده می‌شود (شکل ۳۴).

شکل ۳۴

حجم یک مخروط را می‌توان با حجم یک هرم با قاعده‌ی چند ضلعی منتظم تقریب زد :

$$\text{حجم مخروط}^{۲} \approx \frac{۱}{۳}\,(\text{مساحت قاعده})\ \text{ارتفاع}$$

هر اندازه تعداد ضلع‌های این چند ضلعی بیشتر گردد، مساحت قاعده‌ی هرم به مساحت قاعده‌ی مخروط نزدیکتر می‌شود و درنتیجه، حجم هرم به حجم مخروط نزدیکتر می‌گردد. بنابراین،

حجم یک مخروط با شعاع قاعده‌ی r و ارتفاع h برابر است با

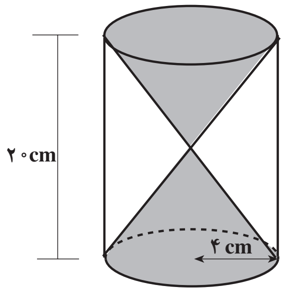
$$V = \frac{۱}{۳} \times \pi r^{۲} \times h$$

۱ــ عمداً از آوردن تعریف دقیق ریاضی پرهیز کرده‌ایم.

۲ــ علامت ≈ را بخوانید : تقریباً برابر است با

مسائل

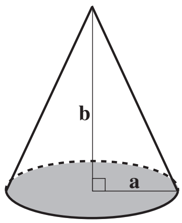
۱. ساعت شنی که مردمان باستان برای اندازه‌گیری زمان از آن استفاده می‌کردند، از دو مخروط یکسان که درون یک استوانه‌ی قائم قرار داشتند ساخته شده بود. فرض کنید ارتفاع استوانه ۲۰ سانتی‌متر و شعاع قاعده‌ی آن ۴ سانتی‌متر است.



الف) حجم ناحیه‌ی سایه زده شده در شکل را پیدا کنید.

ب) حجم ناحیه‌ی محصور بین دو مخروط و استوانه را محاسبه کنید.

۲. شعاع قاعده‌ی یک مخروط a و ارتفاع آن b است. برای هرکدام از موارد زیر عبارتی برحسب a و b پیدا کنید :



الف) حجم مخروط ؛

ب) حجم مخروطی با همین شعاع قاعده اما ارتفاع دو برابر ؛

پ) حجم مخروطی با همین ارتفاع اما شعاع قاعده‌ی دو برابر ؛

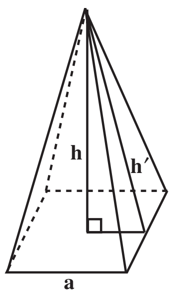
ت) حجم مخروطی با ارتفاع دو برابر و شعاع قاعده‌ی دو برابر.

۳. حجم مخروط چه تغییری می‌کند اگر :

الف) ارتفاع آن دو برابر شود، اما شعاع قاعده تغییر نکند ؛

ب) شعاع قاعده دو برابر شود، ولی ارتفاع تغییر نکند.

۴. حجم هرم مربعی منتظم در شکل مقابل را با توجه به داده‌های زیر به‌دست آورید :



الف) $a = ۱۴cm$, $h' = ۲۵cm$ ؛

ب) $h = ۶cm$, $h' = ۶/۵cm$ ؛

پ) $a = ۱cm$, $h = ۱/۳cm$.

۵. یک چهاروجهی را که همه‌ی وجه‌های آن مثلث متساوی الاضلاع به طول ضلع a می‌باشد درنظر بگیرید، حجم آن‌را بر حسب a به‌دست آورید. اگر $a = ۴/۵cm$ حجم چهاروجهی چقدر می‌شود؟ (در این چهاروجهی ارتفاع از محل تقاطع نیمسازهای وجه مقابل می‌گذرد.)

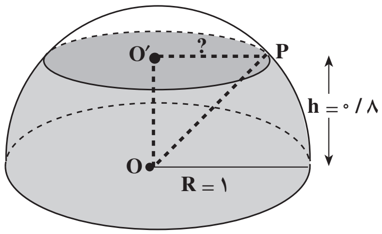
۴ــ۶ــ کُرِه

تجربه‌ی سال‌های کودکی شما که **توپ سرخ** و **سفید** و **آبی** را محکم به زمین می‌زدید تا به هوا رفتنش را با شادی تماشا کنید، فرصت خوبی برای آشنا شدن با کُره بود. توپ شما **میانش خالی بود** و چون سطح آن کاملاً گرد بود، روی زمین آرام و قرار نداشت و می‌غلتید و شما را به دنبال خودش می‌کشانید! اگر به اطراف خود نگاه کنید، جسم‌های کروی (کره‌ای شکل) زیادی را می‌بینید. توپ بسکتبال و توپ تنیس روی میز به شکل کره هستند و توپ فوتبال خیلی شبیه کره است.

کره مجموعه‌ی نقاطی از فضا است که از یک نقطه‌ی ثابت به نام **مرکز** به یک فاصله باشند. این فاصله‌ی ثابت **شعاع کره** نامیده می‌شود.

فعالیت ۴ــ۷

۱. یک کیک به شکل نیمکره را درنظر بگیرید که شعاع‌آن یک واحد باشد. کیک را از قسمت مسطّح آن روی یک سینی بگذارید (شکل ۳۵).



شکل ۳۵

اگر کیک را موازی با سینی و در ارتفاع‌های متفاوت بِبُرید، قطعه‌هایی با سطح مقطع‌های متفاوت به‌دست می‌آورید. برای مثال، سطح مقطع برشی از کیک را در ارتفاع $h=۰/۸$ به‌دست می‌آوریم. برای این کار، با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس، شعاع سطح مقطع را از مثلث قائم‌الزاویه‌ی $O'PO$ محاسبه می‌کنیم :

$$O'P^۲=OP^۲-OO'^۲$$

چون $OP=$ شعاع نیمکره $=۱$ و $OO'=۰/۸$

پس

$$O'P^۲=۱^۲-(۰/۸)^۲$$
$$=۱-۰/۶۴$$
$$=۰/۳۶$$

و چون شعاع سطح مقطع همان $O'P$ است، پس مساحت سطح مقطع (A) برابر است با :

$$A=\pi\times O'P^۲$$
$$=۳/۱۴\times۰/۳۶$$

درنتیجه :

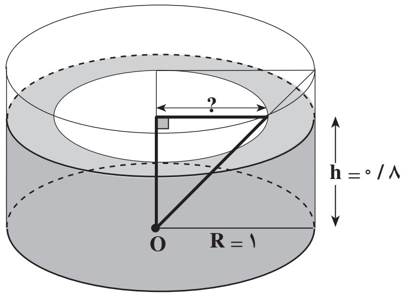
$$A=۱/۱۳۰۴$$

الف) مساحت بُرشی از کیک (سطح مقطع نیمکره) را در ارتفاع $h=۰/۶$ به‌دست آورید.

ب) شعاع برشی از کیک را در ارتفاع $h=۰/۴$ پیدا کنید.

پ) فرمولی برای پیدا کردن مساحت برشی از کیک (A) برحسب h به‌دست آورید.

۲ . اکنون کیکی به شکل استوانه که یک قسمت مخروطی شکل از داخل آن برداشته شده است درنظر بگیرید، به طوری که سطح قاعده و ارتفاع این کیک برابر سطح قاعده و ارتفاع کیک نیمکره‌ای شکل باشد.



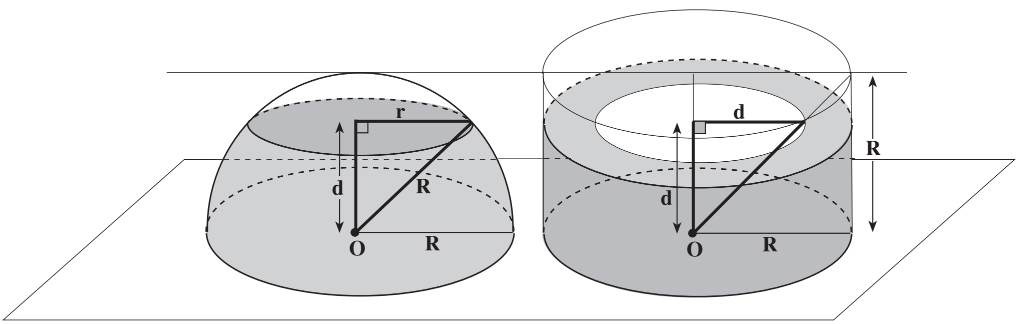
شکل ۳۶

۳ . قسمت‌های (الف) تا (پ) را برای کیک فوق انجام دهید.

۴ . با مقایسه‌ی مساحت برش‌های مختلف (سطح‌مقطع‌ها) در دو کیک، چه نظری در مورد حجم نیمکره دارید؟ اصل کاوالیری را به یاد بیاورید!

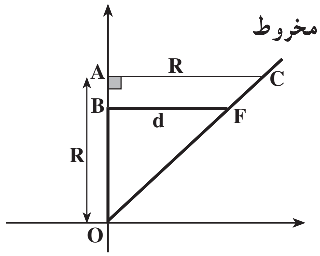
می‌خواهیم با استفاده از اصل کاوالیری، حجم نیمکره را با حجم استوانه‌ای که یک مخروط از آن خارج شده است مقایسه کنیم.

برای این کار، یک نیمکره با شعاع R و یک استوانه با شعاع R و ارتفاع R در نظر بگیرید که مخروطی با همان ارتفاع و همان شعاع از داخل آن برداشته شده است. این دو جسم فضایی را برروی یک صفحه قرار می‌دهیم و آن‌ها را در ارتفاع d، (d کوتاهتر از R است) به وسیله‌ی یک صفحه‌ی موازی با این صفحه قطع کرده، آنگاه سطح مقطع‌های آن‌ها را با هم مقایسه می‌کنیم.



شکل ۳۷

سطح مقطع قائم شکل ۳۷ را دوباره رسم می‌کنیم.



با توجه به این که شعاع قاعده و ارتفاع استوانه و مخروط برابر هستند، مثلث OAC متساوی‌الساقین است و چون زاویه‌ی A قائمه است، زاویه‌های C و O هر دو 45° هستند. هم‌چنین در مثلث OBF نیز $\hat{O} = 45^\circ$ و $\hat{B} = 90^\circ$، درنتیجه $\hat{F} = 45^\circ$. پس مثلث OBF متساوی‌الساقین است. یعنی،

$$BF = OB$$

از طرفی $OB = d$. بنابراین:

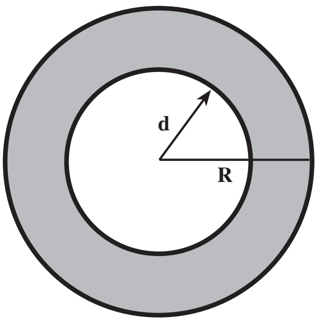
$$BF = d$$

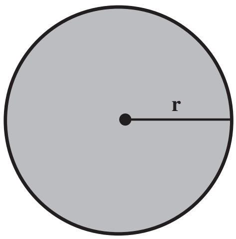
حال اگر سطح مقطع شکل ۳۷ را در نظر بگیرید، یک حلقه به‌دست می‌آید که شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر، R و شعاع دایره‌ی کوچکتر d است.

و

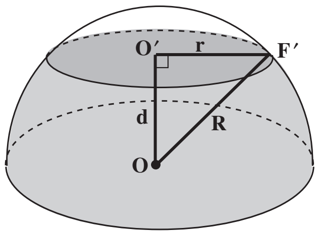
(۱) مساحت قسمت هاشورخورده $= \pi R^2 - \pi d^2$

همچنین سطح مقطع نیمکره یک قرص است.





برای پیدا کردن شعاع این قرص، به برش قائم آن نگاه می‌کنیم.



چون مثلث $OO'F'$ قائم‌الزاویه است (دلیل آن را توضیح دهید).

پس بنابر قضیه‌ی فیثاغورس

$$r^۲ = R^۲ - d^۲$$

$$\text{مساحت قرص} = \pi r^۲ = \pi(R^۲ - d^۲) = \pi R^۲ - \pi d^۲ \qquad (۲)$$

چون (۱) و (۲) یعنی مساحت سطح مقطع‌های شکل ۳۷ با هم برابرند درنتیجه طبق اصل کاوالیری، حجم‌های آن‌ها نیز با هم مساوی هستند یعنی حجم نیمکره با حجم استوانه‌ای که یک مخروط هم قاعده و هم ارتفاع از آن خارج شده باشد برابر است. پس

$$\text{حجم نیمکره} = \text{حجم استوانه} - \text{حجم مخروط} \qquad (۳)$$

چون شعاع استوانه R و ارتفاع آن نیز R است درنتیجه :

$$\text{حجم استوانه} = \text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \pi R^۲ \times R = \pi R^۳ \qquad (۴)$$

همچنین حجم مخروطی با شعاع قاعده‌ی R و ارتفاع R برابر است با :

$$\text{حجم مخروط} = \frac{۱}{۳}\,\text{مساحت قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{۱}{۳}\pi R^۲ \times R = \frac{۱}{۳}\pi R^۳ \qquad (۵)$$

از جایگزینی (۴) و (۵) در (۳)، حجم نیمکره به‌دست می‌آید :

$$\text{حجم نیمکره} = \pi R^{۳} - \frac{۱}{۳}\pi R^{۳}$$

$$\boxed{\text{حجم نیمکره} = \frac{۲}{۳}\pi R^{۳}}$$

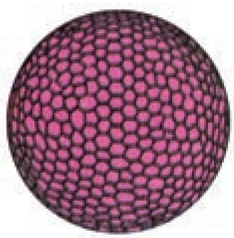
حجم کره دو برابر حجم نیمکره است، درنتیجه :

حجم کره‌ای به شعاع R برابر است با :

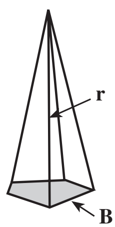
$$\text{حجم کره} = ۲\times\frac{۲}{۳}\pi R^{۳} = \frac{۴}{۳}\pi R^{۳}$$

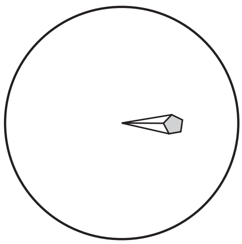
پیداکردن سطح جانبی کره با استفاده از حجم کره

حجم تقریبی کره را می‌توانیم به طریق دیگری به‌دست آوریم. برای این کار، کره را به تعداد زیادی شبه هرم تقسیم می‌کنیم، یعنی تصور کنید که سطح کره با تعداد بسیاری چندضلعی‌های خیلی کوچک پوشانده شده است. البته باید توجّه داشته باشیم که این چندضلعی‌ها واقعی نیستند زیرا روی کره هیچ پاره‌خط راستی نمی‌تواند قرار بگیرد. هرکدام از این شبه چندضلعی‌ها قسمت‌هایی از سطح کره هستند، پس مسطّح نمی‌باشند.



تصوّرکنید که نقاط روی ضلع‌های این شبه چندضلعی‌ها را به مرکز کره وصل کرده‌ایم به‌طوری که این شبه چندضلعی‌ها، قاعده‌های تعداد بسیاری شبه هرم با رأس مشترک یعنی مرکز کره باشند. در نتیجه، ارتفاع این شبه هرم‌ها برابر شعاع کره یعنی R است.





اگر قاعده‌ی یکی از شبه‌هرم‌ها را S درنظر بگیریم،حجم آن تقریباً مساوی $\frac{۱}{۳}R\times S$ می‌گردد. مجموع حجم این شبه‌هرم‌ها تقریب خوبی برای حجم کره می‌باشد. اگر سطح قاعده‌ی هر شبه‌هرم را به ترتیب $S_۱$ ، $S_۲$ ، . . . ، S_n بنامیم، پس

$$\text{حجم تقریبی کره} = \text{مجموع حجم شبه‌هرم‌ها} = \frac{۱}{۳}RS_۱ + \frac{۱}{۳}RS_۲ + \ldots + \frac{۱}{۳}RS_n$$

یا

$$\text{حجم تقریبی کره} = \frac{۱}{۳}R(S_۱ + S_۲ + \ldots + S_n)$$

از طرفی، مجموع مساحت‌های قاعده‌های شبه‌هرم‌ها برابر مساحت سطح کره است که آن‌را با S نمایش می‌دهیم. درنتیجه :

$$\boxed{\text{حجم تقریبی کره} = \frac{۱}{۳}RS}$$

باید توجّه داشته باشیم که هرچقدر تعداد شبه‌هرم‌ها بیشتر و بیشتر شود، حجم تقریبی کره به مقدار واقعی آن یعنی $\frac{۴}{۳}\pi R^۳$ نزدیک و نزدیک‌تر می‌گردد. بنابراین[۱]،

$$\frac{۱}{۳}RS = \frac{۴}{۳}\pi R^۳$$

و از آنجا

$$S = ۴\pi R^۲$$

یعنی

$$\text{مساحت کره} = ۴\pi R^۲$$

۱ــ تنها قسمت نادقیق این استدلال، مساوی قراردادن مقدار حجم تقریبی با حجم واقعی بود. برای دقیق‌نمودن این استدلال، نیاز به ابزاری داریم که بالاتر از سطح این درس است.

مسائل

۱. دو کره به ترتیب دارای شعاع‌های ۱ و ۲ سانتی‌متر هستند.

الف) مساحت هرکدام از آن‌ها را پیدا کنید.

ب) حجم هر یک را به‌دست آورید.

پ) اگر شعاع یک کره دو برابر شود، مساحت آن چه تغییری می‌کند؟

ت) اگر شعاع یک کره دو برابر شود، حجم آن چه تغییری می‌کند؟

۲. مشابه سه‌بعدی یک نیمدایره، نیمکره است. چون محیط یک دایره به شعاع r، برابر است با $۲\pi r$، طول یک نیمدایره $\frac{۱}{۲}(۲\pi r) = \pi r$ است. فرض کنید شعاع نیمکره r باشد. برای هرکدام از موارد زیر فرمولی به‌دست آورید :

الف) حجم نیمکره ؛

ب) مساحت رویه‌ی نیمکره ؛

پ) مساحت کل نیمکره، یعنی مجموع مساحت‌های رویه‌ی نیمکره و سطح دایره‌ای مسطّح آن.

۳. زمین تقریباً شکل یک کره است. شعاع زمین ۶۴۰۰ کیلومتر است.

الف) مساحت سطح زمین را حساب کنید.

ب) حجم زمین را حساب کنید.

۴. مساحت سطح یک کره ۳۶π سانتی‌متر مربع است.

الف) شعاع این کره را به‌دست آورید.

ب) حجم کره را محاسبه کنید.

منابع

1- Dieudonné, J. (1981). The **universal domination of geometry**. ZDM, 13 (1), P 5-7.

2- Discussion Document for an ICME Study. (1994). P**erspectives on the teaching of geometry for the 21 st century**. The International Commission on Mathematical Instruction.

3- Dukowski, L. & etal. (1988). **Mathematics 8**. Houghton Mifflin Canada Limited.

4- Hoffer, A. (1981). Geometry is more than Proof. **Mathematics Teacher**. 74(1),11-26

5- Hoechsmann, K. (1991). **Lecture notes**. Mathematics Department, The University of British Columbia.Vancouver, Canada.

6- Jacobs, H. R. (1974). **Geometry** . W.H.Freeman & Company.

7- Jacobs, H. R. (1982). **Mathematics, A Human Endeavor**. 2nd ed. W. H. Freeman & Company.

8- Kalin, R.& Corbitt, M.K. (1990). **Geometry: Teachers‘ Edition**. Prentice Hall, N J.

9- Kelly, B., Alexander, B.& Atkinson, P. (1987). **Mathematics 10**. Addison - Wesley Pub. Ltd.

10- Kerr, D.R, JR. (1981). A geometry from National Assessment. **Mathematics Teacher**. 74 (1), 27-32

11- Kline, M. (1974). **Why Johnny Can‘t add: The failure of the New Math**. New york: Vintage Books.

12- Lakatos, I. (1977). **Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery**. London: Cambridge University Press.

13- Lang, S., Murrow, G. (1988). **Geometry: A High School Course**, 2nd ed. Springer - Verlag.

14- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1970). **A History of Mathematics Education in the United States and Canada**. Thirty Second year book. Author.

15- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1985). **Secondary School mathematics Curriculum: 1985 Yearbook**. Edited by C.R.Hisch. Reston, VA: Author

16- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1987). **Learning and teaching Geometry, K-12: 1987 Yearbook**. Edited by M.M. Lindquist. Reston, VA: Author

17- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). **Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics**, Reston, VA: Author.

18- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1991). **Geometry from Multiple Perspectives**: Addenda Series, Grades 9-12: Author.

19- Robitaille, D. F.(1973). Why are we teaching high school Geometry? **Vector**. 14 (4), 13 - 22.

20- Senk, S. (1989). Van Hiele levels and achievement in writing geometry proofs. **Journal of Research in Mathematics Education**. 20 (3), 309-321.

21- Steen, L. A.(ed.) (1990). **On the shoulders of Giants: New approach to numeracy**. National Academy Press, Washington D.C.

22- Stone, M. (1971). Learning and teaching axiomatic geometry. **Educational Studies in Mathematics**. 4, 91-103.

23- Welchons, A. M., Krichenberger, W. R., Pearson & H. R.(1976). **Plane Geometry** . Ginn & Company.

۲۴ــ مویز و دانز (۱۳۷۳). هندسه (مترجم : محمود دیّانی)، انتشارات فاطمی، تهران.

۲۵ ــ بختیاری، جواد. جوهره و ساختار هندسی خط نستعلیق.

فهرست