

فصل ۹

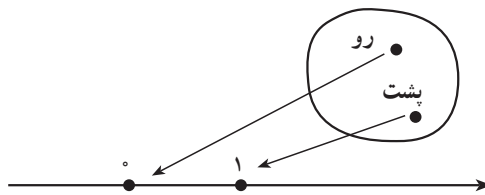
توزیع های گسسته ای احتمال

۹-۱ - متغیر تصادفی گسسته

به طوری که قبلاً گفتیم در هر آزمایش تصادفی، فضای نمونه ای را مشخص می کنیم و به رخداد هر پیشامد آن عددی بین ۰ و ۱ به عنوان احتمال نسبت می دهیم. حال می خواهیم مجموعه ای دیگری را به جای فضای نمونه ای قرار دهیم. ابتدا به مثال های زیر توجه کنید.

مثال ۱: وقتی سکه ای را می اندازیم، S دارای دو برآمد رو و پشت است. تابع X را بدین صورت تعریف می کنیم که حوزه ی تعریف (دامنه) آن مجموعه ی S با دو عضو رو و پشت و حوزه ی مقادیر (برد) آن دو عدد ۰ و ۱ از محور اعداد حقیقی باشد. به عبارت دیگر

$$\begin{cases} X(\text{رو}) = 0 \\ X(\text{پشت}) = 1 \end{cases}$$



شکل ۱

چنین تابع X را متغیر تصادفی می گوئیم که دو مقدار ۰ و ۱ را اختیار می کند. چون احتمال رخداد برآمد رو $\frac{1}{2}$ است پس $X=0$ که نمایش ساده ی $X(\text{رو})=0$ است و در واقع نمادی برای رخداد برآمد رو است، دارای همان احتمال $\frac{1}{2}$ و همین طور احتمال $X=1$ برابر $\frac{1}{2}$ است. در واقع به جای جدول

	رو	پشت
برآمد	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
احتمال	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

جدول

x_i	۰	۱
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

را قرار می‌دهیم. x_i ها مقادیر X و p_i ها احتمال‌های متناظر با آن‌ها هستند. توجه کردید که فضای نمونه‌ای، $S = \{\text{رو، پشت}\}$ ، جای خود را به مجموعه‌ی $\{0, 1\}$ داده است. Δ

مثال ۲: در انداختن یک تاس همگن مجموعه‌ی S دارای ۶ برآمد است. به هر برآمد S ،

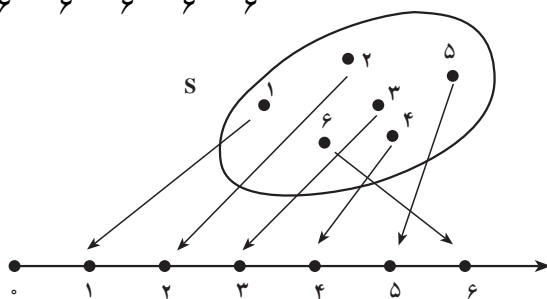
احتمال $\frac{1}{6}$ را نسبت می‌دهیم. اگر X تابعی باشد که بر هر برآمد S عددی صحیح از ۱ تا ۶ را که همان

اعداد حک شده بر وجوه تاس اند نسبت دهد، یعنی بر هر برآمد S نقطه‌ای از محور اعداد حقیقی را

نسبت دهیم، متغیر تصادفی X با مقادیر صحیح ۱ تا ۶ به وجود می‌آید که احتمال هر مقدار آن، همان

احتمال برآمد S متناظر با آن است (شکل ۲). پس جدول زیر برای ریزش تاس نتیجه می‌شود.

x_i	۱	۲	۳	۴	۵	۶
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



شکل ۲

Δ

مثال ۳: بر فضای نمونه‌ای S ، در مثال قبل، می‌توان متغیر تصادفی دیگری را تعریف کرد.

تابع X را تابعی بگیری که شماره‌های ۱، ۲، ۳ و ۴ را با نقطه‌ی به طول ۱ و شماره‌ی ۵ را با نقطه‌ی

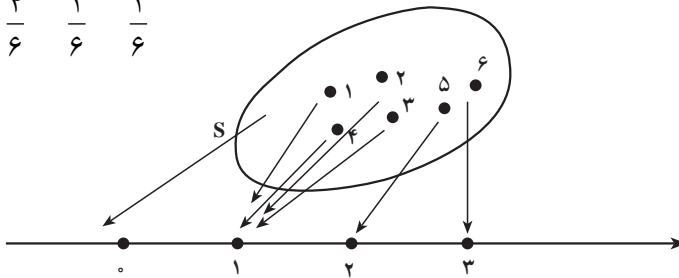
به طول ۲، و شماره‌ی ۶ را با نقطه‌ی به طول ۳ از محور اعداد حقیقی متناظر کند (مطابق شکل ۳)

در این صورت

$$\begin{cases} X (\text{شماره ی ۱}) = X (\text{شماره ی ۲}) = X (\text{شماره ی ۳}) = X (\text{شماره ی ۴}) = ۱ \\ X (\text{شماره ی ۵}) = ۲ \\ X (\text{شماره ی ۶}) = ۳ \end{cases}$$

بنابراین جدول احتمال زیر به دست می آید.

x_i	۱	۲	۳
p_i	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



شکل ۳

توجه کنید که رخداد $(X=1)$ یعنی رخداد پیشامد {شماره ی ۴, شماره ی ۳, شماره ی ۲, شماره ی ۱}، و می دانیم این پیشامد دارای احتمال $\frac{4}{6}$ است. در متغیرهای تصادفی این سه مثال، تعداد مقادیری که هر متغیر اختیار می کرد متناهی بود. متغیر تصادفی را در احتمال مقدماتی به صورت زیر تعریف می کنند:

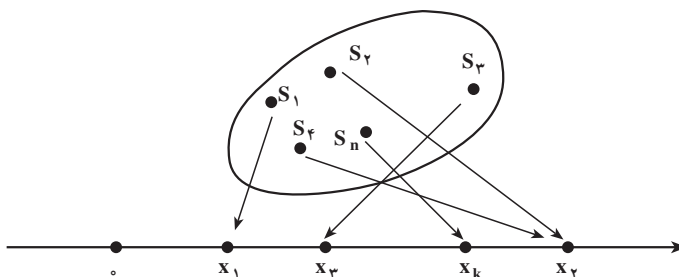
تعریف متغیر تصادفی^۱ تابعی از فضای نمونه ای S بر اعداد حقیقی است. این تابع را با X نشان می دهیم.

همان طور که در مثال های قبل دیدیم مجموعه ای اعداد حقیقی یک فضای نمونه ای جدید است. اگر حوزه ی مقادیر X متناهی یا شمارا نامتناهی باشد متغیر تصادفی X را گسسته می گویم. برای درک مطلب فرض کنید فضای نمونه ای $S = \{s_1, \dots, s_n\}$ را داریم و احتمال هایی که به ترتیب به برآمدهای S تخصیص داده ایم p_n, \dots, p_4, p_1 باشند. تابعی مانند X را در نظر می گیریم که حوزه ی تعریف آن S و حوزه ی مقادیر آن نقاطی از محور اعداد حقیقی است، به قسمی که هر برآمد یا هر پیشامد S ، با نقطه ای از محور مزبور متناظر باشد. در این صورت مطابق شکل ۴،

۱- در واقع متغیر تصادفی، نه متغیر است و نه تصادفی است، بلکه یک تابع روی مدل احتمال است.

$$X(s_1) = x_1, X(s_2) = x_2, X(s_3) = x_3, X(s_4) = x_4, \dots, X(s_n) = x_k$$

تابع X ، متغیر تصادفی است و x_1, x_2, \dots, x_k مقادیر آن هستند.



شکل ۴

۹-۲- تابع جرم احتمال

تابع جرم احتمال یک متغیر تصادفی گسسته X ، تابعی است که به هر یک از مقادیر X ، یعنی به هر یک از x_i ها $i = 1, 2, \dots, k$ احتمال $P(X = x_i) = p_i$ را نسبت می‌دهد. به صورت جدول، داریم:

x_i	x_1	x_2	\dots	x_k
p_i	p_1	p_2	\dots	p_k

بدیهی است که $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$. اگر نقاط به طول x_1, x_2, \dots, x_k را نقاطی مادی تلقی کنیم می‌توانیم p_1, p_2, \dots, p_k را به ترتیب جرم این نقاط بگیریم. به همین دلیل رابطه‌ی

$$P(X = x_i) = p_i \text{ و } i = 1, 2, \dots, n$$

را تابع جرم احتمال یا صرفاً تابع احتمال متغیر تصادفی X می‌نامند. جدول بالا نشان می‌دهد که مقدار کل احتمال ۱ به چه ترتیب بین مقادیر متغیر X توزیع شده است و آن را جدول توزیع احتمال می‌گویند. تعداد مقادیری که X پذیرفته است متناهی هست. گاهی تعداد مقادیری که X اختیار می‌کند نامتناهی ولی شماراست. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۴: جامعه‌ی کودکان زیر ده سال را در نظر بگیرید. هر کودک را برای این که ببینید به بیماری هموفیلی مبتلاست یا نه آزمایش می‌کنند. فرض کنید متغیر تصادفی را به صورت زیر تعریف کنیم:

تعداد کودکانی که باید آزمایش شوند تا اولین مورد هموفیلی ظاهر شود $X =$

بینیم که X چه مقادیری را انتخاب می کند. ممکن است اولین نفری که در جامعه ی مزبور آزمایش می شود به هموفیلی مبتلا باشد پس در این صورت $X=1$. ممکن است اولین نفر مبتلا نبوده، دومین نفر مبتلا باشد پس $X=2$ و نظایر آن. می توانید مجسم کنید که ممکن است یک میلیون کودک آزمایش شوند و کودکی مبتلا پیدا نشود یعنی X می تواند بیش از یک میلیون هم باشد. به همین ترتیب مقادیری که X می تواند اختیار کند شمارا بوده ولی نامتناهی است. در این حالت داریم

$$P(X = x_i) = p_i, \quad i = 1, 2, \dots$$

بدیهی است، $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$. یعنی باید احتمال ۱ را بین بی نهایت مقدار x_i توزیع کرد.

تذکر: هر تابع احتمال مربوط به متغیر تصادفی گسسته X دارای ویژگی های زیر است:

$$i = 1, 2, \dots, \quad 0 \leq P(X = x_i) \leq 1 \quad -1$$

$$\sum_i P(X = x_i) = 1 \quad -2$$

برعکس اگر تابعی به صورت $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \dots$ دارای دو ویژگی بالا باشد یک تابع احتمال است.

مثال ۵: سکه ای را متوالیاً می اندازیم. سکه منصف نیست. تعداد دفعاتی که سکه را می اندازیم تا برای اولین بار رو ظاهر شود متغیر تصادفی X می نامیم.

الف) X چه مقادیری اختیار می کند؟ ب) احتمال رخداد هر مقدار X چیست؟

الف) ممکن است در بار اول رو ظاهر شود پس $X=1$. اگر بار اول رو ظاهر نشود ولی بار دوم رو بیاید $X=2$. به همین ترتیب ممکن است تا پرتاب شماره ی ۳، ۴، ۵، ...، 1000 ، ... برای بار اول رو ظاهر نشود، پس X همه ی مقادیر صحیح طبیعی را اختیار می کند.

ب) فرض می کنیم در پرتاب i ام برای اولین بار رو بیاید می خواهیم احتمال این پیشامد یعنی $P(X=i)$ را به دست آوریم. اگر در یک بار انداختن سکه، H معرف برآمد رو و T معرف برآمد پشت باشد، پیشامد

$$\underbrace{TT \dots TH}_{(i-1) \text{ بار}}$$

بدین معناست که $i-1$ بار متوالیاً پشت بیاید و در i امین بار رو ظاهر شود. باید احتمال این پیشامد را که مستلزم رخداد i برآمد است به دست آوریم. سکه منصف نیست یعنی احتمال رو آمدن و احتمال پشت آمدن $\frac{1}{2}$ نیست. فرض می کنیم احتمال ظاهر شدن رو p و احتمال ظاهر شدن پشت q

باشد. واضح است که $p + q = 1$. هر انداختن سکه از انداختن‌های دیگر مستقل است. حال قبل از محاسبه‌ی احتمال موردنظر متذکر می‌شویم که اگر برای چند آزمایش تصادفی جدا از هم فضاهای نمونه‌ای و مدل‌های احتمال را بسازیم و اگر A_1 پیشامدی از فضای اول، A_2 پیشامدی از فضای دوم، ... باشد آن‌گاه شرط استقلال A_1, A_2, \dots از هم را به صورت زیر بیان می‌کنند.

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots$$

پس، اگر برای هر انداختن سکه یک فضای نمونه‌ای در نظر بگیریم، آن‌گاه مثلاً

$$P(TT) = q \cdot q = q^2$$

به همین ترتیب:

$$P(\underbrace{TT \dots T}_{(i-1) \text{ بار}}) = \underbrace{q \cdot q \dots q}_{(i-1) \text{ بار}} = q^{i-1}$$

و بالاخره:

$$P(\underbrace{TT \dots T}_{(i-1) \text{ بار}}H) = q^{i-1} \cdot p$$

پس:

$$P(X = i) = q^{i-1} \cdot p$$

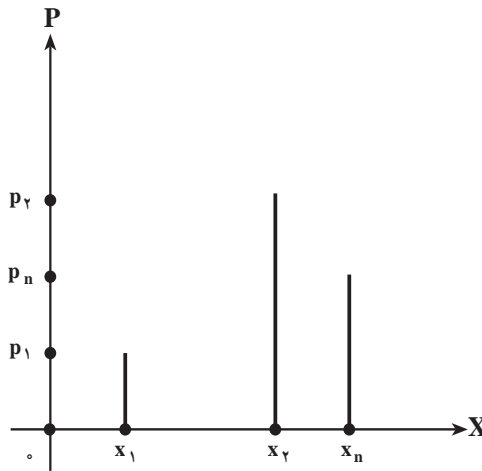
اگر i را برابر ۱، ۲، ... بگیریم احتمال‌های متناظر با مقادیر X به دست می‌آیند. جدول زیر را می‌توانیم بنویسیم

x_i	۱	۲	۳	...	i	...
p_i	p	qp	$q^2 p$...	$q^{i-1} p$...

رابطه‌ی $P(X = i) = q^{i-1} p$ ، $i = 1, 2, \dots$ تابع احتمال متغیر تصادفی X است. Δ شما می‌توانید به میل خود جدولی تشکیل دهید که سطر اول مقادیر متغیر تصادفی X باشد (هر مقداری که مایل هستید به آن نسبت دهید) و سطر دوم آن احتمال‌هایی دلخواه باشند، فقط لازم است که مجموع احتمال‌ها ۱ باشد. اگر هر مقداری را که متغیر تصادفی X اختیار می‌کند طول یک نقطه، و احتمال متناظر با آن را عرض آن نقطه نسبت به دو محور متعامد بگیریم نموداری برای احتمال X به دست می‌آوریم.

لازم نیست که واحد طول را روی دو محور یکی بگیریم. عرض‌های نقاط، مقادیر p_i ،

p_1, \dots, p_n و p_n هستند که همه بین صفر و یک اند. طول های نقاط، مقادیر x_1, x_2, \dots, x_n هستند (مطابق شکل ۵).



شکل ۵ - نمودار میله ای

در واقع می توان طول میله های بالای x_1, x_2, \dots, x_n را احتمال های متناظر با آن ها گرفت. این نمودار را نمودار میله ای می نامند. برای هر تابع احتمال گسسته می توانید چنین نموداری رسم کنید.

همان طور که گفتیم می توانیم جدول های توزیع احتمال دلخواه فراوانی بنویسیم اما آن جدول ها و مدل هایی مورد توجه اند که ارزش کاربردی داشته باشند. ذیلاً چند توزیع احتمال مهم را ذکر می کنیم.

۹-۳- توزیع برنولی

وقتی لامپی را امتحان می کنیم ممکن است سالم باشد یا معیوب. به طور کلی وقتی کالایی را در موقع خرید امتحان می کنیم یا سالم است و یا ناقص. وقتی از فردی در مورد اعتیادش به سیگار سؤال می کنیم یا سیگاری است یا نیست. از این پدیده های دو حالتی زیادند. اگر سالم بودن کالا یا سیگاری بودن فرد را با $X=1$ و ناقص بودن کالا و سیگاری نبودن فرد را با $X=0$ نشان دهیم متغیری تصادفی داریم که دو مقدار ۰ و ۱ را اختیار می کند. این آزمایش های دو حالتی را امتحان می نامیم و فضای نمونه ای هر امتحان دو برآمد دارد. ریختن سکه هم یک امتحان است.

اگر احتمال سالم بودن کالا یا سیگاری بودن فرد را p بگیریم احتمال ناقص بودن کالا و یا سیگاری نبودن فرد برابر q است. پس جدول توزیع احتمال زیر را برای هر امتحان داریم

$$\begin{array}{c|cc} x_i & 0 & 1 \\ \hline p_i & q & p \end{array} \quad p+q=1$$

مرسوم است که دو برآمد امتحان را پیروزی و شکست می نامند. برآمدی که مورد توجه است پیروزی نامیده می شود. مثلاً ممکن است لامپها را یک به یک برای یافتن لامپی معیوب امتحان کنیم، در این صورت یافتن لامپ معیوب یک پیروزی است. این جدول را می توان به صورت رابطه ی زیر هم خلاصه کرد.

$$P(X=i) = \begin{cases} p^i q^{1-i} & i=0,1 \\ 0 & \text{به ازای سایر مقادیر } i \end{cases}$$

به طور کلی اگر پیشامد A از یک فضای نمونه ای را در نظر بگیریم و رخداد A را پیروزی گرفته، احتمال پیروزی را p فرض کنیم، آن گاه متغیر تصادفی X که به صورت

$$\begin{cases} X=1 & \text{اگر } A \text{ رخ دهد} \\ X=0 & \text{اگر } A \text{ رخ ندهد} \end{cases}$$

تعریف می شود دارای تابع احتمال بالاست.

متغیر تصادفی X را که تنها دو مقدار 0 و 1 را می پذیرد متغیر برنولی و توزیع احتمال آن را توزیع برنولی می گویند.

۹-۴- تمرین ها

- ۱- پنج سکه ی منصف را باهم پرتاب می کنیم.
الف) فضای نمونه ای را بنویسید.
ب) یک متغیر تصادفی تعریف کنید که تعداد «شیرها» را نشان دهد.
پ) تابع احتمال متغیر تصادفی بند ب را بنویسید.
- ۲- دو تاس را باهم پرتاب می کنیم. متغیر تصادفی X را مجموع دو عدد ظاهر شده در روی دو تاس تعریف می کنیم.
الف) فضای نمونه ای این آزمایش را بنویسید.

(ب) تابع احتمال X را به دست آورید.

(پ) احتمال این که $X \leq 7$ باشد چه قدر است؟

۳- یک تاس پرتاب می کنیم. متغیر تصادفی X را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$X = \begin{cases} 1 & \text{اگر عدد فرد بیاید،} \\ 2 & \text{اگر عدد زوج بیاید،} \end{cases}$$

(الف) تابع احتمال X را بیابید.

(ب) آیا X یک متغیر تصادفی برنولی است؟

۴- سکه ای منصف را آن قدر پرتاب می کنیم تا «شیر» بیاید.

(الف) فضای نمونه ای این آزمایش را بنویسید.

(ب) یک متغیر تصادفی تعریف کنید که براساس آن بتوان احتمال شیر آمدن را محاسبه کرد.

(پ) احتمال این که اولین بار در آزمایش صدم شیر ظاهر شود چه قدر است؟

۵- توزیع احتمال متغیر تصادفی X به صورت زیر مشخص می شود.

$$P(X = i) = \frac{i}{i + 3} \quad i = 1, 2, 3$$

$$P(X = j) = \frac{1}{14} \quad j = 4, 5, 6$$

(الف) جدول توزیع X را بسازید.

(ب) نمودار توزیع را رسم کنید.

(پ) مقدار $P(X \geq 3)$ را حساب کنید.

۶- احتمال این که فردی مسن مبتلا به دیابت باشد $\frac{1}{4}$ است. در روستایی مردان مسن را

تحت آزمایش قرار می دهند. اگر متغیر تصادفی X را برابر با تعداد افرادی تعریف کنیم که به ترتیب

آزمایش می شوند تا اولین فرد دیابتی مشخص شود، تابع احتمال متغیر X را به دست آورید. احتمال

این که دومین نفر دیابتی باشد چه قدر است؟

۷- فضای نمونه ای یک آزمایش تصادفی ۳ برآمد دارد اگر احتمال های متناظر با ۳ برآمد به

ترتیب $\frac{1}{6}$ ، $\frac{1}{2}$ و $\frac{1}{6}$ باشد متغیری تصادفی روی این فضا تعریف کنید.

۸- نشان دهید که تابع زیر یک تابع احتمال است.

$$P(X = x) = \frac{1}{n^2} [2(n - x) + 1], \quad x = 1, 2, \dots, n$$

مراجع

1 - S. Ross, A First Course in Probability, Macmilan 1976.

- ۲- جان فروند و رانلد والپول، آمار ریاضی ترجمه‌ی علی عمیدی و محمدقاسم وحیدی اصل، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، چاپ سوم ۱۳۷۳.
- ۳- جواد بهبودیان، آمار و احتمال مقدماتی، انتشارات آستان قدس ۱۳۶۸.
- ۴- علی عمیدی، احتمال و کاربرد آن، انتشارات دانشگاه پیام نور ۱۳۷۴.

